arXiv:2305.01916v1 [math.SP] 3 May 2023

关于奇数分割衰减率的注记：Neumann–Poincar´e 算子谱渐近的一个应用 *

Yoshihisa Miyanishi†

2023年5月4日

摘要

我们提出一个定理，该定理目前由紧算子特征值的渐近行为唯一地证明。具体而言，我们考虑一个分割问题，并将 Neumann–Poincar´e 算子用作紧线性算子。随后，我们根据 Neumann–Poincar´e 算子的谱证明了一个定理。

尽管下面提出的问题看起来有些人为，但我们关于奇分拆的结果似乎只能通过 Neumann–Poincaré 算子的谱理论得到证明或解释：

考虑单位区间 $[0,1]$ 的奇数分割，也就是说，我们将单位区间 $[0,1]$ 分成 $2N+1$ 个互不相交的非零区间 $L_{N,\,k}$（$k=1,\,\ldots,\,2N+1$），且对于每个 $N\in\mathbb{N}_{\geq 0}$，相应长度之和 $\sum_{k=1}^{2N+1}|L_{N,\,k}|=1$。

因此，我们通过将单位区间作奇数分割，得到一个可数的实数集合 $P=\{|L_{N,k}|\,;\quad k=1,2,\ldots,\,2N+1,\quad N\in\mathbb{N}_{\geq 0}\}$。可以按降序枚举集合 P。于是，非递增数列可表示为

$$a_1=|L_{0,1}|=1>a_2\geq a_3\geq\ldots>0.$$

我们证明，对于任意 $C\geq\frac{1}{2}$，都存在单位区间的奇数分割，使得

$$a_j\sim Cj^{-1/2}\quad\text{as } j\to\infty.$$

这里的系数 $C=1/2$ 对应于最优衰减。

我们通过黎曼ζ函数的一个基本性质，以及某些称为 Neumann–Poincaré 算子的紧线性算子的特征值渐近，证明这一事实。

美国数学学会学科分类：97I30（主要），58C40、11M06（次要）
关键词　　s. 奇数分割，衰减率，黎曼ζ函数，Neumann–Poincar´e 算子，谱

1 引言与结果

尽管紧算子的谱理论已取得许多精深成果，但其在数论中的应用往往不如在某些特定领域中的应用广泛。

作为一个典型例子，著名的高斯圆问题旨在确定以 $N(r)$为圆心的圆内有多少个整数格点。

*本研究得到了日本学术振兴会（JSPS）科研费（KAKENHI）项目编号 JP21K13805 的资助。
†日本，松本市 390-8621，信州大学理学部数学科学科。电子邮箱：miyanishi@shinshu-u.ac.jp。

以原点为中心、半径为 $r > 0$ 的圆，其值应为 $N(r) = \pi r^2 + O(r^{1/2+\epsilon})$。随后，通过拉普拉斯算子的特征值渐近证明估计式$0 < \epsilon \leq 1/2$，而改进后的估计式 $0 < \epsilon \leq 27/208$ 则通过解析数论 [5, 6, 8]得到证明。因此，线性算子的谱理论带来了意想不到的成果。然而，当谱理论应用于不同领域的数学问题时，所得结果似乎往往弱于这些特定领域中的结果。

我们的目的是介绍一种应用，据谱理论所知，目前似乎只有一种已获证明的应用。这可以从分割的行为看出。更准确地说，我们将单位区间 $[0, 1]$ 分成 $2N + 1$ 个长度非零的子区间，随后似乎会出现更细的区间。我们称这种分割为“奇数分割”。将奇数分割记为 $L_{N,\ k}(k = 1\ldots, 2N + 1)$，对每个 $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，都可以按递减顺序列出可数无穷多个实数 $\{|L_{N,k}|;\ k = 1, 2, \ldots, 2N+1,\ N \in \mathbb{N}_{\geq 0}\}$。这里 $|\cdot|$ 表示勒贝格测度（长度）。因此，这一过程使我们能够得到如下非递增数列：

$$1 = |L_{0,1}| = a_1 > a_2 \geq a_3 \geq \ldots > 0. \tag{1.1}$$

例如，将单位区间等分划分后可得到如下图示：第一次划分得到 3 个区间，其长度为 $1/3$。同样，也会得到一个非递增数列。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1/3 & 1/3 & 1/3 & & & \\ & & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & & \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

在此图中，每一列都表示单位区间的一个分割，也就是说，每列之和等于一。因此，我们得到按降序排列的如下序列：

$$1, 1/3, 1/3, 1/3, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, \ldots \tag{1.2}$$

经过第 N 次操作后，分割图总是由 N^2 个数构成。从 (1.2) 中很容易看出，对于较大的 j，第 $j = N^2$ 个数 a_j为 $1/(2N - 1) \sim \frac{1}{2}j^{-1/2}$。我们强烈预期，这类等分划分能够达到最优衰减率。

事实上，我们得到了理想的衰减率：

定理 1.1（主定理）。对于所有 $C \geq \frac{1}{2}$，都存在单位区间的奇数分割，使得

$$a_j \sim Cj^{-1/2} \quad as\ j \to \infty.$$

这里强调，$C = \frac{1}{2}$ 是最小系数，即对于任意奇数分割，$\liminf_{j\to\infty} j^{1/2}a_j \geq 1/2$。

为证明这一点，我们回顾一下在此处很有用的无条件和：

命题 1.2. 对于奇数分割，我们将无穷级数 $\tau(p)$ 定义为

$$\tau(p) := \sum_{\substack{N\in\mathbb{N}_{\geq 0}\\ k=1,2,\ldots,2N+1}} |L_{N,k}|^p \quad (p > 2). \tag{1.3}$$

于是 $\tau(p) \geq (1 - 2^{1-p})\zeta(p - 1)\ (p > 2)$，其中 $\zeta(p)$ 表示黎曼ζ函数。等号仅在等分划分的情况下成立。

我们指出，即使在和式 (1.3) 发散至 ∞ 的情况下，命题 1.2 仍然成立。

命题 1.2 的证明。由于和 (1.3) 仅由正值组成，因此该和是无条件的，且不受重排影响。

由 H¨older 不等式（例如 [13]）可得，

$$\begin{aligned}1 &= |L_{N,1}| + |L_{N,2}| + \cdots + |L_{N,2N+1}| \\ &\le (1+1+\cdots+1)^{1/q} \cdot (|L_{N,1}|^p + |L_{N,2}|^p + \cdots + |L_{N,2N+1}|^p)^{1/p} \\ &\le (2N+1)^{\frac{p-1}{p}} \cdot (|L_{N,1}|^p + |L_{N,2}|^p + \cdots + |L_{N,2N+1}|^p)^{1/p}\end{aligned}$$

其中 p、$q \in [1,\infty]$ 满足 $1/p + 1/q = 1$。因此

$$|L_{N,1}|^p + |L_{N,2}|^p + \cdots + |L_{N,2N+1}|^p \ge (2N+1)^{(1-p)} \quad \text{for } p \ge 1 \tag{1.4}$$

因此

$$\tau(p) \ge \sum_{N \in \mathbb{N}_{\ge 0}} (2N+1)^{(1-p)} = (1-2^{1-p})\zeta(p-1) \quad \text{for } p > 2. \tag{1.5}$$

该等式仅在等分划分的情况下成立。
（即对所有 $N \in \mathbb{N}$, $|L_{N,1}| = |L_{N,2}| = \cdots = |L_{N,2N+1}| = 1/(2N+1)$）。 □

定理 1.1 的证明。首先，我们证明1 2 是最小系数。

假设 $C < \frac{1}{2}$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \preceq \int_1^{\infty} C^{2p} j^{-p/2}\, dj = \frac{2C^{2p}}{p-2} \quad \text{for } p > 2. \tag{1.6}$$

我们注意到，对于较小的 $\varepsilon > 0$, $2C^{2p} < 1/2$ $p = 2+\varepsilon$。

另一方面，由命题 1.2 可知， p 次幂等分划分之和为

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p = \tau(p) \ge (1-2^{1-p})\zeta(p-1) \quad \text{for } p > 2. \tag{1.7}$$

接着回顾黎曼ζ函数 $\zeta(x)$ 的性质（例如参见 [3]）：

$$\lim_{p \to 2+0} \left(\zeta(p-1) - \frac{1}{p-2} \right) = \gamma \tag{1.8}$$

其中 γ 是欧拉常数。因此我们有

$$\lim_{p \to 2+0} \left(\left(1-2^{1-p}\right) \zeta(p-1) - \frac{1}{2(p-2)} \right) = C \tag{1.9}$$

对于某个常数 $C(= \frac{1}{2}(\log\, 2 + \gamma))$。因此，由 (1.7) 可得

$$\lim_{p \to 2+0} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p - \frac{1}{2(p-1)} \right) \ge \lim_{p \to 2+0} \left(\left(1-2^{1-p}\right) \zeta(p-1) - \frac{1}{2(p-1)} \right) = C$$

而根据（1.6）

$$\lim_{p\to 2+0}\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^p-\frac{1}{2(p-1)}=-\infty.$$

这正是所需的矛盾。

为了证明存在满足 $a_j\sim Cj^{-1/2}$ 且适用于 $C\geq 1/2$的分割，我们使用 Neumann–Poincar´e（NP）算子的谱性质。该算子又称边界积分算子，定义在 $\mathbb{R}^3$ 中某个区域的边界上（详情参见例如 [2] 及其中的参考文献）。若 $\partial\Omega$ 属于 $C^{1,\,\alpha}$，则定义在 $L^2(\partial\Omega)$ 上的 NP 算子是紧算子；也就是说，相应的非零谱仅由特征值构成。我们强调，长旋转椭球上的相应特征值 $\partial\Omega$ 满足区间 $[0,1/2]$ 的奇数分割的所有长度性质（见 [1, 9, 12]）：

$$\begin{array}{ccccc} & & M_{1,1} & & \\ & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

这里每一列都表示 $[0,1/2]$ 的一个分割，且每列都由奇数个非零子区间组成。对于每个 $N\in\mathbb{N}_{\geq 0}$，其和为 $\sum_{k=1}^{2N+1}|M_{N,\,k}|=1/2$ 。这些惊人的事实并非初等结论，但此处给出了相关结果。此外，最近已有证明 [10, 11] NP 特征值满足所谓的 Weyl 定律，即：

$$a_j\sim\widetilde{C}j^{-1/2}$$

$\sim$ $\widetilde{}$对于 $C\geq 1/4$。这里的系数 C 通过边界曲面 $\partial\Omega$ 的 Willmore 能量$W(\partial\Omega)$ 和欧拉示性数 $\chi(\partial\Omega)$ 进行了显式计算。因此，系数 $\widetilde{}$ C 可以取大于 $1/4$ 的任意实数（详见 [10, 11] ）。由此可知，存在半区间 $[0,1/2]$ 的奇数分割，使得所枚举的序列满足

$$a_j\sim\widetilde{C}j^{-1/2}$$

$\widetilde{}$对于所有 $C\geq 1/4$。当我们考虑区间 $[0,1]$ 而不是半区间 $[0,1/2]$时，

$\sim$ 会自动 $C=2C\geq 1/2$。□

2 讨论

我们证明了单位区间上的奇数分割的衰减率。定理 1.1 是借助黎曼ζ函数的一项基本性质以及 Neumann–Poincar´e 算子的谱理论证明的。如果允许分割包含长度为零的集合，则可以用初等方法证明这一事实。能否对定理 1.1 本身给出一个初等证明？据我所知，除了谱理论之外，我们尚不知道其他证明方法。

多年来，人们从不同的角度研究了单位区间的分割（例如，参见 [4, 7]）。对于更一般的分割，能否证明在适当的阶数下存在衰减序列？

例如，法雷序列的差分序列是单位区间的分割 [7]:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1/2 & & 1/2 & & & & \\
 & & & 1/3 & & 1/6 & & 1/3 & & & \\
 & & 1/4 & & 1/12 & & 1/6 & & 1/12 & & 1/4 \\
 & 1/5 & & 1/20 & & 1/12 & & 1/10 & & 1/5 & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

因此，将这个按递减顺序排列的序列 $\{a_j\}$ 记为

$$1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/4, 1/4, 1/5, 1/5, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, \ldots \tag{2.1}$$

其相应的行为似乎是 $a_j \sim Cj^{-1/3}$，因为已知第 N 列渐近地由 N^2 个数构成。递减顺序 $j^{-1/3}$ 取决于分割的数量。对于单位区间的一般分割，能否证明与定理 1.1 类似的结果? 最小衰减率很容易猜到，应由等分划分给出。

参考文献

[1] J. F. Ahner 和 R. F. Arenstorf，关于静电积分算子的特征值，《Journal of Mathematical Analysis and Applications》117 (1986)，187–197。[2] K. Ando、H. Kang、M. Putinar 和 Y. Miyanishi，Neumann–Poincaré 算子的谱分析，《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》66 (3-4) (2021)，545–575。[3] I. Aleksandar，《黎曼ζ函数：理论与应用》，Dover Publications, Inc.，纽约，1985。[4] Drobot, Vladimir，《区间的均匀分割》，《美国数学会汇刊》268(1) (1981)，151–160。[5] H. Duistermaat 和 V. Guillemin，正椭圆算子的谱与周期双特征线，《数学发明》29(1) (1975)，37–79。[6] G. H. Hardy，关于将一个数表示为两个平方数之和，《数学季刊》46 (1915)，263–283。[7] G. H. Hardy 和 E. M. Wright，《数论导论》，Clarendon Press，牛津，1960。[8] M. N. Huxley，整数点、指数和与黎曼ζ函数，《千年数论 II》（伊利诺伊州厄巴纳，2000），A K Peters，马萨诸塞州纳蒂克，2002，275–290。[9] E. Martensen，静电积分算子的一种谱性质，《Journal of Mathematical Analysis and Applications》238 (1999)，551–557。

[10] Y. Miyanishi，三维 Neumann–Poincaré 算子特征值的 Weyl 定律：Willmore 能量与曲面几何，《Advances in Mathematics》406 (2022)，108547。[11] Y. Miyanishi 和 G. Rozenblum，三维 Neumann–Poincaré 算子的特征值：Weyl 定律与几何，《St. Petersburg Mathematical Journal》31 (2020)，371-386[12] S. Ritter，静电积分算子特征值的和性质，《Journal of Mathematical Analysis and Applications》，196 (1995)，120–134。[13] K. Yosida，《Functional Analysis》，第4版，Springer，柏林，1974年。