arXiv:2305.01923v1 [math.CO] 3 May 2023

图的鲁棒色数

G´abor Bacs´o[a] Bal´azs Patk´os[b] ZsoltTuza[b], [c]M´at´e Vizer[d][a] 计算机科学与控制研究所[b] Alfr´ed R´enyi数学研究所[c] 潘诺尼亚大学[d] 布达佩斯科技与经济大学

摘要

图 $G=(V,E)$ 的 1-删边子图 G_f 是通过以下方式得到的：

(*i*) 对每个顶点 $v \in V$ 至多选择一条边 $f(v)$，使得$v \in f(v) \in E$（映射 $f: V \to E \cup \{\varnothing\}$ 允许为非单射），并且

（*ii*）从 G 的边集 E 中删除所有选定的边 $f(v)$。

对 1-删边子图进行正常顶点着色，已证明是早期研究某些 Tur´an 型问题的有效工具。

本文系统地研究图不变量 1-鲁棒色数，记作 $\chi_1(G)$。该不变量定义为 G 的所有 1-删边子图 G_f 的色数 $\chi(G_f)$ 中的最小值。我们还以类似方式考察其他标准图不变量。

1 引言

我们考虑有限简单图 $G=(V,E)$，其中没有自环和重边。有时也会使用记号 $V(G)$ 和 $E(G)$。对于色数、团数、独立数和团覆盖数，我们分别使用标准记号 $\chi(G)$、$\omega(G)$、$\alpha(G)$ 和 $\theta(G)$。

定义 1（i）图 $G=(V(G)\ E(G))$ 中的一个 1-选择是一个映射$f:\ V(G)\ \to E(G)\cup\{\varnothing\}$，满足对于所有带有$f(v)\neq\varnothing$的 $v\in V(G)$，都有 $v\in f(v)$ 成立。顶点集为 $V(G_f)=V(G)$ 的图 G_f及其边集

$$E(G_f):=E(G)\setminus f(V(G))$$

称为 G 的 1-删边子图。

(ii) 如果一个图的每个连通分支都是树或单圈图，则称该图为准单圈图。

1-选择 f 的一种直观表示可以通过有向图 $D(G,f)$ 给出，其顶点集为 $V(G)$；对于每个具有非空像的 $v\in V(G)$，选择 $f(v)=vw$ 表示为弧 (v,w)，其方向从 v 指向 w。因此，也可能出现长度为 2 的有向圈。根据定义，在 $D(G,f)$ 中，所有顶点的出度至多为 1。由于这一原因，对于 1-选择 f， $D(G,f)$ 的底层无向图是准单圈图。

我们引入以下与 1-删边子图有关的图不变量。

定义2 对于图 G,

- G 的 1-鲁棒色数为 $\chi_1(G):=\min_f\chi(G_f)$,
- 图 G 的 1-鲁棒团数为 $\omega_1(G):=\min_f\omega(G_f)$,
- G 的 1-鲁棒独立数是 $\alpha_1(G):=\max_f\alpha(G_f)$,
- G 的 1-鲁棒团覆盖数为 $\theta_1(G):=\max_f\theta(G_f)$,
- G 的1-鲁棒色指数为 $\chi_1'(G):=\min_f\chi'(G_f)$,

其中，最小值和最大值均取遍 G 上的所有 1-选择 f。

下面的命题汇总了 1-鲁棒色数的一些基本性质。证明可由定义直接得出。

命题 1 (i) 图 $G=(V,E)$ 的值 $\chi_1(G)$ 等于划分 $V=V_1\cup\cdots\cup V_k$ 中顶点类 k 的最小数量，使得每个 V_i 在 G 中诱导出一个拟单圈子图。

(ii) 图 G 满足 $\chi_1(G)=1$ 当且仅当它是准单圈图。特别地，每棵树都有 $\chi_1=1$。

（iii）如果 $G=(V,E)$ 没有任何树分支，那么在计算$\chi_1(G)$ 时，可以不失一般性地只考虑满足单射条件的 1-选择 f，即对于任意两个不同的 v、$v'\in V$，都有 $f(v)\neq f(v')$。

由于（i），χ_1 对应于对定义“顶点森林度”的条件的一种弱化，因为在后者中只允许使用 1-选择的一个子族；参见第1.2节以及后文的命题12。

事实上，上述概念可以置于一个更一般的框架中。

定义3 对于非负整数 s，图 $G=(V,E)$ 上的 s-选择定义为一个函数 $f\colon V\to 2^E$，满足 $f(v)\subseteq E(v)$ 且 $|f(v)|\le s$，其中$E(v)$表示与顶点 v 相接的边集。根据此定义，可以通过对所有 s-选择取最小值或最大值，引入各种图参数，例如定义2中定义的 $\chi_s(G)$、$\omega_s(G)$、$\alpha_s(G)$ 等。

在这一形式体系下，G 的色数、团数、独立数和团覆盖数分别可以表示为$\chi(G)=\chi_0(G)$、$\omega(G)=\omega_0(G)$、$\alpha(G)=\alpha_0(G)$ 和 $\theta(G)=\theta_0(G)$。于是，常见的不等式可推广如下。

命题2 对于每个图 G 以及每个整数 $s\ge 0$，我们都有

$$\chi_s(G)\ge\omega_s(G)\qquad\text{and}\qquad\chi_s(G)\ge\frac{|V(G)|}{\alpha_s(G)},$$

此外

$$\theta_s(G)\ge\alpha_s(G)\qquad\text{and}\qquad\theta_s(G)\ge\frac{|V(G)|}{\omega_s(G)}.$$

简化术语。下文我们将重点讨论 $s=1$ 的情形，将 s 的较大取值留待后续研究。因此，对于参数 χ_1、ω_1、α_1、θ_1 和 χ_1'，我们将只写“鲁棒”，而不写“1-鲁棒”。

例1 如果 G 是有 $\chi(G)$ 条 $=\omega$的完全图 K_n（G），那么 $\chi_1(G)=\omega_1(G)=\lceil n/3\rceil$。下界 $\omega_1(G)\ge\lceil n/3\rceil$ 直接由 Tur´án 定理得出，因为使用一次 1-选择最多会删除 n 条边。上界 $\chi_1(G)\le\lceil n/3\rceil$ 很容易看出：将顶点集划分为 $\lceil n/3\rceil$ 个互不相交的集合 V_1、……、$V_{\lceil n/3\rceil}$，每个集合的大小至多为 3，然后删除每个 V_i内部的所有边。

例2 设 $t>k\ge 2$ 为任意整数。如果 G 是完全 k部图$K_{t,\dots,t}$，那么显然 $\chi(G)=\omega(G)=k$。但我们还有 $\chi_1(G)=\omega_1(G)=k$。事实上，G 包含 t^k 个 K_k的副本，并且每条边恰好包含在 t^{k-2}个 K_k的副本中。顶点数为 kt，因此移除这么多条边，最多只能破坏 $kt\cdot t^{k-2}=kt^{k-1}$ 个 K_k 的副本，而团数保持为 k。

下面我们将看到，结论 $\chi_1(G) = \omega_1(G) = k$ 对 $t = k$ 也成立，只要 $k \geq 3$。（如果 $k = 2$，情况则并非如此，因为 $\chi_1(K_{2,2}) = \chi_1(C_4) = 1$。）

1.1 动机与早期成果

鲁棒色数 χ_1 在 [7] 中被引入，作为一种有用的工具，用于推导关于边被赋予整数向量集合的图上的 Tur´án 型极值问题的估计。该论文针对完全多部图和随机多部图，建立了关于 χ_1 的以下结果。

定理 1 (i) *[7, 命题 2.6。]* 完全三部图 $K_{r,s,t}$，其中$1 \leq r \leq s \leq t$ 且 $t \geq 2$，满足 $\chi_1(K_{r,s,t}) = 2$ 当且仅当 $r \leq 2$；否则$\chi_1(K_{r,s,t}) = \chi(K_{r,s,t}) = 3$。（如果 $t = 1$，对于 K_1,1,1，我们有 $\chi_1(K_1,1,1) = \chi_1(C_3) =$1。）

(ii) *[7, 定理 1.10。]* 令 $K(m, r, p)$ 表示所有带标号的 r-部图组成的概率空间，其中每个部集的大小为 m，不同部分中的任意两个顶点以 p 的概率相连，且独立于其他任意顶点对。如果 $p = \omega(m^{-1/\binom{r}{2}})$，那么当 m 趋于无穷时，$\chi_1(K(m, r, p)) = r = \chi(K(m, r, p))$ 以趋于 1 的概率成立。

(iii) *[7]* 二部图 F 具有 $\chi_1(F) = 2$（即，$\chi_1(F) = \chi(F)$）当且仅当它包含一个边数多于顶点数的连通分支。

1.2 标准定义与记号

除 $\alpha, \omega, \chi, \theta, \chi'$（前文已出现）外，我们使用标准记号 $\delta(G)$ 表示最小顶点度，使用 $\Delta(G)$ 表示最大顶点度。此外，对于两个图 G 和 H，若 G和 H 顶点不交，我们用 $G \oplus H$ 表示它们的完全连接；而 $G \cup H$ 表示顶点集为$V(G) \cup V(H)$、边集为 $E(G) \cup E(H)$ 的图，其中 $V(G) \cap V(H) = \varnothing$ 可能成立，也可能不成立。G 和 H的字典积记为 $G \circ H$，其顶点集为 $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$；若两个顶点 (g', h')、$(g'', h'') \in V(G \circ H)$ 满足 $g'g'' \in E(G)$ 或 $g' = g''$ 且 $h'h'' \in E(H)$，则它们相邻。

以下定义了两个不太为人熟知但仍然重要的图参数：

- $a(G)$表示图 G的顶点森林度，其定义为将 $V(G)$划分为顶点类 a (V_1，...，V_a)所需的最少数量，使得每个 V_i 在 G中诱导出一个森林。

- $d(G)$表示图 G的退化度。它是满足每个诱导子图 G' 都满足 $\delta(G') \leq d$的最小非负整数 d，其中 G。

1.3 我们的研究成果

在第 2 节中，我们研究基本图操作——删边或删顶点、并与顶点不交并、字典积或取线图——对鲁棒色数的影响。

然后在第 3 节中，我们将 $\chi_1(G)$ 与一些最常考察的图参数进行比较。我们在下面的定理中总结了我们的发现。

定理 2

1. 对于每个图 G，我们有

$$\left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil \leq \chi_1(G) \leq \chi(G)$$

and

$$\left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil \leq \omega_1(G) \leq \omega(G).$$

所有这些界对于 χ 和 ω 的所有可能取值都是紧的。

2. 对于任意无孤立点图 G,

$$\theta(G) \leq \theta_1(G) \leq 3\theta(G)$$

且该上界是紧的。

3. 对于任意图 G，这些界

$$a(G)/2 \leq \chi_1(G) \leq a(G)$$

均成立且是紧的。

4. 设 k 为任意正整数。若 $\Delta(G) < 3k$，则

$$\chi_1(G) \leq k,$$

也就是说,

$$\chi_1(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{3} \right\rceil.$$

此外，对于 Δ 和 χ_1，这些界都是紧的，因为存在图G_k 满足 $\Delta(G_k) = 3k$ 和 $\chi_1(G_k) = k+1$。

5. 每个 d-退化图 G 都有

$$\chi_1(G) \leq d/2 + 1.$$

此外，这个上界是紧的，因为对于每个 $k \geq 1$，都存在一个图H_k，使得 H_k 是 $2k$-退化的，并且 $\chi_1(H_k) = k + 1$。

6. 若 $\Delta(G) > 1$，则

$$\chi_1'(G) \leq \chi'(G) - 2.$$

此外，

$$\delta(G) - 2 \leq \chi_1'(G) \leq \Delta(G) - 1.$$

所有这些界都是紧的。

Se定理 2 的各部分将在第 3 节的不同小节中证明。

在当前语境下，引入以下两个算法问题是很自然的:

Robust k-colorability输入：图 $G = (V, E)$，自然数 k。问题： $\chi_1(G)$ 是否 $\leq k$?

Robust coloring输入：图 $G = (V, E)$。解： $\chi_1(G)$ 的值。

由于下一个结果（我们将在第 4 节中证明），找出能高效确定 χ_1 的图类将会非常有意义。

定理 3 对于每个自然数 $k \geq 3$， Robust k-colorability问题都是 NP 完全的。此外，除非 P = NP，否则对于任意实数 $\varepsilon > 0$， Robust coloring 都不能在 $O(|V|^{1/2-\varepsilon})$ 范围内近似。

另一方面，我们证明 $\alpha_1, \omega_1, \chi_1, \theta_1$ 可在线性时间内针对有界树宽图计算。

结论部分提出了许多进一步的问题。

顶点划分与边分解。我们在引言的结尾讨论顶点集和边集的准单圈划分，并对二者进行比较。参数 χ_1 关注的是：将图的顶点划分为若干集合，使每个集合诱导出准单圈子图，所需的最少类数。事实证明，将边分解为这类子图有着截然不同的性质，而且可以更高效地处理。

定理 4 对于任意图 $G = (V, E)$，满足 $E(H_1) \cup \cdots \cup E(H_k) = E$ 的准单圈子图 $H_1, \ldots, H_k$ 的最小数量等于

$$\max_{U \subseteq V} \left\lceil \frac{e(G[U])}{|U|} \right\rceil,$$

其中，$e(G[U])$ 表示在 G 中由 U 诱导的边数。此外，最小的 k 及其对应的边分解可以在多项式时间内确定。

证明。根据 Hakimi 的一个结果 [2, 定理 4] 可知，若 $G = (V, E)$ 是一个无向图，且 t 是一个正整数，使得每个 $Y \subseteq V$ 在 G中至多诱导出 $t \cdot |Y|$ 条边，那么 G 存在一种定向，其最大出度至多为 t。关于 Hakimi 定理一般形式的后续发展历史、参考文献及简短证明，请参见 [9]的第 2.2 节。一旦为 G找到这种满足 $t = \max_{U \subseteq V} \left\lceil \frac{e(G[U])}{|U|} \right\rceil$ 的定向，我们就可以将边集划分为t 个类，使得每个顶点的出边分别属于互不相同的类。于是，每个类都构成一个所有顶点出度均为 0 或 1 的图，因此每个边类都是一个准单环图。

关于所引用的已知结果，我们还知道，可以利用二部图中的最大匹配算法，得到使最大出度最小的定向。这可以在多项式时间内求解。□

2 初等图操作

以下结果汇总了若干常见图操作所产生的影响。

定理 5 (i) *[删边、删顶点。]*

不变量 $\alpha_1, \omega_1, \chi_1, \theta_1$ 关于图包含具有如下单调性。

如果 G 是任意一个图，且 H 是 G 的生成子图，那么

$$\alpha_1(G) \leq \alpha_1(H), \qquad \theta_1(G) \leq \theta_1(H),$$

并且，如果 H 是 G的任意子图，那么

$$\omega_1(G) \geq \omega_1(H), \qquad \chi_1(G) \geq \chi_1(H).$$

(ii) *[顶点不交并]*

如果 G 不连通，且 G_1、.....、G_k 是其连通分支，那么

$$\chi_1(G) = \max_{1\leq i\leq k} \chi_1(G_i), \qquad \omega_1(G) = \max_{1\leq i\leq k} \omega_1(G_i),$$

$$\alpha_1(G) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_1(G_i), \qquad \theta_1(G) = \sum_{i=1}^{k} \theta_1(G_i).$$

(iii) *[两个图的并]*

If $V(G_1) = V(G_2)$, *then*

$$\chi_1(G_1 \cup G_2) \leq \min\left\{\chi(G_1)\chi_1(G_2),\, \chi_1(G_1)\chi(G_2)\right\},$$

并且该界是紧的。

(iv) *[一般图并]*

如果 $G_1, \ldots, G_k$ 是具有相同顶点集的图，那么

$$\chi_1(G_1 \cup \cdots \cup G_k) \leq (2k+1)\prod_{i=1}^{k} \chi_1(G_i).$$

此外，存在图 G_1、.....、G_k，使得

$$\chi_1(G_1 \cup \cdots \cup G_k) \geq \frac{2k+1}{3}\prod_{i=1}^{k} \chi_1(G_i).$$

(v) *[字典积]*

对于任意两个图 G 和 H，我们有 $\chi_1(G\circ H)\le\chi(G)\cdot\chi_1(H)$。

(vi) *[线图]*

与正常着色的概念不同，一元运算 $G\mapsto L(G)$ 并不能在 G 的鲁棒边着色与 $L(G)$ 的鲁棒顶点着色之间建立直接对应关系；特别是，通常不成立 $\chi_1'(G)=\chi_1(L(G))$。

证明。(*i*) 的证明：只需注意，对每个图 $G=(V,E)$ 及其每条边 $e\in E$，不等式 $\alpha(G)\le\alpha(G-e)$,$\chi(G)\ge\chi(G-e)$，$\omega(G)\ge\omega(G-e)$，$\theta(G)\le\theta(G-e)$ 均成立。

(*ii*) 的证明：只需在 G 的每个连通分支中选取一个最优的 1-选择，即可得到这些等式。

(*iii*) 的证明：只需在两个图中的一个图里取一个 1-选择，并应用 χ 是次乘性函数这一事实。以下示例说明其紧致性。对于 $p,q\ge3$ 满足 $3p\ge q$ 的情形，我们将 $G=K_{3pq}$ 划分为完全 q-部图 $G_1=K_{3p,\ 3p,\ \ldots,\ 3p}$ 和 q 个团的不交并 $G_2=qK_{3p}$。于是 $\chi_1(G)=pq$, $\chi(G_1)=\chi_1(G_1)=q$, $3\chi_1(G_2)=\chi(G_2)=3p$，因此 $pq=\min\{\chi(G_1)\chi_1(G_2)\ \chi_1(G_1)\chi(G_2)\}=\min\{qp,q\cdot3p\}$。

（*iv*）的证明：对于 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k$，令 F_i 为 G_i 上一个最优 1-选择 f_i 中的边集（最优是指 $\chi(G_i-F_i)=\chi_1(G_i)$）。那么，顶点集的任意子集 X 所诱导的 F_i 至多有 $|X|$ 条边，因此每个诱导子图中的平均度

$$F:=F_1\cup\cdots\cup F_k$$

至多为 $2k$。由此可得，$\chi(F)\le2k+1$。因此，将并集写成如下形式

$$G_1\cup\cdots\cup G_k=F\cup(G_1-F_1)\cup\cdots\cup(G_k-F_k)$$

并应用 χ 的乘法性质，即可得到上界。

一个展示所声称下界的简单例子，可以通过完全图 K_{2k+1} 的哈密顿分解得到。这将产生 k 个哈密顿圈，我们可以将其取为 $G_1,\ldots,G_k$。那么，显然，对于每个 i，$\chi_1(G_i)=1$ 都成立；然而，正如例1所示，我们有 $\chi_1(K_{2k+1})=\lceil\frac{2k+1}{3}\rceil$。

证明（ v $g \in V\ G$ $V_g = \{ g\ h \mid h \in$ ）： $V\ H$ H $G \circ H$ 1 对于每个（）顶点子集：（，） （）} 在中诱导出一个同构于的子图。选择 H的一个最优-选择 f： $V(H) \to E(H)$，并将其复制到每个 V_g中，从而创建一个1-选择 $f_{G\circ H}$。从 $G \circ H$中移除边集 $f_{G\circ H}V(G \circ H)$后，每个 V_g都可划分为独立集$V_{g,i}$，对于 $i = 1, \ldots$,$\chi_1(H)$。因此，我们可以考虑 G 的一个适当顶点着色 φ： $V(G) \to \{1, \ldots, \chi(G)\}$，其颜色数最少，并将 $V(G \circ H)$分解为集合$\bigcup_{g\in S} V_{g,i}$，其中 S 遍历 φ的颜色类。显然，这些 $\chi(G) \cdot \chi_1(H)$集合中的每一个在（$G \circ H$） $- f_{G\circ H}V(G \circ H)$中都是独立的，从而验证了该断言的有效性。

证明（vi）：作为一个简单的例子， $L(K_4) = K_6 - 3K_2$，因此 $\chi_1(L(K_4)) = 2$；而移除1-选择 $C_4 \subset K_4$ 后，我们得到 $2K_2$，因此 $\chi_1'(K_4) = 1$。作为一个无限类，星图 $K_{1,}$ m m χ_1 m = 具有 $\chi_1'(K_{1,}) = 1$ χ_1 K_m $= \lceil m/3 \rceil$ □ 和 $(L(K_{1,}))$ ( ) 。

应当注意，(v) 中的两个不变量不能互换；也就是说， $\chi_1(G) \cdot \chi(H)$ 并不是 $\chi_1(G \circ H)$ 的上界。取足够大的无边图作为 H，即可得到简单的反例。

3 与其他图不变量的比较 S

在本节中，我们将鲁棒参数 ω_1、 θ_1 和 χ_1 与若干重要的图不变量进行比较。

3.1 团数

命题 3 对于每个图 G，我们有

$$\left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil \leq \chi_1(G) \leq \chi(G) \tag{1}$$

and

$$\left\lceil \frac{\omega(G)}{3} \right\rceil \leq \omega_1(G) \leq \omega(G). \tag{2}$$

对于 χ 和 ω 的所有可能取值，这些界都是紧的。

证明。(2) 中的上界可直接由定义得出。此外，(2) 中的下界可由例1所示的完全图的性质推出。对于(1)中的下界，令 $k = \chi_1(G)$，并考虑颜色类

$V_1, \ldots, V_k$，它们是 G 的子图 G_f 的颜色类，其中 $k = \chi(G_f) = \chi_1(G)$。根据命题1($i$)，诱导子图 $G[V_i]$ 是单圈图，因此对所有 $i \in [k]$ 都是可3着色的。因此，每个 V_i 都可以划分为至多三个在 G 中相互独立的集合，由此我们得到 G 的一个着色划分，其中至多有 $3k = 3\chi_1(G)$ 个颜色类。这说明 $\chi(G) \leq 3\chi_1(G)$，下界得证。

对于任意 χ 的取值，例 1 和例 2 均证明了紧致性。 □

事实上，正如后文将要证明的那样，存在范围广泛得多的图类，使得式 (1) 两侧中的任意一侧都能取到等号。

3.2 团覆盖数

在此，我们讨论与 $\theta(G)$ 对应的鲁棒性参数 $\theta_1(G)$.

命题 4 对于每个无孤立点图 G,

$$\theta(G) \leq \theta_1(G) \leq 3\theta(G)$$

并且该上界是紧的。

证明。显然，对于每个图 G，不等式 $\theta_1(G) \geq \theta(G)$ 都成立。为证明上界 $3\theta(G)$，我们取 G 的一个最小覆盖（共着色），并令 Q 为其中任意一个类。将 G 的任意一个 1-选择 S 视为一个图。对其补图进行研究更为方便。由 Q 诱导出的 S 的子图的色数至多为 3，因为所有的圈和森林都是可3着色的。因此，回到 G 并从 Q 中删除 S 后，所得子图的余色数至多为 3。对任意类应用这一结论，即得所述上界。

任意多个阶至少为 3 的团的顶点不交并表明了紧致性。事实上，可以从这些团中的每一个删去一个三角形。于是，经过适当的 1-选择后，每个原团在团覆盖中都至少需要三个团。□

3.2.1 一个开放问题

我们在此将以下猜想形式化。

C猜想 1 下界 $\theta_1 \geq \theta$ 并不紧，除无边图外。

为了在这一方向上给出部分结果，本小节剩余部分将分析一个假想反例的性质。我们将用以下术语来称呼它。

定义 4 如果图 G 满足 $\theta_1(G) = \theta(G)$，则称其为精确图。

3.2.2 精确图的性质

除非另有明确说明，在本小小节中始终假设 G 是精确图。

定义 5 如果 G 满足 $\theta(G) = k$，但对每个 $x \in V(G)$均有 $\theta(G-x) = k-1$ 成立，则称图 G 是临界 k-余色的。此外，如果 G 对某个 k是临界 k-余色的，则称 G 是临界的。

命题 **5** G 是临界的。

证明。如果 G 不是临界的，则存在一个顶点 x，使得 $\theta(G-x) = \theta(G)$。记所有与 x关联的边组成的集合为 X。在图 H 中：$= G - X$ 任意团覆盖都包含 $\{x\}$，因此 $\theta(H) = \theta(G-x) + 1$。边集 X可以扩展为生成森林 F，并且

$$\theta(G-F) \geq \theta(G-X) = \theta(H) = \theta(G-x) + 1 = \theta(G) + 1.$$

这里 $G - F$是一个删边图，因此 $\theta_1(G) \geq \theta(G-F) > \theta(G)$。 □

命题 **6** $\theta(G) > \alpha(G)$。

证明。反设 $\theta(G) = \alpha(G)$ 成立。任取$x \in V(G)$，并利用等式和临界性，

$$\alpha(G-x) \leq \theta(G-x) \leq \theta(G) - 1 = \alpha(G) - 1$$

因此， x 包含于该图的每个最大独立集中。由于 x 是任意的，这意味着 G是无边的，矛盾。□

接下来，我们给出一个令人惊讶的事实。

推论 **1** G非完美。

证明。反设 G 完美。于是，根据弱完美图定理 [4], 我们有 $\theta(G) = \alpha(G)$, 这与命题6矛盾。□

推论2 存在一个诱导的 P_4 于 G中。

证明。Seinsche 的一个很早的结果 [8] 表明，如果一个图没有诱导的 P_4，那么它就是完美的。因此，我们由推论1得到该结果。□

命题7 对于 G，以下情况是不可能的：对于 G的某个顶点三元组 a、b、c，在 $G - a$的任何共着色中，顶点 b和 c具有相同的共着色。

证明。假设 G 是精确的，并考虑边集 X，该边集由边 bc 以及与 a相 incident 的所有边组成。我们将 X 扩展为一个1-选择 S。因此，在 $G - S$的任意最小共着色中，$\{a\}$ 将形成一个单元素类；此外，b 和 c 不能具有相同的共着色，这就产生了矛盾。□

由命题7我们得到:

C推论3 对于 G的任意顶点 a，图 $G-a$ 不是唯一可共着色的。

定义6 如果对于每个顶点 a，图 $G - a$ 都可以表示为一个矩形，其中行是稳定集，列是团，则称该图是可划分的。

可以证明（见 [5]），在可划分图 G 中，行的大小为 $\alpha(G)$，列的大小为 $\omega(G)$。

推论 **4** G 不可划分。

证明。一个众所周知（但并非显而易见）的事实是， [6] 证明了在可划分图中，$G - a$ 对于任意 a都是唯一可共着色的。因此，我们可以应用推论3。 □

由上述结果可知，无弦环及其补图都是非精确的。（对于偶阶的情形，它们是完美的；对于奇阶的情形，它们是可划分的。当然，也可以通过初等的直接证明来验证其非精确性。）

由于根据命题 5， G 是临界的，因此其补图是色数临界图，以下陈述成立。

命题1 设 G 是猜想1的反例，且顶点数最少。那么 G 及其补图都是连通的。

定理6 G 的每条边都至少包含在两个三角形中。

证明。设 $\theta(G) = k$。反设边 $e \in E$ G $x_1x_2 =$ S ( ) 至多出现在一个三角形中。由包含 θ G x_1 x_2 $G-S$ $\mathcal{C}$ k 或 (或两者) 的边所构成的子图是准单圈的。由于 G 是精确的， $\theta(G-S)$ ( ) 成立；也就是说，存在某种使用 colors 的共着色。根据 S 的构造， x_1 和 x_2 在 $G-S$ 中是孤立的，因此它们必然在 $\mathcal{C}$ 中形成单元素共着色类。此外，在 $G[V-\{x_1,x_2\}]$ 中， $\mathcal{C}$ 有 $k-2$ 个类，这些类在 G 中也构成团。但是，我们可以添加由 x_1 和 x_2 组成的团，从而在 G 中得到一个 $(k-1)$-共着色，这就产生了矛盾。

□

命题 **8** $\theta(G) \geq 4$.

证明。否则， $\theta(G) \leq 3$。如果 $\theta(G)$ 至多为 2，那么 $\overline{G}$ 是二部图，因此 G 是完美图，这不可能。这意味着 $\theta(G) = 3$ ，且 $\overline{G}$ 是临界三染色的。显然， $\overline{G}$ 是无弦奇圈，而我们已由推论4排除了这种情况。□

定义7 如果一个顶点集 W 在 G 中诱导出一个准单圈子图，则称其为诱导集。我们记作

$$\iota(G) := \max\{|W| : W \text{ is an inducing set in } G\}.$$

命题 **9** $\theta(G) \geq \iota(\{v4)$。

证明。取一个诱导顶点集 W in G with $|W| = \iota(G)$。由 W 诱导的边集构成一个拟单圈子图，并且可以将其扩展为 G 的一个 1-选择 f。如果从 G 中删除 f 的所有边，就得到一个 1-删除图 G_f。因此， W 在 G_f 中将是独立的。由此，

$$\theta(G) = \theta_1(G) \geq \theta(G_f) \geq \alpha(G_f) \geq |W|,$$

从而证明该断言。 □

注 1 举例来说，令 $\theta(G) = 4$。在这种情况下， G中不可能存在大小为 5 的诱导集。为了使图集 $\mathcal{C}$ 不能作为诱导子图出现，我们列出一组阶为 5 的图；它们在边集方面是 $\mathcal{C}$ 中极大的：

C_5、 C_4 加上一片叶子，以及由一个 C_3 构造的三个图：

牛头图（两片叶子分别连接到不同的顶点）、两片叶子连接到同一个顶点的图，以及最后一个带有一条长度为 2 的附加路径的图。

由此可知，该列表中任意图的任何生成子图都被 G 禁止。

定义 8 若对于每个 $x \in V - D$， x 在 D 中至少有一个邻居，则顶点集 D 在 G 中是支配集。

定义 9 若边 ab 的集合 $\{a, b\}$ 是支配集，则称边 ab 为支配边。

命题 10 若 $\theta(G) \leq 4$ ，则 G 含有一条支配边。

我们证明一个更强的结论。回顾推论2， G 至少包含一个诱导的 P_4。下一个断言表明， G 中任意诱导的 P_4 的中间边都是支配边。

命题11 若 $\theta(G) \leq 4$ ，则对于每个诱导出 P_4的顶点集 P 以及每个 $x \notin P$， x 在 P中至多有一个非邻点。

证明。若顶点 x 在 P中至少有两个非邻点，则 $P \cup \{x\}$ 诱导出一个阶为 5 9 $\theta\ G\ \geq$的拟单圈子图。根据命题，这将意味着 $\iota\ G\ \geq 5$ ，产生矛盾。 □

3.3 顶点森林度

命题12 对于每个图 G ， 界 $a(G)/2 \leq \chi_1(G) \leq a(G)$均成立且是紧的。

证明。上界可直接由定义得到。此外，该界是紧致的，因为当 G 是一棵树时， $\chi_1(G) = 1 = a(G)$ 成立。对于任意大的 $a(G)$，请参见例2：一个完全多部图，其顶点类的数量为任意 k ，且每个类中的顶点多于 k 个，满足等式 $\chi_1 = \chi = k$，因此其顶点森林度也相同。

对于下界，我们使用命题 1(i)，并注意到在最优边选择函数 f 下，每个省略的圈的顶点集都可划分为两条路径，从而得到 G 的一种着色，使得每个颜色类诱导出一棵树。例如，任意一个每个连通分支都是一个圈的图 G 都能说明该界是紧致的。于是我们有 $\chi_1(G) = 1$ 和 $a(G) = 2$。

对于一般的 $\chi_1 = k$，我们也可以给出构造 G_k。令 V_1、.....、V_k 为两两不相交的集合，且每个集合的大小均为 $3k$。在任意两个 V_i、V_j 之间放置一个完全二部图 $K_{3k,3k}$，并在每个 V_i 内放置 k 个互不相交的三角形。我们证明该图具有 $a(G_k) = 2k = 2\chi_1(G_k)$。

假设 $X_1 \cup \cdots \cup X_a = V(G_k)$ 是一个顶点划分，划分为 $a = a(G_k)$ 个类，且每个 X_ℓ 都诱导出一个无圈子图。为作区分，我们称 V_i 为 G 的一个部分，称 X_ℓ 为 G 的一个类。每个类至多与两个部分相交，否则就会诱导出至少一个三角形。因此，我们可以有完全包含在某个部分中的“单类”，以及与两个部分相交的“双类”。我们先考虑单类。

如果某个部分包含多个单类，那么不失一般性，我们可以假设它恰好是两个单类的并集。我们删除所有这些部分和类，分别记为 k'' parts 和 $2k''$ classes。剩余的图记为 G'，它有 $k' := k - k''$ 个部分，顶点森林度为 $a' := a - 2k''$。我们需要证明 $a' \geq 2k'$ 成立。令 $a' = s + d$，其中 s 和 d 分别表示单类和双类的数量。单类的大小至多为 $2k$，且最多有 k' 个；而双类的大小至多为 $k+1$，因为它与两个部分之一相交时只能包含一个顶点（以避免形成 C_4），并且在另一个部分的每个三角形中至多包含一个顶点。由于必须覆盖所有 $3kk'$ 个顶点，因此我们得到

$$a' = s + d \geq s + \frac{3kk' - 2ks}{k+1} = \frac{3kk' - (k-1)s}{k+1} \geq k' \cdot \frac{2k+1}{k+1} = 2k' - \frac{k'}{k+1},$$

这意味着，当 a' 为整数时，$a' \geq 2k'$。 □

3.4 顶点度数

定理7（最大度）令 k 为任意正整数。若 $\Delta(G) < 3k$，则 $\chi_1(G) \leq k$；也就是说，$\chi_1(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{3} \right\rceil$。此外，对于 Δ 和 χ_1，这些界都是紧致的，因为存在图 G_k 满足 $\Delta(G_k) = 3k$ 且 $\chi_1(G_k) = k + 1$。

证明。从关于紧致性的断言开始，完全图 K_{3k+1} $G_k =$ 是合适的例子。

对于关于 χ_1 的断言，设 $G = (V, E)$ 是一个最大度至多为 $3k-1$ 的图。我们取 G 的一个顶点划分 $(V_1, \ldots, V_k)$，使连接不同类 V_i, V_j $(1 \le i < j \le k)$ 的边总数尽可能大。于是，每个类所诱导的子图的最大度至多为 2。事实上，若 $v \in V_i$ 在 V_i 内至少有三个邻点，那么连接 v 与其他 $k-1$ 个类的边至多有 $3k-4$ 条，因此存在一个类 V_j，使得 v 在其中至多有两个邻点。随后重新定义 $V_i := V_i \setminus \{v\}$ 和 $V_j := V_j \cup \{v\}$，便得到一个跨类边更多的划分，这就产生了矛盾。因此，每个类所诱导的子图都是路径和圈的并，所以一个 1-选择可以包含 k 个类内部的所有边，从而 $\chi_1(G) \le k$。□

定理8（退化度）每个 d-退化图 G 都有 $\chi_1(G) \le d/2+1$。此外，这个上界是紧的：对于每个 $k \ge 1$，都存在一个图 H_k，使得 H_k 是 $2k$-退化的，且 $\chi_1(H_k) = k+1$。

证明。考虑一个退化数为 d 的图 G。设 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 是图 G 的一个顶点枚举，满足每个 v_i 在 $\{v_j$ 中至多有 d 个邻点：$j < i\}$。我们同时定义一个 1-选择 f：$V(G) \to E(G)$ 和一个着色 c：$V(G) \to \{1, 2, \ldots, \lfloor d/2 \rfloor + 1\}$。令 $c(v_1) = 1$，并令 $f(v_1)$ 为图 G 中与 v_1 相 incident 的任意一条边。假设对于所有顶点 $v_1, \ldots, v_i$，我们已经定义了 c 和 f，且 c 是 $G[v_1, \ldots, v_i]_f$ 的一个正常着色。那么，由于 v_{i+1} 在 $v_1, \ldots, v_i$ 中至多有 d 个邻点，因此必定存在某个 $j \le \lfloor d/2 \rfloor + 1$，使得颜色类 $c^{-1}(j)$ 满足 v_{i+1} 在 $c^{-1}(j)$ 中至多有一个邻点。于是令 $c(v_{i+1}) = j$，并将 $f(v_{i+1})$ 定义为连接 v_{i+1} 与其在 $c^{-1}(j)$ 中唯一邻点的边（如果该邻点存在；否则，$f(v_{i+1})$ 可以是与 v_{i+1} 相 incident 的任意一条边）。显然，一旦在整个图上定义了 c 和 f，c 就是 G_f 的一个正常着色。由此得到上界 $d/2+1$ 的证明。

紧致性对于 $d = 2$，即 $k = 1$，由 $H_1 := K_4 - e$ 可知。一个一般构造将具有顶点集 $V = V(H_k) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k'}$ 其中 $k' = \lceil (2k+1)/3 \rceil$ 即可满足要求。由 V_0 诱导的子图是 K_{2k}。对于每个 $1 \le i \le k'$，集合 V_i 是独立的，大小为 $(k+1) \cdot \binom{|V_0|+\ldots+|V_{i-1}|}{2k}$。每个 $v \in V_i$ 在 $\bigcup_{j=0}^{i-1} V_j$ 中有 $2k$ 个邻点，而 $\bigcup_{j=0}^{i-1} V_j$ 的任意 $2k$ 个顶点在 V_i 中都有 $k+1$ 个公共邻点。这个图 H_k 显然具有退化数 $2k$，因此定理的第一部分保证 $\chi_1(H_k) \le k+1$。

反设 $\chi_1(H_k) \le k$，并设 $V = X_1 \cup \cdots \cup X_k$ 为一个顶点划分，其中每个 X_j 都诱导出一个准单圈图。注意。

并且 $K_4^- := K_4 - e$ 不是准单圈的。对于一个 $i \geq 0$，我们记 $c_i = |\{j\colon X_j \cap (\cup_{h=0}^{i} V_h) \neq \emptyset\}|$ 和 $p_i = |\{j\colon H_k[X_j \cap (\cup_{h=0}^{i} V_h)] \text{ 包含一条边}\}|$。由于 $K_k[V_0]$ 是完全的，我们有 $c_0 + p_0 \geq \lceil \frac{4k}{3} \rceil$ 和 $c_0 \geq \lceil \frac{2k}{3} \rceil$。我们声称，只要 $p_i < k$，就有 $c_i + p_i < c_{i+1} + p_{i+1}$。事实上，考虑一个集合 $D \subseteq \cup_{h=0}^{i} V_h$，它在所有 p_i 种可能的颜色中都包含一条边，并且包含来自所有可能的 c_i 颜色类的一个顶点。在 V_{i+1} 中存在一个由 $k+1$ 个顶点组成的集合 N，其中的顶点均与 D 的所有顶点相邻。由于 K_4^- 不是准单圈的，因此 N 在 D 中至多包含来自每个颜色类的一个顶点。由于 $p_i < k$，存在一个顶点 $x \in N$，其颜色不属于这些颜色。如果它的颜色类是一个全新的颜色类，那么 $c_{i+1} > c_i$ 就会增加；如果该颜色之前已经出现过，即出现在 D 中，那么 $p_{i+1} > p_i$。由于对于所有 i， $c_i \leq k$，因此
$c_0 + p_0 \geq \lceil \frac{4k}{3} \rceil$ $c_0 \geq \lceil \frac{2k}{3} \rceil$ $p_i = k$ $i \leq \frac{2k}{3}$ ，并且可推出存在某个 。

最后，我们断言，若 $p_i = k$，则颜色类 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 无法扩展为 V_{i+1}。为此，再次考虑一个包含来自 $\cup_{h=0}^{i} V_i$ 中每种颜色的一条边的 $2k$ 个顶点集合 D'，并令 N' 为它在 V_{i+1} 中的 $k+1$ 个顶点的合并邻域。根据鸽巢原理，存在两个属于同一颜色类的顶点 x、y，不妨设该颜色类为 X_1。于是它们与 $D \cap X_1$ 中的边 e 共同构成 X_1 中的一个 K_4^-，这与 $H_k[X_1]$ 是准单圈这一事实矛盾。 □

3.4.1 对平面图和外平面图的推论

在这个极短的小节中，我们推导出关于平面图的两个推论，其着色性质是图论中最经典的问题之一。

定理9 (*i*) 如果 G 是一个外平面图，那么 $\chi_1(G) \leq 2$。(*ii*) 如果 G 是一个平面图，那么 $\chi_1(G) \leq 3$。

证明。两个部分都是定理8的推论。每个外平面图都是2-退化的，因此取 $d(G) = 2$可得(*i*)。此外，每个平面图都是5-退化的，因此取 $d(G) = 5$可得(*ii*)。□

3.5 色指数

定理10 若 $\Delta(G) > 1$，则 $\chi_1'(G) \leq \chi'(G) - 2$。此外，

$$\delta(G) - 2 \leq \chi_1'(G) \leq \Delta(G) - 1.$$

所有这些界都是紧的。

证明。为了证明上界 $\chi'(G) - 2$，我们考虑一个使用 $\chi'(G)$ 种颜色的 ψ 边着色。选取两个颜色类，记为 E_1 和 E_2。于是，在 $E_1 \cup E_2$ 中，每个连通分支都是一条路径或一个圈，因此可以将 $E_1 \cup E_2$ 变为一个 1-选择 f。将 ψ 限制到 $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ 后，可用 $\chi'(G)$ 种 -2颜色对 G_f 进行正常的边着色。根据 Vizing 定理，这也意味着 $\chi_1'(G) \leq \Delta(G) - 1$。

对于下界 $\delta(G) - 2$，我们注意到，移除至多 $|V(G)|$ 条边，顶点度数的平均降幅至多为 2。因此，剩下的图中仍有一个顶点，其度数至少为 $\delta(G) - 2$，这意味着对于每个 1-选择 f，都有 $\chi'(G_f) \geq \delta(G) - 2$。

类型 1 的正则图具有 $\delta(G) = \Delta(G) = \chi'(G)$，且最优边着色中的每个颜色类都是一个完美匹配。因此，移除两个颜色类会使所有这些参数恰好减少 2。完全图（奇数阶）的例子可以证明 $\chi_1'(G) \leq \Delta(G) - 1$ 的紧致性。□

另一方面，需要注意的是，不存在关于 $\Delta(G)$ 的 $\chi_1'(G)$ 下界。这一事实可以通过任意大最大度的树来证明，这些树具有 $\chi_1' = 0$。

4 算法复杂度

在本节的第一部分中，我们证明了对于一般的输入图，计算鲁棒色数，甚至对其进行近似计算，都是困难的。随后，我们展示了如何在线性时间内计算有界树宽图上的全部四个参数 $\alpha_1, \omega_1, \chi_1, \theta_1$。

对于 NP 困难性结果，我们重述定理 3：

> 对于每个自然数 $k \geq 3$， Robust k-colorability 问题都是 NP 完全的。此外，除非 P = NP，否则对于任意实数 $\varepsilon > 0$， Robust coloring 都无法在 $O(|V|^{1/2-\varepsilon})$ 的范围内近似。

证明。我们首先观察到 Robust k-colorability 属于 NP 类。证书是一个顶点 k 划分，使得每个部分诱导出一个准单圈图；该证书可在多项式时间内验证。这里不要求固定 k，它也可以依赖于输入图的阶。

为了证明这些困难性结果，我们将图的正规顶点着色问题归约到相应的问题。众所周知，对于每个 $k \geq 3$，判定一个一般输入图是否可 k 着色是 NP 完全的。现在，对于阶为 n 的任意 $G = (V, E)$，我们将 G 的每个顶点 v 替换为

一个大小为 $n+1$ 的独立集 S_v；如果两个顶点 v、$w \in V$ 相邻，则边 vw 扩展为 $K_{n+1,\ n+1}$，否则对应的两个（$n+1$）集合之间不画边。这样便得到一个阶为 n（$n+1$）的图 G^+，且该变换可在多项式时间内完成。我们声称:

$$\chi_1(G^+) = \chi(G^+) = \chi(G).$$

第二个等式显然成立，因为 G 是 G^+ 的子图；另一方面，G 的每个正常着色都可以自然地扩展为 G^+ 的一个正常顶点着色，且所用颜色数相同。

为验证第一个等式，我们注意到，以所有可能的方式从每个集合S_v 中选取一个顶点，可以得到 $(n+1)^n$ 个与 G 同构的不同子图。每条边都包含在其中的 $(n+1)^{n-2}$ 个子图中。因此，从 G^+ 中删除一个 1-选择 $f(V(G^+))$，最多只能破坏 $n(n+1)^{n-2}$ 个 G $G \subset G^+ - f\ V\ G^+$ $\chi_1\ G^+\ \geq$ 的副本，因 $\chi\ G\ = \chi\ G^+\ \geq \chi_1\ G^+$ 此我们仍然有 ((( )). 因此，( ) ( ) ( ) ( )。这就证明了等式，并完成了 NP-完全性的证明。

为证明不可近似性，我们引用 Zuckerman 的重要结果 [10]： $\chi(G)$ 在 $n^{1-\varepsilon}$ 范围内不可近似。在我们的情形中，$n \approx \sqrt{|V(G^+)|}$ 成立，这意味着随着 $n \to \infty$，对 $\chi_1(G^+)$ 的近似所产生的乘法误差将以快于 $|V|^{1/2-\varepsilon}$ 的速度趋于无穷大。□

现在我们转向正面的结果。在陈述该定理之前，我们需要先进行一些技术性介绍。

图 G 的树宽记作 tw(G)，其值等于 min ($\omega(H)\ -1$)，其中最小值取遍所有弦图 $H \supseteq G$。从算法的角度来看，树宽也可以通过树分解来等价地定义；我们将采用下文所定义的一种更具体的树分解形式。关于树宽理论的基础知识，请参阅 [3]以及 [1] 的第 7 章和第 11 章。

给定任意图 $G = (V, E)$，G 的一个优美树分解 $\mathcal{T}$由一棵有根二叉树 T及一系列非空子集 V_1，...，$V_k \subset V$组成，其中树的节点记为 x_1，...，x_k，且每个节点 x_i都与相应的 V_i相关联。

对集合 V_i 施加两类限制。其中一类包含三个条件，与 G有关，即

(i) $V_1 \cup \cdots \cup V_k = V$;

（ii）若 $vw \in E$，则存在一个节点 x_i，使得 v，$w \in V_i$;

（iii）若 $v \in V_{i'}$且 $v \in V_{i''}$，则对所有满足以下条件的 i， $v \in V_i$也成立： x_i 是 T中唯一的 $x_{i'}$–$x_{i''}$路径的内部节点。

为了清楚地区分这两种结构，我们在图 G 中使用“顶点”一词，在其树分解的宿主树 T 中使用“节点”一词。

另一类限制根据节点 x_i 在 T 中的下度及其关联集合 V_i 对其进行分类，如下所示：

- 叶节点 x_i 没有子节点，在 T
- 一个引入节点 x_i 在 T中有一个子节点 $v_{i'}$，其集合 V_i 由$V_{i'}$ 通过仅插入一个顶点而得到，即 $V_i = V_{i'} \cup \{v\}$，其中 $v \in V \setminus V_{i'}$；
- 一个遗忘节点 x_i 在 T中也有一个子节点 $x_{i'}$，但其集合 V_i 是从 $V_{i'}$ 中仅删去一个顶点得到的，即对于某个 $v \in V_{i'}$，有 $V_i = V_{i'} \setminus \{v\}$；
- 一个合并节点 x_i 有两个子节点 $x_{i'}$、 $x_{i''}$，它们在 T 中的集合都相同，即 $V_i = V_{i'} = V_{i''}$。

$\mathcal{T}$的宽度为 $\max_{1 \le i \le k}(|V_i| - 1)$。理论证明，$\mathrm{tw}(G) \le t$ 成立，当且仅当 G 存在一个宽度至多为 t 的优美树分解，即$|V_i| \le t + 1$ 对所有 i均成立。还已知，在这种情况下，宿主树 T 的节点数不必超过 $4|V|$，因此可以保证其节点数与 G的阶呈线性关系。

为便于后文引用，我们用 V_r 表示与 T的根相关联的 V 子集。

定理 11 对于任意正整数 t，在树宽至多为 t的图上，可以在线性时间内确定 α_1、 ω_1、 χ_1和 θ_1 的值。

证明。令 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_t$ 为满足 $\mathrm{tw}(G) \le t$的图 G 所构成的类，其中 t是固定的正整数。考虑来自 $\mathcal{G}$的一个一般输入图 $G = (V, E)$。取一个宽度为 t 的优美树分解 $\mathcal{T} = (T; V_1, \ldots, V_k)$，并且 $|V(T)| = O(|V|)$。将沿着 T的后序遍历应用动态规划算法。对于 T的每个节点 x_i，都将确定一个计算表 Tab_i。

表格中的行索引将分为两个主要部分。第一部分提供有关所考虑的 1-选择的信息；这一部分在四个问题 α_1、 ω_1、 χ_1、 θ_1 中都类似。第二部分则更具问题特异性，后文将对此进行详细说明。

对于任意 V_i，行索引第一部分的连通分支为：

- 在由 V_i 于 G中诱导的子图 $G[V_i]$内的边的一个部分（可能为空）1-选择 f；

- 一个划分 $V_i^+ \cup V_i^- = V_i$;

- 子集 $V_i^+ \subset V_i$ 由这些顶点组成：假设这些顶点已进行过 1-选择，方式可以是在 V_i 内进行，也可以通过一条边进行，且该边的另一端位于 G中较早的（已遗忘的）子图内；

- 顶点子集 $V_i^- \subset V_i$，假设这些顶点尚未进行 1-选择。

我们注意到，无损失一般性地可以假设 $V_r^+ = V_r$，但对于根以外的节点，情况并非如此。

类似于引言中提出的 $D(G, f)$ 概念，用有向图表示 V_i 内的 1-选择 f 很方便，其中弧 (v, w) 表示 G 的边 vw 由 f分配给 v。四种节点类型的表格可按如下方式处理这些信息。

- 如果 x_i 是叶节点，那么必须将 V_i 内由非孤立顶点组成的每个子集都作为 V_i^+考虑；对于每个 V_i^+，表格的行索引中都必须纳入所有可能的 1-选择，表格对应于 x_i。

- 如果 x_i 是一个引入节点，其子节点为 $x_{i'}$，且 V_i 中的新顶点是 v，那么：必须考虑选项 $v \in V_i^-$以及 $V_{i'}$的所有情况；如果 v在 $V_{i'}$中至少有一个邻居，那么还必须考虑 $v \in V_i^+$ 以及 v处所有可能的 1-选择。此外，对于与 v相邻的顶点子集$v' \in V_{i'}^-$，必须考虑 1-选择的所有边组合；相应的顶点随后从 V_i^- 移至 V_i^+。

- 如果 x_i 是一个遗忘节点，那么只需将“遗忘”的顶点从 $V_{i'}$中移除， V_i中其余顶点的状态以及 1-选择保持不变。

- 如果 x_i 是合并节点，那么有必要检查 $V_{i'}$ 和 $V_{i''}$ 处的情况是否兼容。这意味着，我们不仅要在两个子节点处有相同的 1-选择 f 和相同的划分（即 $V_{i'}^- = V_{i''}^- = V_i^-$和 $V_{i'}^+ = V_{i''}^+ = V_i^+$）。如果一个顶点位于 V_i^+ 中，那么它所选的边必须位于 V_i内部。

在参数的递归计算中，将考虑所有通过删除 1-选择而得到的子图。

计算 ω_1:

移除一个 1-选择后得到的完全子图，在 G 中也仍然是完全的，并且其顶点会共同出现在至少一个 V_i 中。因此，在每个 V_i 中，我们都会为每个 f 以及每个 (V_i^-, V_i^+) 记录所有可能的完全子图 $K \subset G_f[V_i]$，并计算一个值 $w(K)$。

在叶节点处， $w(K)$ 是 K 中顶点数 $|V(K)|$ 。

在引入节点处，若 $V_i = V_{i'} \cup \{v\}$, $w(K)$ 取自 $V_{i'}$ 的表，则当 $v \notin V(K)$ 时保持不变；否则，它为 $w(K) = \max(w(K - v), |V(K)|)$。

在遗忘节点处， $V_i = V_{i'} \setminus \{v\}$, $w(K)$ 被重新定义为其在 $x_{i'}$ 处原值与 $w(K \cup \{v\})$ 两者中的较大值。

在合并节点处，值 $w(K)$ 可从其两个子节点的表中获得。然后，更新后的 $w(K)$ 取两者中较大的值。

然后，可从根节点读取 $\omega_1(G)$，方法如下：对于 $G[V_r]$ 中的每个部分 1-选择f，取与团 $K \subseteq G[V_r]_f$ 对应的各行中的所有 w 值的最大值，然后再对所有 f 取最小值。

计算 α_1:

该算法本质上与用于确定有界树宽图的独立数的算法相同。区别在于，必须考虑 1-选择可能被移除的情况，并列出这些子图的独立集。

在叶节点处，会列出所有独立集 S，且其值为 $w(S) = |S|$。

在含有 $V_i = V_{i'} \cup \{v\}$ 的引入节点处，若 $v \notin S$，则值 $w(S)$ 保持不变；若 $v \in S$，则按 $w(S) := w(S - v) + 1$ 计算。

在含有 $V_i = V_{i'} \setminus \{v\}$ 的遗忘节点处，应用公式 $w(S) := \max(w(S), w(S - v))$。

在合并节点处，值 $w(S)$ 计算为子节点处两个 $w(S)$ 值之和减去 $|S|$。

最终， $\chi_1(G)$等于对 $G[V_r]$ 中的所有部分 1-选择 f以及所有独立集 $S \subseteq G[V_r]_f$取值时， T的根处 $w(S) = w(S, f)$的最大值。

计算 χ_1:

由于对每个图 G 都成立 $\chi_1(G) \leq \chi(G) \leq \mathrm{tw}(G) + 1$，我们知道 χ_1 有一个常数上界。接着，通过生成 V_i 的所有合法 k 着色，便可得到一个简单的线性时间算法，用于检验 $\chi_1(G) \leq k$ 是否成立

相对于 f，并检查其中哪些着色与 x_i 的每个子节点处至少一个这样的着色兼容（对划分 (V_i^+, V_i^-) 也如此）。

最终，$\chi_1(G)$ 等于使上述算法在根节点以一个可行着色终止的最小 k。

计算 θ_1:

在此处，对每个节点 x_i、每个 f 以及每个 (V_i^+, V_i^-)，我们需要生成 V_i 的所有划分 $\mathcal{P}$，使得移除由 f 选定的边后，每个划分类都是一个完全子图。此外，对于在 $\mathcal{P}$ 中选作类的每个完全子图，还需要区分两种可能性：在计算中，假设它包含一个已经“遗忘”的顶点；或者它此前在 V_i 之外不含任何顶点。

在叶节点处，没有类与已遗忘的顶点相关联，而 $\mathcal{P}$ 的值 $w(\mathcal{P})$ 就是其类的数量。

在具有 $V_i = V_{i'} \cup \{v\}$ 的引入节点处，只有当某个类没有关联任何已遗忘的顶点时，才能将 v 附加到该类。如果将 v 附加到一个已有的类，则 $w(\mathcal{P})$ 保持与 $V_{i'}$ 中的 $w(\mathcal{P} - v)$ 相同；否则，若 $\{v\}$ 是一个新的单元素类，则 $w(\mathcal{P}) = w(\mathcal{P} - v) + 1$。

在带有 $V_i = V_{i'} \setminus \{v\}$ 的遗忘节点处，划分的值不会改变；但从此以后，移除了 v 的类的状态将表明它与一个已遗忘的顶点相关联。

在合并节点 x_i 处，如果一个划分 $\mathcal{P}$ 中有某个类在 x_i 的两个子节点处都关联了已遗忘的顶点，则不允许保留该划分。（除这一条件外，两个子节点可以将已遗忘的顶点与任意数量的划分类相关联。）如果为 V_i 保留了划分 $\mathcal{P}$，那么其值等于 x_i 的两个子节点处的值之和，减去 $\mathcal{P}$ 中类的数量。

最后，$\theta_1(G)$ 等于在 T 的根处，对 $G[V_r]$ 中所有部分 1-选择 f 取 $w(\mathcal{P}) = w(\mathcal{P}, f)$ 的最小值，其中 $\mathcal{P}$ 是具有 $V_r^+ = V_r$ 的平凡划分。□

5 总结

本文系统研究了一种新的图不变量——鲁棒色数，其研究动机在于它在极值组合学中的应用。此外，我们还引入了若干基本图参数的“鲁棒版本”，包括独立数、团数、团覆盖数和色指数。我们建立了基本估计及其与其他参

数之间的关系，并在一定程度上探讨了算法方面的问题。虽然部分新结果与经典结果相似，但另一些则截然不同，独具特色。

可以自然地采用与从 χ 得到 χ_1 或从 ω 得到 ω_1 等相同的方法，将任意其他图不变量扩展为鲁棒版本。这为未来研究开辟了一个颇具前景的新领域。虽然我们在此没有列出具体参数，但我们建议并鼓励系统地探索这一方面。特别是，图着色的任何变体都为进一步研究提供了有趣的方向。

除了这些非常一般性的建议外，我们在此列出一些与鲁棒色数相关的更为明确的未解决问题。第一个问题涉及对定理9的部分（ii）进行可能的加强。

问题 1：是否存在满足 $\chi_1(G) = 3$ 的平面图，还是说 2 是一个普适上界?

众所周知，色数在完全连接运算下具有可加性。正如上面的许多例子所示，χ_1 并非如此。

问题 2（i）是否存在一种直观的方法来确定 $\chi_1(G \oplus H)$，至少在同时给出 $\chi_1(G)$ 和 $\chi_1(H)$，以及可能的最优 1- 选择 f_G andf_H 的情况下?

(ii) 是否存在一种自然的图运算，使得对于顶点不相交的图，χ_1 具有可加性?

(iii) 对于 χ_1，是否存在一种与余图类（= 不含任何诱导 P_4 子图的图）自然对应的类?

在定理 5 的第（iv）部分中，要加强关于 k 图的并的估计，似乎还有很多工作要做，因为目前可用的构造非常有限。

问题 3（i）求 k 图的并的鲁棒色数的匹配下界和上界。

(ii) 给定两个整数 k、$t \geq 2$，在每个 G_i 都满足 $\chi_1(G_i) \geq t$的假设下，比较 $\chi_1(G_1 \cup \cdots \cup G_k)$和 $\prod_{i=1}^{k} \chi_1(G_i)$。

线图运算本身似乎就很有研究价值。

问题 4 (*i*) 进一步描述其成员满足等式 $\chi_1'(G) = \chi_1(L(G))$ 的无限多个图类。(*ii*) 对每个图 G，$\chi_1'(G) \leq \chi_1(L(G))$ 是否成立?

目前，人们对确定图的鲁棒性参数的复杂性知之甚少。ι

问题 5（i）描述能够在多项式时间内确定 χ_1 的结构良好的图类。（ii）描述计算 χ_1 为 NP困难的结构良好的图类。（iii）研究上述相关图不变量 ω_1 等对应的类似问题。（iv）描述关于禁用子图和禁用诱导子图的条件，在这些条件下，各种鲁棒性参数的计算变得可处理。

Pr问题 6 研究鲁棒全染色及其参数 χ_1'' 的性质。

致谢。本研究部分得到国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）资助，资助项目编号为 SNN 129364 和 FK 132060。

参考文献

[1] M. Cygan, F. V. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, S. Saurabh：参数化算法。Springer Cham, 2016。[2] S. L. Hakimi：关于有向图顶点的度。J. Franklin Inst. 279（1965），290–308。[3] T. Kloks：树宽、计算与近似。计算机科学讲义，842，Springer，1994。[4] L. Lov´asz：正规超图与完美图猜想。Discrete Math. 2（1972），253–267。[5] L. Lov´asz：完美图的一种刻画。J. Comb. Theory, Ser. B 13（1972），95–98。

[6] M. Padberg：完美零一矩阵。Math. Program. 6（1974），180–196。[7] B. Patk´os, Zs. Tuza, M. Vizer：关于 q元向量的极值图论问题。手稿，2022。[8] D. Seinsche：关于可 n着色图类的一个性质。J. Combin. Theory Ser. B 16（1974），191–193。[9] M. Stiebitz, Zs. Tuza, M. Voigt：具有指定加权出度的图的定向。Graphs Combin. 31（2015），265–280。[10] D. Zuckerman：线性度提取器与 Max Clique 和色数的不可近似性。Theory Comput. 3（2007），103–128。