arXiv:2305.01930v1 [physics.flu-dyn] 3 May 2023

存在凝聚体时的非局部重力波湍流。

A.O. Korotkevich,[1,2,*] S. V. Nazarenko,[3,†] Y. Pan,[4,‡] 和 J. Shatah[5,§] [1] *Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico,MSC01 1115, 1 University of New Mexico, Albuquerque, NM 87131-0001, USA*
[2] *L. D. Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Prosp. Akademika Semenova 1A,Chernogolovka, Moscow region,* 142432, *Russian Federation*[3] *Institut de Physique de Nice, Université Côte d'Azur CNRS-UMR 7010, Parc Valrose, 06108 Nice, France*
[4] *Department of Naval Architecture and Marine Engineering,University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA*
[5] *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 251 Mercer St., New York, NY 10012, USA*（日期：2023年5月4日）

我们建立了一种理论，用于描述深水表面弱随机重力波的湍流。在该理论中，谱的高频部分的主要非线性过程是与强低频分量的非局域相互作用。后者被我们称为"凝聚体"，它可能因有限尺寸效应等原因而在系统中出现；有限尺寸效应会导致波长与容纳水槽尺寸相当的波发生能量停滞。我们的理论采用线性谱扩散方程的形式。我们求得该方程的一个标度解，并提出它可作为近期重力波谱数值结果的一种可能解释。

PACS 编号：47.27.ek, 47.35.-i, 47.35.Jk

引言。

波湍流理论（WTT）是一种统计闭合方法，可对随机弱波场 [1–3] 的演化进行粗粒化描述。WTT 已成功应用于差异极大的物理情形，从量子 [4, 5] 到经典 [6–8]，再到宇宙学 [9] 波系统。WTT 最重要的应用之一是水面重力波，对其进行理解对于海上航行和海上工业活动十分重要。该领域最重要成果的综述见 [10]。对于弱非线性重力波，存在两个二次（关于波幅的）不变量：能量和波作用量。该系统具有双级联特性，对应两种局域的 Kolmogorov-Zakharov（KZ）谱：一种是能量向小尺度级联 [6]，另一种是波作用量向大尺度级联 [11]。KZ谱的实现要求相互作用在尺度空间中具有局域性；而这只有在尺度范围足够宽、且谱空间中不存在局域能量堆积的惯性区间内才有可能。然而，大尺度上往往缺乏有效的耗散机制，因而会在系统中可达到的最大尺度（即容纳盆地的大小）附近发生谱堆积（或凝聚）。这种凝聚可能导致相互作用局域性的破坏。在本文中，我们将建立存在强大尺度凝聚体时重力波的波湍流理论描述。这将使我们能够解释近期在数值模拟 [12] 中观察到、并曾在实验中报道过的 [10] 逆级联 KZ谱偏离现象。

描述重力波（包括 [12] 中的重力波）的一种标准方法，是考虑理想不可压、无限深流体的三维势流上方的二维表面，其速度为 $\mathbf{v} = \nabla\Phi(x, y, z;\ t)$，其中 $\Phi(x, y, z;\ t)$ 为速度势。假定毛细效应相对于重力较小，故忽略不计。该系统的哈密顿变量为表面高程 $\eta(x, y;\ t)$ 以及表面上的速度势 $\psi(x, y;\ t) = \Phi(x, y, z;\ t)|_{z=\eta}$ [13]。引入正规正则变量 $a_{\mathbf{k}}$ 很方便，它们对应于按如下方式展开为傅里叶谐波：

$$a_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}}\eta_{\mathbf{k}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{2\omega_k}}\psi_{\mathbf{k}},\ \text{where } \omega_k = \sqrt{gk}. \qquad (1)$$

用这些变量表示时，表面动力学具有哈密顿形式

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} = -\mathrm{i}\frac{\delta H}{\delta a^*_{\mathbf{k}}} \qquad (2)$$

其中，哈密顿量 H 为波系的总物理能量（未显示）。

对于随机波场的统计描述，可以使用一种称为波作用谱的二点相关函数，

$$\langle a_{\mathbf{k}} a^*_{\mathbf{k}'}\rangle = n_{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

谱 $n_{\mathbf{k}}$ 是一个可测量的量，直接与可观测的关联函数相关，例如，根据 $a_{\mathbf{k}}$的定义，可以得到

$$I_{\mathbf{k}} = \langle|\eta_{\mathbf{k}}|^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{\omega_k}{g}(n_{\mathbf{k}} + n_{-\mathbf{k}}).$$

在波湍流理论的假设下，即波幅较小、相位随机且盆地范围较大时，谱 n_k

满足哈塞尔曼波动动理学方程（波动动理学方程）[14–16]:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = I_{St} + f_p(k) - f_d(k), \tag{3}$$

其中， f_p 和 f_d 分别是一些泵浦项和阻尼项， I_{St} 是所谓的碰撞积分:

$$I_{St} = 4\pi \int \left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}}\right) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \tag{4}$$
$$\delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \mathrm{d}\mathbf{k}_1 \mathrm{d}\mathbf{k}_2 \mathrm{d}\mathbf{k}_3.$$

相互作用系数 $T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3\mathbf{k},\mathbf{k}_1}$ 例如可见 [17] 以及补充材料第二章。动理学方程及其修正是所有波浪预测模型的基础。

人们可以考虑波动动理学方程（WKE）在所谓的惯性区间内的稳态解，即远离能量注入区域和阻尼区域的尺度范围。这类解必须满足 $I_{St} = 0$ 方程。除了显而易见的瑞利–金斯热力学平衡（零通量）解$n_{\mathbf{k}} \sim 1/($ ω_k+ 常数)之外，还存在对应于守恒量有限通量的动态平衡解，即所谓的 KZ谱 [1, 2]。方程（3）-（4）描述了一个四波过程，即两个波散射为另外两个波。这意味着，除了总能量 $E = \int \omega_k n_{\mathbf{k}} \mathrm{d}\mathbf{k}$之外，总波作用量（“波的数量”） $N = \int n_{\mathbf{k}} \mathrm{d}\mathbf{k}$也守恒。因此，存在两种 KZ谱：一种描述局部向小尺度（相对于强迫尺度而言）的能量级联，

$$n_k^{DC} = C_P P^{1/3} k^{-4}, \tag{5}$$

另一个则是局部向大尺度（即较小的 k）发展的波作用量级联 [11],

$$n_k^{IC} = C_Q Q^{1/3} k^{-23/6} \sim k^{-3.83}. \tag{6}$$

这里， P 和 Q 分别是能量通量和波作用量通量， C_P 和 C_Q 是一些常数，并且 $k = |\mathbf{k}|$。

在最近的一篇论文中 [12], ，原始动力学方程在一个区域内进行了模拟 $L_x = L_y = 2\pi$ ，该区域采用双重周期性边界条件，这意味着 k为整数。网格分辨率为 $N_x = N_y$ =512。泵浦关于角度是各向同性的，并集中在一个环 $k \in$ （60；64）内，每个受泵谐波都具有随机相位。阻尼始于 $k_d = 128$。因此，在波数小于$k = 60$ 的范围内，人们预期会发现类似于（6）的谱。然而，据报道，观测到的逆级联谱具有不同的斜率，接近于 $n_k \sim k^{-3.07}$；对于系统中显著不同的非线性水平而言，这一斜率几乎无法区分 [12]。这一数值观测谱与先前的实验结果相当接近，后者显示 $n_k \sim k^{-2.5}$ 或$n_k \sim k^{-3}$ ，具体取决于强迫频率 [10]。

在此前的研究中 [18, 19] 已经表明，凝聚体在此类系统的非线性交互过程中发挥着重要作用。具体而言，所测得的色散关系 [20] 表明，不能忽略凝聚体对逆级联区域内谐波的影响。存在几种能够将凝聚体影响纳入考量的方法。其中最显而易见的方法可能是基于玻戈留波夫变换技术，这与稀薄玻色气体的情形类似，也类似于近期关于 [21] 的研究（参见其中关于简并近理想玻色气体的章节 [22]或 [23]）。这种方法要求凝聚体是一个相干对象，这通常是通过使其位于单个谐波 $k = 0$上来实现的。在 [12], 的数值模拟中，凝聚体大致呈一个环状，位于 k空间中；由于区域的有限尺寸效应，其进一步向低波数的级联受到阻碍。图 $|a_{\mathbf{k}}|^2$1展示了 $|a_{\mathbf{k}}|^2$分布图。可以看到，波幅

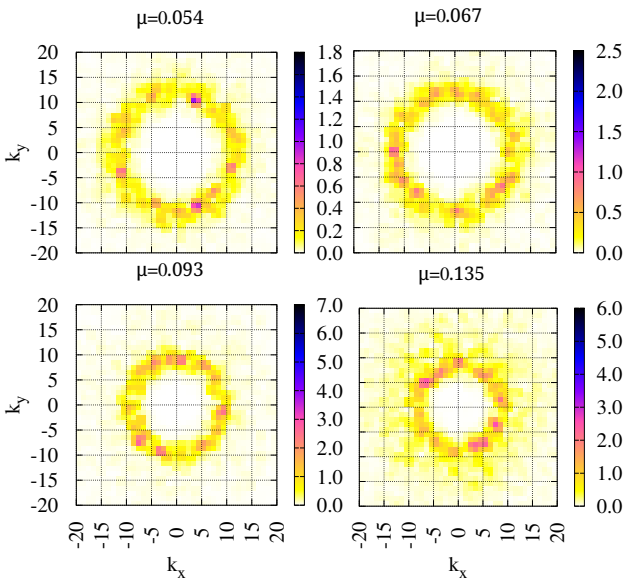

图1：凝聚区内所有模拟中 [12] 的 $|a_{\mathbf{k}}|^2 \times 10^8$ 表面。 μ 是平均波陡。

这些谐波是随机化的，而且在大多数情况下，即使波数相近，振幅也彼此显著不同 k。因此，Bogolyubov方法显然不适用。凝聚环中有一百多个谐波。由于对实现系综取平均在计算上不可行，我们对 $|a_{\mathbf{k}}|^2$函数沿方位角取平均，得到对象 $\langle|a_{\mathbf{k}}|^2\rangle$ ，它可以被视为 n_k的一种近似。因此，遵循 [24], 中提出的思路，可以尝试修改波动动理学方程（3），以描述凝聚体背景下波场的统计性质。

正如我们将在下一节中讨论的那样，关键进展在于从存在.....时表面重力波的波动力学方程推导出一个扩散方程。

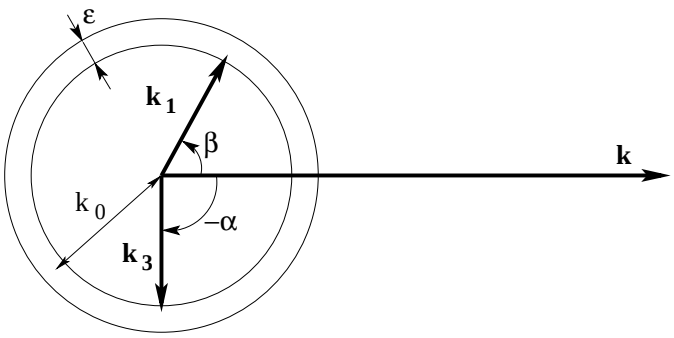

图 2：相对于凝聚环位置的所考虑波矢示意图。

凝聚体。我们在《补充材料》第III章中给出了一种替代推导，该推导基于扎哈罗夫方程的WKB近似。两种方法得到的结果完全相同，包括扩散系数的详细公式。过去，这类扩散方程主要用于三波共振系统，例如内重力波 [25], 罗斯贝波 [8] 和磁流体力学湍流 [26]。除了确立表面重力波作为四波共振系统的扩散机制外，我们还证明，扩散方程的常通量稳态解给出 $n_k \sim k^{-3}$，从而解释了此前的数值结果和实验结果。

凝聚体存在时扩散方程的推导。

假设凝聚模态比其他任何谐波都强得多，因此，对于共振四元组中的任意四个波，主要贡献来自两个波 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_3$ 处于凝聚体中的情况（见图 2），满足

$$\mathbf{k}+\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\ \ \omega_k+\omega_{k_1}=\omega_{k_2}+\omega_{k_3}. \tag{7}$$

我们考虑 $k \gg k_{1,\,3}$ 且凝聚体很强的情形$n_{\mathbf{k}_{1,\,3}} \gg n_{\mathbf{k}}$，$n_{\mathbf{k}_2}$。两个凝聚波均位于共振条件（7）同一侧的情况无法实现。该情形关于方位角是各向同性的。为简单起见，我们考虑凝聚体分布在一个环上的情形，如图 2所示。令 $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$ 表示波矢之差，即$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \mathbf{q}$，并忽略 $1/n_{\mathbf{k}_{1,\,3}}$项（4），得到:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} \approx 8\pi \int \left\{ \left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} (n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}}) \times \delta(\Omega) \right\}_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}} \mathrm{d}\mathbf{k}_1 \mathrm{d}\mathbf{k}_3, \tag{8}$$

其中 $\Omega = \omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}$。相较于（4），额外的因子 2 是因为凝聚体可以支撑在 $\mathbf{k}_2$ 或 $\mathbf{k}_3$上。

接下来，我们对该表达式关于 $\mathbf{q}$ 作泰勒展开

$$\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 (n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}}),$$

这里 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \mathbf{q}$，取至二阶（见补充材料第 I 章）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} \approx{}& 8\pi \int n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} \left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\, \delta(\Omega)|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}}\, \mathrm{d}\mathbf{k}_1 \mathrm{d}\mathbf{k}_3 + \\ &+4\pi \int n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} \left\{ 2\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)\Big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + \right. \\ &\left. + \left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\right) \right\} \delta(\Omega)|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}}\, \mathrm{d}\mathbf{k}_1 \mathrm{d}\mathbf{k}_3,\end{aligned} \tag{9}$$

To simplify (9), we consider the expansion of Ω in $\mathbf{q}$:

$$\Omega = \omega_{k_1} - \omega_{k_3} - \nabla_{\mathbf{k}}\omega_k \cdot \mathbf{q} + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2).$$

利用方程 $\omega_k = \sqrt{gk}$，我们得到

$$\begin{aligned}\Omega &\approx \omega_{k_1} - \omega_{k_3} - \frac{\sqrt{g}}{2}\frac{\mathbf{k}}{k^{3/2}}\cdot(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) = \\ &= \omega_{k_1} - \omega_{k_3} - \frac{\sqrt{g}}{2}\frac{k_1\cos\alpha - k_3\cos\beta}{k^{1/2}},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 α 和 β 见图2。这里我们保留了下一阶项；当 $k_1 \approx k_3$时，该项会成为主导项的一部分。需要指出的是，$\delta(\Omega)$（此处及下文均采用 Ω的最后一个表达式）在交换 $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_3$ 时保持不变。利用这一对称性以及 $T^{\mathbf{k}_2}$，$\mathbf{k}_{1}^{3} = T^{\mathbf{k}}\mathbf{k}$，$\mathbf{k}$，$_{\mathbf{k}_1}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3$，并考虑到 $\mathbf{k}_1$和 $\mathbf{k}_3$ 是哑变量，因此交换 $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_3$, 后积分的值不会改变，由于经过上述积分变量交换后 $\mathbf{q}$ 的符号发生变化，(9) 的第一项积分为零。对于 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ 时 (9) 中第二项的计算，可以使用以下等式:

$$\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\Big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{k}}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}\right|^2\Big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{k}}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2. \tag{11}$$

其中，第二个等号应理解为在对 $\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_3$ 进行积分的语境下，如式（9）所示。因此，式（9）可变换为以下表达式（将第二项和第三项合并后）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} \approx{}& 4\pi \int n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \left(\mathbf{q}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\right) \\ &\times \delta(\Omega)\mathrm{d}\mathbf{k}_1 \mathrm{d}\mathbf{k}_3.\end{aligned} \tag{12}$$

这是波作用量 $n_{\mathbf{k}}$ 的连续性方程，

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{13}$$

具有通量 $\mathrm{Q}_{\mathbf{k}}$ 的各向同性谱，其中 $\mathrm{Q}_{\mathbf{k}} = -4\pi \int n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3}$ $\mathbf{q}\left|T_{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}\right|^2_{\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}_k}$ $\frac{\partial n_k}{\partial k}\delta(\Omega)\mathrm{d}\mathbf{k}_1\mathrm{d}\mathbf{k}_3$。非-

在相同的各向同性考量下，我们有

$$N = \int n_{\mathbf{k}} \mathrm{d}\mathbf{k} = \int n_k 2\pi k \mathrm{d}k, \tag{14}$$

$$\frac{\partial(2\pi k n_k)}{\partial t} + \frac{\partial Q_k}{\partial k} = 0. \tag{15}$$

这里我们引入了各向同性波作用通量

$$Q_k = 2\pi \mathbf{k}\cdot\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = -\left[\frac{8\pi^2}{k}\int n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_3} \delta(\Omega)\times \right.$$
$$\left.\times \left(\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2\right)\mathrm{d}\mathbf{k}_1\mathrm{d}\mathbf{k}_3\right]\frac{\partial n_k}{\partial k}. \tag{16}$$

可以将 k_3 利用 δ（Ω消去。为此，我们需要在（10）中令 $\Omega = 0$ 。对 $\sqrt{k_3}$ 求解该二次方程，并考虑条件 $k_1 \ll k$ ，得到：

$$k_3 \approx k_1 - k_1\sqrt{\frac{k_1}{k}}(\cos\alpha - \cos\beta). \tag{17}$$

对 (16) 的积分遍及 $0 \le \alpha$、$\beta < 2\pi$ 和 k_1。若凝聚环 ε/k_0 的相对宽度较小，那么根据 (17)， k_3 对于某些 α、$\beta \in (0,\ 2\pi)$，会位于环外，见图 2。然而，如果凝聚环较宽 $\varepsilon/k_0 \gg 2(k_0/k)^{1/2}$ ，我们总能找到 $k_3 \approx k_1$ ，使其对所有 $0 \le \alpha$、$\beta < 2\pi$ 都成立（详情见补充材料第四章）。由一个强不等式可知，我们可以取 $n_{k_3} = n_{k_1}$，因此得到一个扩散方程

$$2\pi k\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k}\left(D_k\frac{\partial n_k}{\partial k}\right), \tag{18}$$

具有扩散系数

$$D_k = 8\pi^2 k \int\limits_{k_1\ll k} n_{k_1}^2 \frac{k_1^4}{\left|\frac{d\omega_{k_1}}{dk_1}\right|}\times$$
$$\left[\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2(\cos\beta - \cos\alpha)^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right]\mathrm{d}k_1. \tag{19}$$

补充材料第二章中表明， $T^{\mathbf{k}}_{,\mathbf{k}_3\mathbf{k},\mathbf{k}_1}$ 在$k_{1,3}/k$ 展开中第一个非零项（消去所有 k^2k_1 阶的项后）为：

$$T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} = -\frac{(kk_1)^{3/2}}{16\pi^2}(\cos\alpha - \cos\beta)^2. \tag{20}$$

要找出扩散系数（19），需利用（20）计算以下积分：

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2(\cos\beta - \cos\alpha)^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \frac{25(kk_1)^3}{256\pi^2},$$

由此得到

$$D_k = \lambda k^4,\ \lambda = \frac{25\pi}{16}\int\limits_{k_1\ll k} n_{k_1}^2 k_1^{15/2}\mathrm{d}k_1 = \mathrm{const}. \tag{21}$$

还需注意，如果凝聚体的宽度为 $D_k \sim k^4$ $\varepsilon/k_0 \sim (k_0/k)^{1/2}$，我们就会失去普适（即与谱形无关的）标度关系。

由 $Q = -D_k\partial n_k/\partial k = const$，我们立即得到

$$n_k = \frac{Q}{3\lambda}k^{-3}, \tag{22}$$

这是一个常通量幂律解。注意，由于 n_k 和 λ 均为正，波作用通量 Q也为正，即指向较大的 k ，其方向与 $Q =$ 为常数时局域KZ解中的波作用通量相反。但根据标准的Fjørtoft论证，波作用量不可能持续传递到较大的 k's——否则，传递到这些波数的能量将大于强迫产生的能量，这是不可能的。因此，非局域级联必定会从凝聚体中抽取波作用量。同样，能量也会从凝聚体中流失。事实上，对于凝聚体外模态的能量，由（18）可得：

$$\dot{E} = \int \omega_k(D_k n_k')' dk = \frac{7\lambda}{4}\int k^{5/2} n_k dk > 0. \tag{23}$$

因此，对于 n_k 的任意形状，凝聚体外模态的能量都在增加；而由于总能量必须守恒，在没有强迫和耗散的情况下，我们得出结论：凝聚体的能量必定以相同速率减少。我们还得出结论，要使稳态存在，就必须有一种机制将能量和波作用量从强迫区输送到凝聚体，而这种机制不能是非局域区制下由波动动理学方程产生的扩散机制（因为后者会将这些不变量朝相反方向输送）。

结论与讨论。

在这篇快报中，我们研究了水面重力波湍流，并针对强大尺度凝聚体存在时非局域波作用谱的演化，建立了波湍流理论。我们推导出一个控制这种演化的奇异非均匀谱扩散方程。我们发现了一个对应于恒定波作用量级联的稳态解， $n_k \sim k^{-3}$，并提出该解或许可以解释数值模拟中 [12] 以及实验中 [10] 所观测到的谱。

关于向凝聚体输送能量和波作用量的机制，可以设想两种情形。首先，在初始阶段，凝聚体可能通过局域逆级联逐渐形成，随后非局域区制改变级联方向。显然，在这种情况下，由于凝聚体耗散，非局域区制无法维持自身，系统将返回局域区制，并可能周期性地重复局域—非局域循环。我们排除这种情况。

这种可能性，因为在数值模拟中没有观察到此类振荡。第二种可能性是，在强迫模态发生调制不稳定性后，通过准共振三波过程直接激发凝聚模态。这种机制要求强迫范围内的波谱足够强——这显然是 [12] 的数值结果所显示的特征。此外，后一个过程可能与非局部直接级联同时保持活跃，从而有助于形成稳定的谱-

谱。不过，这种情景仍属推测，尚需进一步验证。

作者感谢西蒙斯波湍流合作项目（资助编号 # 651459 和 #651459）的支持。部分研究是在 KAO 访问法国蔚蓝海岸大学/尼斯物理研究所期间完成的，该访问由“Wolfgang Döblin”研究联合会和“波的复杂性”访问研究员项目资助；此外，KAO、NSV 和 PY 访问库朗数学研究所期间也开展了部分研究。

补充材料：描述。

补充材料的四个部分分别介绍：推导波作用量连续性方程的二阶泰勒展开、相互作用系数的约化、从表面重力波的扎哈罗夫方程推导谱扩散方程，以及基于不同参数考察所提出理论的适用范围。

补充 mental 材料：第一部分。被积函数的泰勒展开至二阶 .

我们从被积函数中依赖于 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}_2$ 的部分开始。我们还将利用这样一个事实：$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_3$ 是哑变量（用于积分），经过适当调整被积函数后，可以互换而不改变积分的值。我们将对以下表达式进行泰勒展开：

$$F = \left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 (n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}}),$$

以 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \mathbf{q}$ 为变量，在 $\mathbf{k}$ 附近展开，其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$。需要注意的是，$T^{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}$ 是齐次函数，因此可以将所有 $\mathbf{k}_i$ 除以 k，并利用我们考虑的情形为 $k_{1,\ 3}/k \ll 1$ 这一事实。于是，$|\mathbf{q}|/k \ll 1$，并在认为 $T^{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}$ 相对于 k 很小时对其进行展开，是可行的。此外，我们假设函数 $n_{\mathbf{k}}$ 具备所有必要的性质，因此可以将 $\mathbf{q}$ 视为小扰动并按 $\mathbf{q}$ 展开。例如，[12] 中的数值数据假设 $n_k \sim k^{-3.07}$ 是一个衰减的幂律函数，这同样使我们能够将所有 $\mathbf{k}_i$ 除以 k。因此，再次假设 $|\mathbf{q}|$ 相对于 k 很小并进行泰勒展开，是合理的。

展开的零阶显然为零：

$$F|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = 0.$$

展开的一阶为（在代入 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ 之前）：

$$D_{\mathbf{k}_2}F = \left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)(n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}}) + \left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_2}. \tag{24}$$

将 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ 代入后，该表达式为：

$$D_{\mathbf{k}_2}F|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = \left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2 \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}. \tag{25}$$

利用对称性 $T^{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1}{}^3 = T^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$ 并考虑到前面提到的事实：$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_3$ 是哑变量，且积分在交换 $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_3$, 后其值必须保持不变，因此该表达式的积分为零，因为积分变量交换后，$\mathbf{q}$ 25) 的积分会因 $\mathbf{q}$ 变号而变号。因此需要考虑展开的下一阶。

利用（24），展开的二阶项为（在代入 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$之前）：

$$D^2_{\mathbf{k}_2}F = D_{\mathbf{k}_2}(D_{\mathbf{k}_2}F) = \mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)(n_{\mathbf{k}_2}-n_{\mathbf{k}}) + \left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}n_{\mathbf{k}_2} +$$
$$+\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}n_{\mathbf{k}_2} + |T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}|^2\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}n_{\mathbf{k}_2}\right) =$$
$$=\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)(n_{\mathbf{k}_2}-n_{\mathbf{k}}) +$$
$$+2\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}n_{\mathbf{k}_2} + \left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}n_{\mathbf{k}_2}\right). \tag{26}$$

在 26) 处取 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$，可得:

$$D^2_{\mathbf{k}_2}F\big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = 2\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)\Big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}}\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + \left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}\right). \tag{27}$$

再次利用对称性 $T_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}{}^3 = T^{\mathbf{k}}{}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$，并注意到式（27）中的每一项都含有两个因子 $\mathbf{q}$，因此交换 $\mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_3$ 不会改变各项的符号。要在 27) 的第一项中取 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$，可使用以下等式:

$$\nabla_{\mathbf{k}_2}\left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\Big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = \nabla_{\mathbf{k}}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1}\right|^2\Big|_{\mathbf{k}_2=\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{k}}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2. \tag{28}$$

因此，我们得到 F 的二阶展开:

$$F = \left|T^{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2(n_{\mathbf{k}_2}-n_{\mathbf{k}}) \approx \left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\right)\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + \left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}\right) =$$
$$=\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\left(\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}\right) = \nabla_{\mathbf{k}}\cdot\left(\mathbf{q}\left|T^{\mathbf{k},\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\right|^2\mathbf{q}\cdot\nabla_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}\right). \tag{29}$$

补充材料：第二部分。相互作用系数的化简。

我们重现了来自 [7] 的相互作用矩阵元（相互作用系数）公式，并加入了 [17] 中的修正（这里引入记号 $\omega_i = \omega_{\mathbf{k}_i}$）：

$$T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4,PRZ}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2}(\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} + \tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1}), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} &= -\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(k_1k_2k_3k_4)^{1/4}} \\
&\times\big\{-12k_1k_2k_3k_4 - 2(\omega_1+\omega_2)^2[\omega_3\omega_4((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)-k_1k_2) \\
&+\omega_1\omega_2((\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4)-k_3k_4)]\frac{1}{g^2} \\
&-2(\omega_1-\omega_3)^2[\omega_2\omega_4((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3)+k_1k_3)+\omega_1\omega_3((\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_4)+k_2k_4)]\frac{1}{g^2} \\
&-2(\omega_1-\omega_4)^2[\omega_2\omega_3((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_4)+k_1k_4)+\omega_1\omega_4((\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3)+k_2k_3)]\frac{1}{g^2} \\
&+[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)+k_1k_2][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4)+k_3k_4] \\
&+[-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3)+k_1k_3][-(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_4)+k_2k_4] \\
&+[-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_4)+k_1k_4][-(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3)+k_2k_3] \\
&+4(\omega_1+\omega_2)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)-k_1k_2][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4)-k_3k_4]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}-(\omega_1+\omega_2)^2} \\
&+4(\omega_1-\omega_3)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3)+k_1k_3][(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_4)+k_2k_4]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}-(\omega_1-\omega_3)^2} \\
&+4(\omega_1-\omega_4)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_4)+k_1k_4][(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3)+k_2k_3]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4}-(\omega_1-\omega_4)^2}\Big\}.
\end{aligned} \tag{31, 32}$$

表达式 (30) 满足条件 $T\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2{}^4 = T_{,PRZ}\mathbf{k}_1\mathbf{k}\,\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1{}^4 = T_{,PRZ}\mathbf{k}_2\mathbf{k}\,\mathbf{k}_4\mathbf{k}3,_{PRZ}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$，但缺少一项重要的对称性 $T\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 = T\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4$（类似于量子力学中的厄米对称性）。这种对称性源于系统具有实哈密顿函数这一事实。因此，我们需要进行额外的对称化：

$$T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2}(T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4,PRZ}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} + T^{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,PRZ}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}). \tag{33}$$

补充材料：第二部分 A. 凝聚体存在时的波系统。

我们考虑以下情形：两个波矢（$\mathbf{k}_2$ 和 $\mathbf{k}_4$）位于凝聚体之外，另外两个波矢位于凝聚体之中（$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_3$）。根据主论文中扩散方程的推导，凝聚体波矢必须近似位于同一个圆 $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_3| = k_0$ 上。由于相互作用系数关于 k-空间旋转是不变的，我们可以取 $\mathbf{k}_2$ 沿 x-轴方向，并以该方向为基准测量凝聚体圆上的角度：$\mathbf{k}_1 = (k_0\,\text{余弦}(\beta)\ k_0\,\text{正弦}(\beta))^T$ 和 $\mathbf{k}_3 = (k_0\,\text{余弦}(\alpha)\ k_0\,\text{正弦}(\alpha))^T$，其中 $\beta = \angle(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$ 和 $\alpha = \angle(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)$。

波矢的共振条件如下，

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \tag{34}$$

以及频率——

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4. \tag{35}$$

由于凝聚体是长波背景，我们可以考虑这种情况$k_0 \ll k_{2,\ 4}$ 其中 $k_i = |\mathbf{k}_i|$。因此，我们有一个小参数$k_0/k_{2,\ 4} \ll 1$。这是我们简化（约化）矩阵元的主要工具。就本文而言，我们只需要考虑 $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}$ 的情况。因此，要得到完整的矩阵元，需要考虑以下两个函数：$\tilde{T}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ 和 $\tilde{T}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\,\mathbf{k}\,\mathbf{k}_1}$。

Supplemental Material: Part II.B. $\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ contribution.

我们先从 $\tilde{T}^{\mathbf{k}_3}{}_{\mathbf{k}\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ 开始：

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} &= -\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(k_0 k)^{1/2}} \\
&\times \Big\{-12k_0^2k^2 - 2(\omega_0+\omega_k)^2[\omega_0\omega_k((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}) - k_0k) \\
&+ \omega_0\omega_k((\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}) - k_0k)]\frac{1}{g^2} \\
&- 2(0)^2[\omega_k^2((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3) + k_0^2) + \omega_0^2((2k^2)]\frac{1}{g^2} \\
&- 2(\omega_0-\omega_k)^2[\omega_k\omega_0((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}) + k_0k) + \omega_0\omega_k((\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3) + kk_0)]\frac{1}{g^2} \\
&+ [(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}) + k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}) + k_0k] \\
&+ [-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3) + k_0^2][0] \\
&+ [-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}) + k_0k][-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3) + kk_0] \\
&+ 4(\omega_0+\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}) - k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}) - k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}} - (\omega_0+\omega_k)^2} \\
&+ 4(\omega_3-\omega_1)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3) + k_0^2][(2k^2)]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} - (\omega_3-\omega_1)^2} \\
&+4(\omega_0-\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}) + k_0k][(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3) + kk_0]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}} - (\omega_0-\omega_k)^2}\Big\}.
\end{aligned} \tag{36}$$

在正文中，我们证明了 $|\omega_3 - \omega_1| = \mathcal{O}(|\mathbf{q}|)$，因此 $(\omega_3 - \omega_1)^2 = \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2)$，而 $\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} = |\mathbf{q}|$。因此，第二个分数项为 $\mathcal{O}(|\mathbf{q}|^3)$，所以可以忽略。

使用以下表达式:

$$
\begin{aligned}
(\omega_0+\omega_k)^2 &= gk\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)\approx gk\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right),\\
(\omega_0-\omega_k)^2 &= gk\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)\approx gk\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right),\\
\omega^2_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}} &= gk\sqrt{1+2\frac{k_0}{k}\cos\beta+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\approx gk\left(1+\frac{k_0}{k}\cos\beta\right),\\
\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}} &= gk\sqrt{1-2\frac{k_0}{k}\cos\beta+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\approx gk\left(1-\frac{k_0}{k}\cos\beta\right),\\
\omega^2_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}} &= gk\sqrt{1-2\frac{k_0}{k}\cos\alpha+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\approx gk\left(1-\frac{k_0}{k}\cos\alpha\right),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

可以得到 $1/g^2$ 组项:

$$
\begin{aligned}
&-2(\omega_0+\omega_k)^2[\omega_0\omega_k((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})-k_0k)+\omega_0\omega_k((\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})-k_0k)]\frac{1}{g^2}\\
&-2(\omega_0-\omega_k)^2[\omega_k\omega_0((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k)+\omega_0\omega_k((\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3)+kk_0)]\frac{1}{g^2}=\\
&=-2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)(\cos\beta+\cos\alpha-2)-\\
&-2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)(\cos\beta+\cos\alpha+2)\approx\\
&\approx-2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)(\cos\beta+\cos\alpha-2)-\\
&-2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)(\cos\beta+\cos\alpha+2)=\\
&=16k^2k_0^2-4k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}(\cos\beta+\cos\alpha).
\end{aligned}
\tag{38}
$$

对于方括号中的项，我们有:

$$
\begin{aligned}
&[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})+k_0k]+[-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k][-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3)+kk_0]=\\
&=k^2k_0^2(\cos\beta+1)(\cos\alpha+1)+k^2k_0^2(1-\cos\beta)(1-\cos\alpha)=\\
&=2k^2k_0^2+2k^2k_0^2\cos\beta\cos\alpha.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

第一个分数项为:

$$
\begin{aligned}
&4(\omega_0+\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})-k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})-k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}}-(\omega_0+\omega_k)^2}=\\
&=4k\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)\frac{k^2k_0^2(\cos\beta-1)(\cos\alpha-1)}{k\sqrt{1+2\frac{k_0}{k}\cos\beta+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}-k\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)}.
\end{aligned}
$$

现在需要将分母中的平方根展开到 k_0/k 项:

$$
\sqrt{1+2\frac{k_0}{k}\cos\beta+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\approx 1+\frac{k_0}{k}\cos\beta.
\tag{40}
$$

$$4(\omega_0+\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})-k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})-k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}}-(\omega_0+\omega_k)^2}\approx$$
$$\approx 4k^2k_0^2\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)\frac{(\cos\beta\cos\alpha+1-(\cos\beta+\cos\alpha))}{-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}-\frac{k_0}{k}(1-\cos\beta)}\approx$$
$$\approx -2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1+2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1-\cos\beta)\right), \tag{41}$$

这里我们将其展开到 $\sqrt{k_0/k}$ 项:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1-\cos\beta)}\approx 1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1-\cos\beta). \tag{42}$$

最后一个分数项:

$$4(\omega_0-\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})+k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}}-(\omega_0-\omega_k)^2}=$$
$$=4k\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)\frac{k^2k_0^2(\cos\beta+1)(\cos\alpha+1)}{k\sqrt{1-2\frac{k_0}{k}\cos\beta+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}-k\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)}.$$

现在 e 需要将分母中的平方根展开至 k_0/k 项:

$$\sqrt{1-2\frac{k_0}{k}\cos\beta+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\approx 1-\frac{k_0}{k}\cos\beta. \tag{43}$$

$$4(\omega_0-\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})+k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}}-(\omega_0-\omega_k)^2}\approx$$
$$\approx 4k^2k_0^2\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)\frac{(\cos\beta\cos\alpha+1+(\cos\beta+\cos\alpha))}{2\sqrt{\frac{k_0}{k}}-\frac{k_0}{k}(1+\cos\beta)}\approx$$
$$\approx 2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1+\cos\beta)\right), \tag{44}$$

这里我们使用了展开（至 $\sqrt{k_0/k}$ 项）：

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1+\cos\beta)}\approx 1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1+\cos\beta). \tag{45}$$

让我们从两个分数项（$k^2k_0^2\sqrt{k/k_0}$ 项中提取出因子（41）和（44）：

$$-2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))+2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\times$$
$$\times(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))=4k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}(\cos\beta+\cos\alpha). \tag{46}$$

这一项与（38）中的对应项恰好抵消。因此，最终展开中不会出现此类项。现在，让我们从分数项（41）和（44）中提取所有 $k^2k_0^2$ 项:

$$\begin{aligned}&-4k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))+k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))(1-\cos\beta)+\\&-4k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))+k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))(1+\cos\beta)=\\&=-6k^2k_0^2-4k^2k_0^2\cos\beta\cos\alpha+2k^2k_0^2\cos^2\beta,\end{aligned}\tag{47}$$

这里我们使用了

$$\begin{aligned}&(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))(1-\cos\beta)+(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))(1+\cos\beta)=\\&=2+4\cos\beta\cos\alpha+2\cos^2\beta.\end{aligned}\tag{48}$$

考虑到 $-12k^2k_0^2$ （36）中花括号开头的项，以及（38）、（39）和（47）中的各向同性项，可以看出这些项相互抵消。

角度相关 $k^2k_0^2$项，来自（39）和（47）（请注意，它们在（38）中不存在）给出:

$$-2k^2k_0^2\cos\beta\cos\alpha+2k^2k_0^2\cos^2\beta=2k^2k_0^2\cos\beta(\cos\beta-\cos\alpha).\tag{49}$$

如果余弦 β–余弦 $\alpha=0$，这一项将消失。对于每个给定的 β，满足此条件的 $\alpha=\pm\beta$ 只有两个取值。例如，对于一个平凡过程 $T^{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$（在我们的情形中，它对应于 $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_3$,，这是被禁止的），这一项将不存在。但一般而言，这一项是存在的，而且是主要贡献项。

因此，对于 $\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}}$，第一个非零项为:

$$\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}\approx-\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(k_0k)^{1/2}}2k^2k_0^2\cos\beta(\cos\beta-\cos\alpha)=-\frac{(kk_0)^{3/2}}{16\pi^2}2\cos\beta(\cos\beta-\cos\alpha).\tag{50}$$

Supplemental Material: Part II.C. $\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}$ contribution.

让我们回顾一下，$T^{\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}{}^{RZ}_P=(\tilde{T}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}}+\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\,\mathbf{k}\mathbf{k}_1})/2$，因此还需要找到所有对应的 $\tilde{T}_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\,\mathbf{k}\mathbf{k}_1}$ 项，

$$\begin{aligned}&\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}=-\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(k_0k)^{1/2}}\\&\times\big\{-12k_0^2k^2-2(\omega_k+\omega_0)^2[\omega_0\omega_k((\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)-k_0k)\\&+\omega_0\omega_k((\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})-k_0k)]\frac{1}{g^2}\\&-2(\omega_k-\omega_0)^2[\omega_0\omega_k((\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3)+k_0k)+\omega_0\omega_k((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+kk_0)]\frac{1}{g^2}-\\&-2(0)^2[\omega_0^2(2k^2)+\omega_k^2((\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3)+k_0^2)]\frac{1}{g^2}+\\&+[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)+k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})+k_0k]\\&+[-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3)+k_0k][-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+kk_0]\\&+[0][-(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3)+k_0^2]\\&+4(\omega_k+\omega_0)^2\frac{[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_1)-k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})-k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-(\omega_k+\omega_0)^2}\\&+4(\omega_k-\omega_0)^2\frac{[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_3)+k_0k][(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+kk_0]}{\omega^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}-(\omega_k-\omega_0)^2}\\&+4(\omega_k-\omega_{k_4})^2\frac{[2k^2][(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_3)+k_0^2]}{\omega^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_4}-(\omega_k-\omega_{k_4})^2}\Big\}.\end{aligned}\tag{51}\tag{52}$$

这里最后的分数项出于与方程（36）后段落中所述相同的原因，可以忽略。

可以看出，所有的主导阶项都与 $\tilde{T}^{\mathbf{k}_3}{}_{\mathbf{k}\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ 中的相同，只有第二个分数项的分母例外，其中 $(\omega^2_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}}$ 被 $\omega^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}$ 替换。因此，我们只处理这一项：

$$4(\omega_0-\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})+k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}-(\omega_0-\omega_k)^2}=$$
$$=4k\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)\frac{k^2k_0^2(\cos\beta+1)(\cos\alpha+1)}{k\sqrt{1-2\frac{k_0}{k}\cos\alpha+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}-k\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}+\frac{k_0}{k}\right)}.$$

现已上线 e 需要将分母中的平方根展开至 k_0/k 项：

$$\sqrt{1-2\frac{k_0}{k}\cos\alpha+\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\approx 1-\frac{k_0}{k}\cos\alpha. \tag{53}$$

$$4(\omega_0-\omega_k)^2\frac{[(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k})+k_0k][(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k})+k_0k]}{\omega^2_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}-(\omega_0-\omega_k)^2}\approx$$
$$\approx 4k^2k_0^2\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)\frac{(\cos\beta\cos\alpha+1+(\cos\beta+\cos\alpha))}{2\sqrt{\frac{k_0}{k}}-\frac{k_0}{k}(1+\cos\alpha)}\approx$$
$$\approx 2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\left(1-2\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right)(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1+\cos\alpha)\right), \tag{54}$$

这里我们使用了展开（最多包含 $\sqrt{k_0/k}$ 项）：

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1+\cos\alpha)}\approx\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}(1+\cos\alpha)\right). \tag{55}$$

我们从以下两项中提取 $k^2k_0^2\sqrt{k/k_0}$ 分数项（41）和（54）：

$$-2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))+2k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}\times$$
$$\times(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))=4k^2k_0^2\sqrt{\frac{k}{k_0}}(\cos\beta+\cos\alpha). \tag{56}$$

这一项与（38）中的对应项完全抵消。因此，最终展开中不会出现此类项。现在，让我们从（ $k^2k_0^2$ ）和（41）以及（54）这两个分数项中提取所有项：

$$-4k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))+k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))(1-\cos\beta)+$$
$$-4k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))+k^2k_0^2(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))(1+\cos\alpha)=$$
$$=-6k^2k_0^2-4k^2k_0^2\cos\beta\cos\alpha+k^2k_0^2\cos^2\beta+k^2k_0^2\cos^2\alpha+k^2k_0^2(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta\cos\alpha+1), \tag{57}$$

此处我们使用了：

$$(1+\cos\beta\cos\alpha-(\cos\beta+\cos\alpha))(1-\cos\beta)+(1+\cos\beta\cos\alpha+(\cos\beta+\cos\alpha))(1+\cos\alpha)=$$
$$=2+4\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha+(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta\cos\alpha+1). \tag{58}$$

考虑到$-12k^2k_0^2$（52）中大括号开头的项，以及（38）、（39）和（57）中的各向同性项，可以看出这些项相互抵消。

角度依赖 $k^2k_0^2$项，来自（39）和（57）（请注意，它们在（38）中不存在）：

$$-2k^2k_0^2\cos\beta\cos\alpha+k^2k_0^2\cos^2\beta+k^2k_0^2\cos^2\alpha+k^2k_0^2(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta\cos\alpha+1)=$$
$$=k^2k_0^2(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta+1). \tag{59}$$

当余弦 β–余弦 $\alpha=0$ 时，该项将为零。对于每个给定的 β，满足这一条件的 $\alpha=\pm\beta$ 只有两个值。例如，对于平凡过程 $T_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$（在我们的情形中，它对应于 $\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_3,$，这是不允许的），该项将不存在。但一般情况下，该项存在，并且是主要贡献项。

最后，对于 $\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\ \mathbf{k}\mathbf{k}_1}$ 我们得到第一个非零项：

$$\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}=\approx-\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{(k_0k)^{1/2}}k^2k_0^2(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta+1)=$$
$$=-\frac{(kk_0)^{3/2}}{16\pi^2}(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta+1). \tag{60}$$

S补充材料：第二部分 D. 矩阵元的第一个非零项。

对 (50) 和 (60) 取算术平均值后，我们得到 $T_{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}$ PR 中的主项 $_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}{}^{Z}$：

$$T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k},PRZ}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}=\frac{\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}+\tilde{T}^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{2}\approx-\frac{(kk_0)^{3/2}}{32\pi^2}(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta\cos\alpha+1+\cos\alpha-3\cos\beta). \tag{61}$$

需要指出的是，该表达式在交换 α 和 β 时并不具有对称性。这正是由于交换两对向量（下对和上对）$_{T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}}{}_{{}^{4}_{2}}=T^{\mathbf{k}_1}{}_{3}\mathbf{k}_1\mathbf{k}\,\mathbf{k}_2\mathbf{k}\,\mathbf{k}_4$，时缺乏对称性所致；在我们的情形中，这意味着 $T\mathbf{k}_3\mathbf{k}\,\mathbf{k}_1\mathbf{k}=T\mathbf{k}_1\mathbf{k}\,\mathbf{k}_3\mathbf{k}$，或者 $T(\mathbf{k}\ k_0,\alpha,\beta)=T(\mathbf{k}\ k_0,\beta,\alpha)$。将 (61) 代入后，表达式 (33) 变为：

$$T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}=\frac{T(\mathbf{k},k_0,\alpha,\beta)+T(\mathbf{k},k_0,\beta,\alpha)}{2}=-\frac{(kk_0)^{3/2}}{16\pi^2}(\cos\alpha-\cos\beta)^2. \tag{62}$$

在波动动理学方程中，我们使用（62）的平方，可得：

$$|T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}|^2=\frac{(kk_0)^3}{256\pi^4}(\cos\alpha-\cos\beta)^4. \tag{63}$$

对于角度对称情形的通量，需要计算：

$$D(k)=2\pi k\int\limits_{0,k_1\ll k}^{+\infty}n_{k_1}^2k_1^{9/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}|^2(\cos\beta-\cos\alpha)^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}k_1 \tag{64}$$

我们可以在区间 $[0,2\pi)$ 上分别对 α 和 β 积分（按角度取平均），因为它不依赖于角度（相对于极角而言是各向同性的情形），于是得到：

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}|^2(\cos\beta-\cos\alpha)^2\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\frac{(kk_1)^3}{256\pi^4}25\pi^2=\frac{25k_1^3}{256\pi^2}k^3. \tag{65}$$

补充材料：第二部分 E。矩阵元展开下一阶项的符号计算。

我们使用 Maxima 计算机代数系统[27]（具体而言，使用适用于 Linux 的 wxMaxima）来计算矩阵元 $T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ 展开中的下一阶项，并检查所有先前的计算。为了简化表达式，我们提取了

$$-\frac{1}{16\pi^2}\frac{(kk_0)^2}{(kk_0)^{1/2}}=-\frac{(kk_0)^{3/2}}{16\pi^2}$$

所有项中的因子，并不得不考虑对以下内容的展开

$$\frac{k_4}{k} = \frac{|\mathbf{k} + \mathbf{\Delta}k|}{k}.$$

小参数 k_0/k 记为 x。

这是代码：

```
/*为了保留下一阶项，我们考虑 k2=k 与 k4 之间的相对差异。 */; k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) :=t a y l o r ( s q r t (1+2*x *( c o s ( beta )-c o s ( a lpha ) +2*x^2*(1-c o s ( beta-a lpha ) ) ) ) , x , 0 , 2 ) ;

/*对于重力，我们将 \Tilde T 记作 T。 */

/*这是补充材料的第二部分 B。 */ T 1 2 3 4 第一个项 (x, beta, alpha): =-12*k 4 除以 k (x, beta, alpha);

T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m 1 ( x , beta , alpha ) :=t a y l o r ( -2*( s q r t ( x ) +1) ^ 2*( s q r t ( k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) *( c o s ( beta ) -1)+( c o s ( alpha )+x *( c o s ( beta-a lpha ) -1)-k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) ) , x , 0 , 2 ) / s q r t ( x ) ;

T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m 2 ( x , beta , alpha ) :=-0;

T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m 3 ( x , β , α ) :=泰勒 ( -2*(平方根 ( x )-平方根 ( k 4 o v e r k ( x , β , α ) ) ) ^ 2 ) *( ( 余弦 ( β )+x*(1-余弦 ( β-α ) )+k 4 o v e r k ( x , β , α ) )+平方根 ( k 4 o v e r k ( x , β , α ) ) *( 余弦 ( α ) +1) ) , x , 0 , 2 ) / 平方根 ( x ) ;

T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m s ( x , beta , a lpha ) :=T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m 1 ( x , beta , a lpha )+T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m 2 ( x , beta , alpha )+T 1 2 3 4 o v e r g 2 t e r m 3 ( x , beta , a lpha ) ;

T 1 2 3 4 方括号项 1 ( x , beta , alpha ) :=泰勒 ( ( cos ( beta ) +1) *( cos ( alpha )+x *( cos ( beta-alpha ) -1)+k 4 除以 k ( x , beta , alpha ) ) , x , 0 , 2 ) ;

T 1 2 3 4 方括号项 2 ( x , beta , a lpha ) :=t a y l o r ((-c o s ( beta-a lpha ) +1)*(-(1+x *( c o s ( beta )-c o s ( a lpha ) ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) ) , x , 0 , 2 ) ;

T 1 2 3 4 方括号项 3 ( x , β , α ) :=泰勒展开 ((-余弦 ( α ) +1)*( -( 余弦 ( β )+x *(1-c o s ( beta-a lpha ) ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) ) , x , 0 , 2 ) ;

T 1 2 3 4 方括号项 ( x , beta , a lpha ) :=T 1 2 3 4 方括号项 1 ( x , beta , alpha )+T 1 2 3 4 方括号项 2 ( x , beta , a lpha )+T 1 2 3 4 方括号项 3 ( x , beta , alpha ) ;

T 1 2 3 4 分数项 1 ( x , beta , a lpha ) :=泰勒展开 (4*(1+平方根 ( x ) ) ^ 2*( 余弦 ( beta ) -1) *( 余弦 ( alpha )+x *( 余弦 ( beta-alpha ) -1)-k 4 除以 k ( x , beta , a lpha ) ) / (平方根 (1+2*x*余弦 ( beta )+x ^ 2 )-(1+ 平方根 ( x ) ) ^ 2 ) , x , 0 , 2 ) ;

T 1 2 3 4 分数项 2 ( x , beta , alpha ) : =0;

T 1 2 3 4 分数项 3 ( x , beta , a lpha ) :=泰勒展开 ( 4*( s q r t ( x )-s q r t ( k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) ) ^ 2*( c o s ( a lpha ) +1) *( c o s ( beta )+x*(1-c o s ( beta-a lpha ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) / ( s q r t ( ( k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) ^ 2-2*x *( c o s ( beta )+x*(1-c o s ( beta-a lpha ) ) )+x ^ 2 ) -( s q r t ( x )-s q r t ( k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) ) ^ 2 ) , x , 0 , 2 );

T 1 2 3 4 分数项 ( x , beta , alpha ) :=T 1 2 3 4 分数项 1 ( x , beta , a lpha )+T 1 2 3 4 分数项 2 ( x , beta , a lpha ) +T 1 2 3 4 分数项 3 ( x , beta , a lpha );
```

```
T_1234 ( x , beta , alpha ) :=T 1 2 3 4 第一项 ( x , beta , a lpha )+T 1 2 3 4 overg2 项 ( x , beta , a lpha )+T 1 2 3 4 方括号项 ( x , beta , a lpha )+T 1 2 3 4 分数项 ( x , beta , a lpha );

/*为考察展开，我们按照补充材料第二部分 B 末尾的式（26）计算 \t i l d e T。 */ T 1234 ( x , beta , alpha );

/*这是补充材料第二部分 C。 */ T 2 1 3 4 o v e r g 2 t e r m 2 ( x , beta , a lpha ): =t a y l o r (-2*(1-s q r t ( x ) ) ^ 2*( s q r t (-k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) ) *( c o s ( alpha ) +1)+( c o s ( beta )+x*(1-c o s ( beta-a lpha ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) ) , x , 0 , 2 ) / s q r t ( x );

T 2 1 3 4 o v e r g 2 t e r m 3 ( x , beta , alpha ) :=t a y l o r (-2*(1-s q r t ( k 4 o v e r k ( x , beta , a lpha ) ) ) ^ 2*((1+x * ( c o s ( beta )-c o s ( a lpha ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) )+x *( c o s ( beta-a lpha ) +1) ) , x , 0 , 2 ) /x ;

/*第一项除以 g ^2 后与第二部分 II. B. 中的相同。 */

T 2 1 3 4 除以 g 2 项 ( x , beta , a lpha ) :=T 1 2 3 4 除以 g 2 项 1 ( x , beta , a lpha )+T 2 1 3 4 除以 g 2 项 2 ( x , beta , alpha )+T 2 1 3 4 除以 g 2 项 3 ( x , beta , a lpha ) ;

T 2 1 3 4 方括号项 2 ( x , beta , alpha ) := 泰勒 ((-余弦 ( alpha ) +1)*( -( 余弦 ( beta )+x *(1-c o s ( beta-a lpha ) ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) ) , x , 0 , 2 ) ;

T 2 1 3 4 方括号项 3 ( x , beta , alpha ) := 泰勒((-1-x *( cos ( beta )-cos ( alpha ) )+k 4 over k ( x , beta , alpha ) ) *(-cos ( beta-alpha ) +1) , x , 0 , 2 ) ;

T 2 1 3 4 方括号项 ( x , beta , a lpha ) :=T 1 2 3 4 方括号项 1 ( x , beta , alpha )+T 2 1 3 4 方括号项 2 ( x , beta , a lpha )+T 2 1 3 4 方括号项 3 ( x , beta , alpha ) ;

/*第一项分数与第二部分 B 中的相同。 */

T 2 1 3 4 分数项 2 ( x , beta , a lpha ) := 泰勒展开 (4*(1-平方根 ( x ) ) ^ 2*( 余弦 ( a lpha ) +1) *( 余弦 ( beta )+x*(1-余弦 ( beta-a lpha ) )+k 4 o v e r k ( x , beta , alpha ) ) / ( 平方根 (1-2*x*余弦 ( a lpha )+x ^ 2 )-(1-平方根 ( x ) ) ^ 2 ) , x , 0 , 2 );

T 2 1 3 4 分数项 3 ( x , beta , alpha ) : =0;

T 2 1 3 4 分数项 (x, beta, alpha): =T 1 2 3 4 分数项 1 (x, beta, alpha)+T 2 1 3 4 分数项 2 (x, beta, alpha);

/*整个表达式的第一项与第二部分 B 中的相同。 */

T 2134 ( x , beta , alpha ) :=T 1 2 3 4 第一项 ( x , beta , a lpha )+T 2 1 3 4 g 2 阶项 ( x , beta , a lpha )+T 2 1 3 4 方括号项 ( x , beta , a lpha )+T 2 1 3 4 分数项 ( x , beta , a lpha ) ;

/*为了观察展开，我们按照补充材料第二部分 C 末尾的式（36）计算了 \tilde T。 */ T 2134 ( x , beta , alpha );

/*这是补充材料第二部分中的公式（37）。 */ T PRZ( x , beta , alpha ) :=( T 1234 ( x , beta , a lpha )+T 2134 ( x , beta , a lpha ) ) / 2 ;
```

```
/*公式（37）的求值。 */
T_PRZ( x , beta , alpha ) ;

/*这是补充材料第二部分 D 节中的式（38）。 */ T f u l l ( x , beta , alpha ) :=(T PRZ( x ,
beta , a lpha )+T PRZ( x , alpha , beta ) ) /                    2;

/*矩阵元最终表达式的计算，如补充材料式（38）所示。 */

T f u l l ( x , beta , alpha ) ;
```

可以看到， $T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}}$ 的展开到下一阶为：

$$T^{\mathbf{k}_3\mathbf{k}}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} \approx -\frac{(kk_0)^{3/2}}{16\pi^2}\left\{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)\left[(\cos\alpha-\cos\beta)^2-4-4\cos(\alpha-\beta)\right]}{2}\sqrt{\frac{k_0}{k}}\right\}.$$

补充材料：第三部分：从扎哈罗夫方程推导扩散方程

下面，我们将为以大尺度凝聚体波分量为背景的水面重力波推导一种 WKB 描述，随后假设这些波是弱且随机的，并得到与正文中推导出的相同的谱扩散方程。此处推导旨在说明，弱非线性极限与尺度分离极限可以交换。我们的方法与用于三波 MHD 系统的方法思路相近， [28] 不过在这里，我们首次将其应用于四波系统。

我们从标准形式的表面重力波扎哈罗夫方程开始:

$$i\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \int T^{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{1}} b_{\mathbf{2}} b_{\mathbf{3}} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3, \tag{66}$$

其中 $\omega_{\mathbf{k}} = k^{1/2}$， $k = |\mathbf{k}|$ 为色散关系，而 $b_{\mathbf{k}}$ 是通过对主文中定义的变量 $a_{\mathbf{k}}$ 进行近恒等李变换得到的正则变量。我们考虑凝聚条件，此时（66）由长波与短波之间的非局域相互作用主导，并取

$$\mathbf{k}, \mathbf{k}_2 : \text{large wavenumbers}; \quad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3 : \text{small wavenumbers}, \tag{67}$$

满足尺度分离，例如 $k \gg k_1$。因此，（66）化简为

$$i\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} = k^{1/2} b_{\mathbf{k}} + 2\int d\mathbf{k}_2 b_{\mathbf{2}} \int_{1,3\ \text{small}} T^{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{1}} b_{\mathbf{3}} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3, \tag{68}$$

其中因子“2”源于在（$\mathbf{k}_2$ 和 $\mathbf{k}_3$ ）中可以交换二者。因此，我们进一步定义

$$A(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \int_{1,3\ \text{small}} T^{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{1}} b_{\mathbf{3}} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3, \tag{69}$$

and

$$B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = k^{1/2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2) + 2A(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}), \tag{70}$$

这样，（68）可写为

$$i\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int B(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}) b_{\mathbf{2}} d\mathbf{k}_2. \tag{71}$$

我们注意到 $A(\mathbf{k}_2,\mathbf{k})$ 满足对称性性质

$$\begin{aligned} A^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}) &= \int_{1,3\ \text{small}} T^{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{1}} b^*_{\mathbf{3}} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 \\ &= \int_{1,3\ \text{small}} T^{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{3}} b^*_{\mathbf{1}} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_1 \\ &= A(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2), \end{aligned} \tag{72}$$

其中在最后一个等式中，我们使用了相互作用系数的对称性性质 $T_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}{}^{\mathbf{1}} = T^{\mathbf{k}\mathbf{k}_3}{}_{\mathbf{2}}{}_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}_1}$ 这是使 (66) 成为具有实哈密顿量的哈密顿系统所要求的（参见第一部分的讨论）。此外，我们有

$$B^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2). \tag{73}$$

推导 WKB（刘维尔）方程需要定义波作用量 $n(\mathbf{k},\mathbf{x})$（为简便起见，定义中忽略时间依赖性）。一种方法是使用维格纳变换，这里将其表述为波数空间中相关函数的逆傅里叶变换（参见 [29]）：

$$n(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \langle b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \rangle d\mathbf{q}, \tag{74}$$

其中尖括号表示系综平均。由此可得

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \partial_t \langle b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \rangle d\mathbf{q}, \tag{75}$$

其中

$$\begin{aligned}\partial_t b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} &= -i\int B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2)b_{\mathbf{2}}d\mathbf{k}_2,\\ \partial_t b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} &= i\int B^*(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}-\mathbf{q}/2)b^*_{\mathbf{2}}d\mathbf{k}_2,\end{aligned} \tag{76}$$

使得

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= i\int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\big[B^*(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}-\mathbf{q}/2)\langle b^*_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}\rangle - B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2)\langle b_{\mathbf{2}}b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}\rangle\big]\\ &= i\int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\big[B(\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_2)\langle b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}b^*_{\mathbf{2}}\rangle - B(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2)\langle b_{\mathbf{2}}b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}\rangle\big].\end{aligned} \tag{77}$$

我们进一步引入变量变换 $\mathbf{k}_2=\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2$ 和 $\mathbf{q}=\mathbf{q}''+\mathbf{q}'$，然后

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} = i\int d\mathbf{q}'d\mathbf{q}''e^{i(\mathbf{q}''+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}}\big[&B(\mathbf{k}-\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2,\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2)\langle b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2+\mathbf{q}'/2}b^*_{\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2}\rangle\\ &-B(\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2,\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2+\mathbf{q}'/2)\langle b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2}b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}''/2-\mathbf{q}'/2}\rangle\big].\end{aligned} \tag{78}$$

我们定义凝聚态调制频率

$$\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}B(\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2)d\mathbf{q}, \tag{79}$$

对（74）和（79）求逆，我们得到

$$\langle b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}b^*_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}n(\mathbf{k},\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{80}$$

$$B(\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2) = \frac{1}{4\pi^2}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{81}$$

将（80）和（81）代入（78）得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= i\int d\mathbf{q}'d\mathbf{q}''e^{i(\mathbf{q}''+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}}\Big[\frac{1}{4\pi^2}\int e^{-i\mathbf{q}''\cdot\mathbf{x}''}\Omega(\mathbf{k}-\mathbf{q}'/2,\mathbf{x}'')d\mathbf{x}''\frac{1}{4\pi^2}\int e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'}n(\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2,\mathbf{x}')d\mathbf{x}'\\ &\qquad -\frac{1}{4\pi^2}\int e^{-i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}'}\Omega(\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2,\mathbf{x}')d\mathbf{x}'\frac{1}{(4\pi)^2}\int e^{-i\mathbf{q}''\cdot\mathbf{x}''}n(\mathbf{k}-\mathbf{q}'/2,\mathbf{x}'')d\mathbf{x}''\Big].\\ &= \frac{i}{(4\pi^2)^2}\int d\mathbf{q}'d\mathbf{q}''d\mathbf{x}'d\mathbf{x}''e^{i\mathbf{q}''\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')+i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\\ &\qquad\Big[\Omega(\mathbf{k}-\mathbf{q}'/2,\mathbf{x}'')n(\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2,\mathbf{x}')-\Omega(\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2,\mathbf{x}')n(\mathbf{k}-\mathbf{q}'/2,\mathbf{x}'')\Big]\end{aligned} \tag{82}$$

将对称性 $\mathbf{q}'$、$\mathbf{x}'\leftrightarrow\mathbf{q}''$、$\mathbf{x}''$ 应用于上述方程的第一项，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} =& \frac{i}{(4\pi^2)^2}\int d\mathbf{q}'d\mathbf{q}''d\mathbf{x}'d\mathbf{x}''e^{i\mathbf{q}''\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')+i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\\ &\Big[\Omega(\mathbf{k}-\mathbf{q}''/2,\mathbf{x}')n(\mathbf{k}+\mathbf{q}'/2,\mathbf{x}'')-\Omega(\mathbf{k}+\mathbf{q}''/2,\mathbf{x}')n(\mathbf{k}-\mathbf{q}'/2,\mathbf{x}'')\Big].\end{aligned} \tag{83}$$

上述方程中方括号内的项可以进行泰勒展开（将 $\mathbf{q}'$、$\mathbf{q}''$ 视为相对于 $\mathbf{k}$ 的小量）

$$[...] = -\mathbf{q}''\cdot\frac{\partial\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{k}}n(\mathbf{k},\mathbf{x}'')+\mathbf{q}'\cdot\frac{\partial n(\mathbf{k},\mathbf{x}'')}{\partial\mathbf{k}}\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x}') \tag{84}$$

接下来，我们以（84）中的第一项为例。我们可以将因子 $-i\mathbf{q}''$ 与一个指数项合并，得到（$\partial/\partial\mathbf{x}''$）$e^{i\mathbf{q}''\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'')}$，并通过分部积分将 $\mathbf{x}''$ 导数移至 n（$\mathbf{k}$，$\mathbf{x}''$）。对（84）中的两项都应用这一过程，并利用关系式 $\int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}/4\pi^2=\delta$（$\mathbf{x}$），可得

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial n(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial n(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{k}}=0. \tag{85}$$

这就是 WKB 方程，也可以写成刘维尔方程的形式：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\{H,n\}=0, \tag{86}$$

其中， {} 表示泊松括号，并且

$$\begin{aligned} H=\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}B(\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2) \\ &= \int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\big[|\mathbf{k}+\mathbf{q}/2|^{1/2}\delta(\mathbf{q})+2A(\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}+\mathbf{q}/2)\big] \\ &= |\mathbf{k}|^{1/2}+2\int d\mathbf{q}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\int_{1,3\text{ small}} T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_1}b^*_{\mathbf{1}}b_{\mathbf{3}}\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_3, \end{aligned} \tag{87}$$

我们的下一个目标是从（85）或（86）推导扩散方程。我们考虑 $b^*_{\mathbf{1}}b_{\mathbf{3}}\sim O(\epsilon)$，并将（87）改写为

$$\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x})=\omega(\mathbf{k})+\epsilon\Omega_0(\mathbf{k},\mathbf{x}), \tag{88}$$

其中 $\omega(\mathbf{k})=|\mathbf{k}|^{1/2}$ 是固有频率，而 $\epsilon\Omega_0(\mathbf{k},\mathbf{x})$ 是剩余的（较小的）凝聚体调制分量。我们还将（85）改写为标准的射线追踪形式：

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\dot{\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial n(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}+\dot{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial n(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{k}}=0, \tag{89}$$

与射线方程一道

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{k}},\quad \dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial\Omega(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}=-\epsilon\frac{\partial\Omega_0(\mathbf{k},\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}. \tag{90}$$

由于 $\nabla\cdot\dot{\mathbf{x}}=-\nabla_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k}$，(90) 可以表述为

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(\dot{\mathbf{x}}n)+\nabla_{\mathbf{k}}\cdot(\dot{\mathbf{k}}n)=0. \tag{91}$$

Let

$$n(\mathbf{k},\mathbf{x},t)=\bar{n}(\mathbf{k},t_d)+\tilde{n}(\mathbf{k},\mathbf{x},t), \tag{92}$$

其中，$\bar{n}$ 是空间均匀部分，$\tilde{n}$ 是由大尺度凝聚体调制引起的“波动”。$t_d=\epsilon^2t$是一个慢扩散时间，将在最终的扩散方程中予以刻画。

我们考虑随机化的大尺度凝聚体运动，其平均算子 $E[\cdot]$ 可视为系综平均或空间平均 $\int\cdot d\mathbf{x}/L^2$，且 L较大。于是可得

$$\bar{n}(\mathbf{k},t_d)=E[n(\mathbf{k},\mathbf{x},t)]. \tag{93}$$

并且（利用（91）和（90））

$$\partial_t\bar{n}=-E[\nabla_{\mathbf{k}}\cdot(\dot{\mathbf{k}}n)]=\epsilon\nabla_{\mathbf{k}}\cdot\big(E[\frac{\partial\Omega_0}{\partial\mathbf{x}}(\bar{n}+\tilde{n})]\big)=\epsilon\nabla_{\mathbf{k}}\cdot\big(E[\frac{\partial\Omega_0}{\partial\mathbf{x}}\tilde{n}]\big), \tag{94}$$

其中，最后一个等号是因为 $\bar{n}$ 与 $\mathbf{x}$ 无关，因此对大尺度凝聚体运动取平均后（对于第一项）结果为零。

接下来，我们沿一条射线展开波作用量：

$$\begin{aligned} n(\mathbf{k},\mathbf{x},t) &= n\Big(\mathbf{k}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{k}}(t')dt',\mathbf{x}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{x}}(t')dt',t-T\Big) \\ &= \bar{n}(\mathbf{k}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{k}}(t')dt',t_d-\epsilon^2T)+\tilde{n}\Big(\mathbf{k}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{k}}(t')dt',\mathbf{x}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{x}}(t')dt',t-T\Big) \\ &= \bar{n}(\mathbf{k},t_d)-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{k}}(t')dt'\cdot\nabla_{\mathbf{k}}\bar{n}(\mathbf{k},t_d)-\epsilon^2T\partial_t\bar{n}(\mathbf{k},t_d) \\ &\quad+\tilde{n}\Big(\mathbf{k}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{k}}(t')dt',\mathbf{x}-\int_{t-T}^{t}\dot{\mathbf{x}}(t')dt',t-T\Big). \end{aligned} \tag{95}$$

保留 O式（95）中的项（注意，这与后续选择的时间尺度 T一致），可得

$$\tilde{n}(\mathbf{k},\mathbf{x},t) = -\int_{t-T}^{t} \dot{\mathbf{k}}(t')dt' \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \bar{n}(\mathbf{k},t_d) + \tilde{n}\Big(\mathbf{k} - \int_{t-T}^{t} \dot{\mathbf{k}}(t')dt', \mathbf{x} - \int_{t-T}^{t} \dot{\mathbf{x}}(t')dt', t-T\Big). \tag{96}$$

我们选择 T 足够大，使得（96）中的第二项与大尺度运动去相关（但仍小于扩散时间尺度），即 $T \sim O(1/\epsilon)$，于是

$$E\Big[\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mathbf{x}} \tilde{n}\Big(\mathbf{k} - \int_{t-T}^{t} \dot{\mathbf{k}}(t')dt', \mathbf{x} - \int_{t-T}^{t} \dot{\mathbf{x}}(t')dt', t-T\Big)\Big] = 0. \tag{97}$$

将（96）代入（94），并考虑（97），得到

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{n} &= -\epsilon \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \Big(E\big[\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mathbf{x}}\big(\int_{t-T}^{t} \dot{\mathbf{k}}(t')dt' \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \bar{n}(\mathbf{k},t_d)\big)\big]\Big) \\
&= \epsilon^2 \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \Big(E\big[\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mathbf{x}}\big(\int_{t-T}^{t} \partial_{\mathbf{x}} \Omega_0(\mathbf{k} + \epsilon \frac{\partial \Omega_0}{\partial \mathbf{x}}(t-t'), \mathbf{x} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}}(t-t'), t')dt' \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \bar{n}(\mathbf{k},t_d)\big)\big]\Big) \\
&= \epsilon^2 \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \Big(E\big[\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mathbf{x}}\big(\int_{t-T}^{t} \partial_{\mathbf{x}} \Omega_0(\mathbf{k}, \mathbf{x} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}(t-t'), t')dt' \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \bar{n}(\mathbf{k},t_d)\big)\big]\Big),
\end{aligned} \tag{98}$$

其中在最后一个等式中，我们忽略了高阶（ϵ^3）项。方程（98）实际上具有扩散方程的形式。为此，我们用爱因斯坦求和约定将其写出，同时将 ϵ^2 吸收到左边的 t 中，形成 t_d，忽略 n 上方的横线以及 d 的下标 t。由此得到最终的扩散方程

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \partial_{k_i}(D_{ij} \partial_{k_j} n), \tag{99}$$

with

$$D_{ij} = E\Big[\partial_{x_i} \Omega_0 \int_{t-T}^{t} \partial_{x_j} \Omega_0\big(\mathbf{k}, \mathbf{x} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}(t-t'), t'\big)dt'\Big], \tag{100}$$

其中（稍微滥用一下记号）$k_{i,\ j}$ 表示向量 $\mathbf{k}$ 的第 i,j 个分量。

接下来，我们对扩散系数（100）进行详细分析，以表明它与正文中由波动力学方程推导出的结果等价。经过变量变换 $t' = t + s$，式（100）可写为

$$D_{ij} = E\Big[\partial_{x_i} \Omega_0 \int_{-T}^{0} \partial_{x_j} \Omega_0\big(\mathbf{k}, \mathbf{x} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} s, t+s\big)ds\Big] \tag{101}$$

其中

$$\partial_{x_i} \Omega_0 = 2i \int d\mathbf{q} q_i e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \int_{1,3 \text{ small}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_1} b^*_{\mathbf{1}} b_{\mathbf{3}} \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \tag{102}$$

$$\Omega_0\big(\mathbf{k}, \mathbf{x} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} s, t+s\big) = 2 \int d\mathbf{q}' e^{i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x} + \partial_{\mathbf{k}}\omega s)} \int_{2,4 \text{ small}} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_4 T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{2}}(t+s) b_{\mathbf{4}}(t+s) \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_{x_j} \Omega_0\big(\mathbf{k}, \mathbf{x} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} s, t+s\big) \\
&= 2i \int d\mathbf{q}' q'_j e^{i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{x} + \partial_{\mathbf{k}}\omega s)} \int_{2,4 \text{ small}} d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_4 T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{2}}(t+s) b_{\mathbf{4}}(t+s) \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4)
\end{aligned} \tag{104}$$

假设大尺度凝聚运动遵循线性动力学，我们得到

$$b^*_{\mathbf{2}}(t+s) = b^*_{\mathbf{2}}(t) e^{i\omega_2 s}, \quad b_{\mathbf{4}}(t+s) = b_{\mathbf{4}}(t) e^{-i\omega_4 s}. \tag{105}$$

将（102）-（105）代入（101），可得

$$D_{ij} = E\Big[-4 \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}' q_i q_j' e^{i(\mathbf{q}'+\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \int_{1,2,3,4 \text{ small}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \\ T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_1} T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_4}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_2} b^*_{\mathbf{1}} b^*_{\mathbf{2}} b_{\mathbf{3}} b_{\mathbf{4}} \int_{-T}^{0} e^{i(\mathbf{q}'\cdot\partial_{\mathbf{k}}\omega+\omega_2-\omega_4)s} ds \delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{q}'+\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_4)\Big] \tag{106}$$

对于 T足够大时， s-积分变为 $\pi\delta(\mathbf{q}'\cdot\partial_{\mathbf{k}}\omega+\omega_2-\omega_4)$，这相当于 $-\infty$到 ∞积分的一半。由于彼此独立，期望算子可以分别作用于 $e^{i(\mathbf{q}'+_{\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}}}$和 $b^*_{\mathbf{1}}b^*_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{3}}b_{\mathbf{4}}$。对于前者，需要$\mathbf{q}'=-\mathbf{q}$使（106）非零。对于后者，可以应用维克定理，其中 $E[b^*_{\mathbf{1}}b^*_{\mathbf{2}}b_{\mathbf{3}}b_{\mathbf{4}}]=n_1n_3\delta_{\mathbf{14}}\delta_{\mathbf{23}}$（注意，由于（106）中的其他狄拉克 δ 约束， $\delta_{\mathbf{13}}\delta_{\mathbf{24}}$是不可能的）。考虑以上所有简化后，我们得到

$$D_{ij} = 4\pi \int d\mathbf{q} q_i q_j \int_{1,3 \text{ small}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_3 |T^{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_3}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\mathbf{k}_1}|^2 n_1 n_3 \delta(\mathbf{q}\cdot\partial_{\mathbf{k}}\omega-\omega_3+\omega_1)\delta(\mathbf{q}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3). \tag{107}$$

在（107）中，我们可以利用积分的对称性，将被积函数中的$\mathbf{q}$ 换成 $-\mathbf{q}$。随后，在凝聚条件下（即 $q \ll k$，因此相互作用系数的泰勒展开会在被积函数中产生 O（q^3）的高阶项，可以忽略），我们看到，（107）与主文中的扩散系数一致。从这里还可以继续采用各向同性假设，并求得稳态解。

补充材料：第四部分。小参数 k_0/k 的限制，或者说，我们的理论适用于什么情况?

考虑给定向量 k 的情形。此时，共振条件可写为：

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k} = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k} + \mathbf{q}, \tag{108}$$

$$\sqrt{k_1} + \sqrt{k} = \sqrt{k_3} + (|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2)^{1/4}, \tag{109}$$

其中，$\mathbf{k}_1$ 和 $\mathbf{k}_3$ 是凝聚体中的向量，且 $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$。

$$|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 = k^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2 \approx k^2 + 2k(k_1 \cos\alpha - k_3 \cos\beta). \tag{110}$$

在 $k_{1,3}/k$ 中展开至一阶后，得到：

$$\sqrt{k_1} + \sqrt{k} = \sqrt{k_3} + \sqrt{k}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{k}\cos\alpha - \frac{k_3}{k}\cos\beta\right) + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{q}|^2}{k^2}\right)\right], \tag{111}$$

$$2\frac{\sqrt{k_1} - \sqrt{k_3}}{\sqrt{k}} \approx \frac{k_1}{k}\cos\alpha - \frac{k_3}{k}\cos\beta. \tag{112}$$

后一个估计意味着，在共振四元组中有 $|k_3 - k_1| \ll k_1, k_3 \approx k_0$。事实上，若先验地假设这一点成立，则有

$$\sqrt{k_1} - \sqrt{k_3} \approx \frac{k_1 - k_3}{2\sqrt{k_0}} \tag{113}$$

这证实了上述强不等式。因此还有

$$\frac{k_1 - k_3}{\sqrt{kk_0}} \approx \frac{k_1}{k}\cos\alpha - \frac{k_3}{k}\cos\beta \approx \frac{k_0}{k}(\cos\alpha - \cos\beta). \tag{114}$$

so

$$\cos\alpha - \cos\beta \approx \sqrt{\frac{k}{k_0}}\frac{k_1 - k_3}{k_0}. \tag{115}$$

例如，在 [12] 的数值模拟中，对于最高陡峭度的情形 $\mu \approx 0.135$，可以估算出 $k_0 \approx 8 - 9$；环的宽度（从最大值衰减 e 倍）为 $\varepsilon \approx 4$。这意味着我们有一个方程：

$$|\cos\alpha - \cos\beta| < \sqrt{\frac{k}{k_0}}\frac{\varepsilon}{k_0} \approx 0.5\sqrt{\frac{k}{k_0}}. \tag{116}$$

因此，如果 $k/k_0 \geq 16$ 右侧大于 2，我们就能涵盖 $\cos\alpha - \cos\beta$ 的所有可能取值，也就是说，积分上下限为 $\alpha, \beta \in [0; 2\pi)$。此外，对于凝聚环的任意相对宽度 ε/k_0，我们都可以将自己限制在足够大的k/k_0范围内，以涵盖 α和 β的所有可能取值：$\alpha, \beta \in [0; 2\pi)$。事实上，凝聚环的相对宽度 ε/k_0 与相对距离 k_0/k 之间存在如下近似关系（请记住，$|\cos\alpha - \cos\beta|$必须取遍从 0 到 2 的所有可能值）：

$$\frac{\varepsilon/k_0}{\sqrt{k_0/k}} \geq 2. \tag{117}$$

换言之，只要在 k 方向上足够远（使分母足够小），我们就能使后一关系左侧的值达到所需阈值，之后便可以在整个范围$\alpha, \beta \in [0; 2\pi)$上积分。

* alexkor@math.unm.edu
† Sergey.Nazarenko@univ-cotedazur.fr ‡
yulinpan@umich.edu §
shatah@cims.nyu.edu

[1] V. E. Zakharov、V. S. Lvov 和 G. Falkovich， *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*（Springer-Verlag，柏林，1992）。[2] S. V. Nazarenko， *Wave Turbulence*（Springer-Verlag，柏林和海德堡，2011）。[3] S. Galtier，《前言》，载于 *Physics of Wave Turbulence*（剑桥大学出版社，2022），第 i–iv 页。[4] D. Proment、S. Nazarenko 和 M. Onorato，《Physica D：非线性现象》**241**，304（2012），《小尺度湍流》特刊。[5] G. V. Kolmakov、P. V. E. McClintock 和 S. V. Nazarenko，《美国国家科学院院刊》**111**，4727（2014），https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.1312575110. [6] V. E. Zakharov 和 N. N. Filonenko，《苏联物理学文摘》11，881（1967）。[7] V. E. Zakharov，《欧洲力学杂志 B 辑：流体》18，327（1999）。[8] C. Connaughton、S. Nazarenko 和 B. Quinn，《物理学报告》604，1（2015），罗斯贝波与漂移波湍流及纬向流：Charney–Hasegawa–Mima 模型及其扩展。[9] S. Galtier 和 S. V. Nazarenko，《物理评论快报》119，221101（2017）。[10] S. Nazarenko 和 S. Lukaschuk，《凝聚态物理年度评论》7，61（2016）。[11] V. E. Zakharov 和 M. M. Zaslavskii，《大气与海洋物理学》18，747（1982）。[12] A. O. Korotkevich，已提交至《物理评论快报》，10.48550/ARXIV.2211.16567（2022）。[13] V. E. Zakharov，《实验与理论物理学杂志》24，740（1967）。[14] L. W. Nordheim，《英国皇家学会会刊 A 辑》119，689（1928）。[15] R. Peierls，《物理学年鉴》395，1055（1929）。[16] K. Hasselmann，《流体力学杂志》12，481（1962）。[17] A. Pushkarev、D. Resio 和 V. E. Zakharov，《物理学 D 辑》184，29（2003）。[18] A. O. Korotkevich，《物理评论快报》101，074504（2008），arXiv:0805.0445。[19] A. O. Korotkevich，《数学与计算机模拟》82，1228（2012），arXiv:0911.0741。[20] A. O. Korotkevich，《JETP 快报》97，126（2013），arXiv:1212.1965。[21] A. Griffin、G. Krstulovic、V. S. L'vov 和 S. Nazarenko，《物理评论快报》128，224501（2022）。[22] A. A. Abrikosov、L. P. Gorkov 和 I. E. Dzyaloshinskii， *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*（莫斯科：Fizmatgiz，1962）。[23] E. M. Lifshitz 和 L. P. Pitaevskii， *Statistical Physics: Course of Theoretical Physics - Vol. 9*（Elsevier，1978）。[24] V. E. Zakharov，《物理学文摘》T142，014052（2010）。[25] C. H. McComas 和 F. P. Bretherton，《地球物理研究杂志》82，1397（1977）。[26] S. Nazarenko、A. Newell 和 S. Galtier，《物理学 D 辑：非线性现象》152，646（2001）。[27] Maxima 计算机代数系统，https://maxima.sourceforge.io/（1982-2023）。[28] S. Nazarenko、A. Newell 和 S. Galtier，《物理学 D 辑：非线性现象》152-153，646（2001），《非线性数学与科学进展：纪念 Vladimir Zakharov 专刊》。[29] A. Dyachenko、S. Nazarenko 和 V. Zakharov，《物理学快报 A 辑》165，330（1992）。