arXiv:2305.01940v1 [math.AC] 3 May 2023

# 更正：《顶点覆盖理想的幂》（《Collectanea Mathematica》65（2014）169–181）。

Danchneg Lu[1*]和 Zexin Wang[1†]

[1]江苏苏州大学数学科学学院，苏州十梓街1号，邮编215021，中国江苏省。

*通讯作者。电子邮箱：ludancheng@suda.edu.cn；贡献作者：zexinwang6@outlook.com；

†这些作者对本研究的贡献相同。

摘要

我们指出了 [3] 中一项主要结果证明里的一个关键漏洞，并给出了修正后的证明。

关键词：Cohen–Macaulay、仙人掌图、弱多拟阵、顶点覆盖理想、幂

在 [3] 中，F. Mohammadi 成功地对所有 Cohen–Macaulay 仙人掌图进行了分类。基于这一结果，他在 [3, 定理 4.3] 中证明，若 $G$ 是 Cohen–Macaulay 仙人掌图，则其顶点覆盖理想 $J(G)$ 的所有幂都是弱多拟阵的。在本文中，我们通过一个例子说明 [3, 定理 4.3] 的证明存在一个关键漏洞，并给出这一结果的修正证明。

我们沿用原文 [3], 中的记号，读者阅读本文时应备有该文。首先，我们解释原证明中 [3, 定理 4.3] 的某些部分为何不正确。

证明中需要考虑几种情形。在情形 4 中，假设$z = y_{i3}$，于是可以推出对于某个 $1 \leq j \leq k$，$\{y_{i1}, y_{i2}, y_{i5}\} \subseteq \operatorname{supp}(g_j)$。来看下面的例子。

例 1. 设 $G$ 是一个 5-圈，其顶点依次标记为 $y_1$、$y_4$、$y_2$、$y_3$、$y_5$。那么 $f = y_1y_2y_3^2y_4y_5 = (y_1y_2y_3)(y_3y_4y_5)$ 和 $g = y_1y_2y_3y_4^2y_5 = (y_2y_4y_5)(y_1y_3y_4)$ 是 $J(G)^2$ 的极小单项式生成元。我们可以写作 $g_1 = y_2y_4y_5$ 和 $g_2 = y_1y_3y_4$。注意，对于 $i = 1, 2$，有 $\deg_{y_i} f = \deg_{y_i} g$，并且 $\deg_{y_3} f > \deg_{y_3} g$。根据

情形 4 的证明，在 [3]，中存在某个 $g_j$，使得 $\{y_1, y_2, y_5\} \subseteq \mathrm{supp}(g_j)$，因此 $y_3 g/y_5 \in J(G)^2$。然而，显然对于 $j = 1$，2，有 $\{y_1, y_2, y_5\} \nsubseteq \mathrm{supp}(g_j)$，并且 $y_3 g/y_5 \notin J(G)^2$。此外，由于 $\frac{g}{y_1 y_2 y_5}$ 不属于 $J(G)$，可知 $g$ 不能写成 $g = g_1' g_2'$，使得对于 $i = 1$，2，有 $g_i' \in J(G)$，且对于某个 $i$，有 $\{y_1, y_2, y_5\} \subseteq \mathrm{supp}(g_i')$。

这个例子表明，情形 4 的证明不正确。情形 5 的证明也存在类似的问题。下文将给出情形 4 和情形 5 的修正证明。

定理 1. ([3, 定理 4.3]) 设 $G$ 是一个 Cohen–Macaulay仙人掌图。则对于所有 $k \geq 1$，$J(G)^k$ 都是弱多拟阵的。

证明。回忆一下，仙人掌图是指每条边至多属于一个圈的连通图。与原定理 [3, 定理 4.3]，的证明相同，我们可以假设 $V(G)$ 是以下图的不交并：

$$F_1, \ldots, F_m, G_1, \ldots, G_n, L_1, \ldots, L_t$$

使得 $G$ 在 $F_i$ 上的导出子图是一个大小为 3 或 2 的团，$G$ 在 $G_j$ 上的导出子图是一个基本5-圈，并且对于每个 $i$、$j$、$l$，$L_l$ 是一条属于 $G$ 的一个 4-圈的边。这里，如果图 $G$ 的一个 5-圈不包含 $G$ 中两个相邻且度至少为 3 的顶点，则称其为基本5-圈，参见 [1]。

考虑以下变量的排序（对应于$G$的顶点）：

$$x_{11} > \cdots > x_{1k_1} > \cdots > x_{m1} > \cdots > x_{mk_m} > y_{11} > \cdots > y_{15} > \cdots > y_{n1} > \cdots > y_{n5} > z_{11} > z_{12} > \cdots > z_{t1} > z_{t2},$$

其中，对所有 $i$，$F_i = \{x_{i1}, \ldots, x_{ik_i}\}$、$2 \leq k_i \leq 3$和 $x_{ib_i}$，……，$x_{ik_i}$是 $F_i$的自由顶点；$y_{j1}$、$y_{j4}$、$y_{j2}$、$y_{j3}$、$y_{j5}$依次是 $G_j$的顶点，且对所有 $j$，顶点$y_{j3}$、$y_{j4}$、$y_{j5}$的度为二；对所有 $i$，$z_{i1}$、$z_{i2}$是 $L_i$中度为二的顶点。注意，对每个 $i \in [n]$，$G$ 的每个极小顶点覆盖 $C$ 恰好包含以下子集中的一个：

$$\{y_{i1}, y_{i2}, y_{i5}\}, \{y_{i2}, y_{i4}, y_{i5}\}, \{y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}\}, \{y_{i1}, y_{i3}, y_{i4}\}, \{y_{i2}, y_{i4}, y_{i5}\}$$

现在，设 $f = f_1 \cdots f_k$和 $g = g_1 \cdots g_k$是 $J(G)^k$的极小生成集中的单项式，其中对 $1 \leq s \leq k$有 $f_s$、$g_s \in J(G)$。假设存在一个变量$z$，使得对于每个变量 $z' > z$，$\deg_{z'} f = \deg_{z'} g$，并且$\deg_z f > \deg_z g$。我们只需在以下情形中找出一个变量 $w < z$，使得 $zg/w \in J(G)^k$： $z = y_{i3}$ 成立时，以及对某个 $i$有 $z = y_{i4}$ 或 $y_{i5}$ 成立时；这分别对应原证明中的情形 4 和情形 5。为此，我们引入一些附加记号。

令 $i$为上述提到的数。首先，对于每个三元组 $\{a, b, c\}$，使得$\{y_{ia}, y_{ib}, y_{ic}\}$ 是 $G_i$的极小顶点覆盖，我们定义

$$f_{abc} = |\{1 \leq s \leq k : \{y_{ia}, y_{ib}, y_{ic}\} \subseteq \mathrm{supp}(f_s)\}|$$

and

$$g_{abc} = |\{1 \leq s \leq k : \{y_{ia}, y_{ib}, y_{ic}\} \subseteq \mathrm{supp}(g_s)\}|.$$

接下来，我们用 $T$ 表示 $G$ 在子集 $V(G)\setminus\{y_{i3},y_{i4},y_{i5}\}$ 上的诱导子图，并且对于 $a=1$、2，我们定义

$$T_a=\{z\in V(T)\setminus\{y_{i1},y_{i2}\}\quad \text{there exists a path in } T \text{ connecting } z \text{ with } y_{ia}\}.$$

由于 $G$ 是仙人掌图，我们有子集 $T_1$、$\{y_{i1},y_{i2}\}$ 和 $T_2$ 两两不相交，且 $V(T)=T_1\cup\{y_{i1},y_{i2}\}\cup T_2$。

情形 $z=y_{i3}$: 如果 $g_{125}\neq 0$，则存在 $s\in\{1,\cdots,k\}$ 使得 $\{y_{i1},y_{i2},y_{i5}\}\subseteq\mathrm{supp}(g_s)$。由于子集 $(\mathrm{supp}(g_s)\setminus\{y_{i5}\})\cup\{y_{i3}\}$ 也是 $G$ 的一个极小顶点覆盖，我们有 $y_{i3}g/y_{i5}\in J(G)^k$，因此结论成立。注意，$g_{125}\neq 0$ 如果 $k=1$，我们现在假设 $g_{125}=0$ 和 $k\geq 2$。

由于对于 $a=1$，2，有 $\deg_{y_{ia}}f=\deg^{y_{ia}}g$，且 $\deg_{y_{i3}}f>\deg^{y_{i3}}g$，我们得到以下公式:

- $f_{134}+f_{123}+f_{125}=g_{134}+g_{123}+g_{125}$; ❶
- $f_{245}+f_{123}+f_{125}=g_{245}+g_{123}+g_{125}$; ❷
- $f_{134}+f_{123}+f_{345}>g_{134}+g_{123}+g_{345}$; ❸
- $f_{134}+f_{245}+f_{123}+f_{125}+f_{345}=g_{134}+g_{245}+g_{123}+g_{125}+g_{345}=k.$ ❹

将❹ 减去❶，并将❹减去❷，得到

- $f_{245}+f_{345}=g_{245}+g_{345}$; ❺
- $f_{134}+f_{345}=g_{134}+g_{345}$。 ❻

另一方面，结合❸ 和❶ 以及假设 $g_{125}=0$，我们有

$$f_{134}+f_{123}+f_{345}>g_{134}+g_{123}+g_{345}=f_{134}+f_{123}+f_{125}+g_{345},$$

因此 $f_{345}>f_{125}+g_{345}\geq g_{345}$。由此结合❺ 和❻，可得$f_{134}<g_{134}$ 以及 $f_{245}<g_{245}$。这特别意味着 $g_{134}>0$ 和 $g_{245}>0$，因此存在 $p$、$q\in\{1,\cdots,k\}$，使得 $p\neq q$，并且 $\{y_{i2},y_{i4},y_{i5}\}\subseteq g_p$和$\{y_{i1},y_{i3},y_{i4}\}\subseteq g_q$。令 $p=1$ 和 $q=2$。为了证明 $y_{i3}g/y_{i4}$ 属于 $J(G)^k$，我们只需证明 $y_{i3}g_1g_2/y_{i4}$ 属于 $J(G)^2$。

我们可以将 $g_1$、$g_2$ 写成如下形式:

$$g_1=y_{i2}y_{i4}y_{i5}u_1u_2\quad\text{and}\quad g_2=y_{i1}y_{i3}y_{i4}v_1v_2,$$

其中 $\mathrm{supp}(u_i)\cup\mathrm{supp}(v_i)\subseteq T_i$ 对于 $i=1$、2 成立。于是有如下分解:

$$y_{i3}g_1g_2/y_{i4}=(y_{i3}y_{i4}y_{i5}u_1u_2)(y_{i1}y_{i2}y_{i3}v_1v_2)=(y_{i3}y_{i4}y_{i5}u_1v_2)(y_{i1}y_{i2}y_{i3}v_1u_2).$$

接下来，我们验证 $\mathrm{supp}(y_{i3}y_{i4}y_{i5}u_1v_2)$ 和 $\mathrm{supp}(y_{i1}y_{i2}y_{i3}v_1u_2)$ 都是 $G$ 的顶点覆盖。为此，我们记 $V_1=\mathrm{supp}(y_{i3}y_{i4}y_{i5}u_1v_2)$ 和 $V_2=\mathrm{supp}(y_{i1}y_{i2}y_{i3}v_1u_2)$。设 $e=\{z_1,z_2\}$ 是 $G$ 的一条边。

如果 $e\subseteq V(G_i)$，那么显然 $V_1\cap e\neq\emptyset$ 和 $V_2\cap e\neq\emptyset$。

若 $z_1=y_{i1}$ 且 $z_2\in T_1$，则 $z_2\in\mathrm{supp}(u_1)\cap e$。这意味着 $V_1\cap e\neq\emptyset$ 且$V_2\cap e\neq\emptyset$; 类似地，若 $z_1=y_{i2}$ 且 $z_2\in T_2$，则 $V_1\cap e\neq\emptyset$ 且 $V_2\cap e\neq\emptyset$。

最后，假设 $e \cap V(G_i) = \emptyset$。那么，要么 $e \subseteq E(T_1)$，要么 $e \subseteq E(T_2)$。若 $e \subseteq E(T_1)$，则有 $\mathrm{supp}(u_1) \cap e \neq \emptyset$ 且 $\mathrm{supp}(v_1) \cap e \neq \emptyset$，因此 $V_1 \cap e \neq \emptyset$且 $V_2 \cap e \neq \emptyset$。若 $e \subseteq E(T_2)$，证明类似。

因此， $V_1$ 和 $V_2$ 确实都是 $G$ 的顶点覆盖，所以如所需， $y_{i3}g_1g_2/y_{i4}$ 属于$J(G)^2$, 。

情形 $z = y_{i4}$ 或 $y_{i5}$：由于 $z = y_{i5}$ 的情形实际上不可能，我们只需考虑 $z = y_{i4}$的情形。此外，我们可以假设 $k \geq 2$ ，如同情形$z = y_{i3}$。因为对于 $a = 1$、2、3，有 $\deg_{y_{ia}} f = \deg^{y_{ia}} g$，且$\deg_{y_{i4}} f > \deg^{y_{i4}} g$，所以我们有以下公式：

- $f_{134} + f_{123} + f_{125} = g_{134} + g_{123} + g_{125}$; ❶
- $f_{245} + f_{123} + f_{125} = g_{245} + g_{123} + g_{125}$; ❷
- $f_{134} + f_{123} + f_{345} = g_{134} + g_{123} + g_{345}$; ❸
- $f_{134} + f_{245} + f_{345} > g_{134} + g_{245} + g_{345}$; ❹
- $f_{134} + f_{245} + f_{123} + f_{125} + f_{345} = g_{134} + g_{245} + g_{123} + g_{125} + g_{345} = k.$ ❺

分别从❺ 中减去❶、❷ 和❸ ，得到

- $f_{245} + f_{345} = g_{245} + g_{345}$; ❻
- $f_{134} + f_{345} = g_{134} + g_{345}$; ❼
- $f_{245} + f_{125} = g_{245} + g_{125}$。 ❽

将❼ 代入❹，还可得到 $f_{245} > g_{245}$ 。由此结合❻ 和❽，可知 $f_{345} < g_{345}$ 和 $f_{125} < g_{125}$. 。特别地， $g_{345} > 0$ 和$g_{125} > 0$。因此，存在 $p$、 $q \in \{1, \cdots, k\}$，使得 $\{y_{i3}, y_{i4}, y_{i5}\} \subseteq g_p$和 $\{y_{i1}, y_{i2}, y_{i5}\} \subseteq g_q$。 设 $p = 1$ 和 $q = 2$。只需证明单项式 $y_{i4}g_1g_2/y_{i5}$ 属于 $J(G)^2$。

为此，我们将 $g_1$ 和 $g_2$ 分解如下：

$$g_1 = y_{i3}y_{i4}y_{i5}u_1u_2 \quad \text{and} \quad g_2 = y_{i1}y_{i2}y_{i5}v_1v_2,$$

其中，对于 $i = 1$，2，有 $\mathrm{supp}(u_i) \cup \mathrm{supp}(v_i) \subseteq T_i$。这意味着

$$y_{i4}g_1g_2/y_{i5} = (y_{i3}y_{i4}y_{i5}u_1u_2)(y_{i1}y_{i2}y_{i4}v_1v_2) = (y_{i2}y_{i4}y_{i5}u_1v_2)(y_{i1}y_{i3}y_{i4}v_1u_2).$$

我们可以验证，$\mathrm{supp}(y_{i2}y_{i4}y_{i5}u_1v_2)$ 和 $\mathrm{supp}(y_{i1}y_{i3}y_{i4}v_1u_2)$ 都是 $G$ 的顶点覆盖，这与 $z = y_{i3}$ 的情形相同。因此， $y_{i4}g_1g_2/y_{i5}$ 属于 $J(G)^2$。证明完毕。 □

注 1. 本注释证明中使用的方法高度依赖于以下条件： $G$ 的每条边至多属于 $G$个圈。我们在尝试运用原证明 [3] 中的思路证明以下结论时，发现了其中的漏洞： $J(G)^k$对于所有 $k \geq 1$ 均为弱多拟阵，条件是 $G$ 是一个大围长的 Cohen–Macaulay 图，其结构已在 [1]中明确描述。但我们在这方面未能成功，只能在[2, 命题 36] 中证明，对于这类图， $J(G)$ 是弱多拟阵。

## 声明


- 资助：本研究得到中国国家自然科学基金（项目编号：11971338）的资助。
- 作者声明，他们不存在与本文内容相关的利益冲突。
- 我们谨向审稿人致以诚挚谢意，审稿人的意见极大地改善了本文的呈现方式。


## 参考文献


[1] Hoang, D.T., Minh, N.C., Trung, T.N., 具有大围长的 Cohen–Macaulay 图。《J. Algebra Appl.》14 (2015), 1550112[2] Lu, D., Wang, Z., 关于图的覆盖理想的幂。即将在《Osaka Journal of Mathematics》发表[3] Mohammadi, F., 顶点覆盖理想的幂，《Collectanea Mathematica》65, 169–181 (2014)