arXiv:2305.01927v1 [math.CO] 3 May 2023

某些图类的稳健色数

G´abor Bacs´o[a] CsillaBujt´as[b,c] Bal´azs Patk´os[d] Zsolt Tuza[d,e] M´at´eVizer[f a] 计算机科学与控制研究所[b] 卢布尔雅那大学数学与物理学院，斯洛文尼亚[c] 卢布尔雅那数学、物理与力学研究所，斯洛文尼亚[d] Alfr´ed R´enyi 数学研究所[e] 潘诺尼亚大学[f] 布达佩斯科技经济大学

摘要

图 G 的 1-选择 f 是一个函数 $f\colon V(G) \to E(G)$，满足对于每个顶点 v， $f(v)$ 与 v 相邻。1-删除图 G_f 是图 $(V(G)\ E(G) \setminus f[V(G)])$。(1-)稳健色数 $\chi_1(G)$ 是在 G 的所有 1-选择 f 中， $\chi(G_f)$ 的最小值。

我们确定了完全多部图和克奈泽图的鲁棒色数，并证明了弦图及其若干受到广泛研究的子类的鲁棒色数相对于其普通色数的紧下界和上界。

1 引言

图着色和独立集是图论中的核心概念。过去几十年来，人们研究了图着色的各种变体。本文聚焦于以下近期提出的变体。

定义 1 对于每个非负整数 s， $G = (V, E)$ 上的 s-选择是一个赋值 $f\colon V \to 2^E$，使得 $f(v) \subseteq E(v)$ 且 $|f(v)| \leq s$，其中

$E(v)$ 表示与 v 相 incident 的边集。图 G_f 的顶点集为 $V(G_f) = V(G)$，边集为

$$E(G_f) := E(G) \setminus \bigcup f(V(G))$$

称为 G 的 s-删除子图。于是

G 的 s-鲁棒色数为 $\chi_s(G) = \min_f \chi(G_f)$,

G 的 s-鲁棒独立数为 $\alpha_s(G) = \max_f \alpha(G_f)$,

G 的 s-鲁棒团数为 $\omega_s(G) = \min_f \omega(G_f)$,

其中，min 和 max 分别取遍 G 的所有 s-选择。

注意， G 的普通色数、独立数和团数分别为 $\chi_0(G)$、 $\alpha_0(G)$ 和 $\omega_0(G)$。1-鲁棒色数这一概念由 [5] 提出，用作研究特定 Tur´an 型问题的工具。 [1] 开始了对 1-鲁棒参数的系统研究。本文仍聚焦于 $s = 1$ 情形，并将“1-鲁棒”简称为“鲁棒”。类似地，若存在一个 1-选择 f，使得 c 在 $V(G)$ 上是适当着色，则称着色 c 是鲁棒的；若存在一个 1-选择 f，使得 U 在 G_f 中是独立的，则称子集 $U \subset V(G)$ 是鲁棒独立的。

1.1 新成果

如果一个图不含长度大于 3 的诱导圈，则称其为弦图。两个著名的子类（彼此不可比较）是区间图类和分裂图类，后者包括阈值图这一真子类（定义见第 2 节）。在此，我们为这些图类建立了紧确不等式。

下一个定理表明，对于所有图 $[1]$，均成立的一般下界 $\chi_1(G) \geq \left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil$，实际上对于阈值图的一个无限子类是紧的，而对于更一般的分裂图类，一个略弱的上界也成立。我们称 G 为 ω-唯一的，如果它仅包含一个阶为 $\omega(G)$ 的团。

定理 1 对于每个阈值图 G,

$$\chi_1(G) = \begin{cases} \frac{\chi(G)}{3} + 1, & \textit{if } \chi(G) \equiv 0 \pmod 3 \textit{ and } G \textit{ is not } \omega\textit{-unique,} \\ \left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

对于分裂图，上界 $\chi_1(G) \leq \left\lceil \frac{\chi(G)-1}{3} \right\rceil + 1$ 有效且紧确，但二部图 G 除外。特别地，如果 G 是一个满足 $\chi(G) \equiv 1$（模 3）的分裂图，那么 $\chi_1(G) = \frac{\chi(G)}{3} + 2$。

对于更一般的弦图类，$\chi(G)/3$ 是渐近紧确上界，这并不成立。相反，有以下结论。

定理 2（i）如果 G 是一个弦图，则

$$\omega_1(G) \leq \chi_1(G) \leq \left\lceil \frac{\chi(G)}{2} \right\rceil.$$

（ii）对于每个 $k \geq 2$，存在一个区间图 G_k，使得 $\omega(G_k) = \chi(G_k) = k$ 且 $\omega_1(G_k) = \chi_1(G_k) = \left\lceil \frac{\chi(G_k)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$。

另一方面，对区间图施加进一步限制，会使 χ_1 降至接近 $\chi/3$。

定理 3 存在一个常数 c，使得对于每个单位区间图 G，我们都有

$$\frac{\chi(G)}{3} \leq \chi_1(G) \leq \frac{\chi(G)}{3} + c.$$

在第 3 节中，我们解决了确定完全多部图 $K_{n_1,\ldots,n_t}$ 的 χ_1 的问题。全文中，我们用 t 表示顶点类的数量，并将 V_i 类的大小记为 n_i，其中对所有 $1 \leq i \leq t$ 均成立。假设各部按大小递增排列，即 $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_t$。于是，$\chi_1(K_{n_1,\ldots,n_t})$ 可以根据以下两个相互补充的结果计算得出。

定理 4 若 $n_t \leq 2$，假设 $n_1 = \ldots = n_p = 1$ 和 $n_{p+1} = \ldots = n_{p+q} = 2$，其中 $p + q = t$。那么

$$\chi_1(K_{n_1,\ldots,n_t}) = \left\lceil \frac{p + \lfloor 3q/2 \rfloor}{3} \right\rceil.$$

定理5 如果 $n_t \geq 3$，那么通过在 V_t 中加入 V_1 的一个顶点，将其扩大为独立集，即可得到 χ_1 的最优 1-选择。也就是说，

$$\chi_1(K_{n_1,\ldots,n_t}) = 1 + \chi_1(K_{n_1-1,\ldots,n_{t-1}}).$$

特别是，如果 $n_1 = 1$ 和 $n_t \geq 3$，那么

$$\chi_1(K_{n_1,\ldots,n_t}) = 1 + \chi_1(K_{n_2,\ldots,n_{t-1}}).$$

在第4节中，我们分析 α_1 和 χ_1 在克奈泽图中的行为。设$k \geq 2$ 和 $n \geq 2k$ 为整数。克奈泽图 $KG(n,k)$ 的顶点集为 $\binom{[n]}{k} = \{S \subseteq \{1,2\ldots,n\} : |S| = k\}$，当且仅当对应的 k 元集合互不相交时，两个顶点相邻。因此，$\binom{[n]}{k}$ 的相交子系统（即任意 F、$F' \in \mathcal{F}$均有非空交集的那些 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$）与$KG(n,k)$ 的独立集一一对应。

定理6 对任意 $k \geq 2$，存在 $n_0(k)$，使得如果 $n \geq n_0(k)$，那么我们有

$$\alpha_1(KG(n,k)) = \binom{n-1}{k-1} + 1,$$

并且 $n_0(k)$ 可以选为 $8k^2$。此外，如果 $\mathcal{F}$ 是 $KG(n,k)$ 中的一个稳健独立族，且对于每个 $x \in [n]$，至少存在两个集合$F_x, G_x \in \mathcal{F}$满足 $x \notin F_x, G_x$，那么 $|\mathcal{F}| \leq 8k\binom{n-2}{k-2}$ 成立。

定理 7 对于任意固定的 $k \geq 2$，我们有

$$\chi_1(KG(n,k)) = n - \Theta(n^{1/k})$$

为 $n \to \infty$。

我们通过陈述两个来自 [1] 的命题来结束引言，这些命题将在我们的证明中用到。若一个图的每个连通分量至多包含一个环，则称该图为拟单圈。

命题 1 ([1]) (*i*) 图 $G = (V,E)$ 的值 $\chi_1(G)$ 等于满足以下条件的划分 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ 中顶点类的最小数量 k：每个 V_i 在 G 中诱导出一个拟单圈子图。

(*ii*) 图 G 满足 $\chi_1(G) = 1$ 当且仅当它是拟单圈图。特别地，每棵树都有 $\chi_1 = 1$。

命题 2 ([1]) 对于每个图 G，我们都有

$$\left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil \leq \chi_1(G) \leq \chi(G). \tag{1}$$

对于 χ 的所有可能取值，这些界均是紧的。

2 弦图类的分类

在本节中，我们证明定理 1、定理 2 和定理 3。首先，我们需要定义定理 1 中的图部。

如果一个图的顶点集可以划分为两个集合，例如 A 和 B，使得 A 诱导出一个完全子图，且 B 是独立的，则称该图为分裂图。

如果存在一个阈值 h 和一个函数 $g\colon V(G) \to \mathbb{R}$，使得当且仅当$g(x) + g(y) > h$时，图 G 中的 $x, y \in V(G)$相邻，则称图 G 为阈值图。根据定义（事实上，这与定义等价），阈值图 G 的顶点集可以划分为两个集合 A 和 B（其中一个可能为空），并满足以下条件：

(i) $A = \{a_1, \ldots, a_q\}$ 在 G 中诱导出一个最大团，且其顶点可以按如下方式排序：$N[a_1] \supseteq N[a_2] \supseteq \cdots \supseteq N[a_q]$；$(ii)$ $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$ 是 G 中的一个独立集，且其顶点可以按如下方式排序：$N(b_1) \supseteq N(b_2) \supseteq \cdots \supseteq N(b_s)$；

(iii) $N(a_q) \cap B = \emptyset$.

如果满足 $(i) - (iii)$，则称 $V(G)$ 的划分 (A, B) 为阈值划分。

定理 1 的证明。考虑 G 的阈值划分 (A, B)，并采用 (i) –(iii) 中引入的记号。根据定义，A 是一个团，B 是一个独立集，并且不存在同时包含 a_q 和来自 B 的顶点的团。因此，$\omega(G) = q$；又由于每个阈值图都是完美图，$\chi(G) = q$。注意，当且仅当 $a_{q-1}b_1$ 在 G 中不是一条边时，G 才是 ω-唯一的。令 $k = \lceil q/3 \rceil - 1$。

首先假设 $q \neq 0$（模 3），并对每个 $j \in [k]$ 定义顶点类 $V_j = \{a_{3j-2}, a_{3j-1}, a_{3j}\}$。其余顶点构成该类。

$V_{k+1} = V(G) \setminus \bigcup_{j\in[k]} V_j$。注意，对于每个 $j \in [k]$， $G[V_j]$都是一个单圈图（事实上是一个 3-圈）。如果 $q \equiv 1$ （模 3），则 $V_{k+1} = \{a_q\} \cup B$，其为一个独立集。如果 $q \equiv 2$ （模 3），则 $V_{k+1} = \{a_{q-1}, a_q\} \cup B$，其诱导出一个无圈图，因为 $G[V_{k+1}]$ 的每条边都与 a_{q-1}关联。根据命题 1(i)，划分 $V_1, \ldots, V_{k+1}$ 在两种情况下都为 G 定义了一个鲁棒着色。这意味着 $\chi_1(G) \leq k+1 = \lceil \chi(G)/3 \rceil$，并且根据（1）中的下界，我们可以得出 $\chi_1(G) = \lceil \chi(G)/3 \rceil$。

现在假设 $q \equiv 0$ （模 3），且 G 是 ω-唯一的。对于这种情况，我们定义 $V_{k+1} = \{a_{q-2}, a_{q-1}, a_q\} \cup B$，并保留 $V_j = \{a_{3j-2}, a_{3j-1}, a_{3j}\}$ 作为 $j \in [k]$ 的记号。定义中的性质 (iii) 确保了 $N[a_q] \cap B = \emptyset$。$\omega$-唯一性意味着 $a_{q-1}b_1 \notin E(G)$，结合性质 (ii) 可得 $N[a_{q-1}] \cap B = \emptyset$。由于 B 是独立的， $G[V_{k+1}]$ 中除 $a_{q-1}a_q$ 之外的每条边都与 a_{q-2} 相接，因此 V_{k+1} 诱导出一个单圈图。由于对每个 $j \in [k]$， $G[V_j]$ 也都是单圈图，我们推得 $V_1, \ldots, V_{k+1}$ 为 G 的一个鲁棒着色，并且 $\chi_1(G) \leq \lceil \chi(G)/3 \rceil$。由不等式 (1)，我们得出 $\chi_1(G) = \lceil \chi(G)/3 \rceil$。

在最后一种情况下， $q \equiv 0$ （模 3）且 G 不是 ω-唯一的。首先注意到，对于 $j \in [k+1]$， $V_j = \{a_{3j-2}, a_{3j-1}, a_{3j}\}$ 与 $V_{k+2} = B$ 共同为 G 定义了一个鲁棒着色，因此， $\chi_1(G) \leq k+2$。现在反设 W_1、 $\ldots W_{k+1}$ 是 $V(G)$ 的一个稳健颜色划分。由于 W_j诱导出一个拟单圈图且 A 是一个团，因此对每个 $j \in [k+1]$ 都有 $|W_j \cap A| \leq 3$ 成立。事实上， $|A| = 3k+3$ 意味着对每个颜色类都有 $|W_j \cap A| = 3$。由于 G 不是 ω-唯一的， $a_{q-1}b_1$ 是一条边，并且 b_1 与除 A中的 a_q 之外的所有顶点都相邻。因此，如果 b_1 包含在颜色类 W_i中，那么b_1 至少与来自 $W_i \cap A$ 的两个顶点相邻，并且 $G[(W_i \cap A) \cup \{b_1\}]$要么是一个完全图 K_4，要么是一个 $K_4 - e$。无论哪种情况， $G[W_i]$ 都不是拟单圈图，这就产生了矛盾。因此， $\chi_1(G) > k+1$ 成立，并且我们得出 $\chi_1(G) = k+2 = \chi(G)/3 + 1$。

分裂图也具有性质 $\chi(G) = \omega(G)$。假设 $A \subset V(G)$ 诱导出一个基数为 $\chi(G)$ 的完全子图，且 $B = V(G) \setminus A$ 是一个独立集。那么，我们可以在 $G[A]$ 上进行使用 $\left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil$种颜色的鲁棒着色，并用一种新颜色将 B 着为单色。除非对于某个整数 k，有 $\chi(G) = 3k+1$，否则这个 $\left\lceil \frac{\chi(G)}{3} \right\rceil + 1$ 与 $\left\lceil \frac{\chi(G)-1}{3} \right\rceil + 1$ 相同。在这种情况下，我们可以在 $G[A] - v$ 上进行 $v \in A$ 的鲁棒 k- 着色；又由于 $B \cup \{v\}$ 诱导出一颗星，因此可以通过一次 1-选择省略从 B 到 v 的所有边。

当 G 是二分裂图时，公式 $\left\lceil \frac{\chi(G)-1}{3} \right\rceil + 1$ 不是紧的，因为此时 G 必须是一颗双星，也就是一种特定的树，因此 $\chi_1(G) = 1$。然而，对于更大的 $\chi = t \geq 3$，我们可以通过取 $|A| = |B| = t$，并将 $K_{t,\,t} - tK_2$ 放在 A 和 B 之间，得到一个紧的构造。对于 $t = 3k+1$，我们已经看到可以进行使用 $k+1$ 种颜色的鲁棒着色，而且集合 A 本身就需要这么多种颜色。对于 $t = 3k$ 和 $t = 3k-1$，已验证的上界是 $k+1$；我们将论证 k 种颜色并不足够（除非 $3k-1=2$）。

如果 $t = 3k$，那么在 A 上进行鲁棒 k-着色的唯一方法，就是选取 $G[A]$ 中 k 个互不相交的三角形的边。这无法扩展为 G 的鲁棒 k- 着色，因为 A 中每个 $v \in B$ 在每个被选中的三角形中至少有两个邻点，而从 v 中只能删除一条关联边。

如果 $t = 3k-1$，其中 $k \geq 2$，那么在 A 上进行鲁棒 k-着色时，有 $k-1$ 个大小为 3 的类（省略三角形）和一个大小为 2 的类，例如通过选取 $f(x) = xy$ 来省略边 xy。与前一种情形一样，三角形类无法通过加入来自 B 的顶点来扩展。二元类 $\{x, y\}$ 可以通过加入 x 的非邻点、 y 的非邻点，以及另一个顶点 $v \in B$ 来扩展，方法是定义 $f(v) = xv$ 和 $f(y) = yv$。但 B 中至少还剩两个顶点，因此必然需要再使用一种颜色。□

定理 2 的证明。(i) 设 $G = (V, E)$ 是一个弦图，且 $\chi(G) = \omega(G) = k \geq 2$。考虑 G 的一个正常顶点 k-着色，其颜色类为 $V_1, \ldots, V_k$。由于 G 是弦图，任意两个颜色类的并在 G 中诱导出一个森林。因此，存在一个 1-选择 f，使得在 1-删除 G_f 中，所有集合 $V_1 \cup V_2, V_3 \cup V_4, \ldots, V_{k-1} \cup V_k$ 都是独立的。于是，色数减少了 $\lfloor k/2 \rfloor$，符合要求。

(ii) 如 K_2 所示， $k = 2$ 的断言显然成立；对于 $k = 3$，我们可以取例如 $K_4 - e$，即从 4 阶完全图中删除一条边所得的图。它是一个区间图，具有 $\chi = 3$ 和 $\omega_1 = 2$，因为 $|E(K_4 - e)| > 4 = |V(K_4 - e)|$。

令 $G_2 = R_1^{even} = K_2$, $G_3 = R_1^{odd} = K_4 - e$。对于 $k = 2t > 2$，我们定义 $G_k = R_t^{even}$；对于 $k = 2t+1 > 3$，我们将 $G_k = R_t^{odd}$ 定义为由 R_{t-1}^{even}(R_{t-1}^{odd}) 的三个顶点不相交副本与两个通用顶点构成的图。形式上，这意味着

$$R_t^{even} = 3R_{t-1}^{even} \oplus K_2 \quad R_t^{odd} = 3R_{t-1}^{odd} \oplus K_2$$

（其中 $\oplus$ 为完全连接运算）。由于 R_1^{even} 和 R_1^{odd} 都是区间图，而不相交并不会改变 ω、χ 以及作为区间图这一性质；添加一个新的全域顶点会使 ω 和 χ 各增加一，但仍保持区间图的性质，因此由归纳法可得，R_t^{even} 和 R_t^{odd} 是区间图，且 $\omega(R_t^{even}) = k = 2t$ 以及 $\omega(R_t^{odd}) = k = 2t+1$。我们需要证明 $\omega_1(R_t^{even}) \geq t$ 和 $\omega_1(R_t^{odd}) \geq t+1$ 成立。由于这两个证明几乎相同，我们只考虑 $k = 2t+1$ 的情况，并省略奇数上标。

我们设定 $V_1 = V(R_1)$ 和 $V_t = \{x_t, y_t\}$，后者是 R_t 中两个全能顶点的集合。考虑 R_t 中任意一个 1-选择 f。该 f 仅在 $f(V_t)$ 中定义了两条边，因此存在一个 R_{t-1} 的副本，对于 x_t 和 y_t 而言，其中没有选择任何边。令 $V_{t-1} = \{x_{t-1}, y_{t-1}\}$ 表示该 R_{t-1} 副本中两个全能顶点的集合。在这个 R_{t-1} 子图中，存在一个 R_{t-2} 的副本，对于 x_{t-1} 和 y_{t-1} 而言，其中没有选择任何边。如此继续，最终得到 t 个集合 V_1、V_2、.....、V_t，使得对所有 $2 \leq i \leq t$ 都有 $V_i = \{x_i, y_i\}$，并且集合 $V_1 \cup \cdots \cup V_t$ 在 R_t 中诱导出一个子图，记为 H，该子图同构于 $K_{2t+2} - e$。此外，对于每个满足 $2 \leq i \leq t$ 的 i，所选边 $f(x_i)$ 和 $f(y_i)$ 要么包含在 $\bigcup_{j=i}^{t} V_j$ 中，要么不属于 $E(H)$。只要证明 $\omega(H_f) = t+1$，证明便告完成。

考虑具有 F 的图

$$V(F) = V_1 \cup \cdots \cup V_t \quad \text{and} \quad E(F) = f(V_1 \cup \cdots \cup V_t) \cap E(H).$$

选择三个互不相同的顶点 x_1、y_1、$z_1 \in V_1$，使得

- $x_1 y_1 \notin E(F)$,
- $x_1 \notin f(z_1)$。

这样的 x_1、y_1、z_1 确实存在，因为 f 最多只能选取由 V_1 诱导的五条边中的四条。

令 F' 为从 F 中删除 $V_1 \setminus \{x_1, y_1, z_1\}$ 里的顶点后得到的诱导子图。以下过程表明 $\alpha(F') \geq t+1$。

- 我们令 $V^0 = V(F')$ 并令 $I^0 = \emptyset$。只要 V^j 不为空，就从 V^j 中选取一个在 $F[V^j]$ 中度为 0 或 1 的顶点 v，将 v 加入 I^j 得到 I^{i+1}，并从 V^j 中删除 v；若其有邻点，也一并删除，以得到V^{j+1}。容易看出，在$V_m \cap V^j$ 中总存在一个度为 0 或 1 的顶点 v，其中 m 是使得 $V_i \cap V^j \neq \emptyset$ 成立的最小 i。

选出的顶点显然构成 F' 中的一个独立集，因此它们在 H_f 中诱导出一个完全图。 F' 有 $2t+1$ 个顶点，每一步至多删除两个顶点，因此最终至少选出 $t+1$ 个顶点。可以首先选取顶点 x_1，并且后续每次选取都有可行的选择，直到整个 F' 被消除。□

我们通过证明定理 3 来结束本节。单位区间图是一种图，其顶点 v_1、v_2、…、v_n 分别用实数 r_1、r_2、…、r_n标记，并且当且仅当 $|r_i - r_j| < 1$ 时， v_i 与 v_j 相连。图 G 的 p^{th} 次幂 G^p 具有与 G相同的顶点集，并且当且仅当两个顶点在 G 中的距离至多为 p时，它们之间才存在一条边。

我们将应用以下最初在 [3] 中证明的结果。后续进展及更多参考文献见 [6] 的引言。

定理 8（Fine、Harrop [3]）一个 n-顶点图 G 是单位区间图，当且仅当存在 $n' \geq n$ 和 $p \geq 1$，使得 G 是 $P_{n'}^p$ 的诱导子图。

事实上，指数 集合 V1 可以选为 $\omega(G) - 1$，这与 $\chi(G) - 1$ 相同。

定理 3 的证明。下界由命题 2 得出。对于上界，假设 $G \subseteq H = P_{n'}^p$ 其中 $p = \chi(G) - 1$。如果 $p = 1$，则 G 是一个线性森林，并且 $\chi_1(G) = 1$。令 $\chi(G) = p+1 = 3k - r \geq 3$，其中 $r \in \{0, 1, 2\}$，不妨设 $n' = 3t$、P 构成路径 $v_1 v_2 \ldots v_{3t}$。于是，每个三元组 $S_i = \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\}$ $(1 \leq i \leq t)$ 在 H 中诱导出一个 K_3，其边可取为一个 1-选择 f。这将H_f 分解为三元独立集 S_1、……、S_t。此外，如果 $|i - j| > k$，则 S_i 与 S_j之间不存在边。因此，集合$\bigcup_{i \equiv r（模\ k+1）} S_i$

对于每个 $r = 0$，1，……，k 都是独立的，因此 $\chi_1(G) \leq k+1$ 成立。由于 $k \leq \frac{1}{3}(\chi(G) + 2)$，定理得证。□

3 完全多部图

本节中，我们证明定理 4 和定理5。在证明这些结果之前，先提及它们的一些推论。回想一下，使用记号 $K_{n_1,\ldots,n_t}$ 时，我们假设 $n_1 \leq \cdots \leq n_t$。

推论 1 如果 $n_1 \geq t$，那么 $\chi_1(K_{n_1,\ldots,n_t}) = t$。

推论 2 若 $n_1 < t$，令 j 表示满足 $n_1 + \ldots + n_j \leq t - j$ 的最大整数。则 $\chi_1(K_{n_1,\ldots,n_t}) \leq t - j$。

正如许多例子（以及完全图 K_n）所示，上界 $t - j$ 往往远非紧确。

在证明定理 4 和定理 5 之前，我们注意到，在完全多部图中，通过移除一个 1-选择，可以构造出三种类型的独立集（及其子集）：

(a) 来自三个不同部 $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ 的三个顶点 $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$，因此删除一个 C_3 的边；(b) 来自两个不同部 V_{i_1}, V_{i_2} 的四个顶点 $v'_{i_1}, v''_{i_1}, v'_{i_2}, v''_{i_2}$，因此删除一个 C_4 的边；(c) 来自顶点类 V_{i_1} 的一个顶点 v_{i_1}，以及另一个部 V_{i_2}，因此删除一个星的边。

定理 4 的证明。我们用 $f(p, q)$ 表示在定理假设下 χ_1 的值。显然，当 $p + q \leq 2$ 时，$f(p, q) = \left\lceil \frac{p+\lfloor 3q/2 \rfloor}{3} \right\rceil$ 确实成立；当 $p = 3$ 和 $q = 0$ 时也是如此。对于其余情况，我们对顶点数进行归纳。在接下来的情况中，我们考察选取一个类型为 (a)、(b) 或 (c) 的独立集 S 后，$f(p, q)$ 如何随 S 所涉及的顶点类大小而变化。假设 f 能正确表示所有满足 $p' + 2q' < p + 2q$ 的 p'、q' 组合下 χ_1 的值，我们得到以下递推关系：

(a.1) $(1, 1, 1) \longrightarrow 1 + f(p - 3, q)$;

(a.2) $(1, 1, 2) \longrightarrow 1 + f(p - 1, q - 1)$;

(a.3) $(1, 2, 2) \longrightarrow 1 + f(p + 1, q - 2)$;

(a.4) $(2, 2, 2) \longrightarrow 1 + f(p + 3, q - 3)$;

(b.1) $(2, 2) \longrightarrow 1 + f(p, q - 2)$;

(c.1) $(1, 1) \longrightarrow 1 + f(p - 2, q)$;

(c.2) $(1,2) \longrightarrow 1+f(p-1,q-1)$;

(c.3) $(2,2) \longrightarrow 1+f(p+1,q-2)$.

由这些公式可得以下相关公式:

$$1+f(p-3,q)\,,\quad 1+f(p-1,q-1)\,,\quad 1+f(p,q-2)\,,\quad 1+f(p+3,q-3)\,.$$

在这份列表中，(a.3)、(c3) 和 (c.1) 未出现，因为它们分别被 (b.1) 和 (a1) 取代；后两者在结构上也是它们的替代方案。还要注意,

$$f(p-3,q)+1=f(p,q)=f(p,q-2)+1$$

并且总是可以应用约化 (c.3) 或 (a.1)，因此 $f(p,q)$ 是 χ_1 的一个通用上界。但它同时也是一个下界，因为在另外两种情形下，我们有

$$f(p+3,q-3)+1\geq f(p-1,q-1)+1\geq f(p,q)\,.$$

这可以通过比较分子来验证，即 $(p+3)+\lfloor 3(q-3)/2\rfloor=(p-1)+4+\lfloor 3(q-1)/2\rfloor-3>(p-1)+\lfloor 3(q-1)/2\rfloor$ 以及 $(p-1)+\lfloor 3(q-1)/2\rfloor+3=p+\lfloor (3q+1)/2\rfloor\geq p+\lfloor 3q/2\rfloor$。□

在证明定理5之前，我们先陈述 [5]关于二部图和完全三部图的结果。

定理 9（i） *[5, 命题 2.6。]* 完全三部图 $K_{r,\,s,\,t}$满足 $1\leq r\leq s\leq t$ 和 $t\geq 2$ 下的 $\chi_1(K_{r,\,s,\,t})=2$ 当且仅当 $r\leq 2$；否则 $\chi_1(K_{r,\,s,\,t})=\chi(K_{r,\,s,\,t})=3$。

（ii） *[5]* 二部图 F 具有 $\chi_1(F)=2$（即 $\chi_1(F)=\chi(F)$），当且仅当它含有一个边数多于顶点数的连通分量。

定理5的证明。对于 $t=2$，结论显然成立；对于 $t=3$，其有效性可由定理 9 轻易推出。假设 $t\geq 4$，令 $m=\chi_1(K_{n_1,\,\ldots,\,n_t})$，并考虑顶点集 $V=V_1\cup$的一个划分（$X_1,\ldots,X_m$）
$\cdots\cup V_t$划分为数量最少的子集 X_i，只要移除适当选取的 1-选择，这些子集就都会变成独立集。该定理的表述对于 $v_1\in V_1$ 是 $X_m=\{v_1\}\cup V_t$。若情况并非如此，则我们将 $(X_1,\ldots,X_m)$ 修改为另一个划分 $(X_1',\ldots,X_m')$，使得 $X_m'=\{v_1\}\cup V_t$ 成立。

划分中可以有五种类型的 X_i：

(a) 对于某个 $1 \le j \le t$, $X_i \subset V_j$；(b) 对于某个 $1 \le j < k < l \le t$, $|X_i \cap V_j| = |X_i \cap V_k| = |X_i \cap V_l| = 1$；(c) 对于某个 $1 \le j < k \le t$, $|X_i \cap V_j| = |X_i \cap V_k| = 2$；(d) 对于某个 $1 \le j < k \le t$, $|X_i \cap V_j| = 1$ 和 $X_i \subset V_k$；(e) 对于某个 $1 \le j < k \le t$, $X_i \subset V_j$ 和 $|X_i \cap V_k| = 1$。

这些类型可以立即进行几种简化。如果 $(X_i \setminus V_j) \neq V_k$ 属于 (d)，我们可以扩展 X_i，使其包含整个集合 V_k，并从与 V_k相交的其他集合 $X_{i'}$ 中移除 $V_k \setminus X_i$ 的顶点。类似的步骤也适用于 (e)，以及可由此得到 $X'_i = V_j$的 (a)。事实上，可以排除选项 (e)，因为 (d) 移除 V_k，而 (e) 移除 V_j——每种情况还各移除一个元素——且我们有 $|V_j| \le |V_k|$，因此采用 (d) 时的最优解至少不逊于采用 (e) 时的最优解。接下来，我们将进一步分析简化划分的方法。

(1) 首先假设 $X_m = V_k$；这对应于类型 (a)。如果 $k \neq t$，我们将 X_m 修改为 V_t，并用 V_k 的顶点替换与 V_t 相交的集合 X_i 中的 $|V_k|$个顶点，使这些集合的大小保持不变。之后，可以将一个顶点 $v_1 \in V_1$加入修改后的 X_m，证明即告完成。

（2）接下来，假设 $X_m \cap V_j = v_j$ 和 $X_m \setminus \{v_j\} = V_k$（即出现类型（d））。如果 $k \neq t$，我们按照情形（1）中的方法，将 X_m 修改为（$X_m \setminus V_k$）$\cup V_t$，并用 V_k中的顶点替换集合 X_i 中与 V_t 相交的 $|V_k|$个顶点。如果 $|V_j| = 1$，则证明至此完成，因为在这种情形下，V_j 可以发挥 V_1的作用。因此，假设 $|V_j| \ge 2$ 成立。

(2.1) 如果存在一个包含来自 V_1 的单个顶点 v_1 的类型（b）或（d）$X_{i'}$，我们交换 v_1 和 v_j 的位置；然后将 X_m 成功修改为 $X'_m = \{v_1\} \cup V_t$，证明完成。

(2.2) 否则，所有与 V_1 相交的 X_i 都是类型（c）。设其中一个为 $X_i = \{v_1, v'_1, v_i, v'_i\}$，其中 v_1、$v'_1 \in V_1$ 和 v_i、$v'_i \in V_i$。以下所有子情形都会导出包含一个类 $\{v_1\} \cup V_t$ 且满足 $v_1 \in V_1$ 的顶点划分。

(2.2.1) 如果还有一个类型（d）的 $v'_j \in V_j$ 和 $X_{j'} = \{v'_j\} \cup V_k$，我们就分别用 $\{v_1\} \cup V_t$、$\{v_i, v'_i, v_j, v'_j\}$和 $\{v'_1\} \cup V_k$替换 X_m、X_i和 $X_{j'}$。

(2.2.2) 如果一个 $v'_j \in V_j$ 被类型（b）的 $X_{j'} = \{v'_j, v_k, v_l\}$ 覆盖，我们就分别用 $\{v_1\} \cup V_t$、 $\{v_i, v'_i, v_j, v'_j\}$和 $\{v'_1, v_k, v_l\}$替换 X_m、 X_i和 $X_{j'}$。

(2.2.3) 如果 V_j 与一个类型（c）的 $X_{j'} = \{v'_j, v''_j, v_k, v'_k\}$ 相交，我们分别用 $\{v_1\} \cup V_t$、 $\{v_i, v'_i, v_k, v'_k\}$和 $\{v'_1\} \cup V_j$替换 X_m、X_i和 $X_{j'}$。至此，情形（2）的证明完成。

从现在起，我们可以假设整个 V 仅划分为类型（b）和类型（c）的集合。

(3) 如果某个 V_j 与多个类型（c）的集合相交，我们可以将这种情况化归为情形（1）。具体来说，设为 $X_i = \{v_j, v'_j, v_k, v'_k\}$ 和 $X_{i'} = \{v''_j, v'''_j, v_l, v'_l\}$。那么我们可以用 $X'_i = V_j$ 和$X'_{i'} = \{v_k, v'_k, v_l, v'_l\}$替换这些集合。

(4) 如果 V_t 与一个类型（b）的集合 $X_i = \{v_j, v_k, v_t\}$ 以及一个类型（c）的集合 $X_{i'}$ =$\{v_l, v'_l, v_t, v'_t\}$ 相交，我们可以用一个类型（b）的集合 $X'_i = \{v_j\} \cup V_t$ 和 $X'_{i'} = \{v_k\} \cup V_l$ 替换它们，从而归约为情形（2.2.1）。

（5）如果 V_t 只与类型（b）的集合相交，我们取其中三个这样的集合，记为 X_{m-2}、 X_{m-1}、 X_m。然后取 $X'_m = V_t$，并将（$X_{m-2} \cup X_{m-1} \cup X_m$）$\setminus V_t$ 分成两个顶点三元组。这就将情形（5）归约为情形（1），从而完成了该定理的证明。□

推论 3 在完全多部图类中，图不变量集合 V1 可在多项式时间内计算。

4 克奈泽图

本节中，我们证明定理6和定理 7。在陈述我们的结果之前，我们引用极值集合论中的两个基本定理，它们将作为我们证明的工具。

定理 10（Erd˝os、Ko、拉多 [2]）对于任意整数 $k \geq 2$ 和任意 $n \geq 2k$, 我们有 $\alpha(KG(n, k)) = \binom{n-1}{k-1}$。

定理 11（Hilton、Milner [4]）对于任意 $n \geq 2k + 1$，如果 $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ 与 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$相交，那么 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$。

定理6的证明。设 $\mathcal{F}$ 是 $KG(n,k)$ 中的一个 1-独立族。我们将多次用到 $KG(n,k)[\mathcal{F}]$ 是 $K_{2,3}$-自由的。若存在一个顶点 x，使得至多有一个集合 $F \in \mathcal{F}$ 满足 $x \notin F$，则 $|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{k-1} + 1$。因此，我们可以假设，对于任意 x，都存在 F_x、$G_x \in \mathcal{F}$ 满足 $x \notin F_x \cup G_x$。那么，所有包含 x 的集合中，除两个以外都必须与 $F_x \cup G_x$ 相交，因此 $d_{\mathcal{F}}(x) \le \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2k-1}{k-1} + 2$，当 $k \ge 3$ 时至多为 $2k\binom{n-2}{k-2}$。

注意，$\mathcal{F}$必须包含一个大小至少为 $\frac{1}{4}|\mathcal{F}|$ 的相交族。事实上，由于 $\mathcal{F}$ 是 1-独立的，$KG(n,k)[\mathcal{F}]$ 中的度数和至多为 $2|\mathcal{F}|$。只要最大度数大于 1，我们就不断从 $\mathcal{F}$ 中移除一个最大度数集合。每一步中，度数和至少减少 4，因此最终至少保留 $\mathcal{F}'$ 中一半的集合。此时，$KG(n,k)[\mathcal{F}']$ 是一个匹配，因此我们可以保留一半的集合，从而得到一个相交族。

因此，设 $\mathcal{F}^*$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个最大相交子族。若 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}^*} F = \emptyset$，则根据定理 11，当 $n \ge 4k^2$ 时，有 $|\mathcal{F}| \le 4|\mathcal{F}^*| \le 4k\binom{n-2}{k-2} + 4 < \binom{n-1}{k-1} + 1$。若 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}^*} F \ne \emptyset$，则 $|\mathcal{F}^*|$ 至多为 $\mathcal{F}$ 的最大顶点度数；如上所示，当 $k \ge 3$ 时，该度数至多为 $2k\binom{n-2}{k-2}$。于是，当 $n \ge 8k^2$ 时，$|\mathcal{F}| \le 4|\mathcal{F}^*| \le 8k\binom{n-2}{k-2} \le \binom{n-1}{k-1}$。最后，若 $k = 2$，则第一段中的结果表明 $d_{\mathcal{F}}(x) \le \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2k-1}{k-1} + 2 = 6$，因此当 $n \ge 8 \cdot 2^2 \ge 25$ 时，$|\mathcal{F}| \le 4|\mathcal{F}^*| \le 24 \le \binom{n-1}{k-1}$。□

注 1 观察到，$n_0(k) \ge 3k+1$ 是 $\alpha_1(KG(3k,k)) \ge \binom{3k-1}{k-1} + 2$。事实上，$\mathcal{F} = \{F \in \binom{[3k]}{k} : 1 \in k\} \cup \{[k+1,2k],[2k+1,2k]\}$ 是 1-独立的，因为 $\{F \in \binom{[3k]}{k} : 1 \in k\}$ 中的所有集合：$1 \in k$ 但 $[k]$ 至少与 $[k+1,2k]$、$[2k+1,3k]$ 中的一个相交，因此 $KG(3k,k)[\mathcal{F}]$ 是一个三角形，并且从该三角形的两个顶点伸出悬挂边。

此外，若 $n = 2k+m$ 与 $1 \le m < k$ 且 $f(m)$ 表示一个相交族 $\mathcal{G} \subseteq \binom{[2k+m-1]}{k}$ 的最大大小，其中 $|G \cup G'| > k+m$ 对所有 $G, G' \in \mathcal{G}$ 均成立，则 $\alpha_1(KG(2k+m,k)) \ge \binom{2k+m-1}{k-1} + f(m)$。事实上，$\mathcal{F} = \{F \in \binom{[2k+m]}{k} : 2k+m \in F\} \cup \mathcal{G}$ 是 1-独立的，只要 $\mathcal{G}$ 如上所述。由于 $\{F \in \binom{[2k+m]}{k} : 2k+m \in F\}$ 和 $\mathcal{G}$ 相交，$KG(2k+m,k)[\mathcal{F}]$ 是二部图，并且对于任意 $G, G' \in \mathcal{G}$，不存在 k-子集 $[2k+m]$ 与 G, G' 同时不相交，因此 $KG(3k,k)[\mathcal{F}]$ 是星森林。

定理 7 的证明。对于上界，注意到如果对某个整数 c 有 $n - c \ge \binom{c}{k} - \binom{2k}{k}$，那么 $\chi_1(KG(n,k)) \le n - c + 1$ 成立。事实上，如果我们将 $\binom{[c]}{k} \setminus \binom{[2k]}{k}$ 枚举为 $G_1, G_2, \ldots, G_h$，其中 $h \le n - c$，那么这些族 $\mathcal{G}_i = \{G \in \binom{[n]}{k} : \max G = n + 1 - i\} \cup \{G_i\}$ 是 1-独立的

因为它们在集合 V1(n,k) 中诱导出一个星，并且覆盖了 $\binom{[n]}{k} \setminus \binom{[2k]}{k}$。因此，将 $\binom{[2k]}{k}$ 添加到 $\mathcal{G}_i$ 中，我们得到一个将 $\binom{[n]}{k}$ 划分为 $n-c+1$ 1-独立族的划分。由于 k 是固定的，我们有 $\binom{c}{k} - \binom{2k}{k} = \Theta(c^k)$，因此，使 $n - c \geq \binom{c}{k} - \binom{2k}{k}$ 成立的 c 的最大值为 $\Theta(n^{1/k})$。至此，上界的证明完成。

为了证明下界，我们需要以下定义。我们称集合族 $\mathcal{F}$ 是以 x 为中心的类星形族，如果除至多一个集合 F 外， x 都包含在 $\mathcal{F}$ 的每个集合中。（因此，上一段中的所有 $\mathcal{G}_i$ 都是类星形的。）假设 $KG(n,k)$ 的一个鲁棒着色包含 a 个类星形颜色类和 b 个非类星形颜色类。注意，如果 $\mathcal{F}$ 是以 x 为中心的类星形族，那么我们可以添加任意包含 x 的集合 F，使其仍然是类星形的，因而也是 1-独立族。因此，如果 x_1、x_2、.....、x_a 是这些类星形颜色类的中心，那么我们可以假设所有非类星形颜色类 $\mathcal{F}$ 都是 $\binom{[n]\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_a\}}{k}$ 的子族。

根据定理6，所有非类星形颜色类的大小至多为 $8k\binom{n-a-2}{k-2}$。因此，我们必须有

$$b \cdot 8k\binom{n-a-2}{k-2} + a \geq \binom{n-a}{k}.$$

如果 $a \geq n - 2 \cdot k! \cdot n^{1/k}$，那么无需证明。否则，$a \leq \frac{1}{2}\binom{n-a}{k}$，因此我们必然有

$$b \geq \frac{1}{16k}\frac{\binom{n-a-2}{k}}{\binom{n-a-2}{k-2}} \geq \frac{1}{32k^3}(n-a)^2,$$

如果 n 相对于 k 足够大。因此，颜色类的数量 $a+b$ 至少为 $a + \frac{1}{32k^3}(n-a)^2$. 。该表达式在 $a = n - 16k^3$ 处取得最小值，其值为 $n - 8k^3 \geq n - n^{1/k}$。□

致谢

本研究部分得到国家研究、开发与创新办公室 – NKFIH 的支持，资助项目为 SNN 129364 和 FK 132060。Cs. Bujt´as 感谢斯洛文尼亚研究机构通过核心资助项目 P1-0297 提供的经费支持。

参考文献

[1] G. Bacs´o、B. Patk´os、Zs. Tuza、M. Vizer：《图的鲁棒着色》。手稿，2023 年。[2] P. Erd˝os、C. Ko、拉多：《有限集系统的交定理》。Quart. J. Math. Oxford (2)，12 (1961)，313–320。[3] N. J. Fine、R. Harrop：《线性数组的统一化》。J. Symb. Logic，22 (1957)，130–140。[4] A. J. W. Hilton、E. C. Milner：《有限集系统的一些交定理》。Quart. J. Math. Oxford (2)，18 (1967)，369–384。[5] B. Patk´os、Zs. Tuza、M. Vizer：《关于q元向量的极值图论问题》。手稿，2022 年。[6] F. J. Soulignac：《单位区间图和单位圆弧图的有界、极小及短表示》。第一章：理论。J. Graph Algo- rithms Appl.，21 (2017)，455–489。