arXiv:2305.01919v1 [math.CO] 3 May 2023

极值 L Q 元向量的图论问题

´ ´ ´ ´BALAZS PATKOS、ZSOLT TUZA 和
MATE VIZER

ABSTRACT. 一个 q图 H 是指由定义在$\{0,1,\dots,q\}$ 上的、长度为 n 的向量组成的集合，其中每个向量（称为 q边）恰好有两个非零元素。 q边 x 的支撑集是非零元素对应的两个指标组成的数对 $S_{\mathbf{x}}$。如果 H 是普通图 F的一个 s副本，则称之为 s副本，其中 $|H| = |E(F)|$, F 与边集为 $\{S_{\mathbf{x}}$ 的图同构：$\mathbf{x} \in H\}$，并且当 $v \in e, e' \in E(F)$时，与 v对应的指标在分别对应于 e 和 e' 的 q边中的元素之和至少为 s。例如，(1, 3, 0, 0, 0)、(0, 1, 0, 0, 3) 和 (3, 0, 0, 0, 1) 这三个 q边构成一个4三角形。

Tur´an 数 ex(n, F, q, s) 是一个 q 阶图 H 在不包含 F 的任何 s 个拷贝的条件下，所能具有的 q 条边的最大数量。本文确定了许多图 F 的 ex$(n, F, q, q+1)$ 的渐近行为。

1. INTRODUCTION

极值图论的主要问题是确定 Tur´an 数 ex(n, F)，即在 H 不包含 F 作为子图的条件下，一个具有 n 个顶点的图 H 所能拥有的最大边数。对于禁止一个子图族 $\mathcal{F}$ 的类似参数，记为 ex$(n, \mathcal{F})$。当 F 的色数至少为 3 时，ex(n, F) 的渐近行为由 Erd˝os–Stone–Simonovits 定理 [3, 2] 给出。对于许多二部图 F，甚至连其数量级都尚不清楚；相关综述参见 [4]。

定理 1.1（Erd˝os–Stone–Simonovits, [2, 3]）。对于一个图族 $\mathcal{F}$，令 $\chi(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$ 的所有成员 F 中 $\chi(F)$ 的最小值。那么 ex$(n, \mathcal{F}) = (1 - \frac{1}{\chi(\mathcal{F})-1} - o(1))\binom{n}{2}$。

本文通过图的关联矩阵，对这一问题进行了推广。图 G 的关联矩阵是一个 $|E(G)| \times |V(G)|$ 矩阵 M，其行以边为索引，列以 G 的顶点为索引；对于 $v \in V(G)$ 和 $e \in E(G)$，对应的元素在 $v \in e$ 时为 $M[e, v] = 1$，在 $v \notin e$ 时为 $M[e, v] = 0$。一个 0-1 矩阵是简单图的关联矩阵，当且仅当其各列两两不同，且每列恰好包含两个 1 元素。

我们希望通过允许来自 $\{0, 1, \dots, q\}$ 的条目，使该设置更具一般性，但每一列仍应恰好有两个非零条目。为此，我们首先定义这一推广

Patk´os 的研究部分得到了 NKFIH 资助项目 SNN 129364 和 FK 132060 的支持。Tuza 的研究部分得到了 NKFIH 资助项目 SNN 129364 的支持。Vizer 的研究部分得到了 NKFIH 资助项目 SNN 129364、FK 132060、KH130371、J´anos´Bolyai 研究奖学金以及新国家卓越计划（资助编号：UNKP-21- 5-BME-361）的支持。

一个由 n 个顶点构成的边：它是一个向量 $\mathbf{x} \in \{0,1,\ldots,q\}^n$，我们称之为 q-边，其 i个坐标记作 x_i。$\mathbf{x} \in \{0,1,\ldots,q\}^n$的支撑集为 $S_{\mathbf{x}} := \{i\colon 1 \le i \le n,\ x_i \neq 0\}$。我们引入记号 $Q(n,r) := \{\mathbf{x} \in \{0,1,\ldots,q\}^n\colon |S_{\mathbf{x}}| = r\}$。于是，一个由 n 个顶点构成的q-图是 H 的任意子集，其中 $Q(n,2)$。对于一个 q-图 H，我们用 S_H 表示$\{S_{\mathbf{x}}\colon \mathbf{x} \in H\}$。在 $q=2$、3 的情形下，我们分别用 2$(n,2)$、3$(n,2)$ 表示 $Q(n,2)$。

我们仍需要定义两个 q-边何时在某个顶点相交，或者更一般地，何时一个 q-图 H 包含一个普通图 F。这大概有几种定义方式，我们采用以下方法：在近期的一篇推广集合交集的稿件 [8],中，对于整数 $s \ge 1$，我们将两个 q-边 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 的 s-和交定义为 $\mathbf{x}\cap_s\mathbf{y} = \{i\colon 1 \le i \le n$满足 $x_i + y_i \ge s\}$。（当 $q=1$、$s=2$ 时，这是通过特征向量定义的普通集合交集。）作为类似的定义，我们称支撑集大小为 2 的 q-边构成图 F 的一个 s-副本，若它们按照 F 进行 s-和相交。形式上，我们引入以下定义。

定义 1.2. 如果 $F = (V(F), E(F))$ 是一个没有孤立顶点的普通图，并且 $H \subseteq Q(n,2)$ 是一个 q-图，那么我们称 H 是 F 的一个 s-副本，如果图 (V,E)（其中 $V = \cup_{\mathbf{x}\in H} S_{\mathbf{x}}$, $E = S_H$）与 F 同构；并且如果 $\iota\colon F \to (V,E)$ 是一个同构 [1],，那么对于每个 e，$e' \in E(F)$ 和 $v \in e \cap e'$，我们有 $\iota(e)_{\iota(v)} + \iota(e')_{\iota(v)} \ge s$。

对于含有孤立顶点的图 F，我们称 $H \subseteq Q(n,2)$ 为 F 的一个 s-副本，当且仅当 $n \ge |V(F)|$，且 H 是 $F[U]$的一个 s-副本，其中 U 是 F 的非孤立顶点集。

例如，边 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{z} \in 3(n,2)$ 与 $x_1 = y_2 = z_3 = 1$ 和 $x_2 = y_3 = z_1 = 3$ 构成一个三角形的 4-重副本，但 $\mathbf{x}'$、$\mathbf{y}'$、$\mathbf{z}' \in 3(n,2)$ 与 $x'_2 = y'_2 = z'_3 = 1$ 和 $x'_1 = y'_3 = z'_1 = 3$ 则不构成，因为 $x'_2 + y'_2 = 2 < 4$。

定义 1.3. 对于一个（普通）图 F和 $n, q, s \ge 1$，我们引入

$$\mathrm{ex}(n,F,q,s) := \max\{|H| : H \subset Q(n,2), H \text{ does not contain an } s\text{-copy of } F\}.$$

本文中我们只考虑情形 $s = q+1$，为简便起见，记 $\mathrm{ex}(n,F,q)$ 为 $\mathrm{ex}(n,F,q,q+1)$。

在开始思考如何确定 $\mathrm{ex}(n,F,q)$ 时，人们很自然会想到几种做法。

一种平凡的构造是考虑一个有 n 个顶点、含 $\mathrm{ex}(n,F)$ 条边的普通 F-自由图 G，并定义 $H_{G,\,q} := \{\mathbf{x} \in Q(n,2)\colon S_{\mathbf{x}} \in E(G)\}$。显然，$H_{G,\,q}$ 不包含任何 $(q+1)$-拷贝的 F，且 $|H_{G,\,q}| = q^2 \cdot \mathrm{ex}(n,F)$。这表明，对于任意图 F 和 $q \ge 1$，都有 $\mathrm{ex}(n,F,q) \ge q^2 \cdot \mathrm{ex}(n,F)$，但事实证明，这个不等式几乎从不取等。平凡的例外是匹配，因为对匹配而言，“和交条件”是空泛成立的。

正如我们将要展示的，可以通过一个简单的构造和一个简单的观察，根据 $\mathrm{ex}(n,F,q)$ 的渐近行为对图进行划分。

[1]如果满足以下条件，我们称 $\iota\colon F \to (V,E)$ 为一个同构：$\iota\colon V(F) \to V$ 是一个双射，它通过$\iota(e) := \{\iota(v)\colon v \in e\}$ 为 $e \in E(F)$ 导出 $\iota\colon E(F) \to E$。

我们的第一个结果表明，对于F为森林的情形，构造$U_{q,\ n}$将 ex(n, F, q) 的渐近行为与所有含圈图的 ex(n, F, q) 的值区分开来。我们将$U_{q,\ n}$ 的定义留到下一节。

定理 1.4。对于任意树 T 和整数 $q \geq 2$，存在一个正常数 $c = c_{T,\ q}$使得

$$\mathrm{ex}(n, T, q) \leq |U_{q,n}| - c\binom{n}{2} = \left(\lfloor \frac{q^2}{2} \rfloor - c\right)\binom{n}{2}.$$

我们的下一个定理表明，ex$(n, T, 2)$ 的渐近行为（一般而言，ex(n, T, q) 的渐近行为可能也是如此）取决于树的半径 [2] 。令 $t_{n,\ r}$ 表示具有 r 个部分的 Tur´án 图 [3] 在 n 个顶点上的边数；令 $t'_{n,\ r}$ 表示 n 个顶点上的完全 r 部图的边数，其中一部分的大小为 $\lfloor \frac{n}{2r-1} \rfloor$，其余部分的大小彼此相差至多一（因此其大小为 $(1 + o(1))\frac{2n}{2r-1}$）。

定理 1.5。设 T 是一棵半径为 r 的树。
(1) 如果 T 的直径为 $2r$，那么 ex$(n, T, 2) = (1 + o(1))(\binom{n}{2} + t_{n,\ r})$。(2) 如果 T 的直径为 $2r - 1$，那么 ex$(n, T, 2) = (1 + o(1))(\binom{n}{2} + t'_{n,\ r} - \binom{\lfloor \frac{n}{2r-1} \rfloor}{2})$。

我们的下一个结果指出，对于所有连通分量至多含有一个圈的二分图，构造 $U_{q,\ n}$ 在渐近意义下是最优的。

定理 1.6. 设 F 是一个二部图，其所有连通分量均为单圈图[4] 或树，且 F 至少含有一个圈。那么

$$\mathrm{ex}(n, F, q) = (\lfloor \frac{q^2}{2} \rfloor + o(1))\binom{n}{2} = |U_{q,n}| + o(n^2).$$

对于含有奇圈的图 F，我们有 ex$(n, F, q) \geq q^2 \cdot$ ex$(n, F) \geq (\frac{q^2}{2} + o(1))\binom{n}{2}$。若 q 为奇数，则其系数严格大于 $U_{q,\ n}$的大小系数；若 q 为偶数，则这两个渐近行为相同。我们证明，对于三角形，这个平凡下界在 $q = 2$时是紧的。

定理 1.7. 对于 $n \geq 2$，我们有

$$\mathrm{ex}(n, C_3, 2) = 4 \cdot \mathrm{ex}(n, C_3) = 4 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

每当禁用图 F 包含一个具有多个圈的连通分量，或者等价地，包含比顶点更多的边时，ex(n, F, q) 的渐近行为就会发生显著变化。这可以通过一个简单的观察得出。我们需要以下定义：对于任意 $H \subseteq Q(n,$ 2)，我们将由 q-边 $\mathbf{x} \in H$ 构成的 q-图记为 H^L，其中对于所有 $i \in S_{\mathbf{x}}$，均满足 $x_i \geq \frac{q+1}{2}$。

[2]连通图 G 的半径定义为 $\min_{v \in V(G)}\{\max_{u \in V(G)} distance(u, v)\}$。[3]图 $T(n, r)$ 是一个 n顶点完全 r部图，其顶点划分尽可能均衡。[4]单圈图是恰好含有一个圈的连通图。

命题 1.8. 假设 F 包含一个连通分量 C，使得 $|V(C)| < |E(C)|$。那么，F 的一个 $(q+1)$-副本必定包含一个 $\mathbf{x} \in Q(n,2)^L$。特别地，$Q(n,2) \setminus Q(n,2)^L$ 不包含 G 的一个 $(q+1)$-副本，因此 $\mathrm{ex}(n, F, q) \geq (q^2 - (q - \lceil \frac{q+1}{2} \rceil + 1)^2)\binom{n}{2}$。

使用 H^L 得到的一个平凡上界如下。

命题 1.9. 对于任意图 F，如果 $H \subseteq Q(n,2)$ 不包含 F 的一个 $(q+1)$-副本，那么

$$|H| \leq (q^2 - (q - \lceil \frac{q+1}{2} \rceil + 1)^2)\binom{n}{2} + (q - \lceil \frac{q+1}{2} \rceil + 1)^2 \,\mathrm{ex}(n, F).$$

证明。这可直接由简单的观察得出：S_{H^L} 不含 F。 □

命题 1.9 和定理 1.1 给出了一个涉及 $\chi(F)$ 的一般上界。在下一节中，我们将引入图 F 的鲁棒色数 $\chi_1(F)$，并利用这一参数得到下界。当 $\chi_1(F) = \chi(F)$ 时，我们将确定 $ex(n, F, q)$ 的渐近行为。我们将证明，从某种意义上说，几乎所有的图都具有这一性质。

令 $K(m, r, p)$ 表示所有带标号的 r 部图所构成的概率空间，其中每个部集的大小为 m，不同部中的任意两个顶点以概率 p 相连，且彼此独立。

定理 1.10。若 $p = \omega(m^{-1/\binom{r}{2}})$，则当 m 趋于无穷大时，$\chi_1(K(m, r, p)) = r = \chi(K(m, r, p))$ 以趋于 1 的概率成立。

人们或许会想，在涉及鲁棒色数和普通色数的两个表达式中，是否总有一个能够给出 $\mathrm{ex}(n, F, q)$ 的渐近行为。通过考察完全三部图，我们证明事实并非如此。我们确定 $\mathrm{ex}(n, K_{r,s,t}, 2)$ 的渐近行为，并将在下一节中将下面的定理与 $\chi_1(K_{r,s,t})$ 和 $\chi(K_{r,s,t})$ 进行比较。注意，$r = s = t = 1$ 的情形已包含在定理 1.7 中。

定理 1.11. 对于满足 $t \geq 2$ 的整数 $1 \leq r \leq s \leq t$，我们有如下结论：

(1) 若 $r = 1$ 或 $s \leq 2$，则 $\mathrm{ex}(n, K_{r,s,t}, 2) = (3 + o(1))\binom{n}{2}$，

(2) 若 $r = 2$ 且 $s \geq 3$，则 $\mathrm{ex}(n, K_{2,s,t}, 2) = (\frac{13}{4} + o(1))\binom{n}{2}$，

(3) 若 $r \geq 3$，则 $\mathrm{ex}(n, K_{r,s,t}, 2) = (\frac{7}{2} + o(1))\binom{n}{2}$。

为便于后文参考，我们陈述 K˝ov´ari、S´os 和 Tur´an 的一个经典结果，该结果将在我们的证明中经常使用。

定理 1.12（K˝ov´ari、S´os、Tur´an [7]）。对于任意固定的 $s \leq t$，我们有 $\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) = O(n^{2-1/s})$.

记号。在许多证明中，对于一个 q-图 $H \subseteq Q(n,2)$，我们将考虑由成对顶点 (ij) 构成的图，这些顶点是 H 中具有指定项的某些边的支撑集。形式上，对于 $H \subseteq Q(n,2)$ 和 $(a, b) \in [q]^2$，令 $\overrightarrow{H}_{a,b}$ 为由所有满足下述条件的边 (ij) 构成的有向图：q-边 $\mathbf{x} \in Q(n,2)$，其中 $S_{\mathbf{x}} = \{i, j\}$ 且 $x_i = a$，$x_j = b$，属于 H。注意，$\overrightarrow{H}_{a,b}$ 可能包含长度为 2 的有向圈。此外，$|H| = \sum_{1 \leq a < b \leq q} |\overrightarrow{H}_{a,b}| + \sum_{1 \leq a \leq q} |H_{a,a}|$ 将

通常用于获得 $|H|$ 的界。有时，我们会考虑分别支撑两对指定元素的支撑集。形式上，我们将 $\overrightarrow{H}_{(a,b),(c,d)}$ 定义为 $\overrightarrow{H}_{a,b} \cap \overrightarrow{H}_{c,d}$。对 (c,d) 始终为 (b,a) 或 $(\overline{a},\overline{b})$，其中 $\overline{\alpha} := q+1-\alpha$ 对任意 $1 \le \alpha \le q$ 均成立。

最后，令 $H_{a,\ b}$ 和 $H_{(a,b),\ (c,d)}$ 表示由以下对象得到的简单图 $\overrightarrow{H}_{a,\ b}$ 和 $\overrightarrow{H}_{(a,b),\ (c,d)}$，即去除定向和重边。因此，$\{i,j\} \in H_{(a,b),\ (c,d)}$ 当且仅当以下两种情况之一成立：$\mathbf{x}、\mathbf{y} \in H$ 满足 $x_i = a、\ y_i = c、\ x_j = b、\ y_j = d$，或 $\mathbf{x}'、\mathbf{y}' \in H$ 满足 $x'_i = b、\ y'_i = d、\ x'_j = a、\ y'_j = c$。

2. 构造，初步结果

我们从万能树 $U_{q,\ n}$ 的构造开始。该构造与如下情形非常相似：它表明，对于有向图而言，只有当禁子图是有向无环图时，极值问题才有意义：如果顶点集为 $[n] = \{1,2,\dots,n\}$，并且将完全图中 $[n]$ 上的每条边 (uv) 都定向为指向 v，当且仅当 $u < v$，那么这个有向完全图不包含任何有向圈。

定义 2.1. 对于 $n, q \ge 1$，我们定义通用的 q-树 $U_{q,n} = U^{<} \cup \bigcup_{1 \le i < j \le n} U^{i}{}_{,j,=}$，其中

$$U^{<} = \{\mathbf{x} \in Q(n,2) : \sum_i x_i < q+1\},\ and$$

$$U^{i,j,=} = \{\mathbf{x} \in Q(n,2) : S_{\mathbf{x}} = \{i,j\},\ x_i < x_j,\ x_i + x_j = q+1\}.$$

L引理 2.2. 通用的 q-树不包含任何圈的 $(q+1)$-副本。

证明。如果 C 是一个圈的 $(q+1)$-副本，那么对于任意 $\mathbf{x} \in C$，我们必须有 $\sum_{h=1}^{n} x_h = q+1$，因为对于该圈的任意顶点 v，两个相邻的 q-边 $\mathbf{x}、\mathbf{y}$ 必须满足 $x_v + y_v \ge q+1$，因此 $\sum_{\mathbf{x} \in C} \sum_{h=1}^{n} x_h = \sum_{v \in S_C} \sum_{\mathbf{x} \in C} x_v \ge |S_C|(q+1) = |C|(q+1)$。

但如果 C 仅由满足 $\sum_h x_h = q+1$ 的 q-边 $\mathbf{x}$ 构成，那么若 v 表示 S_C 中最小的顶点，则对于两条相邻的 q-边 $\mathbf{x}、\mathbf{y}$，$\in C$ 我们应有 $x_v, y_v < \frac{q+1}{2}$，这与 $x_v + y_v \ge q+1$ 矛盾。□

我们继续讨论命题 1.8 中的简单下界。

命题 1.8 的证明。不失一般性，我们可以假设 F 是连通的。对于任意 i 和一个 q- F 的副本 F_q，至多存在一个满足 $x_i < \frac{q+1}{2}$ 的 $\mathbf{x} \in F_q$。因此，至少有一个非零坐标小于 $\frac{q+1}{2}$ 的 $\mathbf{x} \in F_q$ 的总数至多为 $|V(F)| < |E(F)|$，所以至少有一个 $\mathbf{x} \in F_q$ 的两个非零坐标都不小于 $\frac{q+1}{2}$。□

通过以下定义，可以加强命题 1.8。

定义 2.3. 若映射 $f\colon V(F) \to E(F)$ 满足对每个顶点 $v \in V(F)$ 都有 $v \in f(v)$，则称其为图 F 的 1-选择。相对于 1-选择 f， F 的 1-删除 F_f 是一个图，其 $V(F_f) = V(F)$ 且 $E(F_f) = E(F) \setminus f[V(F)]$。令 $\mathcal{F}_F$ 表示 F 的所有 1-删除图的集合。1-鲁棒色数 $\chi_1(F)$ 是 $\min\{\chi(F_f) : F_f \in \mathcal{F}_F\}$。

命题 2.4. 对于任意图 F，如果一个 q-图 H 包含 F 的一个 $(q+1)$-副本，那么对于 F 的某个 1- 选择 f， S_{H^L} 必须包含 F_f 的一个副本。

证明。若 H 包含一个支撑集为 V 的 F 的 $(q+1)$-副本 H'，则对于任意 $v \in V$，至多存在一条边 $e \in E(F)$ 满足 $v \in e$，使得在 H' 中扮演 e 角色的 q-边 x 满足 $x_v < \frac{q+1}{2}$。（否则，这两条 q-边不会在 v 处相交。）因此，我们可以通过令 $f(v)$ 为这条边，来定义 F 的 1-选择 f。移除相应的 q-边后，会在 H^L 中留下一个 F_f 的 $(q+1)$-副本。□

引理 2。 5. 对于任意包含一个满足 $|V(C)| < |E(C)|$ 的连通分量 C 的图 F，我们有 e

$$\mathrm{ex}(n, F, q) \geq \left[q^2 - (q - \lceil \frac{q+1}{2} \rceil + 1)^2 \frac{1}{\chi_1(F) - 1} + o(1)\right] \binom{n}{2}.$$

特别地，若 $\chi(F) = \chi_1(F)$，则

$$\mathrm{ex}(n, F, q) = \left[q^2 - (q - \lceil \frac{q+1}{2} \rceil + 1)^2 \frac{1}{\chi(F) - 1} + o(1)\right] \binom{n}{2}$$

成立。

证明。为说明下界，考虑通过设置 $S_{H^L} = F$ 得到的 q-图 H，其中 G 是大小为 $\mathrm{ex}(n, \mathcal{F}_F)$ 的 $\mathcal{F}_F$- 自由图， $H^L = \{\mathrm{x} : \mathrm{x} \in Q(n, 2)^L,\ S_{\mathrm{x}} \in E(G)\}$，并且 $H := (Q(n, 2) \setminus Q(n, 2)^L) \cup H^L$。根据命题 2.4，这个 H 不可能包含 F 的一个 $(q+1)$-副本。根据定理 1.1 可得 H 的大小估计。

引理第二部分中的渐近等式由命题 1.9 和定理1.1 得出。□

引理 2.5 确立了所有非单圈[5] 图 F满足$\chi_1(F) = \chi(F)$ 时，$\mathrm{ex}(n, F, q)$ 的渐近行为。遗憾的是，我们只能刻画满足 $\chi_1(F) = \chi(F) = 2$ 的图类。任意一个 1-选择的像的边集构成一个图，其中所有连通分量 C的顶点数均不超过 $V(C)$，即所有连通分量都是单圈图或树。另一方面，对于任意这样的图 G，都可以定义一个像恰好为 $E(G)$ 的 1-选择：如果 $x_1, x, \cdots, x_k$ 是唯一环，那么 $f(x_i) := (x_i x_{i+1})$；对于顶点 $y \neq x_i$，可以令 $f(y) := (yz)$，其中 z 是 y 中距离圈比 y 更近的唯一邻点。

我们以比较定理 1.11 与引理 2.5 的下界以及命题 1.9 的上界来结束本节。首先，我们确定 $\chi_1(K_{r,\ s,\ t})$。关于鲁棒色数 $\chi_1(F)$ 的详细介绍及更多相关结果将在即将发表的手稿 [1] 中给出。注意， $\chi_1(K_{1,\ 1,\ 1}) = \chi_1(C_3) = 1$。

命题 2.6. 对于 $1 \leq r \leq s \leq t$，若 $t \geq 2$，则 $\chi_1(K_{r,\ s,\ t}) = 2$ 当且仅当 $r \leq 2$。否则， $\chi_1(K_{r,\ s,\ t}) = \chi(K_{r,\ s,\ t}) = 3$。

[5]如果一个图 F 包含一个满足 $|V(C)| < |E(C)|$ 的连通分量 C，则称其为非单圈的。

证明。我们有 $\chi_1(K_{r,\,s,\,t}) \geq 2$ 当且仅当 $t \geq 2$，因为任何 1-选择中都还剩下一条边。若 $r = 2$，则令 u、v 为大小为 2 的部分中的顶点，并令 B 和 C 为大小分别为 s 和 t 的部分。于是，对于任意满足以下条件的 1-选择 f：对所有 $b \in B$，$f(b) = \{u, b\}$；且对所有 $c \in C$，$f(c) = \{v, c\}$，删除 1-选择后的 $(K_{r,\,s,\,t})_f$ 是二部图，这表明对于 $r \leq 2$，$\chi_1(K_{r,\,s,\,t}) = 2$。

对于 $r \geq 3$，只需考虑 $G = K_{3,\,3,\,3}$。反设对于某个 1-选择 f，$\chi(G_f) \leq 2$。那么 G_f 包含一个大小至少为 5 的独立集。然而，任意 5 个顶点在 $K_{3,\,3,\,3}$ 中诱导出至少 6 条边，因此 f 无法将它们全部移除。□

注意，对于 $q = 2$，将 χ-值或 χ_1-值 2 或 3 代入引理 2.5 和命题 1.9 的下界与上界，将得到界 $(3 + o(1))\binom{n}{2}$ 和 $(\frac{7}{2} + o(1))\binom{n}{2}$。因此，定理 1.11 (2) 表明，只要满足 $3 \leq s \leq t$，$\mathrm{ex}(n, K_{2,\,s,\,t}, 2)$ 的值就处于这两个界的中间。

3. Proofs

3.1. 含单圈分支的二分图。

引理 3.1. 设 G 是一个二分图，其所有连通分量均为单圈图或树。假设 $H \subseteq Q(n, 2)$ 不包含图 G 的任何 $(q+1)$-副本。那么对于任意 $(a, b) \in [q]^2$，图 $H_{(a,b),(\overline{a},\overline{b})}$ 有 $o(n^2)$ 条边。

证明。证明基于以下简单的命题。

命题 3.2. $H_{(a,b),(\overline{a},\overline{b})}$ 不包含 $K_{R,R}$，其中 $R = R(|V(G)|, |V(G)|)$ 是二部拉姆齐数，即满足以下条件的 c 的最小值：对于任意 $K_{c,c}$ 的二边染色，都存在一个 $K_{|V(G)|,|V(G)|}$ 的单色副本。

断言的证明。假设 $H_{(a,b),(\overline{a},\overline{b})}$ 包含 $K_{R,R}$ 的一个副本。如果 $a, b \geq \frac{q+1}{2}$ 或 $\overline{a}, \overline{b} \geq \frac{q+1}{2}$，那么由于 $G \subset K_{|V(G)|,|V(G)|}$，$H$ 包含 G 的一个 $(q+1)$-副本。因此，我们可以并且将假设 $a \leq \overline{b} \leq \frac{q+1}{2} \leq b \leq \overline{a}$ 成立。

若 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in H$ 且满足 $x_i = a$、$x_j = b$、$y_i = \overline{a}$、$y_j = \overline{b}$，则将 $H_{(a,b)}$、$_{(\overline{a},\overline{b})}$ 的边 (i, j) 染为蓝色；否则染为红色，即当 $\mathbf{x}'$、$\mathbf{y}' \in H$ 且满足 $x_j = a$、$x_i = b$、$y_j = \overline{a}$、$y_i = \overline{b}$时。根据 R 的定义，我们得到存在两个不相交集合 U、V，满足 $|U| = |V| = |V(G)|$，使得对于任意 $u \in U$ 和 $v \in V$，满足 $x_u = a$、$y_u = \overline{a}$、$x_v = b$、$y_v = \overline{b}$ 的 q-边 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 均存在于 H中。我们声称，可以定义一个支撑集位于 $U \cup V$中的 G的 $(q+1)$-副本。通过对 G中的顶点数量进行归纳，只需嵌入一个连通分量即可。设 2ℓ 为该连通分量中唯一环的长度（如果存在环）。我们固定 u_1、u_2、…、$u_\ell \in U$以及 v_1、v_2、…、$v_\ell \in V$。满足 $x^j_{u_j} = a$、$x^j_{v_j} = b$的 $\mathbf{x}^j$ 边以及满足 $y^j_{v_j} = \overline{b}$ 和 $y^j_{u_{j+1}} = \overline{a}$的 $\mathbf{y}^j$ 边构成了一个 $C_{2\ell}$的 $(q+1)$-副本，其中 $u_{\ell+1} = u_1$。为了嵌入从该圈延伸出的树（或者在完全不存在圈时的那棵树），可以按照到该圈的距离贪心地进行：如果已嵌入的顶点位于 V中，则使用来自 $\overrightarrow{H}_{a,\,b}$的 q-边；如果已嵌入的顶点位于 U中，则使用来自 $\overrightarrow{H}_{\overline{a},\,\overline{b}}$的 q-边。由于 H 不应包含 G的 $(q+1)$-副本，因此这一矛盾证明了该断言。□

引理的陈述现在可由命题 3.2 和定理 1.12 得出。 □

定理 1.6 的证明。下界由构造 $U_{q,\ n}$ 给出。

对于上界，设 G 是一个二分图，其所有连通分量至多包含一个圈，并且假设 $H \subseteq Q(n,2)$ 不包含任何 $(q+1)$-拷贝的 G。然后，我们根据边的条目划分 H 的边。如果 $q+1$ 是偶数，那么引理 3.1 表明 $H_{\frac{q+1}{2},\ \frac{q+1}{2}}$ 有 $o(n^2)$ 条边。根据引理 3.1，我们有 $|H_{(a,b),(\overline{a},\overline{b})}| = o(n^2)$，因此 $|\{(i,j) : \mathrm{x} \in H，\text{其中 } x_i = a,\ x_j = b\}| + |\{(i,j) : \mathrm{y} \in H，\text{其中 } y_i = \overline{a},\ y_j = \overline{b}\}| \le (1+o(1))\binom{n}{2}$。对所有 (a,b)、$(\overline{a},\overline{b})$ 求和，我们得到 $|H| \le (\lfloor \frac{q^2}{2} \rfloor + o(1))\binom{n}{2}$。□

3.2. 森林。

引理 3.3. 设 T 是一棵半径为 r 的树。若 $H \subseteq Q(n,2)$ 不包含 T 的任何 $(q+1)$-副本，则对于任意 $1 \le a < \frac{q+1}{2} \le b \le q$，我们有 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| + |\overrightarrow{H}_{\overline{a},\overline{b}}| \le (2+o(1))\binom{n}{2}$。此外，若 $a+b = q+1$，因而 $a = \overline{b}$，则 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| \le t_{n,r} + o(n^2)$。

证明。根据引理 3.1，我们有 $|H_{(a,b),(\overline{a},\overline{b})}| = o(n^2)$。这意味着 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| + |\overrightarrow{H}_{\overline{a},\overline{b}}| \le (2+o(1))\binom{n}{2}$，如果 $a+b \neq q+1$。

剩下要证明 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| \le t_{n,r} + o(n^2)$，如果 $a+b = q+1$。考虑从 $\overrightarrow{H}_{a,b}$ 中删除长度为 2 的有向圈（即删除 $H_{(a,b),(b,a)}$ 的边的两个定向）后得到的 $\overrightarrow{H}'_{a,b}$。由于 $b = \overline{a}$，$a = \overline{b}$，我们有 $H_{(a,b),(b,a)} = H_{(a,b),(\overline{a},\overline{b})}$，因此删除的弧数为 $o(n^2)$。按如下方式构造顶点集 $V_1, V_2, \ldots, V_t$：V_1 是 $\overrightarrow{H}'_{a,b}$ 中入度小于 $|T|$ 的顶点集；归纳地，V_{i+1} 是 $\overrightarrow{H}'_{a,b}[V \setminus \cup_{j=1}^{i} V_i]$ 中入度小于 $|T|$ 的顶点集。注意，只要 $V \setminus \cup_{j=1}^{i} V_j \neq \emptyset$，那么 V_{i+1} 就不可能为空。事实上，否则就可以贪心地将 T 的一个有向版本（所有边均朝向中心）嵌入 $\overrightarrow{H}'_{a,b}[V \setminus \cup_{j=1}^{i} V_j]$ 中，因此 H 将包含 T 的一个 $(q+1)$-副本。此外，若 t 是满足 $V = \cup_{j=1}^{t} V_j$ 的第一个指标，则 $t \le r$。事实上，若 $v \in V_{r+1}$，就可以将 $\overrightarrow{T}$ 贪心地嵌入 $\{v\} \cup \left(\cup_{j=1}^{r} V_j\right)$，其中 v 充当中心。

$H_{a,b}$ 现在我们可以对 $|\overrightarrow{H}_{a,b}|$ 进行界。令 $\overrightarrow{H}''_{a,b}$ 为删去这些弧后得到的图。如上所述，$\overrightarrow{H}''_{a,b}$ 是 r-部图，因此 $|\overrightarrow{H}''_{a,b}| \le t_{n,r}$。根据被删弧数量的上界，我们有 $|H_{a,b}| \le |\overrightarrow{H}''_{a,b}| + o(n^2) \le t_{n,r} + o(n^2)$，如所述。□

定理 1.4 的证明。固定 T 和 q，令 $H \subseteq Q(n,2)$ 为一个不包含任何 $(q+1)$-拷贝 T 的 q-图。由于 S_{H^L} 不能包含 T，我们必须有 $|H^L| = O_{q,\ T}(n)$。我们不对 H^S 作界定，并假设 $Q(n,2)^S \subseteq H$。为了证明该定理，我们将可能的权重分组：(a,b) 与 (b,a)、$(\overline{a},\overline{b})$ 以及 $(\overline{b},\overline{a})$。只需证明存在 $c = c_{q,\ T}$

使得对于任意的 a, b，当 $1 \le a < \frac{q+1}{2} \le b \le q$ 时，我们有 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| + |\overrightarrow{H}_{\overline{a},\overline{b}}| \le (2 + o(1))\binom{n}{2}$，并且如果 $a + b = q + 1$，那么 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| \le (1 - c)\binom{n}{2}$。这由引理 3.3 的陈述可得。□

定理 1.5 的证明。对于下界，我们有以下一般构造。令 $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_r)$ 为 $[n]$ 的一个固定划分，并对任意 $u \in [n]$，我们设 $a(u) = i$，若 $u \in A_i$。接着我们定义两个 q-边族 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}, \mathcal{F}'_{\mathcal{A}} \subseteq Q(n, 2)$:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} := \{\mathbf{x} : \sum_i x_i = 2\} \cup \{\mathbf{x} : x_u = 1, x_v = 2,\ a(u) < a(v)\}$$

and

$$\mathcal{F}'_{\mathcal{A}} := \mathcal{F}_A \setminus \{\mathbf{x} : x_u = x_v = 1,\ a(u) = a(v) = r\}.$$

该 $\mathcal{F}'_A$ 不包含任何半径为 r 的树 T 的 3-副本，而 $\mathcal{F}_A$ 不包含任何半径为 r 且直径为 $2r$ 的树 T 的 3-副本，因为 $\mathcal{F}'_{\mathcal{A}}$ 中最长路径的长度为 $2(r-1)$，而 $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ 中最长路径的长度为 $2r - 1$。事实上，如果一条路径包含一个具有两个 1-项的 q-边，那么它只能继续沿着对应于 $\overrightarrow{H}_{1,\ 2}$ 中路径的路径延伸，因此长度至多为 $2(r-1) + 1$。在 $\mathcal{F}'_A$ 中不存在支撑集完全位于 A_r 中的此类 q-边，因此最长路径的长度确实为 $2(r-1)$。

为了解上界，首先注意，如果 $H \subseteq 2(n, 2)$ 不含 T 的 3重副本，那么 H 中含有两个 2 项的 q-边数量随 H_2 线性增长，因为 $H_{2,2}$ 不可能包含 T。此外，根据引理 3.1，$H_{(1,2),(2,1)}$ 有 $o(n^2)$ 条边，因此 $|H| \le |H_{1,1}| + |\overrightarrow{H}_{1,2}| + o(n^2)$。引理 3.3 给出了 (1) 的上界。为了得到 (2) 的上界，假设 T 的直径为 $2r - 1$。我们使用引理 3.3 中对 $\overrightarrow{H}_{1,2}$ 的划分：V_1 是 $\overrightarrow{H}_{1,2}$ 中入度至多为 $|T|$ 的顶点集合，V_{i+1} 是 $[n] \setminus \cup_{j=1}^{i} V_j$ 中在 $\overrightarrow{H}_{1,2}[[n] \setminus \cup_{j=1}^{i} V_j]$ 中入度至多为 $|T|$ 的顶点集合。同样，只要 $[n] \setminus \cup_{j=1}^{i} V_j \neq \emptyset$，集合 V_{i+1} 就非空，否则我们就会找到 T 的 3重副本。此外，$[n] = \cup_{i=1}^{r} V_r$，否则我们就会在 H 中找到 T 的 3重副本。最后，$H_{1,1}[V_r]$ 的最大度小于 $|T|$，否则同样可以利用度至少为 $|T|$ 的顶点 $v \in V_r$ 及其在 $H_{1,1}[V_r]$ 中的邻点，以及以这些邻点为根、位于 $\overrightarrow{H}_{1,2}$ 中的有向树，贪心嵌入 T 到 H 中。

我们得到，除了一个 $o(n^2)$ 误差项 $|\overrightarrow{H}_{1,\ 2}|$ 由一个完全 r 部图 G中的边数所界定，而 $|H_{1,\ 1}|$ 由不完全位于 G 的最后一个部分 V_r 内的点对数所界定。若固定 V_r 的大小，则标准的对称化表明，当所有其他部分的大小（几乎）相等时，最大值可取到。因此，我们有 $r - 1$ 个大小为 αn 的部分，以及一个大小为 $(1 - (r-1)\alpha)n$ 的部分。于是，除一个次二次误差项外，我们有

$$|H_{1,1}| + |\overrightarrow{H}_{1,2}| \le \binom{n}{2} - \binom{(1-(r-1)\alpha)n}{2} + \binom{n}{2} - (r-1)\binom{\alpha n}{2} - \binom{(1-(r-1)\alpha)n}{2}.$$

这很容易。可见，上述表达式在 $\alpha = \frac{2n}{2r-1}$ 处取得最大值，从而证明了 (2)。 □

3.3. 奇圈。本小节中，我们将证明定理 1.7。提醒读者，本小节中的所有下界均由 ex(n, F, q) $\geq q^2 \cdot$ ex(n, F) 得出。根据 Mantel 定理，我们有 ex(n, C_3) $= \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。为了得到上界，我们先从一些一般性引理入手。

引理 3.4. 假设一个 q-图 $H \subset Q(n, 2)$ 不包含 C_3 的 $(q+1)$-副本。令$1 \leq a \leq b \leq q$ 为满足 $a + b = q + 1$ 的整数。

(1) 若 $a = b = \frac{q+1}{2}$，则

$$|H_{\frac{q+1}{2},\frac{q+1}{2}}| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

(2) 若 $a < b$，则

$$|\overrightarrow{H}_{a,b}| \leq 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

证明. Mantel 定理以及 $H_{\frac{q+1}{2},\frac{q+1}{2}}$是无三角形的这一事实推出 (1)。

为证明 (2)，我们对 n 使用归纳法，基例 $n = 2$ 和 3 留给读者验证。若 $H_{(a,b),(b,a)}$ 为空，则 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| \leq \binom{n}{2} \leq 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。若 $(ij) \in H_{(a,b),(b,a)}$，那么对于任意 $u \neq i$，(iu)、(ui)、(ju)、(uj) 中至多有两个属于 $\overrightarrow{H}_{a,b}$。事实上，$(iu) \in \overrightarrow{H}_{a,b}$ 蕴含 $(uj) \notin \overrightarrow{H}_{a,b}$，因为此时 $\overrightarrow{H}_{a,b}$ 中的有向 3-圈 (iu)、(uj)、(ji) 将对应于 H 中一个三角形的 $(q+1)$-副本。类似的论证表明，$(ui) \in \overrightarrow{H}_{a,b}$ 蕴含 $(ju) \notin \overrightarrow{H}_{a,b}$。将归纳法应用于 $\{\mathbf{x} \in H : i, j \notin S_{\mathbf{x}}\}$，可得

$$|H| \leq 2 + 2(n-2) + 2 \cdot \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

□

引理 3.5. 假设 q-图 $H \subset Q(n, 2)$ 不含有一个 C_3 and$\frac{q+1}{2} < a \leq q$ 的 $(q+1)$-副本。那么

$$|H_{a,a}| + |H_{\overline{a},\overline{a}}| \leq 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

证明. 论证与引理 3.4 (2) 的证明非常相似。我们对 n and $n = 2, 3$ 进行归纳，并将基例留给读者。注意，若 $H_{a,a}$ 为空，则$|H_{a,a}| + |H_{\overline{a},\overline{a}}| \leq \binom{n}{2} \leq 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。若 $\{i, j\} \in H_{a,a}$（因此，对于满足 $x_i = x_j = a$ 的 $\mathbf{x} \in Q(n, 2)$，有 $\mathbf{x} \in H$），那么对于任意的 $u \neq i$, j $\{u, i\} \in H_{\overline{a},\overline{a}}$($\{u, j\} \in H_{\overline{a},\overline{a}}$) 蕴含 $\{u, j\} \notin H_{a,a}$($\{u, i\} \notin H_{a,a}$)，因为与这些包含关系对应的 q-边加上 $\mathbf{x}$ 将构成一个三角形的 $(q+1)$-副本。因此，由归纳法可得

$$|H_{a,a}| + |H_{\overline{a},\overline{a}}| \leq 2 + 2(n-2) + 2 \cdot \lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

□

现在我们可以证明关于 ex($n, C_3, 2$) 的定理 1.7。

定理 1.7 的证明。假设 $H \subseteq 2(n, 2)$ 不包含三角形的 3重副本。通过应用引理 3.4 (2) 对 $|\overrightarrow{H}_{1,2}|$ 进行界定，并应用引理 3.5 对 $|H_{1,1}| + |H_{2,2}|$ 进行界定，我们得到 $|H| = |\overrightarrow{H}_{1,2}| + |H_{1,1}| + |H_{2,2}| \leq 4 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。□

我们来谈谈，为什么当 q 的值较大时，确定 $\mathrm{ex}(n, C_3, q)$ 的问题会更加困难。若 $q = 3$，则由引理 3.4 (1) 和 (2) 可得 $|H_{2,2}| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ 以及 $|\overrightarrow{H}_{1,3}| \leq 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。应用引理 3.5，可得 $|H_{1,1}| + |H_{3,3}| \leq 2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。接下来需要界定 $|\overrightarrow{H}_{1,2}|$ 以及 $|\overrightarrow{H}_{2,3}|$。由于对于任意 $\frac{q+1}{2} \leq a \leq b \leq q$，$H_{a,b}$ 都必须是 C_3-自由的，因此 $\overrightarrow{H}_{2,3}$ 的大小显然至多为 $2 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$，但若无进一步条件，无法对 $|\overrightarrow{H}_{1,2}|$ 得出任何非平凡的界。因此，可以尝试界定 $|\overrightarrow{H}_{1,2}| + |\overrightarrow{H}_{2,3}|$，一般而言，界定 $|\overrightarrow{H}_{a,b}| + |\overrightarrow{H}_{\overline{a},\overline{b}}|$，并证明这个和至多为 $4 \cdot \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。遗憾的是，即使 $\frac{q+1}{2} \leq a < b$，这也未必成立。具体而言，若 $A \subset [n]$，其中 $|A| = 3n/4$ 且 $B = [n] \setminus A$，则可以令

$$\overrightarrow{H}_{a,b} = \{(ij) : i \in A, j \in B\}, \ \overrightarrow{H}_{\overline{a},\overline{b}} = \{(ij) : |\{i, j\} \cap B| \leq 1\}.$$

不难看出，相应的 q 图不包含 C_3 and $|\overrightarrow{H}_{a,\ b}| = \frac{3n^2}{4}$, $|\overrightarrow{H}_{\overline{a},\ \overline{b}}| = 2(\binom{n}{2} - \binom{n/4}{2})$ 的 $(q+1)$-副本，因此 $|\overrightarrow{H}_{a,\ b}| + |\overrightarrow{H}_{\overline{a},\ \overline{b}}| = (\frac{9}{8} + o(1))n^2 > 4\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。我们证明了 $(\frac{9}{8} + o(1))n^2$ 是一个上界，由此可得 $9\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor \leq \mathrm{ex}(n, C_3, 3) \leq (9.5 + o(1))\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。

当 $q \geq 4$ 时，情况会变得更糟，因为会出现满足 $a + b > q + 1$ and $a < \frac{q+1}{2}$ 的数对 a, b；对于这些 a and b 的取值，我们甚至无法得到 $|\overrightarrow{H}_{a,\ b}| + |\overrightarrow{H}_{\overline{a},\ \overline{b}}|$ 的 $(\frac{9}{8} + o(1))n^2$ 上界。

3.4. 含有边数多于顶点数的连通分量的图。我们从证明定理 1.10 开始。我们将用到 Janson、Luczak 和 Ruci´nski 的书 [5] 中的一个结果。设定如下：令 Γ 为一个有限集合（在我们的情形中，它是$K_{m,m,\ldots,m}$的边集），并且我们有一组与元素$\gamma \in \Gamma$对应的相互独立的伯努利随机变量。于是，对于任意子集 $A \subset \Gamma$，我们用 I_A 表示如下事件的指示变量：对于每个 $\gamma \in A$，对应的伯努利随机变量都取值 1。（对我们而言， A将是$K_{m,m,\ldots,m}$中的一个 r-团的边集。）对于某个 $\mathcal{S} \subseteq 2^\Gamma$，我们定义变量$X = \sum_{A \in \mathcal{S}} I_A$。（我们将用 $\mathcal{S}$ 表示$K_{m,m,\ldots,m}$中所有 r-团的边集构成的族。）

定理 3.6（ [5]中的定理 2.14）。设 $X = \sum_A I_A$ 和 $\overline{\Delta} = \sum \sum_{A \cap B \neq \emptyset} \mathbb{E}(I_A I_B)$。那么对于 $0 \leq t \leq \mathbb{E}X$

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X - t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\overline{\Delta}}\right).$$

定理 1.10 的证明。在 $K(m, r, p)$ 中，一条边至多包含于 m^{r-2} r 个团中。因此，1-选择至多可以从 $K(m, r, p)$ 中移除 r 个团。我们应用定理 3.6，其中 X 是 $K(m, r, p)$ 中 r 个团的数量。显然，根据假设 $p = \omega(m^{-1/\binom{r}{2}})$，我们有$\mathbb{E}X = m^r p^{\binom{r}{2}} = \omega(m^{r-1})$。我们令 $t = \frac{\mathbb{E}X}{2}$。如果边集

两个团相交，那么它们至少共享两个顶点。因此，我们有

$$\overline{\Delta} = \sum_{i=2}^{r} \binom{r}{i} m^i [m(m-1)]^{r-i} p^{2\binom{r}{2}-\binom{i}{2}}.$$

记 $\beta_i = \binom{r}{i} m^i [m(m-1)]^{r-i} p^{2\binom{r}{2}-\binom{i}{2}}$，则有 $\frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} = \frac{r-i}{i+1} \cdot m^{m(m-1)} \cdot p^{-2i}$，它关于 i 单调递增。因此，β_i 的最大值要么在 $i=2$ 处取得，要么在 $i=r$ 处取得。显然，$\beta_r = 2\mathbb{E}X$ 且 $\beta_2 = (1+o(1))\binom{r}{2} \cdot (\mathbb{E}X^2)$。所以，只要 $\mathbb{E}X$ 和 $m^2 p$ 趋于无穷，作为 $\frac{t^2}{2\overline{\Delta}}$ 下界的 $\min\{\frac{t^2}{r\beta_2}, \frac{t^2}{r\beta_r}\}$ 也趋于无穷。由于假设 $p = \omega(m^{-1/\binom{r}{2}})$ 同时蕴含这两点，应用定理 3.6 可得，以高概率，$K(m,r,p)$ 中 r-团的数量大于 rm^{r-1}，因此对于任意 1-选择 f，$\chi(K(m,r,p)^f) \geq r$。□

现在我们转向定理 1.11，其三个部分将分别证明。命题 2.6 指出，若 $3 \leq r \leq s \leq t$，则 $\chi_1(K_{r,s,t}) = \chi(K_{r,s,t}) = 3$ 成立。在这种情况下，引理 2.5 推出以下结果，它比定理 1.11 的第 (3) 部分更一般。

推论 3.7. 对任意 $3 \leq r \leq s \leq t$，我们有

$$\mathrm{ex}(n, K_{r,s,t}, q) = \left[q^2 - (q - \lceil \frac{q+1}{2} \rceil + 1)^2 \frac{1}{2} + o(1) \right] \binom{n}{2}.$$

下面的引理证明定理 1.11 第 (1) 部分的前半部分

引理 3.8. 对任意 $1 \leq s$ 和 $2 \leq t$，我们有 $\mathrm{ex}(n, K_{1,s,t}, 2) = (3+o(1))\binom{n}{2}$。

证明。固定 s,t，记 $f(n) = \mathrm{ex}(n, K_{1,s,t}, 2)$。对于固定的 $\varepsilon > 0$，我们要证明 $f(n) \leq (3+\varepsilon)\binom{n}{2}$。取满足 $\frac{t}{T} \leq \varepsilon/2$ 的 T。假设 $H \subseteq 2(n,2)$ 不含任何由 $K_{1,s,t}$ 和 $|H| = f(n)$ 构成的 3-副本。若 $e(H_2) \leq \varepsilon\binom{n}{2}$，则显然 $|H| \leq (3+\varepsilon)\binom{n}{2}$。否则，根据定理 1.12，$H_2$ 包含一个 $K_{T,T}$ 的副本 K，其顶点集为 $U = U_1 \cup U_2$，其中的 U_i 构成了 K 的两部分。注意，对任意 $v \notin U$，要么有 $|N^-_{\vec{H}_1,2}(v) \cap U_1| < t$，要么有 $|N^-_{\vec{H}_1,2}(v) \cap U_2| < t$；否则，$v$ 与关联的 (1, 2)-边以及 K 将构成一个由 $K_{1,s,t}$ 组成的 3-副本。因此，对任意 $v \notin U$，H 中满足 $x_v \neq 0$ 且 $S_{\mathbf{x}} \cap U \neq \emptyset$ 的边数 x 至多为 $4(T+t-1) + 2(T-t+1)$。考察 H 在 U 内部、U 与 $V(H) \setminus U$ 之间以及 U 外部的边，可得

$$f(n) \leq 4\binom{2T}{2} + [3\cdot(2T) + 2(t-1)](n-2T) + f(n-2T) \leq 4\binom{2T}{2} + (3+\varepsilon/2)2T(n-2T) + f(n-2T).$$

反复应用这一结论，可得

$$f(n) \leq 4\binom{2T}{2}\frac{n}{2T} + (3+\varepsilon/2)2T\frac{n(\frac{n}{2T}-1)}{2} \leq (3+\varepsilon)\binom{n}{2},$$

如果 n 足够大。□

下一个结果是定理 1.11 第 (1) 部分的第二部分。

定理 3.9. 对任意 $1 \le r \le s \le 2 \le t$，我们有 ex($n$,$K_{2,s,t}$, 2) $=(3+o(1))\binom{n}{2}$。

证明。只需考虑 $r=s=2$ 和任意大的 t。在论证过程中，ε_1、ε_2、.....均表示正常数，其中 ε_1 可以任意小，其余常数则适当选取。

我们对 n 应用归纳法。作为基础，对于任意固定的阈值 n_0，可以假设 ex(n,$K_{2,s,t}$, 2) $\le 3\binom{n}{2}+C$ 对于某个适当选取的常数 C，对所有 $n \le n_0$ 均成立。

现在令 $n > n_0$，并令 $H \subseteq 2(n, 2)$为任意一个满足 $e(H) \ge (3+\varepsilon_1)\binom{n}{2}$的 2-图。那么显然$e(H_{2,\ 2}) \ge \varepsilon_1\binom{n}{2}$ 成立，并且如上所述，$H_{2,\ 2}$ 包含$K_{T,\ T}$ 的一个副本，其部分类为 U_1 和U_2，大小均为 T，其中 T 可以取很大，例如关于 t 和 $1/\varepsilon_1$均呈指数级。

如果 H_2,2 与其补集 $U := U_1 \cup U_2$ 之间至多有 $\varepsilon_2 n$ 条边，那么由归纳法可知 H 包含 K_2,2,$_t$ 的一个 3重副本。否则，考虑顶点集合 Y，其中的顶点 $y \notin U$ 在 H_2,2 中至少有 $\varepsilon_3|U|$ 个邻点。我们可以假设，Y中至少一半的顶点在 U_1 中至少有 $\varepsilon_3|U_1|$ 个 (2, 2)-邻点。于是，存在一个大小为 t 的 $U' \subset U$ 和一个大小为 $\varepsilon_4 n$ 的 $Y' \subset Y$，它们在 H_2,2 中完全相连。如果 Y'中的这些顶点里，有 $\varepsilon_5 n$ 个在 U_2 中拥有多于一个 (2, 2)-邻点，那么 U_2 中有一对顶点在 Y'中有许多公共邻点，因此 H 包含 K_2,2,$_t$ 的一个 3重副本。（事实上，甚至会出现一个 $K_{2,t,t}$。）否则，$\varepsilon_5 n$ 中存在一个顶点子集 $Y'' \subset Y'$，其中的顶点在 U_2 中至多有一个 (2, 2)-邻点。

现在考虑二分图 $B = H_{(1,2),\ (2,1)}[Y'', U_2]$。根据 Y 的选取，在 B 中每个 $y \in Y''$ 的度都至少为 $2\varepsilon_3|U_2|$，因为从 y 到U_1 在 H 中不可能有超过 $4|U_1|$ 条边。因此 B 包含一个 $C_4 = y'u'y''u''$，进而 H 中会出现一个 $K_{2,\ 2,\ t}$ 的 3重副本，其顶点类为 $\{y', y''\}$、$\{u', u''\}$ 和 U'。□

我们将定理 1.11 的第二部分单独陈述如下。

定理 3.10. 对于任意 $3 \le s \le t$，我们有 ex(n, $K_{2,s,t}$, 2) $=(\frac{13}{4}+o(1))\binom{n}{2}$.

在证明定理 3.10 之前，我们需要做一些准备。

定义 3.11. 我们称 e 是 W_k 的一个 i-边：$E(K_k) \to \{0,2,3\}$ 当且仅当 $W_k(e) = i$。若一个 W_k 满足条件（$\star$），则

(i) 3-边图是无三角形的，并且（

ii）如果 uv, vx, xy, yu 3-边构成一个 C_4，那么 ux 和 vy 中至少有一个是 0-边 .

W_k 的总权重 $w(W_k)$ 为 $\sum_{e\in E\ (K_k)} W_k(e)$。$W$中 v 的度为 $d(v) = d_W(v) = \sum_{x\neq v} W_k(vx)$。

引理 3.12. 若 W_k： $E(K_k) \to \{0,2,3\}$ 满足（$\star$），则 $w(W_k) \le (\frac{9}{4}+o(1))\binom{k}{2}$，且此界在渐近意义下是紧的。

证明。我们从一个观察开始，该观察在此情形下应用了 Zykov 对称化。

断言 3.13. 如果 W满足 ($\star$)，那么，对于任意一对顶点 u, v，由$W^{u\to v}(uv) = 0$, $W^{u\to v}(ux) = W(vx)$ 对所有 $x \neq u, v$，以及 $W^{u\to v}(e) = W(e)$ 对所有其他边$e \in E(K_k)$ 定义的 $W^{u\to v}$ 也满足 ($\star$)。

此外，如果 uv 是一条 i-边，且 $d_W(v) - d_W(u) \ge i$，那么 $w(W) \le w(W^{u\to v})$；并且如果 $d_W(v) - d_W(u) > i$，那么 $w(W) > w(W^{u\to v})$。

断言的证明。显然， $W^{u\to v}$ 在 $V(K_k)\setminus\{u\}$ 上满足条件（$\star$），W 也如此。对于 x，$y\neq v$ 不可能有 $W^{u\to v}(ux)=W^{u\to v}(uy)=W^{u\to v}(xy)=3$，否则我们就会有 $W(vx)=W(vy)=W(xy)=3$，这与 W 的 3-边具有无三角形性质相矛盾。对于 $W^{u\to v}$ 中包含 u 但不包含 v 的 3-边里的 C_4，类似的论证同样适用。最后，$W^{u\to v}(uv)=0$ 解决了可能出现的三角形以及同时包含 u 和 v 的 C_4 的情形。

该断言的第二部分由 $w(W^{u\to v})-w(W)=d_W(v)-d_W(u)-W(uv)$ 得出。 □

假设 $w=W_k$ 满足 ($\star$)。令 v 为一个最大度顶点。对所有满足 $W(vx)=0$ 的 x，反复应用命题 3.13（其中取 $W^{x\to v}$），可得 W^1 和 $U_1\ni v$，使得 $w(W_1)\geq w(W)$；并且对于任意 u、$u'\in U_1$ 和 $x\notin U_1$，都有 $W^1(ux)=W^1(u'x)\geq 2$。接着，我们在不属于 U_1 的顶点中，选择一个最大度为 $d_{W^1}(v_2)$ 的顶点 v_2，并重复这一过程。经过有限轮这样的操作后，我们得到 W^ℓ 和 U_1、U_2、.....、U_ℓ，使得 $w(W^\ell)\geq w(W)$；并且对于任意 x、y、$\in U_i$、u、$v\in U_j(i=1,2,\dots,\ell,j=1,2,\dots,\ell,i\neq j)$，都有 $W^\ell(xy)=0$，且 $W^\ell(xu)=W^\ell(yv)\geq 2$。特别地，$d_{W^\ell}(x)=d_{W^\ell}(y)$。

最后，只要存在一条 i-边 uv for $i=2$，且 3 满足 $d(v)-d(u)>i$，我们就再次应用命题 3.13。每次这样的对称化都会将顶点 $u\in U_j$ 移至 v 的类 $U_{j'}$，并严格增加权重。由于权重不可能大于 $3\binom{n}{2}$，我们得到 W^* 以及 $V(K_n)$的划分$U_1^*,U_2^*,\dots,U_{\ell^*}^*$，使得上述所有性质均成立，并且对于任意一对顶点 u,v，$|d_{W^*}(u)-d_{W^*}(v)|\leq 3$。这意味着，对于所有 v，要么 $w(W)\leq w(W^*)\leq(\frac{9}{4}+o(1))\binom{k}{2}$，要么$d_{W^*}(v)>\frac{9}{4}k$成立。

不失一般性，我们可以假设 $U_{\ell^*}^*$ 是所有类中规模最大的，记为 x；而 U_1^*、U_2^*、.....、U_m^* 是通过 3-边与 $U_{\ell^*}^*$ 相连的其他类，其余类则通过 2-边相连。令 U_1^*、U_2^*、.....、U_m^* 的规模分别为 y_1、y_2、.....、y_m。注意以下几点。

- 由于我们在 $U_{\ell^*}^*$ 内只有 0-边，且度都至少为 $\frac{9}{4}k$，因此必有$\sum_{i=1}^m y_i\geq\frac{k}{4}+2x$。
- （$\star$）的无三角形部分意味着 U_i 与 U_j（$1\leq i<j\leq m$）之间的所有边都是 2-边。

<escape>• </escape>（<escape> C_4 </escape>）的部分表明，如果<escape> z </escape>通过 3-边同时与<escape> $u_i\in U_i^*$ </escape>和<escape>$u_j\in U_j^*$</escape>（<escape>$1\leq i<j\leq m$</escape>）相连，那么<escape> $z\in U_{\ell^*}^*$</escape>。

- 因此，若 V_i表示 $\{z\notin U_{\ell^*}^*:\ W^*(zu_i)=3\ \forall u_i\in U_i^*\}$，其中 $i=1$、2、.....、m，则$U_{\ell^*}^*$、U_1^*、U_2^*、.....、U_m^*、V_1、.....、V_m两两不相交。
- 由于所有度都至少为 $\frac{9}{4}k$，因此必有 $|V_i|>\frac{k}{4}+2y_i-x$。

由于它们两两不相交，我们可以将所有大小下界相加，得到

$$k\geq x+\sum_{i=1}^m y_i+\sum_{i=1}^m(\frac{k}{4}+2y_i-x)=\frac{mk}{4}+3\sum_{i=1}^m y_i-(m-1)x>\frac{(m+3)k}{4}-(m-7)x.$$

右侧至少为 k（这就产生了矛盾），除非 $m=0$ 或 $x>\frac{k}{4}$。但若 $m=0$，则 $U_{\ell^*}^*$ 中的度至多为 $2\binom{k}{2}$；而若 $x>\frac{k}{4}$，则 $|\cup_{i=1}^m U_i^*|>\frac{k}{4}+2x>\frac{3k}{4}$。

这是不可能的，因为 $U_{\ell^*}^*$ 和 $\cup_{i=1}^m U_i^*$ 不相交。这些矛盾完成了引理的证明。□

定义 3.14. 在图 G 中，对于 $V(G)$ 的互不相交子集 X、Y，我们用 $d(X,Y)$ 表示 $E(G)$ 中满足 $|e\cap X|=|e\cap Y)|=1$ 的边 e 的数量。对于 $\varepsilon>0$，图 G 中一对互不相交的顶点子集 X、Y 称为 ε-正则的，如果对于满足 $|A|\geq\varepsilon|X|$、$|B|\geq\varepsilon|Y|$ 的 $A\subseteq X$、$B\subseteq Y$，都有$|d(X,Y)-d(A,B)|\leq\varepsilon$。

定理 3.15（Szemer´edi 正则性引理 [9]）。对于任意正整数 m 和正实数 ε，存在一个整数 M，使得任何至少有 M 个顶点的图 G 都可以划分为 V_0、V_1、...、V_k，其中 $|V_0|\leq\varepsilon n$、$|V_1|=|V_2|=\cdots=|V_k|$ 满足 $m\leq k\leq M$，并且除 εk^2 对之外，所有 V_i、V_j 对都是 ε-正则的。

定义 3.16. 对任意图 G 和整数 $t\geq 2$，我们将其 t 膨胀记为 $G(t)$：该图由把 G 的每个顶点 v 替换为一个含 t 个元素的独立集 I_v 得到，并且当且仅当 u 和 v 在 G 中相邻时，$G(t)$ 中的顶点 $v'\in I_v$ 和 $u'\in I_u$ 相邻。

引理 3.17（关键引理 [6]）。给定 $d>\varepsilon>0$、一个图 R 和一个正整数 m，设图 G 由将 R 的每个顶点替换为 m 个顶点，并将 R 的每条边替换为密度至少为 d 的 ε-正则对而构造得到。设 H 是 $R(t)$ 的一个最大度为 Δ 的子图。设 $\delta=d-\varepsilon$ 和 $\varepsilon_0=\delta^\Delta/(2+\Delta)$。若 $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ 和 $t-1\leq\varepsilon m$，则 $H\subset G$。

定理 3.10 的证明。我们从构造 $H\subset 2(n,2)$ 入手，它表明 $\mathrm{ex}(n,K_{2,s,t},2)\geq\frac{13}{4}\binom{n}{2}$。设 $A=[\lfloor\frac{n}{4}\rfloor]$ 和 $B=[n]\backslash A$。对于一条边 $e\in\binom{A}{2}$，令 $W_H(e)=\{(1,1)\}$；对于一条边 $e\in\binom{B}{2}$，令 $W_H(e)=\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$；最后，对于满足 $|e\cap A|=|e\cap B|=1$ 的边 e，令 $W_H(e)=[2]\times[2]$。注意，H 不含 $K_{2.3,3}$ 的 3重副本。事实上，若 X 是支撑集之并的一个 8 元集合，则作为 $X\cap A$ 的 $|X\cap A|\leq 3$ 至多能包含一条边的支撑集。因此，$X\cap B$ 必须至少包含 5 个顶点，因而应当包含 $K_{2,3}$ 的一个 3重副本，但这与引理 1.8 矛盾。

假设 $H\subset 2(n,2)$ 不包含 $K_{2,s,s}$ 的任何 3重副本，其中 n 足够大。对于任意正实数 d，我们要证明 $|H|\leq(\frac{13}{4}+d)\binom{n}{2}$。显然，$|H_{1,1}|\leq\binom{n}{2}$，因此只需证明 $2|H_{2,1}|+|H_{2,2}|\leq(\frac{9}{4}+d)\binom{n}{2}$ 成立。

取 $\varepsilon_1<d/20$ 足够小，使得对于 $\delta=d/20-\varepsilon_1$ 和 $\Delta=3$，不等式 $\varepsilon_1\leq\delta^\Delta/(2+\Delta)$ 成立。我们令 $m\geq\lceil\frac{100}{d}\rceil$，并取其足够大，使得引理 3.12 蕴含其陈述中的 $w(W_m)\leq(\frac{9}{4}+d/2)\binom{m}{2}$。我们用 M_1 表示在 m 和 ε_1 的条件下由定理 3.15 得到的值。我们定义 $\varepsilon_2=\varepsilon_1/2M_1$，并通过在 ε_2 和 m 的条件下应用 3.15 得到 M_2。

The定理 3.15 得出 H_2 的一个 ε_2-正则划分 $V_0,V_1,\ldots,V_{k,2}$，其中 $m\leq k\leq M_2$.

- V_0 的关联边数在$H_{2,2}$ 和$H_{2,1}$中均至多为 $\varepsilon_2 n^2$。
- 通过选择 m，V_is 内的边总数至多为 $dn^2/100$ in $H_{2,1}$和 $H_{2,2}$。

- 在 $H_{2,2}$ 和 $H_{2,1}$ 中非正则对之间的边总数至多为 $\varepsilon_2 n^2$。
- 在密度至多为 $d/10$ 的 ε_2-正则对中，$H_{2,2}$ 边的总数至多为 $\frac{d}{10}\binom{n}{2}$。

- 对于对 V_i, V_j 中的 $H_{2,1}$ 边，若它们在 $H_{2,2}$ 中是 ε_2-正则的，且在 $H_{2,1}$ 中的密度至多为 $d/10$ ，则同样成立。

目前计入 $2|H_{2,1}| + |H_{2,2}|$ 的贡献不超过 $\frac{d}{2}\binom{n}{2}$。我们定义一个辅助的 W_k： $E(K_k) \to \{0, 2, 3\}$ 如下：若点对 V_i, V_j 在 $H_{2,2}$ 中是 ε_2-正则，且密度至少为 $d/10$，则令 $W_k(ij) = 3$；若点对 V_i, V_j 在 $H_{2,2}$ 中是 ε_2-正则，且密度小于 $d/10$，但在 $H_{2,2}$ 中至少为 $d/10$，而在 $H_{2,1}$ 中至少为 $d/10$，则令 $W_k(ij) = 2$；否则，令 $W_k(ij) = 0$。显然，尚未计入的 $2|H_{2,1}|+|H_{2,2}|$ 的贡献至多为 $(\frac{n}{k})^2 w(W_k)$。因此，若能证明 W_k 满足条件 $(\star)$，那么根据引理 3.12，该贡献至多为 $(\frac{n}{k})^2(\frac{9}{4} + d/2)\binom{k}{2} \le (\frac{9}{4} + d/2)\binom{n}{2}$，如所声称。

W_k 的 3-边构成一个无三角形图，否则就存在 V_i、V_j、V_h，使得所有数对 ε_2 都是密度至少为 $d/10$ 的正则对。因此，当 n 足够大时，引理 3.17 将给出 $H_{2,2}$ 中的 $K_{s,s,s}$ 的一个副本，而 H 中对应的 x 将构成 H 中 $K_{s,s,s}$ 的一个 3重副本。

反设存在 V_1、V_2、V_3、V_4，使得数对 (V_1, V_2)、(V_2, V_3)、(V_3, V_4) 和 (V_1, V_4) 在 $H_{2,2}$ 中均为密度至少为 $d/10$ 的 ε_2-正则对（因此， W_k 中对应的 3-边构成一个 4-圈），且数对 (V_1, V_3) 和 (V_2, V_4) 在 $H_{2,1}$ 中的密度至少为 $d/10$（因此它们是 W_k 的 2-边）。接着，我们对二部图 $G_1 := H_{2,1}[V_1, V_3]$ 和 $G_2 := H_{2,1}[V_2, V_4]$ 应用定理 3.15，其中 ε_1 和 m。将得到的 G_1 的划分记为 U_1、U_1、.....、U_ℓ，其中 $m \le \ell \le M_1$。由于密度至多为 $d/15$ 的 ε_1-正则对之间的边至多占 G_1 中边数的三分之二，而非正则对之间、部分内部或与 U_0 相邻的边数量更少，因此必定存在一个 ε_1-正则对 U_1, U_3，其密度至少为 $d/15$。根据正则对的定义， V_1 中不可能有超过 $\varepsilon_1|U_1|$ 个顶点同时属于 U_1 和 U_3。事实上， G_1 是二部图，因此这两个子部之间没有边，但其密度与 U_1, U_3 的密度之差不应超过 ε_1。对 V_3 也有类似结论。因此，经过适当重新标记后，我们可以找到 $U_1^* \subset U_1 \cap V_1$, $U_3^* \subset U_3 \cap V_3$，使得 $|U_1^*| = |U_3^*| = |U_1|/2 \ge |V_1|/2M_1$，于是数对 U_1^*, U_3^* 在 $H_{2,1}$ 中构成一个 $2\varepsilon_1$-正则对，密度至少为 $d/20$。同理，我们可以找到 $U_2^* \subset V_2, U_4^* \subset V_4$，使它们在 $H_{2,1}$ 中构成一个 $2\varepsilon_1$-正则对，密度至少为 $d/20$，且 $|U_2^*| = |U_4^*| = |U_1^*|$。由于 $|U_i^*| \ge |V_i|/2M_1$，数对 (U_i^*, U_{i+1}^*)（下标模 4 取值）均为密度至少为 $d/20$ 的 $2\varepsilon_2 \cdot M_2 = 2\varepsilon_1$-正则对。

我们将定理 3.17 应用于各部分 $U_1^*, U_2^*, U_3^*, U_4^*$，从而在图中得到一个膨胀$K_4(2s-1)$的副本 K。该图在 U_i^*, U_{i+1}^*之间取边自 $H_{2,2}$，在另外两对之间取边自 $H_{2,1}$。考虑 $K[U_1^*, U_3^*] = K_{2s-1,2s-1}$及 H中相应的边。这些边的非零项为 1 和 2。因此必定存在一个顶点 u，它至少与 s条边 $\mathbf{x}^i$ 相邻，这些边属于 H，且对应于 K 中的边，使得 $x_u^i = 2$。不失一般性，假设 $u \in U_1$；令 $u_1^3, u_2^3, \dots u_s^3 \in U_3^*$表示它的邻点，即满足 $x^i_{u_i^3} = 1$的那些顶点。同样，我们可以找到 $v \in U_2^*$, $u_1^4, u_2^4, \dots u_s^4 \in U_4^*$以及 H中的边 y^i，满足$y_v^i = 2$ 和 $y^i_{v_i^4} = 1$。但是， u 和 v 可以构成 K_2的一个 $(q+1)$-副本中大小为 2 的部分，s,s 位于H 中；其中 u_i^3s 和 v_j^4s 构成另外两部分，因为其余边对应于$H_{2,2}$中的边。

我们得到了矛盾，这表明 W_k 必须满足条件 $(\star)$ 的 C_4 部分。至此，定理的证明完成。□

4. Concluding remarks and open problems

让我们简要总结一下尚未解决的问题。

对于树 T（一般而言，对于森林），如果 $q \geq 3$，我们并不知道 $\mathbf{ex}(n, T, q)$ 的渐近行为，但我们猜测渐近极值构造会类似于 $q = 2$ 的情形，即 $\overrightarrow{H}_{a,\ \overline{a}}$ 应该是一个完全 r 部图，其中 r 是 T 的半径。

最有趣的开放问题是确定 $\mathbf{ex}(n, C_{2k+1}, q)$。我们猜想，对于任意 k 和 q，至少渐近地有 $q^2\,\mathbf{ex}(n, C_{2k+1})$。定理 1.7 对 $k = 1$ 和 $q = 2$ 验证了这一点。该定理有一个简单的归纳证明，因此我们在此说明，潜在归纳证明的基例是成立的。

Prop命题 4.1. 对于 $n = 2$、3、4 以及任意 $q \geq 2$，我们有 $\mathbf{ex}(n, K_3, q) = q^2\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$。

证明。 $n = 2$ 情形显然成立。

若 $n = 3$，结论由以下事实得出：在 $Q(3, 2)$ 中，$3q^2$ q-边的集合可以划分为两两不相交的三元组，每个三元组都构成一个 $(q + 1)$-副本三角形，因此，任何不含 $(q + 1)$-三角形的 $H \subset Q(3, 2)$ 最多只能包含这些三元组中的两条 q-边。若 a、b、c 表示“底集”的三个指标，则该划分如下：

- 对于任意 q 及所有 $j = 0$、1、...、$\lfloor \frac{q-2}{3} \rfloor$，以及所有 $i = 1$、2、...、$q - 1 - 3j$，考虑

$$(i + 2j, j + 1), \quad (q - j, i + j), \quad (q + 1 - i - j, q + 1 - i - 2j)$$

  在三对组的所有三个（循环）位置上

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, a).$$

- 对于任意 q 以及所有 $j = 0$、1、.....、$\lfloor \frac{q-3}{3} \rfloor$ 和所有 $i = 1$、2、.....、$q - 2 - 3j$，考虑

$$(i + j, i + 2j + 1), \quad (q - i - 2j, q - j), \quad (j + 1, q + 1 - i - j)$$

  在三对组的所有三个（循环）位置上

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, a).$$

- 如果 $q = 3r + 1$，也取

$$(2r + 1, r + 1), \quad (2r + 1, r + 1), \quad (2r + 1, r + 1).$$

- 如果 $q = 3r + 2$，也进行翻译

$$(r + 1, 2r + 2), \quad (r + 1, 2r + 2), \quad (r + 1, 2r + 2).$$

情形 $n = 4$ 可由 $n = 3$ 情形通过取平均得到。每条 q-边的支撑集属于指标的两个三元组，而这样的三元组共有四个。因此，我们得到 $2\,\mathrm{ex}(4, K_3, q) \le 4\,\mathrm{ex}(3, K_3, q) = 4 \cdot 2q^2$。□

这个问题可能并不容易的一个原因是，对于偶数值的 q，我们找到了若干个互不同构的 q-图，它们不包含 K_3 的 $(q+1)$-拷贝，且渐近规模相同。

- 第一个构造是 $U_{q,\ n}$，即定义 2.1 中定义的万能树。
- 第二种构造是一个不含 K_3、且包含所有可能的 q-边的普通图。这意味着（假设 n 和 q 都是偶数）这个 q-图有 $\frac{n^2}{4}q^2$$q$-边。
- 设 $n = 2k$。考虑两个大小为 k 的不相交集合 X 和 Y。在第三种构造中，我们将所有满足 $1 \le a, b \le \frac{q}{2}$ 的 q-边 (a, b) 放入 X和 Y，并将所有满足$1 \le c \le \frac{q}{2}$ 或 $1 \le d \le \frac{q}{2}$、位于 X 与 Y 之间的 q-边 (c, d) 放入其中。容易验证，这种构造也包含 $\frac{n^2}{4}q^2 - O(n)$ q-边。
- 对于 $q = 4$，我们有第四种构造。设 $n = 3k$ 和 X、Y、Z 是三个大小为 k 的不相交集合。我们在这些集合之间加入以下 q-边：– 在 X 和 Y 内部加入 q-边 (3, 1)、(2, 1)、(1, 1)、(1, 2)、(1, 3)；– 在 Z 内部加入 q-边 (2, 2)、(2, 1)、(1, 2)、(1, 1)；– 在集合 X 和 Y 之间加入所有满足 $1 \le a$、$b \le 3$ 的边 (a, b)；– 在集合 $X \cup Y$ 和 Z 之间加入以下边：当 $1 \le i \le 4$ 时为 $(1, i)$，当 $i = 2$ 时为 (i, j)，其中 3、4 和 $j = 1$、2。

很容易看出，这种构造也满足要求，且边的数量为

$$9k^2 + 2 \cdot 5 \cdot \binom{k}{2} + 10 \cdot 2k^2 + 4 \cdot \binom{k}{2} = 36k^2 - 7k = 4n^2 - O(n).$$

引理 2.5 确定了 $\mathrm{ex}(n, F, q)$ 的数量级，只要 $\chi_1(F) = \chi(F)$，并且在 $\chi_1(F) < \chi(F)$ 时给出了下界和上界。定理 1.11 给出了这两个界都不精确的例子。若能找到关于 F 的充分条件，使下界或上界达到紧确，将会很有意思。

References

[1] G. Bacs´o、Cs. Bujt´as、B. Patk´os、Zs. Tuza、M. Vizer。图的鲁棒色数。手稿。[2] P. Erd˝os、M. Simonovits。图论中的一个极限定理。《匈牙利数学科学研究》1（1966），51–57。[3] P. Erd˝os、A.H. Stone。论线性图的结构。《美国数学会通报》52（1946），1087–1091。[4] Z. F¨uredi、M. Simonovits。退化（二部）极值图问题的历史。载于《Erd˝os 百年纪念文集》。Springer，柏林、海德堡，169–264，2013。[5] S. Janson、A. Ruci´nski、T. Luczak。《随机图》。John Wiley & Sons，2011。[6] J. Koml´os、M. Simonovits。Szemer´edi 正则性引理及其在图论中的应用。载于《组合学：Paul Erd˝os 八十华诞纪念文集》第2卷（凯斯特海伊，1993），295–352，Bolyai 数学研究，2，J´anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，1996。

[7] P. K˝ov´ari、V.T. S´os、P. Tur´an。关于 Zarankiewicz 的一个问题。《数学讨论》3（1954），50–57。[8] B. Patk´os、Zs. Tuza、M. Vizer。向量和交定理。arxiv2305.01328。[9] E. Szemer´edi。图的正则划分。载于法国国家科学研究中心国际学术讨论会第260辑，《组合问题与图论》（奥赛，1976），第399–401页。

Alfréd Rényi Institute of Mathematics电
子邮箱地址：patkos@renyi.hu

Alfréd Rényi Institute of Mathematics and University of Pannonia电
子邮箱地址：tuza.zsolt@mik.uni-pannon.hu

Alfréd Rényi Institute of Mathematics电
子邮箱地址：vizermate@gmail.com