arXiv:2305.01931v1 [math.RT] 3 May 2023

周期性麦克唐纳球函数与融合环的仿射皮埃里法则

J.F. VAN DIEJEN、E. EMSIZ 和 I.N. ZURRI ÁN

ABSTRACT. 令 $\hat{\mathfrak{g}}$ 为非扭曲仿射李代数或其扭曲对应物（不包括 $\widehat{BC}_n = A_{2n}^{(2)}$ 型的仿射李代数）。我们为与 $\hat{\mathfrak{g}}$相关的周期麦克唐纳球函数的一个基给出仿射皮埃里法则。在 $\hat{A}_{n-1} = A_{n-1}^{(1)}$ 型中，所讨论的公式再现了 Korff 关于柱状 Hall-Littlewood 多项式的仿射皮埃里法则；该公式在 $t = 0$ 处进一步特化为零属 $\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 共形场论融合环中一个著名的 Pieri 公式。

1. INTRODUCTION

Hall 多项式是 Littlewood-Richardson 系数的一种推广；后者给出了经典 Hall 代数在 Hall-Littlewood 多项式基下的结构常数。这些结构常数（它们是 Hall-Littlewood 参数的多项式）以其极为精妙的组合结构而闻名 [M95, 第 II、III 章]。事实上，以箭图来表述的 Hall 代数及其推广，蕴含了大量组合、代数几何和表示论数据 [BS15, M95, S12, WZ18]。近期，Korff 引入了 Hall 多项式的一种仿射类似物；它们是 $\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 共形场论的融合环（又称 Verlinde 代数）的 a$_t$-变形的结构常数，而该融合环配备了一个由柱状 Hall-Littlewood 多项式构造的自然基 [K13]。尽管迄今为止，这个 t-变形融合环的精确几何和／或表示论解释仍未揭晓，但已有迹象表明它与 [T04, TW09] 中的变形 Verlinde 代数有着密切联系 [GP17, K13, OY14]。

当 $t = 0$ Hall-Littlewood 多项式变为舒尔多项式时，相应的 Littlewood-Richardson 系数 [M95, Chapter I.9] 及其仿射对应物——它们是 $\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 共形场论中的融合系数 [DMS97, Chapter 16], ——因其丰富的组合结构，以及在表示论和舒伯特演算中的深刻应用，受到数学文献的广泛关注；例如参见 [F97] 和 [GW90, G91, KS10, MS12] 及其中的更多参考文献。Korff 的 t-变形是

Date：2021年8月。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：05E05；次分类：17B67、33D52、33D80、81T40。*Key words and phrases.* Macdonald 球函数、仿射Hecke代数、仿射李代数、Wess-Zumino-Witten融合环。本研究部分得到 *Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico(FONDECYT)* 资助，项目编号为 # 1170179 和 # 1210015。

不同于 [FLOT96], 中的 q-变形融合环；后者在取值为 $q=1$ 时恢复为 $\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 融合环。与此相关，特别值得关注的是一个众所周知的事实：密切相关的 $\mathfrak{gl}(n)_c$-融合环，相当于 $q=1$ Grassmannian 上 n 维线性子空间的小量子上同调环的一种退化 $\mathbb{C}^{n+c}$ [A95, BCF99]。该小量子上同调环在舒伯特类基下的结构系数，即亏格零三点 Gromov-Witten 不变量，可以作为舒尔多项式的 Littlewood-Richardson 系数的量子对应物来计算[B97, G91, I91, R01, ST97, T05, V92, W95]。文献中还研究了各种与计算亏格零三点 Gromov-Witten 不变量相关的其他组合构造，例如通过以柱状舒尔多项式为基的对称多项式代数的结构常数 [P05, M06], 、以 k-舒尔多项式为基的结构常数 [LM08, L-S10, L-Z14], ，或以 plactic 代数中的变量构成的非交换舒尔多项式为基的结构常数 [KS10], 。

如果 Littlewood-Richardson 乘积的两个因子中，至少有一个是与仅含单列的分拆相对应的 Hall-Littlewood 多项式，那么相关 Hall 多项式的显式形式由 Pieri 公式[M95, Chapter III.3]给出。柱形 Hall-Littlewood 多项式的这一 Pieri 公式的仿射类似物见 [K13, Corollary 7.4]本文旨在将相关的仿射 Pieri 公式从 $\mathfrak{sl}(n)_c$ 推广到任意仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ [K90], 的情形，但排除 $\widehat{BC}_n=A_{2n}^{(2)}$ 型。在其他方面，假设 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是非扭曲的，或是某个非扭曲仿射李代数的扭曲对应物。

在此我们回顾一下，从李代数的角度看， n 个变量中的 Hall-Littlewood 多项式与 $\mathfrak{sl}(n)$相关。这些多项式推广到任意类型的简单李代数后，便得到麦克唐纳球函数 [M01, NR03, P06, S06], ；麦克唐纳最初将它们构造为 p-进对称空间上的球函数 [M71]。借助仿射赫克代数的适当表示， [DE12]将 Hall-Littlewood 多项式的 Pieri 公式推广为适用于任意简单李型的麦克唐纳球函数 Pieri 公式。要实现 [K13]中仿射 Pieri 公式的类似推广，关键在于联系 [D06]中的工作。为此，我们将简要说明仿射 Pieri 公式如何在 [D06], 的背景下产生，同时强调它们在哪些方面不同于 [M95]中 Hall-Littlewood 多项式通常的 Pieri 公式。

与用于 $\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$ 的标准单位基 $e_1,\ldots,e_n$ 相关联，记 $\bar{e}_j=e_j-\frac{1}{n}(e_1+\cdots+e_n)$ $(j=1,\ldots,n)$ 和 $\omega_r=\bar{e}_1+\cdots+\bar{e}_r$ $(r=1,\ldots,n-1)$。对于 $\lambda\in\Lambda^{(n)}=\{m_1\omega_1+\cdots+m_{n-1}\omega_{n-1}\mid m_1,\ldots,m_{n-1}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$，变量为 $x=(x_1,\ldots,x_n)$、参数为 t 的 $\mathfrak{sl}(n)$ Hall-Littlewood 多项式 $R_\lambda(x;t)$ 由以下显式公式定义。

$$R_\lambda(x;t)=\sum_{\sigma\in S_n}C(x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_n};t)x_{\sigma_1}^{\lambda_1}\cdots x_{\sigma_n}^{\lambda_n},$$

其中

$$C(x_1,\ldots,x_n;t)=\prod_{1\leq j<k\leq n}\frac{1-tx_j^{-1}x_k}{1-x_j^{-1}x_k},$$

求和是对对称群 S_n 的所有置换 $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{smallmatrix}\right)$ 进行的。当 $\mu = \omega_r$ 时，相应的 t-变形 Littlewood-Richardson 系数

$$R_\lambda R_\mu = \sum_{\nu \in \Lambda^{(n)}} \mathrm{c}_{\lambda,\mu}^{\nu}(t) R_\nu \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda^{(n)})$$

由 Pieri 规则 [M95, 第三章3] 明确给出

$$R_\lambda R_{\omega_r} = c_{\omega_r}(t) \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, |J|=r \\ \lambda + \bar{e}_J \in \Lambda^{(n)}}} R_{\lambda + \bar{e}_J} \prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ j \in J,\, k \notin J \\ \lambda_j = \lambda_k}} \frac{1 - t^{k-j+1}}{1 - t^{k-j}}. \tag{1.1}$$

这里，$\bar{e}_J = \sum_{j \in J} \bar{e}_j$, $|J|$ 表示 J的基数，而 $c_{\omega_r}(t) = S_r(t) S_{n-r}(t)$，其中 $S_n(t) = \prod_{1 \le j < k \le n} \frac{1-t^{k-j+1}}{1-t^{k-j}}$。

给定一个正整数层级 c，对 $\lambda \in \Lambda^{(n,c)} = \{m_1\omega_1 + \cdots + m_{n-1}\omega_{n-1} \in \Lambda^{(n)} \mid m_1 + \cdots + m_{n-1} \le c\}$ 成立的 Pieri 公式 (1.1) 的仿射类似物可由 [D06, 定理 51]推出：

$$R_\lambda^{(c)} R_{\omega_r}^{(c)} = \tag{1.2}$$
$$c_{\omega_r}(t) \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, |J|=r \\ \lambda + \bar{e}_J \in \Lambda^{(n,c)}}} R_{\lambda + \bar{e}_J}^{(c)} \prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ j \in J,\, k \notin J \\ \lambda_j = \lambda_k}} \frac{1 - t^{k-j+1}}{1 - t^{k-j}} \prod_{\substack{1 \le j < k \le n \\ j \notin J,\, k \in J \\ \lambda_j = \lambda_k + c}} \frac{1 - t^{n+1-k+j}}{1 - t^{n-k+j}}.$$

这里，$R_\lambda^{(c)}$ ： $X^{(n,c)} \to \mathbb{C}$ 指的是 Hall-Littlewood 多项式 R_λ ，将其视为定义在离散集合 $X^{(n,c)} = X^{(n,c)}(t) \subset \mathbb{T}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid |x_j| = 1, j = 1, \ldots n\}$ 上的函数。该集合由点 $x_\mu(t)$, $\mu \in \Lambda^{(n,c)}$ 构成，这些点依赖于 Hall-Littlewood 参数 $t \in (-1,1)$，且这种依赖是解析的。具体而言，对于 $\mu \in \Lambda^{(n,c)}$ 和$t \in (-1, 1)$, 点 $x_\mu(t)$的形式为$(e^{i\xi_1}, \ldots, e^{i\xi_n})$，其角坐标向量 $\xi = \xi_\mu(t)$定义为径向无界严格凸莫尔斯函数 $\mathcal{V}_\mu^{(n,c)}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的唯一全局极小值。

$$\mathcal{V}_\mu^{(n,c)}(\xi) = \sum_{1 \le j < k \le n} \int_0^{\xi_j - \xi_k} v(\mathrm{x})\mathrm{dx} + \sum_{1 \le j \le n} \left(\tfrac{c}{2}\xi_j^2 - 2\pi(\rho_j + \mu_j)\xi_j \right), \tag{1.3}$$

其中 $\rho = \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1}$和 $v(\mathrm{x}) = \int_{\mathrm{x}\,0}^{\quad 1-2t} \cos(\mathrm{y}) + t^2\, \mathrm{dy}$。这个 Morse 函数可以宽泛地看作融合势的一个类似物，参见 [G91, BR06]。已知 Hall–Littlewood多项式 $R_\lambda^{(c)}$, $\lambda \in \Lambda^{(n,c)}$ 构成函数代数 f 的一个线性基： $X^{(n,c)} \to \mathbb{C}$（参见 [D06, 定理 5.2]），由此为 Hall–Littlewood 多项式导出了 Littlewood-Richardson 系数的如下仿射类似物：

$$R_\lambda^{(c)} R_\mu^{(c)} = \sum_{\nu \in \Lambda^{(n,c)}} \mathrm{c}_{\lambda,\mu}^{\nu,(c)}(t) R_\nu^{(c)} \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda^{(n,c)}). \tag{1.4}$$

对于 $\mu = \omega_r$, $\mathrm{c}_\lambda^{\nu\,(c)}{}_{,,\mu}(t)$ 的显式形式由公式 (1.2) 中的仿射皮埃里法则给出。

结构常数 $\mathrm{c}_\lambda^{\nu\,(c)}{}_{,,\mu}(t)$ (1.4) 构成融合$\widehat{\ }$系数的 t-变形，适用于零属 $\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 共形场论，其在 $t = 0$ 处恢复。事实上， $s_\lambda(x) = R_\lambda(x; 0)$ 由 $\mathfrak{sl}(n)$ Schur 特征标给出，而坐标角向量变为 $\xi_\mu(0) = \frac{2\pi}{n+c}(\rho + \mu)$。The

$X^{(n,c)} = X^{(n,c)}(0)$ 中各点的坐标因此由显式的单位根给出：$x_\mu(0) = e^{\frac{2\pi i}{n+c}(\rho+\mu)} = (e^{\frac{2\pi i}{n+c}(\rho_1+\mu_1)}\ldots, e^{\frac{2\pi i}{n+c}(\rho_n+\mu_n)})$，$\mu \in \Lambda^{(n,c)}$。基函数 $s_\lambda^{(c)}: X^{(n,c)} \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \Lambda^{(n,c)}$, 由以下给出。

$$s_\lambda^{(c)}(x_\mu) = s_\lambda(e^{\frac{2\pi i}{n+c}(\rho+\mu)}) \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda^{(n,c)}),$$

以及相关的结构常数

$$s_\lambda^{(c)} s_\mu^{(c)} = \sum_{\nu \in \Lambda^{(n,c)}} \mathrm{c}_{\lambda,\mu}^{\nu,(c)} s_\nu^{(c)} \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda^{(n,c)})$$

对于函数代数 $f: X^{(n,c)} \to \mathbb{C}$ 在此基下，为零属 $\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 融合环[DMS97, G91, GW90, K90, K96, KS10] 提供一个经过充分研究的^组合模型。特别地，仿射 Pieri 公式 (1.2) 的相应 $t = 0$特化：

$$s_\lambda^{(c)} s_{\omega_r}^{(c)} = \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,n\},\, |J|=r \\ \lambda + \bar{e}_J \in \Lambda^{(n,c)}}} s_{\lambda+\bar{e}_J}^{(c)} \tag{1.5}$$

在这一背景下是众所周知的，参见例如 [AS14，第（3.2）式], [DMS97，第（16.112）、（16.121）式], [G91，第（3.6）式], [GW90，命题 2。6], 以及 [S07，定理 6。2]。

在此需要强调的是，源自公式 (1.4) 的零属$\sim\mathfrak{sl}(n)_c$-Wess-Zumino-Witten 融合环的变形，其构造方式与 [K13 第 7] 节并不完全相同。简而言之：这两种变形通过层级-秩对偶 [DMS97, GW90, NT92], 相关联；但这种对偶尚未在 $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ 的情形下得到确立，因此先验地会导出融合环的 Hall-Littlewood 变形的两种对偶选择。

^为了将 $\mathfrak{sl}(n)_c$ 中的仿射 Pieri 公式 (1.2)推广到其他仿射李代数，我们从 [DE12], 出发，提出了任意简单李型的麦克唐纳球函数的仿射对应 Pieri 公式；该公式源于周期边界条件的实现。导出这一仿射 Pieri 公式的仿射 Hecke 代数底层表示，受到此前针对分次仿射 Hecke 代数的构造的启发；这些构造是在量子可积粒子模型研究的背景下发展起来的，参见 [GS79、EOS06]及其中的参考文献。从这一角度看，扭曲仿射李代数的部分构造可见于 [DE13]；在此，我们应用这些技术，为扭曲和非扭曲仿射李代数（不包括 $\widehat{BC}_n = A_{2n}^{(2)}$ 型，参见 [D20]）的变形的属零 Wess-Zumino-Witten 融合环的结构常数提供一个组合模型。与 $\mathfrak{sl}(n)_c$第一段末尾所述一致，我们预期这些变形的融合环^同构于 [T04、TW09]中的变形 Verlinde 代数；对于 $\mathfrak{sl}(2)_c$ ，这一同构由 [AGP16 附录 A 和 B]中的显式构造直接体现。

本文的组织如下。第2节介绍我们对亏格零 Wess-Zumino-Witten 融合环所作的变形，该融合环由周期麦克唐纳球函数构成的基生成。主要结果是一条仿射皮埃里法则，它允许我们计算周期 Macdonald 球函数基中由对应于极小权或拟极小权的基元素相乘所得的结构常数。在介绍了一些关于

第3节中的仿射韦尔群的补充记号准备之后，第4节给出了相关的结构常数。当变形参数为零时，可以得到相应的 Pieri 公式以及亏格零 Wess-Zumino-Witten 融合环本身的结构常数。本文的大部分内容致力于通过仿射韦尔群的赫克代数的一个适当表示来证明我们的 Pieri 规则。具体而言，第5节首先运用仿射 Hecke 代数，构造一个作用于权格上复值函数空间的仿射交织算子。通过一种标准构造，即利用与有限魏尔群的赫克代数的平凡表示相关联的幂等元，第6节中通过仿射交织算子的作用得到了周期麦克唐纳球函数。第7节证明，周期麦克唐纳球函数构成一个有限维函数代数的基，该代数的函数支撑在式（1.3）所示类型的“融合势”的临界点上。我们运用仿射交织算子，导出一族由周期麦克唐纳球函数基对角化的差分算子。通过这些差分算子的作用，我们可以计算与该基相关的结构常数。第8节针对 Pieri 公式这一特例，明确完成了上述计算；第9节则概述了如何更一般地通过差分算子的作用求得结构常数。

2. Affine Pieri Rule

2.1. 麦克唐纳球函数。设 V 为一个实有限维欧几里得向量空间，配有内积 $\langle\cdot$，由不可约约化晶体根系 R_0张成。我们记 Q、 P和 W_0分别为与 R_0相关的根格、权格和魏尔群。由（固定选取的）正根R_0^+生成的根格半群记为 Q^+，而P^+ 表示相应的支配权锥（关于根系的更多细节，参见例如 [B68、H90] ）。

对偶根系 $R_0^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R_0\}$ 及其正子系 $R^\vee{}_0{}^+$ 由 R_0 和 R_0^+经过施加对合得到

$$x \mapsto x^\vee := 2x/\langle x, x\rangle \qquad (x \in V \setminus \{0\}). \tag{2.1}$$

定义 2.1. 对于 $\lambda \in P^+$，麦克唐纳球函数 $M_\lambda : V \to \mathbb{C}$ 是一个W_0不变的三角多项式，其显式表达式为

$$M_\lambda(\xi) = \sum_{v \in W_0} C(v\xi) e^{i\langle v\xi, \lambda\rangle} \tag{2.2}$$

with

$$C(\xi) := \prod_{\alpha \in R_0^+} \frac{1 - t_\alpha e^{-i\langle \xi, \alpha\rangle}}{1 - e^{-i\langle \xi, \alpha\rangle}}. \tag{2.3}$$

这里 $t : R_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ 是一个根重数函数，使得 $t_{w\alpha} = t_\alpha$ 对每个$w \in W_0$ 和 $\alpha \in R_0$都成立。

就我们的目的而言，根重数函数的取值范围将受到限制，使得 $t : R_0 \to (-1, 1) \setminus \{0\}$。

2.2. 周期麦克唐纳球函数的基。令 φ和 ϑ 分别表示R_0^+的最高根和最高短根。我们固定一个可容许对 $(R_0, \hat{R}_0)$，其中 $\hat{R}_0$ 等于 $R_0^\vee$ 或 $u_\varphi R_0$，且$u_\varphi = \frac{2}{\langle\varphi,\varphi\rangle}$，并且正系 $\hat{R}_0^+$由 R_0^+得到。特别地，对于单键 R_0，我们有 $\hat{R}_0 = R_0^\vee$。对于 $\overline{\alpha} \in R_0$，若 $\hat{R}_0 = R_0^\vee$，令 $\hat{\alpha} := \alpha^\vee$；若 $\hat{R}_0 = u_\varphi R_0$，令 $\hat{\alpha} := u_\varphi \alpha$。于是 $\alpha^\vee = m_\alpha \hat{\alpha}$，其中 $m_\alpha = 2\langle\alpha, \hat{\alpha}\rangle^{-1}$，即当 $\hat{R}_0 = R_0^\vee$时为 $m_\alpha = 1$，而当 $\hat{R}_0 = u_\varphi R_0$ 时为$m_\alpha = \frac{\langle\varphi, \frac{\varphi}{\langle\alpha\,\alpha\rangle}\rangle}{}$，。由此可得 $\{m_\alpha\}_{\alpha\in R_0} = \{1, m_\vartheta\}$。

我们将 $\hat{R}^{\vee,+}_0$ 的最高短根记为 $-\alpha_0 = \vartheta(\hat{R}_0^\vee)$，因此特别地，若 $\hat{R}_0 = R_0^\vee$，则 $\alpha_0 = -\vartheta$；若 $\hat{R}_0 = u_\varphi R_0$，则 $\alpha_0 = -\varphi$。我们还分别用 $\hat{Q}$、$\hat{Q}^\vee$、$\hat{P}$ 和 $\hat{P}^\vee$ 表示 R_0 的 $\hat{}$ 根格、余根格、权格和余权格。在这一设定下，以一种直接的方式扩展根重数函数的定义域将是自然的：$t: R_0 \cup R_0^\vee \cup \hat{R}_0 \to (-1, 1) \setminus \{0\}$，使得对所有 $\alpha \in R_0$ 都有 $t_{\hat{\alpha}} = t_{\alpha^\vee} = t_\alpha$。

给定一个固定的正整数 $c > 1$，我们考虑 P中的两个仿射胞腔以及 $\hat{P}$:

$$P_c := \{\lambda \in P \mid 0 \le \langle\lambda, \beta\rangle \le c,\ \forall \beta \in \hat{R}_0^+\}, \tag{2.4}$$

$$\hat{P}_c := \{\mu \in \hat{P} \mid 0 \le \langle\mu, \alpha\rangle \le c, \forall \alpha \in R_0^+\}, \tag{2.5}$$

以及一个相关的节点集 $\mathcal{P}_c := \left\{\xi_\mu \mid \mu \in \hat{P}_c\right\}$。这里，$\xi_\mu := \xi_\mu(t)$ $(\mu \in \hat{P})$ 被定义为径向无界严格凸莫尔斯函数 $\mathcal{V}_\mu: V \to \mathbb{R}$ 的唯一全局极小值，其形式为

$$\mathcal{V}_\mu(\xi) = \frac{c}{2}\langle\xi,\xi\rangle - 2\pi\langle\hat{\rho}+\mu,\xi\rangle + \sum_{\alpha\in R_0^+} \frac{2}{\langle\alpha,\hat{\alpha}^\vee\rangle}\int_0^{\langle\xi,\alpha\rangle} v_\alpha(\mathrm{x})\mathrm{dx}, \tag{2.6}$$

其中 $\hat{\rho} := \rho(\hat{R}_0) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\hat{R}_0^+}\alpha$ 且 $v_\alpha(\mathrm{x}) := (1-t_\alpha^2)\int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dy}}{1-2t_\alpha\cos(\mathrm{y})+t_\alpha^2}$.

令 $\mathcal{C}(\mathcal{P}_c)$ 表示函数 $f: \mathcal{P}_c \to \mathbb{C}$ 的函数代数。对于任意 $\lambda \in P_c$，周期麦克唐纳球函数 $M_\lambda^{(c)} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}_c)$ 是将M_λ 限制在节点 $\mathcal{P}_c$上得到的。

定理 2.2（基）。周期麦克唐纳球函数 $M_\lambda^{(c)}$，$\lambda \in P_c$ 构成 $\mathcal{C}(\mathcal{P}_c)$ 的一组基。

注 2.3. 在第 6 节中，我们将引入 W_0-不变仿射麦克唐纳球函数 $\Phi_\xi \in \mathcal{C}(P)$。可以看到，对于 $\xi \in \mathcal{P}_c$，格函数Φ_ξ 关于 $c\hat{Q}^\vee \subset P$ 中元素的平移具有周期性，并且对于 $\lambda \in P_c$，$M_\lambda^{(c)}(\xi) = \Phi_\xi(\lambda)$（更多细节请参见注 6.5）。

2.3. 结构常数。定理 2.2 导出了（t-变形）Littlewood-Richardson 系数的一个仿射类似物:

$$M_\lambda^{(c)} M_\mu^{(c)} = \sum_{\nu\in P_c} \mathrm{c}_{\lambda,\mu}^{\nu,(c)}(t) M_\nu^{(c)} \qquad (\lambda,\mu \in P_c). \tag{2.7}$$

当 μ 为极小权或拟极小权时，我们可以显式表示结构常数 $\mathrm{c}_\lambda^{\nu\,(c)}{}_{,,\mu}(t)$。在此回顾一下，若权 $\mu \in P$ 满足 $0 \le \langle\mu,\alpha^\vee\rangle \le 1$ 对所有 $\alpha \in R_0^+$ 均成立，则称其为极小权；若 $0 \le \langle\mu,\alpha^\vee\rangle \le 2$ 对所有 $\alpha \in R_0^+$ 均成立，且上界仅在一次取到（即拟极小权唯一，且等于最高短根 ϑ），则称其为拟极小权。

为写出相应结构常数的这一显式表达式，令:

$$\mathrm{m}_\lambda(e^{i\xi}) := \sum_{\nu\in W_0\lambda} e^{i\langle\nu,\xi\rangle} \quad (\lambda\in P,\,\xi\in V),$$

and

$$\hat{h}_t := t_{\alpha_0}\,\hat{e}_t(-\alpha_0^\vee) \tag{2.8}$$

with

$$\hat{e}_t(\eta) := t_\vartheta^{\langle\hat{\rho}_s^\vee,\eta\rangle} t_\varphi^{\langle\rho(\hat{R}_0^\vee)-\hat{\rho}_s^\vee,\eta\rangle} = \prod_{\beta\in\hat{R}_0^+} t_\beta^{\langle\eta,\beta^\vee\rangle/2} \quad (\eta\in\hat{Q}) \tag{2.9}$$

并且其中 $\hat{}\rho_s^\vee = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in W_0\vartheta\cap R_0^+}\hat{}\alpha^\vee \in \hat{}P^\vee$ （因此 $\hat{}e_t(\eta)$ 是关于 t_α 的劳朗多项式，参见例如 [M72]）。

定理 2.4（仿射皮埃里法则）。对于 $\lambda\in P_c$、$\xi\in\mathcal{P}_c$ 和 $\omega\in P^+$ 为极小权或拟极小权的情形，我们有

$$\mathrm{m}_\omega(e^{i\xi})M_\lambda^{(c)}(\xi) = U_{\lambda,\omega}(t)M_\lambda^{(c)}(\xi) + \sum_{\substack{\nu\in W_0\omega\\ \lambda+\nu\in P_c}} V_{\lambda,\nu}(t)M_{\lambda+\nu}^{(c)}(\xi). \tag{2.10}$$

Here

$$V_{\lambda,\nu}(t) := \prod_{\substack{\beta\in\hat{R}_0^+\\ \langle\lambda,\beta\rangle=0\\ \langle\nu,\beta\rangle>0}} \frac{1-t_\beta\hat{e}_t(\beta)}{1-\hat{e}_t(\beta)} \prod_{\substack{\beta\in\hat{R}_0^+\\ \langle\lambda,\beta\rangle=c\\ \langle\nu,\beta\rangle<0}} \frac{1-t_\beta\hat{h}_t\hat{e}_t(-\beta)}{1-\hat{h}_t\hat{e}_t(-\beta)} \tag{2.11}$$

且系数 $U_{\lambda,\,\omega}(t)$ 由下文的式 (4.1) 给出（特别地，这意味着当 ω 为极小权时，$U_{\lambda,\,\omega}(t)$ 为零）。

为了给出 (2.10) 中系数 $U_{\lambda,\,\omega}(t)$ 以及式 (2.7) 中 $\mathsf{c}_\lambda^{\nu\,(c)}$，，$_\mu(t)$ 在 μ 为（拟）极小权时的精确表达式，我们还需要引入一些关于底层仿射韦尔群和仿射根系的记号。（更全面的讨论可参见例如 [B68、H90、M03]。）

3. The affine Weyl group

与可容许对 $(R_0,\ \hat{}R_0)$ 相关联的仿射根系 R 是所有仿射根 $\alpha^\vee + m_\alpha rc = m_\alpha(\hat{}\alpha + rc)$（$\alpha\in R_0, r\in\mathbb{Z}$）的集合。仿射根 $a = \alpha^\vee + m_\alpha rc\in R$ 将被视为形如 $a(x) = \langle x,\alpha^\vee\rangle + rc\,(x\in V,\ \alpha\in R,\ r\in\mathbb{Z})$ 的仿射线性函数 $a:\ V\to\mathbb{R}$，并导出关于超平面 $V_a := \{x\in V\mid a(x) = 0\}$ 的仿射反射 $s_a:\ V\to V$，该超平面由 $s_a(x) := x - a(x)\alpha$ 给出。正根的选取 R_0^+，连同单根基 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$，决定了仿射正根的集合 $R^+ := R^\vee{}_0^+\cup\{\alpha^\vee + m_\alpha rc\mid\alpha\in R_0, r\in\mathbb{N}\}$ 以及相应的仿射简单根基 $a_0,\dots,a_n$，其形式为 $a_0 := \alpha_0^\vee + c$ 和 $a_j := \alpha_j^\vee$（$j = 1,\dots,n$）。这里，n 表示 R_0 的秩（= 维 V）。注意，这些约定意味着：当且仅当 $\hat{}R_0 = u_\varphi R_0$ 不是单键时，仿射根系 R 才是扭型；否则为非扭型。

仿射魏尔群 W 定义为由仿射反射 s_a、$a\in R$ 生成的群，并且包含有限魏尔群 W_0 作为固定该subgroup的子群。

原点。它是一个无限 Coxeter 群，以简单仿射反射 $s_j := s_{a_j} (j = 0, 1, \ldots, n)$ 为生成元，并满足以下关系

$$(s_j s_k)^{m_{jk}} = 1, \qquad j, k \in \{0, \ldots, n\} \tag{3.1}$$

这里，若 $j = k$，则 $m_{jk} = 1$；若 $j \neq k$，则 $m_{jk} \in \{2, 3, 4, 6\}$（并规定对于$n = 1$，其阶为 $m_{10} = m_{01} = \infty$）。特别地，任意 $w \in W$ 都可以分解为

$$w = s_{j_1} \cdots s_{j_\ell}, \tag{3.2}$$

其中 j_1, ..., $j_\ell \in \{0, \ldots, n\}$。长度 $\ell(w)$ 定义为任意分解 (3.2) 中所涉及的反射 s_j ($j = 0, 1,$ ....., n) 的最少个数。若分解 (3.2) 满足 $\ell = \ell(w)$，则称其为 w 的约化表达式。

W 在 V 上的作用的基本域由占优的 Weyl alcove 给出

$$A_c = \{x \in V \mid 0 \leq \langle x, \beta \rangle \leq c, \ \forall \beta \in \hat{R}_0^+\}. \tag{3.3}$$

此外，由于我们的正尺度参数 c 取整数值，权格 $P \subset V$ 在 W 的作用下保持稳定，而 P_c (2.4) 是这一限制下的基本域。给定 $x \in V$，我们也将 $w_x \in W$ 记作满足以下条件的唯一最短仿射韦尔群元素

$$x_+ := w_x x \in A_c. \tag{3.4}$$

对于任意 $\lambda \in P$，令

$$t[\lambda] := \prod_{a \in R[\lambda]} t_{a'} \tag{3.5}$$

其中 $(\alpha^\vee + m_\alpha r c)' := \alpha^\vee$ 表示微分，且

$$R[\lambda] := \{a \in R^+ \mid a(\lambda) < 0\}. \tag{3.6}$$

$w \in W$ 在 V 上的作用在函数空间 $\mathcal{C}(V)$ 上诱导出一个对偶作用 $f : V \to \mathbb{C}$，定义为

$$(wf)(x) := f(w^{-1}x) \qquad (w \in W, \ f \in \mathcal{C}(V), \ x \in V). \tag{3.7}$$

在第 4 节中，我们将利用 $\mathcal{C}(P)$ 是此作用下的不变子空间这一事实。

4. Affine Littlewood-Richardson coefficients and fusion rules

现在我们可以明确写出定理 2.4 中的系数 $U_{\lambda,\ \omega}(t)$:

$$U_{\lambda,\omega}(t) = \sum_{\substack{\nu \in W_0 \omega \\ (\lambda+\nu)_+ = \lambda}} t[\lambda + \nu] + (1 - t_\vartheta^{-1}) \sum_{\substack{\nu \in W_0 \omega \\ w_{\lambda+\nu}\lambda = \lambda}} d_{\lambda,\nu}, \tag{4.1}$$

其中

$$d_{\lambda,\nu} := \begin{cases} \theta(\lambda + \nu) e_t(-\nu) h_t^{\mathrm{sign}(\langle \lambda, \hat{\nu} \rangle)} & \text{if } \nu \in W_0 \vartheta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.2a}$$

（约定 sign(0) := 0）且

$$h_t := t_\vartheta \, e_t(-\alpha_0) \quad \text{with} \quad e_t(\nu) := \prod_{\alpha \in R_0^+} t_\alpha^{\langle \nu, \alpha^\vee \rangle / 2}. \tag{4.2b}$$

（参见公式 (2.9)）。这里 $\theta :\ P \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 表示该函数

$$\theta(\lambda) := \left| \{a \in R^+ \mid a(\lambda) = -2\} \right|. \tag{4.2c}$$

备注 4.1. 注意，$d_{\lambda,\nu}$ 也是关于 t_α, $\alpha \in R_0$ 的劳朗多项式。我们还将在引理 8.2 中看到，$\theta(\lambda+\nu) = 0$ 若 ν 属于一个微小权的轨道，因此也可以写成 $d_{\lambda,\nu} = \theta(\lambda+\nu)e_t(-\nu)$ $h^{\mathrm{sign}(\langle\lambda,\nu^\vee\rangle)t}$.

满足以下条件的函数 $t\colon W \to (-1,1)\setminus\{0\}\colon$ 若 $\ell(w\tilde{w}) = \ell(w) + \ell(\tilde{w})$，则称为长度乘性函数。我们通过设定 $t_j := t_{s_j} = t_{\alpha_j}$，对 $j = 0, 1, \ldots, n$，使该函数与根乘性函数相协调。对于任意有限子群 $G \subset W$，我们考虑广义 Poincar´e 级数

$$G(t) = \sum_{w\in G} t_w \tag{4.3}$$

它与长度乘性函数 t相关联。

推论 4.2（仿射 Littlewood-Richardson 系数）。若 ω 是一个（拟）微小权，且 λ, $\nu \in P_c$，则（2.7）中的仿射 Littlewood-Richardson 系数由下式给出

$$c_{\lambda,\omega}^{\nu,(c)}(t) = \begin{cases} W_{0;\omega}(t)\big(U_{\lambda,\omega}(t) - U_{0,\omega}(t)\big) & \text{if } \lambda = \nu, \\ W_{0;\omega}(t)V_{\lambda,\nu-\lambda}(t) & \text{if } \nu-\lambda \in W_0\omega, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.4}$$

此处 $W_{0;\omega}(t)$ 指的是 $W_{0;\omega} = \{w \in W_0 \mid w\omega = \omega\}$的广义 Poincar´e 级数（4.3）。

证明。应用定理 2.4 并利用 $\lambda = 0$，以及 $M_0(\xi) = W_0(t)$ 和$V_{0,\theta}(t) = W_0(t)/W_{0;\vartheta}(t)$，可得恒等式 $M_\omega^{(c)}(\xi) = W_{0;\omega}(t)\big(\mathrm{m}_\omega(e^{i\xi}) - U_{0,\omega}(t)\big)$。将此结果与定理 2.4 结合，即可得到所需结论。□

当 R_0 属于 A_{n-1} 类型且 ω 为极小权时，推论 4.2 重现了方程 (1.2) 中的仿射 Pieri 规则。

在 $t_\alpha = 0$ ($\alpha \in R_0$) 处，Macdonald 球函数 M_λ (2.2) 特化为 Weyl 特征

$$\chi_\lambda(\xi) = \delta(\xi)^{-1} \sum_{w\in W_0} (-1)^{\ell(w)} e^{i\langle w\xi, \lambda+\rho\rangle} \qquad (\lambda \in P^+), \tag{4.5}$$

其中 $\rho = \rho(R_0)$ 和 $\delta(\xi)$ 表示 Weyl 分母

$$\delta(\xi) = \sum_{w\in W_0} (-1)^{\ell(w)} e^{i\langle w\xi,\rho\rangle} = \prod_{\alpha\in R_0^+} (e^{i\langle\xi,\alpha\rangle/2} - e^{-i\langle\xi,\alpha\rangle/2}). \tag{4.6}$$

节点 $\mathcal{P}_c$ 在这种情形下由以下方式明确给出。

$$\xi_\mu(0) := \frac{2\pi}{h+c}(\hat{\rho} + \mu) \qquad (\mu \in \hat{P}_c), \tag{4.7}$$

其中，$h = h(R) = 1 - \langle\rho, \alpha_0^\vee\rangle$ 表示仿射根系 R 的 Coxeter 数。事实上，根据引理 6.2 和下文的公式 (6.8)，有 $\lim_{t\to 0}\xi_\mu(t) = \xi_\mu(0)$，因为根据舒尔引理，对于 $t_\alpha = 0$，$\hat{}\rho_v(\xi) = h\xi$。

$\mathcal{C}(\mathcal{P}_c)$ 中结构常数的相应参数退化，

$$\chi_\lambda(\xi)\chi_\mu(\xi) = \sum_{\nu\in P_c} \mathrm{c}_{\lambda,\mu}^{\nu,(c)}(0)\chi_\nu(\xi) \qquad (\lambda, \mu \in P_c,\ \xi \in \mathcal{P}_c), \tag{4.8}$$

对与类型为 $R^\vee = \{2a/\langle a', a'\rangle \mid a \in R\}$ 的仿射李代数 $\hat{}\mathfrak{g}$ 相关的零亏格 Wess-Zumino-Witten 共形场论的融合规则进行建模

[DMS97、H18、K90]（另见下文注记 4.3）。推论 4.2 在融合环中为 $\mu=\omega\in P^+$ 极小权或拟极小权给出了如下 Pieri 规则：

$$\boxed{\chi_\omega(\xi)\chi_\lambda(\xi)=(N_{0,\omega}-N_{\lambda,\omega})\chi_\lambda(\xi)+\sum_{\substack{\nu\in W_0\omega\\ \lambda+\nu\in P_c}}\chi_{\lambda+\nu}(\xi)\qquad(\lambda\in P_c,\,\xi\in\mathcal{P}_c),}$$

with

$$N_{\lambda,\omega}=|\{a_j\mid a_j(\lambda)=0\text{ and }\alpha_j\in W_0\omega\}|$$

（因此，如果 ω 是极小权，则有 $N_{\lambda,\omega}=0$ ）。当 R_0 属于 A_{n-1} 型且 ω 是极小权时，此 Pieri 规则即为公式 (1.5)。

为了推导带框的 Pieri 规则，首先注意到 $\lim_{t\to0}V_{\lambda,\nu-\lambda}(t)=1$、$\lim_{t\to0}W_{0;\omega}(t)=1$，以及

$$\lim_{t\to0}(1-t_\vartheta^{-1})d_{\lambda,\nu}=\begin{cases}-\lim_{t\to0}t_\vartheta^{-1}e_t(-\nu) & \text{if }\nu\in R_0^-\cap W_0\vartheta\text{ and }\langle\lambda,\hat\nu\rangle=0,\\ -\lim_{t\to0}e_t(-\alpha_0-\nu) & \text{if }\nu\in R_0^+\cap W_0\vartheta\text{ and }\langle\lambda,\hat\nu\rangle=c,\end{cases}$$

且其中 $R_0^-=-R_0^+=R_0\backslash R_0^+$。由于当 $\alpha\in R_0^+$ 是单根时，$\lim_{t\to0}t_\vartheta^{-1}e_t(\alpha)=1$，否则为 0，因此根据下面的引理 8.2，这表明 $\lim_{t\to0}U_{\lambda,\omega}(t)=-N_{\lambda,\omega}$。融合环中的所述 Pieri 规则现可由推论 4.2 直接得出。

注记 4.3。若按照 [M03, Chapter I], , 记 $S(R_0;c)=R_0+c\mathbb{Z}$为与 R_0相关联的（非扭曲）仿射根系，则下表通过 [M03, Chapter I.3]中的分类，根据可容许对 (R_0,R_0) 标明仿射根系 R 和仿射李代数 $\hat{\ }\hat{\mathfrak{g}}$ 的 Dynkin 型：

$(R_0,\hat R_0)$	R	$\hat{\mathfrak{g}}$
$(R_0,R_0^\vee)$	$S(R_0^\vee;c)$	$S(R_0^\vee;c)^\vee$
$(R_0,u_\varphi R_0)$	$S(R_0;\,c/u_\varphi)^\vee$	$S(R_0;\;\;c/u_\varphi)$

备注 4.4。若 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是非扭曲的（即 $(R_0,\hat R_0)=(R_0,u_\varphi R_0)$），则 $\mathsf{c}_{\lambda\,\vartheta}^{\nu\,(c)}$, , (0) 是非负整数。当 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是扭曲的（即 $(R_0,\hat R_0)=(R_0,R_0^\vee)$，且 R_0 不是单键）时，只要 c 不是 $\frac{\langle\varphi\,\varphi\rangle}{\langle\vartheta}$, ,$\vartheta\rangle\in\{2,3\}$ 的整数倍，同样成立。然而，若 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是扭曲的，且 c 是 $\frac{\langle\varphi\,\varphi\rangle}{\langle\vartheta}$, ,$\vartheta\rangle\in\{2,3\}$ 的整数倍，那么当 $\lambda\in P_c$ 满足对所有带有 $\alpha_j\in W_0\vartheta$ 的 $j\in\{0,1,2,\ldots,n\}$，均有 $a_j(\lambda)=0$ 时，$\mathsf{c}_{\lambda\,\vartheta}^{\lambda\,(c)}$, , (0) $=N_{0,\vartheta}-N_{\lambda,\vartheta}=-1$。这一现象与 [G18] 中先前关于属零 Wess-Zumino-Witten 融合环在底层仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 为扭曲时会出现负结构常数的观察一致。

注 4.5。最近， [D20] 基于对有限 q-玻色子模型的对角化，推导出了 $\widehat{BC}_n=A_{2n}^{(2)}$ 型 Wess-Zumino-Witten 融合环的一种变形；该模型具有对角开放端边界条件，见 [DE17]。上述文献中的方法并未使用仿射Hecke代数，而是采用 Sklyanin 的量子逆散射方法（又称代数 Bethe Ansatz 方法），对带边界条件的量子可积本征值问题进行对角化。

5. Affine intertwining operator

本文余下部分将借助仿射 Hecke 代数 H证明定理 2.2 和 2.4。根据定义， H 是定义在 $\mathbb{C}$上的含幺结合代数，具有可逆生成元 T_0、$T_1 \ldots$、T_n，并满足以下关系

$$(T_j - t_j)(T_j + 1) = 0 \qquad (0 \le j \le n), \tag{5.1}$$

$$\underbrace{T_j T_k T_j \cdots}_{m_{jk}\ \text{factors}} = \underbrace{T_k T_j T_k \cdots}_{m_{jk}\ \text{factors}} \qquad (0 \le j \ne k \le n), \tag{5.2}$$

等号两边的因子数 m_{jk} 与 W 对应的辫关系 (3.1) 的阶数相同（参见例如 [H90, M03]）。

对于约化表达式 $w = s_{j_1} \cdots s_{j_\ell}$, 令 $T_w := T_{j_1} \ldots T_{j_\ell}$（根据辫关系，这一定义不依赖于约化表达式的选择）。已知，元素 T_w（其中 $w \in W$）构成 $\mathbb{C}$上 H 的一组基。

由 T_1、$\ldots T_n$ 生成的 H 子代数称为有限赫克代数 H_0 （与 W_0 和 t 相关）。

为了定义仿射交织算子，我们需要 H 的以下积分反射表示。

命题 5.1. 下述定义了 H 在 $\mathcal{C}(P)$ 上的作用：

$$T_j f = (t_j s_j + (t_j - 1)J_j)f \qquad (f \in \mathcal{C}(P), j = 0, \ldots, n), \tag{5.3}$$

其中 J_j : $\mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P)$ 表示由下式给出的算子

$$(J_j f)(\lambda) := \begin{cases} -\sum_{k=1}^{a_j(\lambda)} f(\lambda - k\alpha_j) & \text{if } a_j(\lambda) > 0, \\ 0 & \text{if } a_j(\lambda) = 0, \\ \sum_{k=0}^{-a_j(\lambda)-1} f(\lambda + k\alpha_j) & \text{if } a_j(\lambda) < 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

证明。对于任意 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$，考虑由 $T_0, T_1, \ldots, T_{k-1}, T_{k+1}, \ldots, T_n$生成的 H 的（有限维）抛物子代数 H_k。证明的思路是说明，对于任意（固定的） k， $T_j \mapsto I_j$ 可扩张为 H_k 在 $\mathcal{C}(P)$ 上的一个表示。这里 $I_j := t_j s_j + (t_j - 1)J_j$ 表示式 (5.3) 右侧的算子。由 H 是由 $T_0, \ldots, T_n$ 生成并满足辫关系和二次关系这一事实，便可推出该命题。为此，我们引入阿尔科夫 A_c (3.3) 的顶点 $v_0 = 0, v_1, \ldots, v_n$，于是特别有

$$a_j(v_k) = \delta_{j,k}, \qquad \text{for all } j \ne k. \tag{5.5}$$

我们固定一个 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$，并将顶点 v_k 视为“新原点”，由 R 得到有限子系： $R_k = \{(a')^\vee \mid a \in R, a(v_k) = 0\}$。于是， $a \mapsto a'$ 定义了从 R 的抛物子系 $\{a \in R \mid a(v_k) = 0\}$ 到 $R_k^\vee$ 的根系同构。根系 R_k 是 V 中秩为 n 的有限根系，但不一定不可约。R_k 的一组单根基为 α_j, $j \ne k$。映射 $s_j \mapsto s'_j = s_{\alpha_j^\vee}$, $j \ne k$ 定义了从 W 的抛物子群 $W_k = \langle s_j \mid j \ne k \rangle$ 到 R_k 的有限魏尔群 $W_0(R_k)$ 的群同构。该同构诱导出从 H 的抛物子代数 $H_k = \langle T_j \mid j \ne k \rangle$ 到与 R_k 和 $t_j, j \ne k$ 相关联的有限赫克代数 $H_0(W_0(R_k))$ 的自然同构。

由 $R_k \subset R_0$ 可得 $P \subset P(R_k)$，其中 $P(R_k)$ 表示 R_k 的权格。我们还需要 P 的 $(-v_k)$-平移 $P'_k := -v_k + P \subset P(R_k)$。

对于任意 $j \neq k$，考虑与有限根系 R_k 相关的积分反射算子 I'_j: $\mathcal{C}(P(R_k)) \to \mathcal{C}(P(R_k))$，即 $I'_j = t_j s'_j + (t_j - 1)J'_j$，其中 J'_j 由 (5.4) 中相同的表达式给出，但将 $a_j(\lambda)$ 机械地替换为 $\langle \alpha_j^\vee, \lambda \rangle$。注意，$\mathcal{C}(P'_k)$ 在算子 J'_j 和 I'_j, $j \neq k$ 下保持不变。由 $(\ell_k f)(y) = f(v_k + y)$ 定义的线性同构 ℓ_k: $\mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P'_k)$ 满足 $\ell_k(s_j f) = s'_j \ell_k(f)$，$\ell_k(J_j f) = J'_j \ell_k(f)$，因此对所有 $j \neq k$，也满足 $\ell_k(I_j f) = I'_j \ell_k(f)$。

由 [DE12，引理 4.2]，应用于有限根系 R_k 并限制到有限赫克代数部分，可知 $T_j \mapsto I'_j$, $j \neq k$ 在 $\mathcal{C}(P(R_k))$ 上定义了 $H_0(W_0(R_k))$ 的一个表示（另见下文备注 5.2）。由于 $\mathcal{C}(P'_k)$ 是此表示下的不变子空间，可知 $T_j \mapsto I'_j$, $j \neq k$ 可扩张为 $\mathcal{C}(P'_k)$ 上 $H_0(W_0(R_k))$ 的一个表示。利用上述从 H_k 到 $H_0(W_0(R_k))$ 的同构，我们推得 $T_j \mapsto I'_j$, $j \neq k$ 可扩张为 $\mathcal{C}(P'_k)$ 上 H_k 的一个表示。对线性同构 ℓ_k 取拉回后，我们得到 $T_j \mapsto I_j$, $j \neq k$ 可扩张为 $\mathcal{C}(P)$ 上 H_k 的一个表示。由于 k 是任意的，这便完成了证明，正如开头所示。□

注 5.2。在 [DE12，引理 4.2] 中，假设底层有限晶体根系 R 不可约且满秩。然而，该命题对所有满秩有限晶体根系均成立。若将 R 分解为互不相交、不可约且正交的子系统 $R_1 \cup \cdots \cup R_\ell$，则 $H_0(W_0(R)) \simeq H_0(W_0(R_1)) \otimes \cdots \otimes H_0(W_0(R_\ell))$，并且整反射表示的作用也在 $\mathcal{C}(P) \simeq \mathcal{C}(P(R_1)) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(P(R_\ell))$ 上分解，由此立即得到该结果。

或者，若去掉 R 不可约这一要求，[DE12，引理 4.2] 的证明仍可逐字适用。

仿射交织算子 $\mathcal{J}$: $\mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P)$ 现定义如下：

$$(\mathcal{J} f)(\lambda) := t[\lambda]^{-1}(T_{w_\lambda} f)(\lambda_+). \tag{5.6}$$

命题 5.3。算子 $\mathcal{J}$ 可逆。

命题 5.3 是下文引理 5.4 的直接推论。给定 v、$w \in W$，回顾一下，在 W 上的布鲁哈特偏序中，若 v 可由从 w 的约化表达式中删除简单反射得到，则 $v \leq w$ $v \leq w$（参见 [M03，第 2.3] 节）。对于 $x \in V$，我们将有限集 $\{y \in V \mid y_+ = x_+$ 和 $w_y \leq w_x\}$ 记为 $[x]$，将 $[x]$的凸包记为 $\mathrm{Conv}\,[x]$。现在考虑 P上的如下偏序 $\preceq$：

$$\forall \mu, \lambda \in P \quad \mu \preceq \lambda \text{ iff (i) } \lambda - \mu \in Q \text{ and (ii) } \mathrm{Conv}\,[\mu] \subseteq \mathrm{Conv}\,[\lambda]. \tag{5.7}$$

引理 5.4。相对于上述偏序，$\mathcal{J}$ 的作用是三角形的：

$$(\mathcal{J} f)(\lambda) = \sum_{\mu \in P,\, \mu \preceq \lambda} J_{\lambda,\mu} f(\mu), \qquad (f \in \mathcal{C}(P), \lambda \in P) \tag{5.8}$$

对于某些系数 $J_{\lambda,\ \mu} \in \mathbb{C}$，且 $J_{\lambda,\ \lambda} = t[\lambda]^{-1}$。

证明。我们注意到 $t[\lambda] = t_{w_\lambda}$，并按 w_λ 的长度归纳进行。对于 $\ell(w_\lambda) = 0$，显然有 $(\mathcal{J} f)(\lambda) = f(\lambda)$。接下来，假设 $\ell(w_\lambda) > 0$，令 j 满足

$w_\lambda s_j < w_\lambda$。因此

$$(\mathcal{J}f)(\lambda) = t[\lambda]^{-1}(T_{w_\lambda}f)(\lambda_+) = t_j^{-1}t[s_j\lambda]^{-1}(T_{w_{s_j\lambda}}T_jf)((s_j\lambda)_+)$$
$$\overset{\text{IH}}{=} t_j^{-1}\sum_{\mu\in P,\,\mu\preceq s_j\lambda} J_{s_j\lambda,\mu}(T_jf)(\mu) = \sum_{\mu\in P,\,\mu\preceq\lambda} J_{\lambda,\mu}f(\mu), \tag{5.9}$$

其中，步骤 IH 依赖于归纳假设；最后一个等式是因为 $\mathrm{Conv}\,[s_j\lambda]$ and $s_j(\mathrm{Conv}\,[s_j\lambda])$ 的凸包包含于 $\mathrm{Conv}\,[\lambda]$，因为 $[s_j\lambda]\cup s_j([s_j\lambda]) \subseteq [\lambda]$。

的对角系数的

$$\sum_{\mu\in P,\,\mu\preceq s_j\lambda} J_{s_j\lambda,\mu}(T_jf)(\mu)$$

对应于与 $\mu = s_j\lambda$ 相应的项，并且在 $s_j\lambda \prec \lambda$ 时，$(T_jf)(s_j\lambda)$ 中 $f(\lambda)$ 的系数等于 1（由等式 (5.3)、(5.4)）。因此，比较 (5.9) 两边 $f(\lambda)$ 的系数可知 $J_{\lambda,\lambda} = t_j^{-1}J_{s_j\lambda,s_j\lambda}$，这就证明了引理。□

为下一节做准备，我们最后给出一个关于 $\mathcal{C}(P)$ 的 W-不变子空间的便捷刻画，该刻画用 H and $\mathcal{J}$ 来表述。

引理 5.5。 W-不变子空间

$$\mathcal{C}(P)^W := \{f\in\mathcal{C}(P) \mid wf = f,\ w\in W\} \tag{5.10}$$

由满足以下条件的函数 $f:\ \mathcal{C}(P) \to \mathbb{C}$ 构成

$$\mathcal{J}T_j\mathcal{J}^{-1}f = t_jf \qquad (j = 0,\dots,n).$$

证明。对于任意 $f\in\mathcal{C}(P)$、 $j\in\{0,\dots n\}$ 和 $\lambda\in P$，我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}T_j\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda) &= t[\lambda]^{-1}(T_{w_\lambda}T_j\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+)\\ &= \begin{cases} t[\lambda]^{-1}(T_{w_\lambda s_j}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+) & \text{if } a_j(\lambda)\geq 0\\ t[\lambda]^{-1}\left(t_j(T_{w_\lambda s_j}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+) + (t_j-1)(T_{w_\lambda}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+)\right) & \text{if } a_j(\lambda)<0\end{cases}\\ &= t_jt[\lambda]^{-1}(T_{w_\lambda}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+)\\ &\quad + t_j^{\chi(a_j(\lambda))}\left(t_{w_\lambda s_j}^{-1}(T_{w_\lambda s_j}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+) - t[\lambda]^{-1}(T_{w_\lambda}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda_+)\right)\\ &= t_jf(\lambda) + t_j^{\chi(a_j(\lambda))}\left(f(s_j\lambda) - f(\lambda)\right).\end{aligned}$$

这里 χ 表示 $[0,\infty)$ 的特征函数，我们还用到了

$$T_wT_j = \begin{cases} T_{ws_j} & \text{if } \ell(ws_j) = \ell(w)+1,\\ t_jT_{ws_j} + (t_j-1)T_w & \text{if } \ell(ws_j) = \ell(w)-1,\end{cases}$$

关系 $\ell(w_\lambda s_j) = \ell(w_\lambda)+1$（若 $a_j(\lambda)\geq 0$），$\ell(w_\lambda s_j) = \ell(w_\lambda)-1$（若 $a_j(\lambda)<0$），以及以下观察

$$t_{w_\lambda s_j}^{-1}(T_{w_\lambda s_j}f)(\lambda_+) = t[s_j\lambda]^{-1}(T_{w_{s_j\lambda}}f)(\lambda_+).$$

因此， f 是 W-不变的，当且仅当 $\mathcal{J}T_j\mathcal{J}^{-1}f{=}t_jf$。 □

6. Periodic Macdonald spherical functions

对于一个 $\xi \in V$，我们在 $\mathcal{C}(P)$ 中定义仿射麦克唐纳球函数函数:

$$\Phi_\xi := \mathcal{J}\phi_\xi \quad \text{with} \quad \phi_\xi := \sum_{v\in W_0} T_v e^{i\xi}, \tag{6.1}$$

其中 $e^{i\xi}$ 表示平面波函数 $e^{i\xi}(\lambda) := e^{i\langle \lambda,\ \xi\rangle}$ $(\lambda \in P)$。

下一定理中关于 ϕ_ξ (6.1) 的平面波分解是一个已知结果，参见 [M68，定理 1] 以及（更详细地） [M71，（4.1.2）]，或另见 [NR03，定理 2.9(a)] 和 [P06，定理 6.9]）。为使我们的论述自包含，我们基于命题 5.1 中的表示给出一个简要验证。对于任意 $w \in W$，我们定义有限集

$$R(w) := R^+ \cap w^{-1}(R^-)$$

对于 $R^- = -R^+ = R\backslash R^+$。我们注意到， $R(w)$ 的基数等于 w 的长度，并且对于任意 $\lambda \in P$，都有 $R(w_\lambda) = R[\lambda]$ （读者可以分别参阅 [M03，第2节.2] 和 [M03，(2.4.4)]，）。显然，对于任意 $w \in W_0$，都有 $R(w) = R_0^+ \cap w^{-1}(R_0^-)$，其中（回顾）$R_0^- = -R_0^+$。

命题 6.1。函数 ϕ_ξ，对于

$$\xi \in V_{reg} := \{\xi \in V \mid \langle \xi, \alpha\rangle \notin 2\pi\mathbb{Z},\ \forall \alpha \in R_0^+\}, \tag{6.2}$$

可分解为以下平面波的线性组合

$$\phi_\xi = \sum_{w\in W_0} C(w\xi)\mathbf{e}^{iw\xi}, \tag{6.3}$$

with

$$C(\xi) := \prod_{\alpha\in R_0^+} \frac{1 - t_\alpha e^{-i\langle \xi,\alpha\rangle}}{1 - e^{-i\langle \xi,\alpha\rangle}}. \tag{6.4}$$

特别地， $\phi_\xi(\lambda) = M_\lambda(\xi)$ $(\lambda \in P^+, \xi \in V_{reg})$。

证明。由 T_j $(j = 1, \ldots, n)$ (5.3) 的作用可知，对任意 $\boldsymbol{\xi} \in V_{\mathrm{reg}}$

$$T_j\mathbf{e}^{i\xi} = \mathrm{b}_j(s_j\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}^{i\boldsymbol{\xi}} + \mathrm{c}_j(s_j\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}^{is_j\boldsymbol{\xi}} = \mathrm{b}_j(-\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}^{i\boldsymbol{\xi}} + \mathrm{c}_j(-\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}^{is_j\boldsymbol{\xi}}, \tag{6.5a}$$

with

$$\mathrm{c}_j(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1 - t_j e^{-i\langle \xi,\alpha_j\rangle}}{1 - e^{-i\langle \xi,\alpha_j\rangle}}, \qquad \mathrm{b}_j(\boldsymbol{\xi}) = t_j - \mathrm{c}_j(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{c}_j(-\boldsymbol{\xi}) - 1.$$

由于 $\xi \in V_{\mathrm{reg}}$ 在 $W_0 \ltimes 2\pi Q^\vee$ 的作用下的稳定子是平凡的，因此对于 $w \in W_0$，所有向量$w\xi$模 $2\pi Q^\vee$ 两两不同。于是，对任意 $\xi \in V_{\mathrm{reg}}$，平面波 $e^{iw\boldsymbol{\xi}}$, $w \in W_0$ 在 $\mathcal{C}(P)$ 中线性无关。因此，函数 ϕ_ξ 可写为

$$\phi_{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{w\in W_0} C_w(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}^{iw\xi}, \tag{6.5b}$$

其中 $C_w(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{C}$ 是某些唯一确定的系数。

由式 (6.5a) 可知，对于任意约化表达式 $w = s_{j_\ell} \ldots s_{j_1} \in W_0$， T_w 对 $e^{i\xi}$ 的作用具有如下形式

$$T_w\mathbf{e}^{i\xi} = \left(\prod_{1\le k\le \ell} c_{j_k}(s_{j_k}\cdots s_{j_2}s_{j_1}\xi)\right) e^{iw\xi} \quad + \text{l.o.}, \tag{6.5c}$$

其中某些系数为 c_{j_k}，而 l.o. 是平面波 $\mathrm{e}^{iv\xi}$ 的线性组合，其中 $v < w$ 在 W_0 上满足 Bruhat 偏序。

设 w_0 为 W_0 的最长元素。将上述恒等式应用于一个约化表达式 $w_0 = s_{j_\ell} \dots s_{j_1}$（因此 $\ell = \#R_0^+$），我们得出：

$$\begin{aligned} C_{w_0}(\xi) &= \prod_{1\le k\le \ell} c_{j_k}(-s_{j_{k-1}}\cdots s_{j_2}s_{j_1}\boldsymbol{\xi}) = \prod_{1\le k\le \ell} \frac{1-t_{j_k}e^{i\langle \xi, s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{k-1}}\alpha_{j_k}\rangle}}{1-e^{i\langle \xi, s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{k-1}}\alpha_{j_k}\rangle}} \\ &= \prod_{\alpha\in R_0^+} \frac{1-t_\alpha e^{i\langle \xi,\alpha\rangle}}{1-e^{i\langle \xi,\alpha\rangle}} = C(-\xi) = C(w_0\xi). \end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们用到了 $R_0^+ = R(w_0)$；在第三个等式中，用到了（例如参见[M03, (2.2.9)]）$R_0^+ = R(w_0) = \{s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{k-1}}\alpha_{j_k} \mid k = 1, 2, \dots, \ell\}$。

我们将平凡幂等元记作

$$\imath_{\mathbf{0}} := \sum_{v\in W_0} T_v, \tag{6.6}$$

于是有 $\phi_\xi = \imath_{\mathbf{0}}\, e^{i\xi}$。由于 $T_j\imath_{\mathbf{0}} = t_j\imath_{\mathbf{0}}$，我们有 $T_j\phi_\xi = t_j\phi_\xi$，其中 $j = 1$，....., n。由式 (6.5a) 及平面波的线性无关性可得，对于 $\xi \in V_{\mathrm{reg}}$

$$C_{s_jw}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{c}_j(w\boldsymbol{\xi}) = C_w(\boldsymbol{\xi})\mathrm{c}_j(-w\boldsymbol{\xi}) \quad \text{for all } w\in W_0,\ j\in\{1,\dots,n\}. \tag{6.7}$$

另一方面，由公式（6.4）中的乘积公式可知，对于任意$\xi \in V_{\mathrm{reg}}$

$$C(s_j\boldsymbol{\xi})\mathrm{c}_j(\boldsymbol{\xi}) = C(\boldsymbol{\xi})\mathrm{c}_j(-\boldsymbol{\xi}) \quad \text{for all } j\in\{1,\dots,n\}.$$

因此， $C(w\xi)$ 也满足方程 (6.7) 中的递推关系。最后，从初始条件 $C_{w_0}(\xi) = C(w_0\xi)$ 出发，按照 Bruhat 序进行向下归纳（并利用 $c_j(\xi) \neq 0$），我们得出，对于所有 $w \in W_0$ 以及任意 $\xi \in V_{\mathrm{reg}}$，均有 $C_w(\xi) = C(w\xi)$。□

在陈述下一个结果之前，我们回顾一下，节点 $\mathcal{P}_c$ 由严格凸莫尔斯函数 $\mathcal{V}_\mu$ (2.6)、$\hat{}\mu \in P_c$ (2.5)所确定的唯一全局极小值给出。给定 μ，由于$\mathcal{V}_\mu(\xi)$是光滑的，并且当 $\xi \to \infty$时 $\mathcal{V}_\mu(\xi) \to +\infty$，因此全局极小值的存在性得以保证。由于 ξ_μ 是 $\mathcal{V}_\mu$的一个极小值，它是 $\nabla\mathcal{V}_\mu = 0$的一个解：

$$c\xi_\mu + \hat{\rho}_v(\xi_\mu) = 2\pi(\hat{\rho}+\mu) \qquad \text{where} \quad \hat{\rho}_v(\xi) := \sum_{\alpha\in R_0^+} v_\alpha(\langle\xi,\alpha\rangle)\hat{\alpha}. \tag{6.8}$$

$\hat{}$ 引理 6.2. 临界点 ξ_μ, $\mu \in P_c$ 彼此互不相同，并且属于开阿尔科夫（相对于 V 上的 $W_0 \ltimes 2\pi Q^\vee$ 的仿射作用）

$$A = \{\xi \in V \mid 0 < \langle\xi,\alpha\rangle < 2\pi,\ \forall\alpha\in R_0^+\}. \tag{6.9}$$

此外， ξ_μ 的位置在参数 $t_\alpha \in (-1, 1)$ 上解析地依赖。

证明。从式 (6.8) 可知，可以根据 ξ_μ 的值恢复 μ，因此，如果 $\mu \neq \lambda$，则 $\xi_\mu \neq \xi_\lambda$。此外，对于任意 $\beta \in R_0^+$，我们有

$$c\langle\xi_\mu,\beta\rangle + \langle\hat{\rho}_v(\xi_\mu),\beta\rangle = 2\pi\langle\hat{\rho}+\mu,\beta\rangle. \tag{6.10a}$$

由于 v_α(x) 是奇函数，还可得到

$$\langle\hat{\rho}_v(\xi_\mu),\beta\rangle=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\in R_0\\ \langle\alpha^\vee,\beta\rangle>0}}\big(v_\alpha(\langle\xi_\mu,\alpha\rangle)-v_\alpha(\langle s_{\beta^\vee}\xi_\mu,\alpha\rangle)\big)\langle\hat{\alpha},\beta\rangle. \tag{6.10b}$$

由式 (6.10a)、(6.10b) 可推出 $\langle\xi_\mu、\ \beta\rangle>0$ 对于 $\mu\in\hat{}P_c$。这里利用了 v_α(x) 严格单调递增这一性质，以及

$$\langle\xi_\mu,\alpha\rangle-\langle s_{\beta^\vee}\xi_\mu,\alpha\rangle=\langle\xi_\mu,\beta\rangle\langle\alpha,\beta^\vee\rangle. \tag{6.10c}$$

此外，由式 (6.10b)、(6.10c) 与 $\beta=\varphi$ 以及函数 v_α(x) 的拟周期性可推得，对于 $\langle\xi_\mu、\ \varphi\rangle\geq 2\pi$ 我们将有

$$c\langle\xi_\mu,\varphi\rangle+\langle\hat{\rho}_v(\xi_\mu),\varphi\rangle\geq 2\pi c+\pi\sum_{\alpha\in R_0^+}\langle\alpha,\varphi^\vee\rangle\langle\varphi,\frac{\alpha^\vee}{m_\alpha}\rangle=2\pi(1+c+\langle\hat{\rho},\varphi\rangle), \tag{6.10d}$$

其中，在最后一个联系中，我们用到了对于任意根重数函数 $t:R_0\to\mathbb{C}$ 和根 $\beta\in R_0$，我们有

$$\sum_{\alpha\in R_0^+}t_\alpha\langle\beta,\alpha^\vee\rangle\langle\alpha,\beta^\vee\rangle=\frac{2}{n}\sum_{\alpha\in R_0}t_\alpha \tag{6.10e}$$

（由舒尔引理可得，参见 [EOS06, Lem. 10.1]and[DE13, Rem. 7.4] 的证明）并且

$$\langle\hat{\rho},\varphi\rangle+1=\frac{1}{n}\sum_{\alpha\in R_0}\frac{1}{m_\alpha}.$$

现在将公式（6.10d）与 $\beta=\varphi$ 的公式（6.10a）结合起来，我们得到

$$c+\langle\hat{\rho},\varphi\rangle+1\leq\langle\hat{\rho}+\mu,\varphi\rangle=\langle\mu,\varphi\rangle+\langle\hat{\rho},\varphi\rangle,$$

这与我们的假设 $\mu\in\hat{}P_c$ 矛盾。因此，必有 $\langle\xi_\mu,\varphi\rangle<2\pi$，即 $\xi_\mu\in A$。

最后，很明显，临界方程 (6.8) 关于参数 $t_\alpha\in(-1,1)$ 是解析的。由于临界方程的雅可比矩阵可逆，隐函数定理保证临界点 ξ_μ 对这些参数的依赖也是解析的。□

命题 6.3（周期麦克唐纳球函数）。对于每个 $\mu\in\hat{}P_c$，函数 Φ_{ξ_μ} 属于 W-不变子空间 $\mathcal{C}(P)^W$。

证明。由于对于 $j=1$，有 $T_j\imath_0=t_j\imath_0$ ..... n（见式 (6.6)），因此我们有

$$\mathcal{J}T_j\mathcal{J}^{-1}\Phi_\xi=\mathcal{J}T_j\phi_\xi=t_j\mathcal{J}\phi_\xi=t_j\Phi_\xi. \tag{6.11}$$

因此，根据引理 5.5，我们只需证明 $\mathcal{J}T_0\mathcal{J}^{-1}\Phi_\xi=t_0\Phi_\xi$，或等价地证明 $T_0\phi_\xi=t_0\phi_\xi$。对于 $\xi\in V_{\rm reg}$，式（6.3）中的分解以及 T_0 对 $e^{i\xi}$ 的显式作用（参见式（5.3）–（5.4））表明，

$$T_0\phi_\xi=\sum_{v\in W_0}\frac{t_0-1}{1-e^{i\langle v\xi,\alpha_0\rangle}}C(v\xi)e^{iv\xi}+\sum_{v\in W_0}\frac{1-t_0e^{i\langle v\xi,-\alpha_0\rangle}}{1-e^{i\langle v\xi,-\alpha_0\rangle}}C(s_0'v\xi)e^{ic\langle v\xi,\alpha_0\rangle}e^{iv\xi}.$$

现在，通过与 $t_0\phi_\xi$ 的相应分解进行比较，我们得到：当 $\xi \in V_{reg}$ 时，$T_0\phi_\xi = t_0\phi_\xi$。

$$e^{ic\langle v\xi,-\alpha_0\rangle} = \frac{C(s_0' v\xi)}{C(v\xi)} \frac{1-t_0 e^{i\langle v\xi,-\alpha_0\rangle}}{t_0 - e^{i\langle v\xi,-\alpha_0\rangle}}, \qquad \forall v \in W_0.$$

将 $C(\cdot)$ 在 R_0^+ 上的乘积展开式代入（参见公式（6.4））， 可得

$$\begin{aligned}\frac{C(s_0'\xi)}{C(\xi)} &= \prod_{\substack{\alpha\in R_0^+ \\ \langle -\alpha_0,\alpha^\vee\rangle>0}} \frac{1-t_\alpha e^{i\langle\xi,\alpha\rangle}}{t_\alpha - e^{i\langle\xi,\alpha\rangle}} \\ &= \frac{1-t_0 e^{i\langle\xi,-\alpha_0\rangle}}{t_0 - e^{i\langle\xi,-\alpha_0\rangle}} \prod_{\alpha\in R_0^+\setminus\{-\alpha_0\}} \left(\frac{1-t_\alpha e^{i\langle\xi,\alpha\rangle}}{t_\alpha - e^{i\langle\xi,\alpha\rangle}}\right)^{\langle -\alpha_0,\hat\alpha\rangle},\end{aligned}$$

这里用到了对所有 $\alpha \in R_0^+ \setminus \{-\alpha_0\}$，$\langle -\alpha_0, \hat\alpha\rangle \in \{0,1\}$。该关系现在可写为

$$e^{ic\langle\xi,-v\alpha_0\rangle} = \prod_{\alpha\in R_0^+} \left(\frac{1-t_\alpha e^{i\langle\xi,\alpha\rangle}}{e^{i\langle\xi,\alpha\rangle} - t_\alpha}\right)^{\langle -v\alpha_0,\hat\alpha\rangle}, \qquad \forall v \in W_0, \tag{6.12}$$

利用右侧各因子中的符号整体翻转后会相互抵消这一点，因为对所有 $\beta \in \hat R_0$，$\prod_{\alpha\in\hat R_0^+}(-1)^{\langle\beta^\vee,\,\alpha\rangle} = (-1)^{\langle\beta^\vee,\,2\hat\rho\rangle} = 1$。

为了完成证明，注意若将公式（6.10a）乘以虚数单位，并将两边取指数，利用

$$v_\alpha(\mathrm{x}) = 2\arctan\Big(\frac{1+t_\alpha}{1-t_\alpha}\tan\Big(\frac{\mathrm{x}}{2}\Big)\Big) = i\log\Big(\frac{1-t_\alpha e^{i\mathrm{x}}}{e^{i\mathrm{x}}-t_\alpha}\Big),$$

则可知 ξ_μ 确实是公式（6.12）的一个解。 □

注释 6.4. 在 [DE12, 方程 (5.12a)] 中，麦克唐纳球函数 $\Phi_\xi \in \mathcal{C}(P)^{W_0}$是通过一个交织算子引入的，该算子（本质上）由有限赫克代数 H_0的积分反射表示构造而成。相比之下，仿射麦克唐纳球函数 $\Phi_\xi \in \mathcal{C}(P)^{W_0}$ (6.1) 基于仿射交织算子 $\mathcal{J}$ (5.6)，后者由仿射赫克代数 H的积分反射表示构造而成。

注释 6.5. 对于 $y \in V$，我们用 $\tau_y : V \to V$ 表示由作用 $\tau_y(x) := x + y$确定的平移。于是，仿射韦尔群有另一种表示 $W = W_0 \ltimes \tau(c\hat Q^\vee)$，因为 $s_{\alpha^\vee} s_{\alpha^\vee + m_\alpha rc} = \tau_{cr\hat\alpha^\vee}$ 对于 $\alpha \in R_0, r \in \mathbb{Z}$成立。由上述命题可知，$\Phi_{\xi_\mu}$ ($\mu \in P_c$) 是 W_0-不变的，且具有$c\hat Q^\vee$-周期性，这也解释了为何将 Φ_{ξ_μ}称为周期麦克唐纳球函数。

注释 6.6。从命题 6.3 的证明可清楚看出，对于每个 $\mu \in P$，向量 $\xi = \xi_\mu$ 都满足以下贝特类型的代数方程组

$$e^{ic\langle\xi,\beta^\vee\rangle} = \prod_{\alpha\in R_0^+} \Big(\frac{1-t_\alpha e^{i\langle\xi,\alpha\rangle}}{e^{i\langle\xi,\alpha\rangle} - t_\alpha}\Big)^{\langle\hat\alpha,\beta^\vee\rangle}, \qquad \forall \beta \in \hat R_0.$$

事实上，在 $\xi = \xi_\mu$ 公式（6.12）成立，并且 $\hat R_0^\vee$ 的短根在 $\mathbb{Z}$ 上生成 $\hat R_0^\vee$。

7. Proof of Theorem 2.2 (Basis)

对于任意 $\omega \in P^+$，我们考虑自由算子 $L_{\omega;1}$： $\mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P)$，其定义为

$$(\mathrm{L}_{\omega;1} f)(\lambda) := \sum_{\nu \in W_0 \omega} f(\lambda + \nu) \tag{7.1}$$

以及由下式给出的算子 L_ω： $\mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P)$

$$L_\omega = \mathcal{J} L_{\omega;1} \mathcal{J}^{-1}. \tag{7.2}$$

对于 W 中 $\lambda \in P_c$ 的各向同性群 W_λ，关于与长度乘法函数 t [M72] 相关的 Coxeter 群的广义 Poincar´e 级数的麦克唐纳乘积公式告诉我们

$$W_\lambda(t) = \sum_{w \in W_\lambda} t_w = \prod_{\substack{\alpha \in \hat{R}_0^+ \\ \langle \lambda, \alpha \rangle = 0}} \frac{1 - t_\alpha \hat{e}_t(\alpha)}{1 - \hat{e}_t(\alpha)} \prod_{\substack{\alpha \in \hat{R}_0^+ \\ \langle \lambda, \alpha \rangle = c}} \frac{1 - t_\alpha \hat{h}_t \hat{e}_t(-\alpha)}{1 - \hat{h}_t \hat{e}_t(-\alpha)}, \tag{7.3}$$

其中 h_t 和 e_t 由 (2.8)、(2.9) 给出。利用这个恒等式，我们可以很容易地推知，对于任意 $\mu \in \hat{P}_c$，函数 Φ_{ξ_μ} 在 $\mathcal{C}(P_c) \cong \mathcal{C}(P)^W$ 中非零。事实上，由命题 6.1、引理 6.2、命题 6.3 以及 $\mathcal{J}$ 对 $\mathcal{C}(P_c)$ 的平凡作用可得

$$\Phi_\xi(\lambda) = M_\lambda(\xi) = M_\lambda^{(c)}(\xi) \quad \text{for any } \xi \in \mathcal{P}_c \text{ and } \lambda \in P_c. \tag{7.4}$$

特别地，在 $\lambda = 0$ 处，这给出

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(0) &= \sum_{v \in W_0} C(v\xi) = \sum_{v \in W_0} \prod_{\alpha \in R_0^+} \frac{1 - t_\alpha e^{-i\langle v\xi, \alpha \rangle}}{1 - e^{-i\langle v\xi, \alpha \rangle}} \\ &\overset{\star}{=} \sum_{v \in W_0} t_v = \prod_{\alpha \in R_0^+} \frac{1 - t_\alpha e_t(\alpha)}{1 - e_t(\alpha)} > 0, \end{aligned}$$

其中，对于 $\star$ 等式，我们使用了文献 [M72，第 (2.8) 条] 中的 Macdonald 恒等式。

命题 7.1（周期性麦克唐纳球函数的完备性）。$\hat{}$ 函数 Φ_{ξ_μ}, $\mu \in P_c$ 的限制构成了 $\mathcal{C}(P_c)$ 的一组基，并且同时将对易算子 L_ω 对角化：

$$L_\omega \Phi_{\xi_\mu} = \mathrm{m}_\omega(e^{i\xi_\mu}) \Phi_{\xi_\mu} \qquad (\omega \in P^+, \mu \in \hat{P}_c). \tag{7.5}$$

证明。对于任意 $\omega \in P^+$， $L_{\omega;1}$ 作用于平面波所得结果为

$$L_{\omega;1} e^{iv\xi} = \mathrm{m}_\omega(e^{i\xi}) e^{iv\xi} \qquad (v \in W_0).$$

$\hat{}$因此，给定 $\mu \in P_c$，可知在 $\xi = \xi_\mu$ 处：

$$L_\omega \Phi_\xi = \mathcal{J} L_{\omega;1} \mathcal{J}^{-1} \mathcal{J} \phi_\xi = \mathcal{J} L_{\omega;1} \phi_\xi = \mathrm{m}_\omega(e^{i\xi}) \Phi_\xi.$$

其要点是，鉴于引理 6.2 以及众所周知的事实： W_0-不变三角多项式 $m_\omega(e^{i\xi})$、$\omega \in P^+$ 将基本仿射 Weyl 室 A中的点区分开来，式 (7.5) 中的非平凡特征解 Φ_{ξ_μ}, $\mu \in \hat{P}_c$ 必须在 $\mathcal{C}(P_c)$ 中线性无关。

为完成证明，可知需特征函数 $\Phi_{\xi_\mu}(x)$, $\mu \in \hat{P}_c$ 构成 $\mathcal{C}(P_c)$ 的一组基。为此，我们首先注意到， P_c 由满足 $c_1 m_1 + \cdots + c_n m_n \leq c$ 的 R_0 的基本权的所有非负整数线性组合 $c_1\omega_1 + \cdots + c_n\omega_n$ 构成，其中

正整数 m_1、……、m_n 表示 $R_0^\vee$ 的单根基 $\alpha_1^\vee$、……、$\alpha_n^\vee$ 中最高根 $-\alpha_0^\vee$ 的系数。类似地，R_0 的基本权的所有非负整数线性组合 c_1 构成 $\hat{}\,P_c$，且满足$c_1\,\hat{}\,m_1+\cdots+c_n\,\hat{}\,m_n\le c$；其中正整数 $\hat{}\,m_1$、……、$\hat{}\,m_n$ 现在表示 φ 在 $\hat{}\,R_0^\vee$ 的单根基 $\hat{}\,\alpha_1^\vee$、……、$\hat{}\,\alpha_n^\vee$ 中的系数。若 $\hat{}\,R_0=u_\varphi R_0$，则显然对所有 j，都有 $\hat{}\,m_j=m_j$；若 $\hat{}\,R_0=R_0^\vee$，则 $\hat{}\,m_1$、……、$\hat{}\,m_n$ 是 m_1、……、m_n 的一个排列。因此，两种情况下都有 $|P_c|=|\hat{}\,P_c|$，命题得证。□

命题 7.1 保证方阵 $\left[M_\lambda^{(c)}(\xi_\mu)\right]_{\lambda\in P_c,\mu\in\hat{}\,P_c}$ 满秩，从而完成定理 2.2 的证明。

8. Proof of Theorem 2.4 (Affine Pieri Rule)

对于任意函数 $f\in\mathcal{C}(P)^W$、(拟)极小权 $\omega\in P^+$ 和 $\lambda\in P_c$，有

$$\begin{aligned}(L_\omega f)(\lambda)&=(\mathcal{J}L_{\omega;1}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda)=(L_{\omega;1}\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda)\\&=\sum_{\nu\in W_0\omega}(\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda+\nu)\\&=\sum_{\nu\in W_0\omega}t[\lambda+\nu]f(\lambda+\nu)+d_{\lambda,\nu}(1-t_\vartheta^{-1})f(\lambda).\end{aligned}$$

最后一个等式依赖于以下引理（其证明推迟到第 8.2 小节）：

引理 8.1. 对于任意 $f\in\mathcal{C}(P)$、$\lambda\in P_c$ 和 $\nu\in P_\vartheta^\star:=\{w\eta\mid w\in W_0$，以及 $\eta\in P$ 是极小权或拟极小权的情形 $\}$，有

$$(\mathcal{J}^{-1}f)(\lambda+\nu)=t[\lambda+\nu]f(\lambda+\nu)+d_{\lambda,\nu}(1-t_\vartheta^{-1})f(\lambda),$$

其中，$d_{\lambda,\nu}$ 取自 (4.2a)。

由于 f 具有 W不变性，因此

$$\begin{aligned}(L_\omega f)(\lambda)=&\left(\sum_{\substack{\nu\in W_0\omega\\(\lambda+\nu)_+=\lambda}}t[\lambda+\nu]+(1-t_\vartheta^{-1})\sum_{\nu\in W_0\omega}d_{\lambda,\nu}\right)f(\lambda)\\&+\sum_{\substack{\nu\in W_0\omega\\\lambda+\nu\in P_c}}\ \sum_{\substack{\eta\in W_0\omega\\(\lambda+\eta)_+=\lambda+\nu}}t[\lambda+\eta]\,f(\lambda+\nu).\end{aligned}\tag{8.1}$$

L_ω 对 f 的作用因此具有如下形式

$$(L_\omega f)(\lambda)=U_{\lambda,\omega}(t)f(\lambda)+\sum_{\substack{\nu\in W_0\omega\\\lambda+\nu\in P_c}}V_{\lambda,\nu}(t)f(\lambda+\nu).$$

系数 $U_{\lambda,\ \omega}(t)$ 和 $V_{\lambda,\ \nu}(t)$ 的计算依赖于以下引理（其证明则留待第 8.1 节给出）：

引理 8.2。对于 $\lambda\in P_c$和 $\nu\in P_\vartheta^\star$，我们处于以下两种情形之一：$i)$ 当 $(\lambda+\nu)_+=\lambda$ 时，$w'_{\lambda+\nu}\nu=\alpha_j$，其中某个 $j\in\{0,\dots,n\}$ 满足$t_j=t_0$，且 $\theta(\lambda+\nu)=0$。

ii) 当 $(\lambda+\nu)_+ \neq \lambda$ 时，$w_{\lambda+\nu} \in W_\lambda$，且若 $\nu \in R_0^- \cap W_0\vartheta$ 和$\langle \lambda, \hat{}\nu\rangle = 0$，或若 $\nu \in R_0^+ \cap W_0\vartheta$ 和 $\langle \lambda, \hat{}\nu\rangle = c$，则 $\theta(\lambda+\nu) = 1$；否则 $\theta(\lambda+\nu) = 0$。

事实上，(4.1) 中所断言的 $U_{\lambda,\omega}$ 表达式可直接由等式 (8.1) 和引理得出，而等式 (2.11) 中 $f(\lambda+\nu)$ 的系数 $V_{\lambda,\nu}(t)$ 经简短计算后可得：

$$\sum_{\substack{\eta\in W_0\omega \\ (\lambda+\eta)_+=\lambda+\nu}} t[\lambda+\eta] = \sum_{\mu\in W_\lambda(\lambda+\nu)} t[\mu] = W_\lambda(t)/(W_\lambda \cap W_{\lambda+\nu})(t) = V_{\lambda,\nu}(t),$$

最后一步用到了麦克唐纳乘积公式 (7.3)。

结合等式 (7.5)，并回想对于 $\lambda \in P_c$ 和 $\mu \in \hat{}P_c$:$\Phi_{\xi_\mu}(\lambda) = M_\lambda(\xi_\mu) = M_\lambda^c(\xi_\mu)$（参见等式 (7.4)），等式 (2.10) 中的 Pieri 公式便可直接得出。

8.1. 引理 8.2 的证明。设 $\mu \in P\setminus P_c$ 和 $j \in \{0,\ldots,n\}$，使得 $a_j \in R[\mu]$（回想 (3.6)）。那么 $w_\mu = w_{s_j\mu}s_j$，其中 $\ell(w_\mu) = \ell(w_{s_j\mu})+1$，因此 $R[\mu] = s_jR[s_j\mu]\cup\{a_j\}$（参见 M03, (2.2.4)],，尽管它只对非扭型作了陈述，但实际上对扭曲型也成立）。由 (4.2c) 可得

$$\theta(\mu) = \begin{cases} \theta(s_j\mu)+1 & \text{if } a_j(\mu) = -2, \\ \theta(s_j\mu) & \text{if } a_j(\mu) \neq -2. \end{cases} \tag{8.2}$$

考虑情形 $\lambda \in P_c$、$\nu \in P_\vartheta^\star$ 和 $\lambda+\nu \notin P_c$。若对任意满足 $a_j \in R[\lambda+\nu]$ 的 $j \in \{0,\ldots,n\}$，定义 $\tilde{\nu} := s_j(\lambda+\nu)-\lambda$（其中有 $s_j(\lambda+\nu) = \lambda+\tilde{\nu}$），那么我们属于以下情形之一，并由 (8.2) 得到 $\theta(\lambda+\nu)$ 的相应表达式

(*A*) $a_j(\lambda) = 0$ 且 $\langle \nu, \alpha_j^\vee\rangle = -1$（因此 $a_j(\lambda+\nu) = -1$）。于是 $s_j \in W_\lambda$，所以 $\tilde{\nu} = s_j'\nu$ 且 $\theta(\lambda+\nu)=\theta(\lambda+s_j'\nu)$。(*B*) $a_j(\lambda) = 0$ 且 $\langle \nu, \alpha_j^\vee\rangle = -2$（因此 $a_j(\lambda+\nu) = -2$）。于是 $s_j \in W_\lambda$ 且$\nu = -\alpha_j$，所以$\tilde{\nu} = s_j'\nu = \alpha_j$ 且 $\theta(\lambda+\nu)=\theta(\lambda+s_j'\nu)+1$。(*C*) $a_j(\lambda) = 1$ 且 $\langle \nu, \alpha_j^\vee\rangle = -2$（因此 $a_j(\lambda+\nu) = -1$）。于是 $\nu = -\alpha_j$ 且 $\tilde{\nu} = 0$，所以 $w_{\lambda+\nu} = s_j$ 且 $\theta(\lambda+\nu)=\theta(\lambda) = 0$。

仅当 $\nu \in W_0\vartheta$ 时才会出现 (*B*) 和 (*C*) 的情形。若进一步有 $j = 0$，则还会有 $\alpha_0 = -\vartheta$（因此我们必然处于非扭曲情形 $\hat{} R_0 = R_0^\vee$）。

当 $\lambda+\nu \in P_c$ 时，引理是显然的。令 $\lambda+\nu \notin P_c$，并取一个分解$w_{\lambda+\nu} = s_{j_\ell}\cdots s_{j_1}$，其中 $\ell = \ell(w_{\lambda+\nu}) \geq 1$，我们定义 ν_0:= ν、$\nu_k := s_{j_k}'\nu_{k-1}$（对于$k = 1$、...、$\ell$）、$b_0 := a_{j_1}$ 以及 $b_k = \beta_k^\vee + r_km_\beta c := s_{j_1}\cdots s_{j_k}a_{j_{k+1}}$（对于 $k = 1$、...、$\ell-1$）。这意味着 $R[\lambda+\nu] = \{b_0,\ldots,b_{\ell-1}\}$（参见 [M03, （2.2.9）]）。考虑上述三个可能情形，我们得到

$$\lambda+\nu = \lambda+\nu_0 \xrightarrow{s_{j_1}} \lambda+\nu_1 \xrightarrow{s_{j_2}} \cdots \xrightarrow{s_{j_{\ell-1}}} \lambda+\nu_{\ell-1},$$

其中，所有这些步骤只涉及 (*A*) 或 (*B*)，而 (*C*) 只能出现在最后一步

$$\lambda+\nu_{\ell-1} \xrightarrow{s_{j_\ell}} \lambda = (\lambda+\nu)_+, \tag{8.3}$$

或者根本不会出现

$$\lambda+\nu_{\ell-1} \xrightarrow{s_{j_\ell}} \lambda+\nu_\ell = (\lambda+\nu)_+, \tag{8.4}$$

在情形 (8.3) 中，我们有 $s_{j_\ell} w_{\lambda+\nu} = s_{j_{\ell-1}} \cdots s_{j_1} \in W_\lambda$、$(\lambda+\nu)_+ = \lambda$ 和 $t_{j_\ell} = t_0$。更进一步，我们有 $s'_{j_\ell} w'_{\lambda+\nu} \nu = \nu_{\ell-1} = -\alpha_{j_\ell}$，这意味着 $-\nu = (s'_{j_\ell} w'_{\lambda+\nu})^{-1} \alpha_{j_\ell} = (s'_{j_1} \cdots s'_{j_{\ell-1}} \alpha_{j_\ell}) = \beta_{\ell-1}$，因此

$$\begin{aligned} -\langle \lambda, \nu^\vee \rangle + r_{\ell-1} m_\nu c = b_{\ell-1}(\lambda) &= ((s_{j_\ell} w_{\lambda+\nu})^{-1} a_{j_\ell})(\lambda) \\ &= a_{j_\ell}(s_{j_{\ell-1}} \cdots s_{j_1} \lambda) = a_{j_\ell}(\lambda) = 1, \end{aligned}$$

因此

$$-\nu^\vee + (1 + \langle \lambda, \nu^\vee \rangle) = b_{\ell-1} \in R[\lambda+\nu]. \tag{8.5}$$

另一方面，在情形（8.4）中，我们有 $w_{\lambda+\nu} \in W_\lambda$ and $(\lambda+\nu)_+ \neq \lambda$。为了计算 $\theta(\lambda+\nu)$，注意到它必定等于上述步骤中情形 (B) 出现的次数，因为 $\theta((\lambda+\nu)+) = 0$。换言之，就是 $\langle \nu_k, \alpha^\vee_{j_{k+1}} \rangle = -2$ for $k = 0, \ldots, \ell' - 1$ 出现的次数，其中 $\ell' = \ell - 1$ 处于情形（8.3），而 $\ell' = \ell$ 处于情形（8.4）。由于对于 $k = 0, \ldots, \ell' - 1$:

$$\langle \nu_k, \alpha^\vee_{j_{k+1}} \rangle = -2 \Leftrightarrow \langle \nu, \beta_k^\vee \rangle = -2 \Leftrightarrow \nu = -\beta_k,$$

and

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \beta_k^\vee \rangle + m_{\beta_k} r_k c = b_k(\lambda) &= (s_{j_1} \cdots s_{j_k} a_{j_{k+1}})(\lambda) \\ &= a_{j_{k+1}}(s_{j_k} \cdots s_{j_1} \lambda) = a_{j_{k+1}}(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

then

$$\beta_k^\vee - \langle \lambda, \beta_k^\vee \rangle = b_k \in R[\lambda+\nu].$$

因此，当 $-\nu^\vee + \langle \lambda, \nu^\vee \rangle \in R[\lambda+\nu]$ 时，$\theta(\lambda+\nu)$ 等于 1；而当 $-\nu^\vee + \langle \lambda, \nu^\vee \rangle \notin R[\lambda+\nu]$ 时，则等于 0。在情形（8.3）中，我们有 $\theta(\lambda+\nu) = 0$，因为根据方程（8.5），我们有 $\langle \lambda, \nu^\vee \rangle + 1 \in m_\nu c\mathbb{Z}$；并且如果 $-\nu^\vee + \langle \lambda, \nu^\vee \rangle \in R[\lambda+\nu] \subset R$，那么 $\langle \lambda, \nu^\vee \rangle \in m_\nu c\mathbb{Z}$，这将与 $c > 1$ 矛盾。

对于 $\theta(\lambda+\nu) = 1$，我们有 $-\nu^\vee + \langle \lambda、\ \nu^\vee \rangle \in R^+$，因此 $\nu \in R_0 \cap P^\star_\vartheta = W_0 \vartheta$ 和 $\langle \lambda、\ \nu^\vee \rangle \in m_\vartheta c\mathbb{Z}$。另一方面，对于所有 $\lambda \in P_c$，我们有 $|\langle \lambda、\ \nu^\vee \rangle| = |\langle \lambda、\ m_\nu \hat{\nu} \rangle| \leq m_\vartheta c$，这证明了当 $\theta(\lambda+\nu) > 0$时的 $m_\vartheta \langle \lambda、\hat{\nu} \rangle = \langle \lambda、\ \nu^\vee \rangle \in \{m_\vartheta c, 0\}$，引理得证。

8.2. 引理 8.1 的证明。使用下面的改写形式将更加方便:

$$(T_{w_{\lambda+\nu}} f)((\lambda+\nu)_+) = f(\lambda+\nu) - d_{\lambda,\nu}(1 - t_\vartheta^{-1}) f(\lambda).$$

对于带有 $0 \leq a_j(\mu) \leq 2$ 的 $f \in C(P)$、$\mu \in P$、$j = 0$、.....、n，T_j 的作用明确表示为

$$(T_j f)(\mu) = \begin{cases} t_j f(\mu) & \text{if } a_j(\mu) = 0 \\ f(s_j \mu) = f(\mu - \alpha_j) & \text{if } a_j(\mu) = 1 \\ f(\mu - 2\alpha_j) - (t_j - 1) f(\mu - \alpha_j) & \text{if } a_j(\mu) = 2 \end{cases}. \tag{8.6}$$

现在我们对 $\ell(w_{\lambda+\nu})$ 使用归纳法。对于 $\lambda + \nu \in P_c$，结论显然成立。设 $\ell(w_{\lambda+\nu}) > 1$ 且 $s_j\ (0 \leq j \leq n)$ 满足 $a_j \in R[\lambda+\nu]$，则 $\ell(w_{\lambda+\nu} s_j) = \ell(w_{\lambda+\nu}) - 1$。根据第 8.1 节开头的观察，我们有 $w_{\lambda+\nu} s_j = w_{s_j(\lambda+\nu)}$，其中要么是 $s_j(\lambda+\nu) = \lambda + s'_j \nu$（情形 (A) 和 (B)），要么是 $s_j(\lambda+\nu) = \lambda (\in P_c)$（情形 (C)）。在情形 (C) 中，我们有 $w_{\lambda+\nu} = s_j$，而

要证明的结论正是式 (8.6) 中 $a_j(\mu) = 1$ 在 $\mu = \lambda$ 时的情形。此外，对于情形 (A) 和 (B)，我们有

$$\begin{aligned}(T_{w_{\lambda+\nu}} f)((\lambda+\nu)_+) &= (T_{w_{\lambda+s'_j\nu}} T_j f)((\lambda+s'_j\nu)_+)\\ &= (T_j f)(\lambda+s'_j\nu) - d_{\lambda,s'_j\nu}(1-t_\vartheta^{-1})(T_j f)(\lambda)\end{aligned}$$

由归纳假设以及事实 $(\lambda+s'_j\nu)_+ = (\lambda+\nu)_+$。

若处于情形 (A)，则由式 (8.6) 的情形 $a_j(\mu) = 1$ 和 $a_j(\mu) = 0$，分别有 $(T_j f)(\lambda+s'_j\nu) = f(\lambda+\nu)$ 以及 $(T_j f)(\lambda) = t_j f(\lambda)$。由于 $d_{\lambda,s'_j\nu} = d_{\lambda,\nu} t_j^{-1}$，归纳步骤至此完成。对于 $\nu \in P^\star_\vartheta \backslash W_0\vartheta$，这由 $d_{\lambda,s'_j\nu} = d_{\lambda,\nu} = 0$ 得出；而对于 $\nu \in W_0\vartheta$，则由 $\theta(\lambda+s'_j\nu) = \theta(\lambda+\nu)$ 得出，并且对于 $j>0$，我们有 $e_t(s_j\nu) = e_t(\nu)t_j$ 以及 $\langle \lambda, s_j\hat{}\,\nu\rangle = \langle s_j\lambda, \hat{}\,\nu\rangle = \langle \lambda, \hat{}\,\nu\rangle$；另一方面，对于 $j=0$，我们有 $e_t(s'_0\nu) = e_t(\nu+\alpha_0) = e_t(\nu)h_t^{-1}t_\vartheta$，并且（若 $\theta(\lambda+\nu)>0$）还可得 $\langle \lambda, s'_0\hat{}\,\nu\rangle = \langle s'_0\lambda, \hat{}\,\nu\rangle = \langle \lambda+c\alpha_0, \hat{}\,\nu\rangle = \langle \lambda, \hat{}\,\nu\rangle + c\langle \alpha_0, \hat{\nu}\rangle = \langle \lambda, \hat{}\,\nu\rangle - c$，因此 $\mathrm{sign}(\langle \lambda, s'_0\hat{}\,\nu\rangle) = \mathrm{sign}(\langle \lambda, \hat{}\,\nu\rangle) - 1$（参见引理 8.2）。

若属于情形（B），则由于方程（8.6）中针对$\mu = \lambda + s'_j\nu$的情形 $a_j(\mu) = 2$，有 $\nu \in W_0\vartheta$, $t_j = t_\vartheta$ 和 $(T_j f)(\lambda+s'_j\nu) = f(\lambda+\nu) - t_\vartheta(1-t_\vartheta^{-1})f(\lambda)$。我们还有 $d_{\lambda,s'_j\nu} = 0$，因为 $0 \le \theta(\lambda+s'_j\nu) < \theta(\lambda+\nu) \le 1$。为完成归纳法，尚需证明 $d_{\lambda,\nu} = t_\vartheta$。为此，注意到 $\theta(\lambda+\nu) = 1$；当 $j>0$ 时，有 $e_t(-\nu) = e_t(\alpha_j) = t_j = t_\vartheta$（因为 $e_t(\alpha_j) = e_t(s_j\alpha_j)t^{\langle \alpha_j,\ \alpha_j^\vee\rangle} = e_t(-\alpha_j)t_j^2 = t_j^2/e_t(\alpha_j)$），并且 $\langle \lambda, \hat{}\,\nu\rangle = -\langle \lambda, \hat{}\,\alpha_j\rangle = 0$；而对于 $j=0$，有 $e_t(\nu) = e_t(-\alpha_0) = e_t(\vartheta) = h_t/t_\vartheta$（因为在此情形下$\alpha_0 = -\vartheta$，参见引理 8.2），并且 $\langle \lambda, \hat{}\,\nu\rangle = -\langle \lambda, \hat{}\,\alpha_0\rangle = -\langle \lambda, \alpha_0^\vee\rangle = -a_0(\lambda) + c = c > 0$。

9. The structure constants revisited

上一节中的计算利用 L_ω (7.2) 在 $\mathcal{C}(P_c)$ 中的作用，得到了 Pieri 规则的系数。原则上，可以沿用相同的策略，更一般地计算结构常数 $c^{\nu,\lambda}_{(c),\mu}(t)$ $(\lambda,\mu,\nu \in P_c)$。为此，首先写出麦克唐纳球函数 $M_\lambda(\xi)$，$\lambda \in P^+$ 的单项式展开：

$$M_\lambda(\xi) = \sum_{\mu\in P^+,\,\mu\le\lambda} n_{\lambda,\mu}(t) m_\mu(e^{i\xi}), \tag{9.1}$$

其中我们在 P^+ 上采用了支配偏序：$\mu \le \lambda$ 当且仅当 $\lambda-\mu \in Q^+$。借助展开系数 $n_{\lambda,\mu}(t)$，可通过下式定义如下算子值麦克唐纳球函数 $M_\lambda(L)$：$\mathcal{C}(P) \to \mathcal{C}(P)$：

$$M_\lambda(L) = \sum_{\mu\in P^+,\,\mu\le\lambda} n_{\lambda,\mu}(t) L_\mu \tag{9.2}$$

（参见公式 (7.1)、(7.2)）。对于 $\lambda \in P_c$，算子值麦克唐纳球函数 $M_\lambda(L)$ (9.2) 在不变子空间$\mathcal{C}(P)^W \cong \mathcal{C}(P_c)$ 上作用为线性差分算子，其系数由结构常数 $\mathsf{c}_\lambda^{\nu\ (c)}{}_{,,\mu}(t)$ $(\mu,\nu \in P_c)$ 给出。

定理 9.1（结构常数）。对于任意 $\lambda \in P_c$，$M_\lambda(L)$ 对 $f \in \mathcal{C}(P_c)$ 的作用由下式给出

$$(M_\lambda(L)f)(\mu) = \sum_{\nu\in P_c} c^{\nu,(c)}_{\lambda,\mu}(t) f(\nu), \tag{9.3}$$

其中 $\mathsf{c}_{\lambda}^{\nu\,(c)}{}_{,,\mu}\,(t)$ 的定义见式（2.7）。

证明。由线性性，只需在麦克唐纳球函数的基 Φ_ξ、 $\xi \in \mathcal{P}_c$ 上验证公式 (9.3)。为此，我们计算 $\xi \in \mathcal{P}_c$:

$$M_\lambda(L)\Phi_\xi \overset{\text{Eq.}(9.2)}{=} \sum_{\mu\in P^+,\,\mu\le\lambda} n_{\lambda,\mu}(t) L_\mu \Phi_\xi \overset{\text{Prop.}7.1}{=} \sum_{\mu\in P^+,\,\mu\le\lambda} n_{\lambda,\mu}(t) m_\mu(e^{i\xi})\Phi_\xi$$
$$\overset{\text{Eq.}(9.1)}{=} M_\lambda(\xi)\Phi_\xi = M_\lambda^{(c)}(\xi)\Phi_\xi.$$

借助公式 (7.4) 在 $\mu \in P_c$ 处对该恒等式求值，即可得到所需的 $f = \Phi_\xi$ 公式:

$$(M_\lambda(L)\Phi_\xi)(\mu) = M_\lambda^{(c)}(\xi)\Phi_\xi(\mu) = M_\lambda^{(c)}(\xi) M_\mu^{(c)}(\xi) = \sum_{\nu\in P_c} \mathsf{c}_{\lambda,\mu}^{\nu,(c)} M_\nu^{(c)}(\xi)$$
$$= \sum_{\nu\in P_c} \mathsf{c}_{\lambda,\mu}^{\nu,(c)} \Phi_\xi(\nu).$$

□

致谢。感谢审稿人提出有益且建设性的意见，并建议对表述作出一些改进。

References

AGP16. J.E. Andersen、S. Gukov 和 D. Pei, 《希格斯丛的 Verlinde公式》, arXiv:1608.01761。AS14. H.H. Andersen 和 C. Stroppel, 《量子群的融合环》, 《代数表示论》17 (2014), 1869–1888。A95. S. Agnihotri, *Quantum cohomology and the Verlinde algebra*, 博士论文, 牛津大学, 1995。BS15. N. Bartlett 和 S.O. Warnaar, 《Hall-Littlewood 多项式与仿射李代数的特征》, 《数学进展》285 (2015), 1066–1105。B97. A. Bertram, 《量子舒伯特演算》, 《数学进展》128 (1997), 289–305。BCF99. A. Bertram、I. Ciocan-Fontanine 和 W. Fulton, 《舒尔多项式的量子乘法》, 《代数杂志》219 (1999), 728–746。B68. N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 4–6*, Hermann, 巴黎, 1968。BR06. P. Bouwknegt 和 D. Ridout, 《Wess-Zumino-Witten 融合环的表示》, 《数学物理评论》18 (2006), 201–232。D06. J.F. van Diejen, 《圆周上排斥性δ玻色气体可积离散化的对角化》, 《数学物理通讯》267 (2006), 451–476。D20. J.F. van Diejen, 《具有对角边界条件的开放 q玻色子模型中 Wess-Zumino-Witten 融合规则的变形》, 《物理学杂志 A》53 (2020), 274002。DE12. J.F. van Diejen 和 E. Emsiz, 《与麦克唐纳球函数相关的仿射 Hecke 代数的酉表示》, 《代数杂志》354 (2012), 180–210。DE13. J.F. van Diejen 和 E. Emsiz, 《Weyl alcove 上的离散调和分析》, 《泛函分析杂志》265 (2013), 1981–2038。DE17. J.F. van Diejen 和 E. Emsiz, 《超八面体Weyl alcove 上拉普拉斯算子的 Bethe Ansatz特征函数的正交性》, 《数学物理通讯》350 (2017), 1017–1067。DMS97. P. Di Francesco、P. Mathieu 和 D. S´en´echal, *Conformal Field Theory*, 《当代物理学研究生教材》, Springer-Verlag, 1997。EOS06. E. Emsiz、E.M. Opdam 和 J.V. Stokman, 《具有δ势的周期性可积系统》, 《数学物理通讯》264 (2006), 191–225。FLOT96. O. Foda、B. Leclerc、M. Okado 和 Y. Thibon, 《WZW共形场论中的带状场表与融合规则的q类比》, 载于: *Symmetry and Structural Properties of Condensed Matter*, T. Lulek、B. Lulek 和 A. Wal（编）, World Scientific, 新加坡, 1999, 188–201。

F97. F. Fulton, 《 *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*》, 伦敦数学学会学生文本丛书第 35 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1997。G91. D. Gepner, 融合环与几何, 《Commun. Math. Phys.》141（1991）, 381–411。G18. A. Ginory, 扭曲仿射李代数、融合代数与同余子群, arXiv:1811.04263 GW90. F.M. Goodman 和 H. Wenzl, 单位根处 Hecke 代数的 Littlewood-Richardson 系数, 《 Adv. Math. 》 82 （ 1990 ）, 244–265。GP17. S. Gukov 和 D. Pei, 来自五膜与涡旋的等变 Verlinde 公式, 《Comm. Math. Phys.》355（2017）, 1–50。GS79. E. Gutkin 和 B. Sutherland, 完全可积系统与反射生成群, 《Proc. Natl. Acad. Sci. USA》76（1979）, 6057–6059。H18. J. Hong, 重新审视融合环, 载于: *Representations of Lie algebras Quantum Groups*, N. *and Related Topics* **713**, Jing 和 K. Misra（编）, 《Contemp. Math.》, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2018, 135–147。H90. J.E. Humphreys, 《 *Reflection Groups and Coxeter Groups*》, 剑桥高等数学研究丛书第 29 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990。I91. K. Intriligator, 融合留数, 《Modern Phys. Lett. A》6（1991）, 3543–3556。K90. V.G. Kac, 《 *Infinite-dimensional Lie Algebras*》, 第三版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1990。K96. A.A. Kirillov Jr., 模张量范畴中的一个内积, 《J. Amer. Math. Soc.》9（1996）, 1135–1169。K13. C. Korff, 特化 Macdonald 函数的柱状版本与变形 Verlinde 代数, 《Comm. Math. Phys.》318（2013）, 173–246。KS10. C. Korff 和 C. Stroppel, $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)_k$-WZNW 融合环：一种组合构造及其作为量子上同调商的实现, 《Adv. Math.》225（2010）, 200–268。L-S10. T. Lam、L. Lapointe、J. Morse 和 M. Shimozono, 《 *Affine Insertion and Pieri Rules for the Affine Grassmannian* **208**, 》, 《 Mem. Amer. Math. Soc.》, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2010。L-Z14. T. Lam、L. Lapointe、J. Morse、A. Schilling、M. Shimozono 和 M. Zabrocki, 《 *k-Schur Functions and Affine Schubert Calculus*》, 菲尔兹研究所专著第 33 卷, Springer, 纽约, 2014。LM08. L. Lapointe 和 J. Morse, 量子上同调与 k-Schur 基, 《Trans. Amer. Math. Soc.》360（2008）, 2021–2040。M68. I. G. Macdonald, 𝔭-进 Chevalley 群上的球函数, 《Bull. Amer. Math. Soc.》74（1968）, 520–525。M71. I.G. Macdonald, 《 *Spherical Functions of p-adic Type*》, 拉马努金研究所出版物第 2 卷, 拉马努金研究所, 马德拉斯, 1971。M72. I.G. Macdonald, Coxeter 群的 Poincar´e 级数, 《Math. Ann.》199（1972）, 161–174。M95. I.G. Macdonald, 《 *Symmetric Functions and Hall Polynomials*》, 第二版, Clarendon 出版社, 牛津, 1995。M01. I.G. Macdonald, 与根系相关的正交多项式, 《S´em. Lothar. Combin.》45（2000/01）, 文章 B45a, 40 页。M03. I.G. Macdonald, 《 *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2003。M06. P. McNamara, 柱状斜 Schur 函数, 《Adv. Math.》205（2006）, 275–312。MS12. J. Morse 和 A. Schilling, 融合系数的组合公式, 第 24 届形式幂级数与代数组合学国际会议（FPSAC 2012）, 2012, 日本名古屋, 第 735–744 页。⟨hal-01283115⟩ NT92. T. Nakanishi 和 A. Tsuchiya, 共形场论中 WZW 模型的层级-秩对偶, 《Comm. Math. Phys.》144（1992）, 351–372。NR03. K. Nelsen 和 A. Ram, Kostka-Foulkes 多项式与 Macdonald 球函数。载于: *Surveys in Combinatorics*, C. D. Wensley（编）, 《伦敦数学学会讲义丛书》第 307 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2003, 325–370。OY14. S. Okuda 和 Y. Yoshida, G/G 规范化 WZW 物质模型、q-玻色子模型的 Bethe Ansatz 与交换 Frobenius 代数, 《J. High Energ. Phys.》2014:3（2014）, https://doi.org/10.1007/JHEP03(2014)003 P06. J. Parkinson, 建筑与赫克代数, 《J. Algebra》297（2006）, 1–49。

P05. A. Postnikov，量子舒伯特演算的仿射方法，《杜克数学杂志》128，473–509（2005）。R01. K. Rietsch，格拉斯曼流形的量子上同调环与全正性，《杜克数学杂志》110（2001），523–553。S07. O. Saldarriaga，融合代数、对称多项式与 S_k 的 $\mathbb{Z}_N^k$-轨道，《代数杂志》312（2007），257–293。S12. O. Schiffmann，《Hall 代数讲义》。载于：*Geometric Methods in Representation Theory. II* ´ **24** 2012, 1 141 ，M. Brion（编），《研讨会论文集》-II，法国数学学会，巴黎，–。S06. C. Schwer，球面赫克代数的丛、Hall–Littlewood多项式与结构常数，《国际数学研究通知》2006，文章编号75395，共31页。ST97. B. Siebert 和 G. Tian，关于Fano流形的量子上同调环及Vafa–Intriligator公式，《亚洲数学杂志》1（1997），679–695。T05. H. Tamvakis，格拉斯曼流形的Gromov–Witten不变量与量子上同调。载于：*Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties*，P. Pragacz（编），《数学趋势》，Birkh¨auser，巴塞尔，2005，271–297。T04. C. Teleman，K理论、曲面上的丛模空间以及Verlinde代数的变形。载于：*Topology*，*Geometry and Quantum Field Theory*，《伦敦数学学会讲义丛书》308，剑桥大学出版社，剑桥，2004，358–378。TW09. C. Teleman 和 C.T. Woodward，曲线上 G丛模空间的指标公式，《数学年刊》（第二辑）170（2009），495–527。V92. C. Vafa，拓扑镜像与量子环。载于：*Essays on Mirror Manifolds*，S.-T. Yau（编），国际出版社，香港，1992，96–119。WZ18. M. Wheeler 和 P. Zinn-Justin，Hall 多项式、逆Kostka多项式与谜题，《组合理论杂志》A辑159（2018），107–163。W95. E. Witten，Verlinde代数与格拉斯曼流形的上同调。载于：*Geometry*，*Topology & Physics* ，S.-T. Yau（编），《几何与拓扑会议论文集及讲义》IV，国际出版社，剑桥（马萨诸塞州），1995，357–422。

Instituto de Matemáticas, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile
Email address: diejen@inst-mat.utalca.cl

Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, P.O. Box5031, 2600 GA Delft, the Netherlands*Email address*: e.emsiz@tudelft.nl

FAMAF-CIEM, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba 5000, Argentina
Email address: zurrian@famaf.unc.edu.ar