arXiv:2305.01948v1 [math.CO] 3 May 2023

退化图的无圈色指数上界

Nevil Anto、Manu Basavaraju、Suresh Manjanath Hegde 和 Shashanka Kulamarva

卡纳塔克邦国家理工学院，苏拉特卡尔-575025，印度 电子邮件：
nevil.197cs005@nitk.edu.in, manub@nitk.edu.in,smhegde@nitk.edu.in,
skulamarva.187ma007@nitk.edu.in

摘要

图的无圈边染色是指一种正常边着色，其中不存在双色圈。图 G 的*acyclic chromatic index* 记为 $a'(G)$，是使得 G 存在一种使用 k 种颜色的无圈边染色的最小 k 。Fiam˘c´ık [10] 猜想，对于任意最大度为 Δ 的图G ，都有 $a'(G) \leq \Delta + 2$ 。如果图 G 的每个子图都有一个度至多为 k 的顶点，则称 G 为 k-*degenerate* 。Basavaraju 和 Chandran [4] 证明了该猜想对 2-退化图成立。我们证明，对于 3-退化图 G，有 $a'(G) \leq \Delta + 5$，从而使上界更接近猜想中的界限。我们还研究了具有$k \geq 4$ 的 k-退化图，并给出其无圈色指数的一个上界。

关键词： *Acyclic chromatic index; Acyclic edge coloring; 3-degenerate graphs; k-degenerate graphs*

数学主题分类：05C15

1 引言

本文中仅考虑有限简单图。设 $G = (V, E)$ 是一个图，其顶点集为 V，边集为 E。 G 中的路径是 V 中顶点的一个序列，序列中每一对相邻顶点之间都有一条边。若在 G 中一条路径的起始顶点和终止顶点之间添加一条边，则所得结构称为 G 中的圈。设 C 为给定的颜色集。 G 的正常边着色（使用 C）是一个函数 $f : E \to C$，满足当 e_1 和 e_2 彼此相邻时， $f(e_1) \neq f(e_2)$。给定图 G 的正常边着色所需的最少颜色数称为 G 的色指数，记为 $\chi'(G)$。如果 G 中不存在双色圈（恰使用2种颜色着色的圈），则称 G 的正常边着色为无圈边染色。图 G 的无圈色指数（也称无圈边色数）是 G 的无圈边染色所需的最少颜色数，记为 $a'(G)$。Gr¨unbaum [12] 引入了无圈着色的概念。无圈色指数的顶点对应概念可用于界定图的其他参数，例如定向色数 [15] 和星色数 [8] 。这两个参数都有许多实际应用，包括光网络中的波长路由 [2]。根据 Vizing定理 [7]，我们有 $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$，其中 $\Delta = \Delta(G)$ 是图 G 中一个顶点的最大度。由于根据定义无圈边染色也是一种正常边着色，因此我们有 $a'(G) \geq \chi'(G) \geq \Delta$。

Fiam˘c´ık [10] （Alon 等人 [1] 也独立提出了这一猜想）：对于任意图 G，$a'(G) \leq \Delta+2$。对于任意图 G，截至目前已知的 $a'(G)$ 的最佳上界为 3.569（$\Delta-1$）

由 Fialho 等人提出。 [9]他们利用概率技术得出了这一结果。这个上界与猜想中的上界相差甚远，反映了该问题的难度。

然而，这一猜想已对某些特殊图类得到证明。Alon 等人 [1] 证明，存在一个常数 k，使得对于任意围长至少为 $k\Delta\log\Delta$ 的图 G，都有 $a'(G) \leq \Delta + 2$。对于某些图类，无圈色指数已得到精确确定，例如当 $\Delta \neq 4$ 时的串并联图（Wang 和 Shu [16]）、当 $\Delta \neq 4$ 时的外平面图（Hou 和 Wu [13], ; Hou 等人[14]）、三次图（Andersen 等人 [3]）、满足 $\Delta \geq 4.2 \times 10^{14}$ 的平面图（Cranston [6]），以及围长至少为 5 且满足 $\Delta \geq 19$ 的平面图（Basavaraju 等人 [5]）。对于外平面图和串并联图，若 $\Delta \geq 5$，则 $a'(G) = \Delta$；而当 $\Delta = 3$ 时，他们刻画了无圈边染色需要 4 种颜色的图。

如果图 G 的每个子图 G 都有一个度至多为 k 的顶点，则称图 G 为 k-退化图。容易看出，无圈边染色猜想对于 1-退化图成立，因为 1-退化图可以恰好使用 Δ 种颜色进行边着色。Basavaraju 和 Chandran [4] 通过给出 $\Delta + 1$ 的强上界，证明了该猜想对于 2-退化图成立。特别地，他们证明，对于 2-退化图 G，有 $a'(G) \leq \Delta + 1$。

Fiedorowicz [11] 证明了，对于满足以下条件的每个图 G：对于每个子图 $H \subseteq G$，都有 $|E(H)| \leq t|V(H)| - 1$，其中 $t \geq 2$ 是给定的整数，且常数为 $p = 2t^3 - 3t + 2$，有 $a'(G) \leq (t-1)\Delta + p$。可以验证，$k$-退化图类是 Fiedorowicz [11] 所定义的图类的子类。因此，对于 k-退化图 G，我们可以按照 [11] 得到其无圈色指数的上界，即 $a'(G) \leq (k-1)\Delta + 2k^3 - 3k + 2$。在本文中，我们研究 k-退化图，并改进 k-退化图的无圈色指数上界。该上界以下述定理的形式给出：

定理 1. 设 G 是一个 k-退化图，其 $k \geq 4$ 和最大度为 Δ。则 $a'(G) \leq \lceil (\frac{k+1}{2})\Delta \rceil + 1$。

我们还得出了一个关于 3-退化图的无圈色指数的上界。尽管这并不能证明该猜想，但它使上界非常接近猜想所给出的值。具体而言，我们证明了以下定理：

Theo注 2. 设 G 是一个最大度为 Δ 的 3-退化图，则 $a'(G) \leq \Delta + 5$。

2 预备知识

设 $G = (V, E)$ 为一个具有 n 个顶点和 m 条边的图。在 G 中，顶点的度是指与该顶点在 G 中关联的边的数量。顶点 v 的度表示为 $deg_G(v)$。G 的最小度和最大度分别表示为 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$。对于任意顶点 $v \in V$，$N_G(v)$ 表示 V 中与 v 在 G 中相邻的所有顶点构成的集合。因此，$N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的所有邻点构成的集合。在本文中，只要根据上下文能够明确图 G 的含义，我们就省略上述符号中的 G。

设 $X \subseteq E$ 和 $Y \subseteq V$。由顶点集 V 和边集 $E \setminus X$ 从 G 中得到的子图记为 $G \setminus X$。类似地，$G \setminus Y$ 是由顶点集 $V \setminus Y$ 和边集 $E \setminus \{e \in E \mid \exists y \in Y$ 从 G 中得到的子图，其中 e 与 $y\}$关联。若 X 或 Y 是单元素集合 $\{u\}$，则我们直接用 $G \setminus u$ 代替 $G \setminus \{u\}$。由 X 中的边导出的 G 的子图记为 $G[X]$，即，$G[X] = (V_X, E_X)$ 是一个图，其中 $V_X = \{v \in V \mid \exists e \in X$ 与 e 关联于 $v\}$ 和 $E_X = X$。更多记号和定义见 [17]。在没有歧义的显然情形下，我们有时用“着色”一词代替“无圈边染色”。

此外，我们还将介绍一些对证明有帮助的定义和引理。这些内容由 Basavaraju 和 Chandran [4] 给出。

定义 1 ([4])。 设 H 是图 G的一个子图。边着色 f 若定义在 H 上，则称为 部分边着色。 G。

G 的边着色也是 G 的部分边着色，因为 G 也是自身的子图。对应于子图 H 的 G 的部分边着色 f 称为适当（且无环）的，当且仅当它在子图 H中是适当（且无环）的。注意，对于部分着色 f，对于边 e， f（e）可能有定义，也可能没有定义。因此，每当我们对某条边 e使用 f（e）时，我们都隐含地假设f（e）有定义。设 f是图 G的一个部分边着色。对于任意顶点 $x \in V$，我们定义F_x（f）$= \{f$（xy）$\mid y \in N_G$（x）$\}$。对于任意边 $uv \in E$，我们定义 F_{uv}（f）$= F_v$（f）$\setminus \{f$（uv）$\}$。当部分着色 f可由上下文确定时，我们用 F_x和 F_{uv}代替 F_x（f）和 F_{uv}（f）。可以看出， F_{uv} 与 F_{vu}不同。

定义2（[4]）。相对于图 G 的部分着色 f，(α, β)-极大双色路径是图 G 中由颜色 α 和 β 交替着色的边组成的极大路径。(α, β, u, v)-极大双色路径是指一条 (α, β)-极大双色路径，它从顶点 u 出发，第一条边着以 α，并终止于顶点 v。

现在，我们提及一个由无圈边染色的定义直接得到的引理。本文后文将默认使用此引理。该引理在 [4] 中作为一个事实被提及。

引理1（[4]）。给定图 G 的正常着色 f 中的一对颜色 α 和 β，相对于 f，图 G 中至多有一条包含特定顶点 v 的 (α, β)-极大双色路径。

定义3（[4]）。若顶点 u 和 v 在图 G 中相邻，则图 G 中一条以顶点 v 为终点且其末边着以 α 的 (α, β, u, v)- 极大双色路径，称为图 G 中的 (α, β, uv)- 临界路径。

定义 4 ([4]) 。设 f 是 G 的部分着色。设 u、a、$b \in V$ 和 ua、$ub \in E$。关于边 ua 和 ub 的颜色交换，定义为通过交换边 ua 和 ub 的颜色，从当前部分着色 f 得到新的部分着色 g 的过程。颜色交换按如下方式定义 g。 $g(ua) = f(ub)$， $g(ub) = f(ua)$，且对于 G 中所有其他边 e， $g(e) = f(e)$。若交换后得到的着色是合法的，则称关于边 ua 和 ub 的颜色交换是合法的。若交换后得到的着色是无环的，则称该颜色交换是有效的。

颜色 γ 被称为边 e 在 G 中关于部分着色 f 的候选颜色，如果与 e 关联的边中没有任何一条被着色为 γ。如果将颜色 γ 分配给 e 不会在 G中产生任何新的双色环，则称候选颜色 γ 对边 e 有效。Basavaraju 和 Chandran [4] 将以下引理作为一个事实提及，因为它显而易见。

引理 2 ([4]) 。设 f 是 G的一个部分着色。当且仅当存在一种颜色 $\eta \in F_{uv} \cap F_{vu}$，使得相对于着色 f， G 中存在一条（η， γ， uv）- 临界路径时，候选颜色 γ 对边 $e =$ （u， v）才无效。

现在，我们陈述并证明一个引理，说明在 k-退化图中存在一条特殊边。通过该引理得到的这条特殊边对我们的证明方法很有用。

引理 3。若 G 是一个 k-退化图，则 G 中存在一条边 xy，使得 deg（x）$\leq k$，并且 y 的邻点中，度严格大于 k的至多有 k 个。

证明。设 G 是给定的 k 退化图。根据 G 的定义，存在一条边 xy 属于 G，使得 $deg(x) \leq k$。反设，对于每一条边 xy 属于 G 且满足 $deg(x) \leq k$， y 至少有 $k+1$ 个邻点的度严格大于 k。现在，从 G 中删除所有度至多为 k 的顶点，得到图 G'。显然， G' 中含有一些边，因为顶点 y 与其任一度更高的邻点之间的边仍会保留在 G' 中。

由于 G' 是 G 的子图，我们知道 G' 也是一个 k 退化图。因此，存在一条边 uv 属于 G'，使得 $deg(u) \leq k$。如果在图 G 中， u 的度至多为 k，那么根据 G' 的选取，在从 G 得到 G' 时，顶点 u 本应被删除。由于 u 存在于 G' 中，我们可以确定 u 在 G 中的度至少为 $k+1$。因此，必定存在一个顶点 w，它是 u 在 G 中的邻点，但 $w \notin V(G')$。

由于 $w \notin V(G')$，在由 G 得到 G' 时删除了 w，这意味着 $deg_G(w) \leq k$。事实上，在 G 中但不在 G' 中的 u 的任一邻点，在 G 中的度至多为 k。因此，度至少为 $k+1$ 的 u 的邻点数至多为 $deg_{G'}(u)$。由于 $deg_{G'}(u) \leq k$，我们在 G 中有一条边 wu，满足 $deg_G(w) \leq k$，且 u 中度严格大于 k 的邻点至多有 k 个，这与我们的初始假设矛盾。因此，我们可以得出引理成立。■

3 定理1的证明1

证明。设 G 是定理1 关于边数的一个最小反例。设G 是一个 k-退化图，具有 n 个顶点、 m 条边，且最大度为 Δ。此外，我们有 $k \geq 4$。定义数 p 如下：

$$p = \lceil (\frac{k+1}{2})\Delta \rceil + 1$$

注意， p 恰好是我们要证明的定理 1 中的上界。令 xy 为 G 中的一条边，使得 $deg(x) \leq k$。这样的边 xy 存在，因为 G 是一个 k-退化图。令 $G' = G \setminus xy$，即从 G 中删除边 xy 后得到的图。注意，G' 也是一个 k-退化图，且其边数少于 m。由于从 G 得到 G' 时，我们没有添加任何边或顶点，因此有 $\Delta(G') \leq \Delta(G)$。因此，由于 G 是一个最小反例，我们有 G' 的一个无圈边染色 g，使用 p 种颜色。令 C 为着色 g 中使用的颜色集，即 $C = \{1, 2, \ldots, p\}$。

现在，我们尝试通过给来自 C 的边 xy 指定一种颜色，将 g 扩展为 G 的一个无圈边染色 f，从而与 G 是一个最小反例这一事实矛盾。现在，我们定义如下顶点集 S：

$$S = \{u \in N(x) \setminus y \mid \exists v \in N(y) \text{ such that } g(xu) = g(yv)\}$$

令 E^* 为 G 中所有与 $S \cup \{x, y\}$中至少一个顶点关联的边的集合。注意，除 xy 外， E^* 中的所有边均已使用 g着色。令 $g(E^*)$ 为着色 g中 E^* 内各边上出现的所有颜色组成的集合，并去除重复项。现在，我们对不属于 $g(E^*)$ 的颜色的有效性作如下断言。

断言1. 任何不属于 $g(E^*)$ 的颜色，都是 G中边 xy 的有效颜色。

证明。令 α 为一个不属于 $g(E^*)$ 的颜色。显然，根据 E^*和 α的选取， $\alpha \notin F_{xy}$ 和 $\alpha \notin F_{yx}$。因此，α 是 G中边 xy 的候选颜色。反设候选颜色 α 不是 G中边 xy 的有效颜色。这意味着存在一个颜色β，使得 G'中存在一条 (β, α, xy)-临界路径。由于该 (β, α, xy)-临界路径只能使用颜色 β 和 α 着色，因此应存在 G' 中的三个顶点 x'、 x'' 和 y'，它们分别不同于 x和 y，使得 $g(xx') = \beta$、 $g(x'x'') = \alpha$ 以及 $g(yy') = \beta$。注意， $x' \in N(x)$。但我们还有$g(xx') = g(yy') = \beta$，这意味着 $x' \in S$。

因此， $x'x'' \in E^*$。由于 $g(x'x'') = \alpha$，这与我们的初始假设相矛盾，即 α 是一个不在 $g(E^*)$ 中的颜色。因此，我们可以得出结论：我们的假设是错误的，该论断成立，正如所需。■

令 C' 为边 xy 的候选颜色集合，令 C'' 为 $F_{xy} \cup F_{yx}$ 中的颜色集合。注意， $C = C' \cup C''$。注意， C' 中的任何颜色都不适用于边 xy，因为 G 是一个最小的

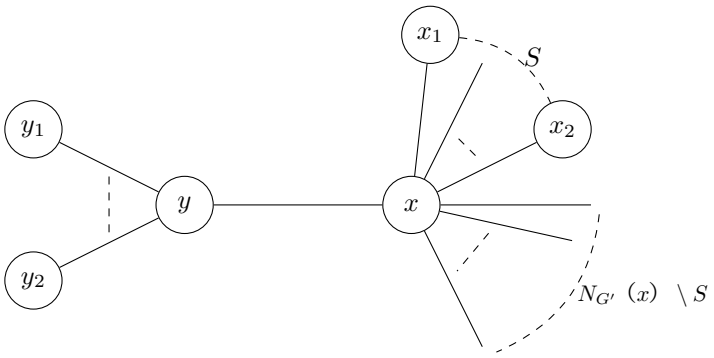

图1： G中的边 xy 的邻域

反例。因此，结合命题 1，可知 C 中的每种颜色都出现在 $g(E^*)$ 中，即 $|g(E^*)| = |C' \cup C''| = p$。这也意味着 C' 中的每种颜色都出现在 S的某个顶点上。将 C' 中仅在与某个 $N_{G'}(x)$ 顶点关联的边上出现一次的颜色集合记为 C^*。注意， $|S| = |F_{xy} \cap F_{yx}|$。现在，我们声称集合 S 的大小具有如下下界：

断言2. $|S| = |F_{xy} \cap F_{yx}| > \frac{k-3}{2}$.

证明。反设 $|S| = |F_{xy} \cap F_{yx}| = q \leq \frac{k-3}{2}$。由于 $deg(x) \leq k$，且 F_{xy} 和 F_{yx}中有 q 种共同的颜色，因此我们有：

$$|C''| = |F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta - 1 + k - q - 1 = \Delta + k - q - 2$$

$g(E^*)$ 中剩余的颜色出现在 S中的顶点上。由于 $|S| = q$，我们有 $|C'| \leq q(\Delta - 1)$。因此得到以下不等式：

$$\begin{aligned} |C' \cup C''| &\leq (q(\Delta - 1)) + (\Delta + k - q - 2) \\ &\leq (q+1)\Delta + k - 2q - 2 \end{aligned}$$

由于 $k \leq \Delta$，我们有 $k - 2q - 2 \leq \Delta - 2$。此外，由于$q \leq \frac{k-3}{2}$，我们有 $q + 1 \leq \frac{k-1}{2}$。因此，不等式变为：

$$\begin{aligned} |C' \cup C''| &\leq (q+1)\Delta + k - 2q - 2 \\ &\leq (\frac{k-1}{2})\Delta + \Delta - 2 \\ &\leq (\frac{k+1}{2})\Delta - 2 \\ &< p \end{aligned}$$

注意，我们得到了一个不等式 $|g(E^*)| = |C' \cup C''| < p$，这与我们的假设 $|g(E^*)| = p$ 相矛盾。因此，该断言成立。■

现在，由于$|S| > \frac{k-3}{2}$根据断言2，我们有 $|N_{G'}(x) \setminus S| \leq k - 1 - (\frac{k-3}{2}) = \frac{k+1}{2}$。因此，我们有：

$$|C''| = |F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta - 1 + \frac{k+1}{2} = \Delta + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$$

此外，我们声称集合 C^* 的基数有如下下界：

断言 3. $|C^*| \geq 2$。

证明。反证，假设 $|C^*| = q \leq 1$。除 C^* 中的 q 种颜色外， C' 中其余任何一种颜色至少在与 $N_{G'}$ 中顶点关联的边上出现两次（x）。因此，对于边 xy 无效的候选颜色数量（恰好由 $|C'|$给出）至多为

$$\frac{(k-1)(\Delta-1)-q}{2}+q$$

因此我们得到以下不等式:

$$\begin{aligned}|C' \cup C''| &\leq (\frac{(k-1)(\Delta-1)-q}{2}+q)+(\Delta+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}) \\ &\leq (\frac{k+1}{2})\Delta+\frac{q}{2} \\ &\leq (\frac{k+1}{2})\Delta+\frac{1}{2} \\ &< p\end{aligned}$$

由于 $|g(E^*)| = |C' \cup C''|$，我们有 $|g(E^*)| < p$，这与我们的初始假设 $|g(E^*)| = p$ 矛盾。因此，我们关于 $|C^*| \leq 1$ 的假设不成立，结论成立。■

现在，我们提出以下关于 S 中其边能看到颜色 C^* 的顶点数量的断言。

断言 4。在 S 中，至少存在两个顶点，它们的边与 C^* 中的颜色相邻。

证明。 C^* 中的每种颜色都出现在与 S中的某个顶点关联的边上，因为 $C^* \subseteq C'$ ，并且 C' 中的每种颜色都出现在与 S中的某个顶点关联的边上。反设 C^* 中的每种颜色都出现在与 S中的同一个顶点关联的边上。设 x' 为 S 中的顶点，使得 C^* 中的每种颜色都属于 $F_{xx'}$ ，并令 $g(xx') = \zeta$。设 α 和 β 为 C^*中的两种颜色。根据断言 3， α和 β 存在。由于 C^* 中没有任何颜色对于 G中的边 xy 是有效的，因此对于每种颜色 $\gamma \in C^*$，在 G中都存在一条(ζ, γ, xy)-临界路径。

子断言 4.1. $C' \setminus F_{xx'} \neq \emptyset$。

证明。反设 $C' \setminus F_{xx'} = \emptyset$。这意味着边 xy 的每个候选颜色都属于 $F_{xx'}$，从而推出 $|C'| \leq |F_{xx'}| \leq \Delta - 1$。此外，我们还有$|C''| \leq \Delta + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$。因此，得到以下不等式:

$$\begin{aligned}|C' \cup C''| &\leq (\Delta-1)+(\Delta+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}) \\ &\leq 2\Delta+\frac{k}{2}-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

注意　由于 $4 \leq k \leq \Delta$，我们有 $p = \lceil(\frac{k+1}{2})\Delta\rceil + 1 \geq \lceil 2.5\Delta\rceil + 1$。如果 $k = 4$，那么我们有 ：

$$|C' \cup C''| \leq 2\Delta + \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = 2\Delta + 0.5 < p$$

否则, 如果 $k \geq 5$，那么我们有 $p = \lceil(\frac{k+1}{2})\Delta\rceil + 1 \geq \lceil 3\Delta\rceil + 1$，这进而意味着:

$$|C' \cup C''| \leq 2\Delta + \frac{k}{2} - \frac{3}{2} < p$$

因此，无论哪种情况，对于 $k \geq 4$，我们都有 $|C' \cup C''| < p$，这与 $|C| = |C' \cup C''| = p$ 的事实矛盾。因此，我们关于 $C' \setminus F_{xx'} = \emptyset$ 的假设是错误的，子断言成立。■

现在，假设 $C' \setminus F_{xx'}$ 中存在一种颜色 γ，它在与 $N_{G'}(x) \setminus x'$ 相 incident 的边上至多重复两次。由于 C^* 中的每种颜色都在 $F_{xx'}$ 中，我们有 $\gamma \notin C^*$，这意味着 γ 在与 $N_{G'}(x) \setminus x'$ 相 incident 的边上恰好重复两次。设 x_1 和 x_2 是 $N_{G'}(x) \setminus x'$ 中的顶点，使得 $\gamma \in F_{xx_1}$ 且 $\gamma \in F_{xx_2}$。现在，分别用 α 和 β 给边 xx_1 和 xx_2 重新着色。注意，对于 C^* 中的任意颜色 η，对每个 $v \in N_{G'}(x) \setminus x'$，都有 $\eta \notin F_{xv}$。因此，这对 C^* 中的颜色 α 和 β 尤其成立。所以，重新着色是适当的。对于每种颜色 $\eta \in C^*$，从 x 出发的 G 中的 (ζ, η)-双色路径都终止于 y；因此，根据引理1，此次重新着色不会形成新的双色环。所以，这次重新着色是有效的。现在，由于 $\gamma \in (C' \setminus F_{xx'})$，$\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$，这意味着 γ 是边 xy 的候选颜色。此外，对于任意顶点 $v \in N_{G'}(x) \setminus \{x_1, x_2\}$，我们有 $\gamma \notin F_{xv}$。因此，γ 对边 xy 也有效，这与 G 是最小反例矛盾。

因此，我们可以放心地假设，在 $C' \setminus F_{xx'}$ 中不存在一种颜色，使得它在与 $N_{G'}(x) \setminus x'$相 incident 的边上出现不超过两次。根据子断言4.1，我们有 $C' \setminus F_{xx'} \neq \emptyset$。这意味着 $C' \setminus F_{xx'}$ 中的每种颜色，在与 $N_{G'}(x) \setminus x'$相 incident 的边上至少出现三次。因此，我们可以推断出：

$$\begin{aligned} |C' \setminus F_{xx'}| &\leq \frac{(k-2)(\Delta-1)}{3} \\ &\leq (\frac{k-2}{3})\Delta - \frac{k}{3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

回想一下，我们已经有了 $|C''| \leq \Delta + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$。因此，综合起来，我们得到以下不等式：

$$\begin{aligned} |C' \cup C''| &\leq |C' \setminus F_{xx'}| + |F_{xx'}| + |C''| \\ &\leq ((\frac{k-2}{3})\Delta - \frac{k}{3} + \frac{2}{3}) + (\Delta - 1) + (\Delta + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}) \\ &\leq (\frac{k+4}{3})\Delta + \frac{k}{6} - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

注意，要使 $N_{G'}(x) \setminus x'$ 的关联边上某个颜色至少重复三次，必须满足 $|N_{G'}(x) \setminus x'| \geq 3$。这意味着 $k \geq 5$。回想一下，每当 $k \geq 5$ 时，我们都有 $p \geq \lceil 3\Delta \rceil + 1$。如果 $k = 5$，那么我们有：

$$|C' \cup C''| \leq (\frac{k+4}{3})\Delta + \frac{k}{6} - \frac{5}{6} = (\frac{5+4}{3})\Delta + \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 3\Delta < p$$

但这与 $|C' \cup C''| = p$ 这一事实相矛盾。

否则，令 $k \geq 6$。现在，由于 $k \leq \Delta$，我们有 $\frac{k}{6} \leq \frac{\Delta}{6}$。因此，我们得到如下结论：

$$\begin{aligned} |C' \cup C''| &\leq (\frac{k+4}{3})\Delta + \frac{\Delta}{6} - \frac{5}{6} \\ &\leq (\frac{2k+9}{6})\Delta - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

注意，如果 $k \geq 6$，那么$\frac{2k+9}{6} \leq \frac{k+1}{2}$。由于我们已经有 $k \geq 6$，因此可以推断出 $|C' \cup C''| \leq (\frac{k+1}{2})\Delta - \frac{5}{6} < p$，这与 $|C' \cup C''| = p$这一事实矛盾。

因此，无论如何，我们都会得到一个矛盾。因此，我们关于 C^* 中的每种颜色都出现在与 S 中某个单一顶点关联的边上的假设是错误的，故该断言成立。■

回想一下，根据命题 3，我们有 $|C^*| \geq 2$。此外，根据命题 4，我们可以确定，在 S 中，至少存在两个顶点，其关联边涉及 C^* 中的颜色。令 x_1 和 x_2 为 S 中满足以下条件的顶点：存在两种颜色 γ 和 η，属于 C^*，且满足 $\gamma \in F_{xx_1}$ 和 $\eta \in F_{xx_2}$。令 $g(xx_1) = \alpha$ 和 $g(xx_2) = \beta$。

由于 γ 和 η 对于 G 中的边 xy 无效，因此在 G 中存在一条 (α, γ, xy)-临界路径，同时在 G 中也存在一条 (β, η, xy)-临界路径。现在，我们将边 xx_2 重新着色为 γ。这仍然是一种正常着色，因为

$\gamma \in F_{xx_1}$ 根据 γ的选择可知 $\gamma \notin F_{xx_2}$。现在，由于从x 出发的（α,γ）双色路径终止于 y，根据引理1，不会产生新的双色圈，这表明重新着色是有效的。注意， η 成为边 xy 的一个有效颜色，因为通过此次重新着色，我们消除了 G 中涉及颜色 η的唯一 xy-临界路径，即通过此次重新着色， G 中的（β,η,xy）-临界路径已被消除。因此，我们可以将边 xy 着为颜色 η，并将着色 g 扩展为 G 的一个使用 p 种颜色的着色 f。但这与 G 是一个最小反例这一事实相矛盾。因此，我们可以得出结论：定理1不存在最小反例，这反过来意味着定理1成立。■

定理证明2

证明。设 G 是给定的 3-退化图，其有 n 个顶点、 m 条边，最大度为 Δ。我们对 G 的边数 m 使用归纳法来进行证明。设 xy 是 G 中的一条边，使得 $deg(x) \leq 3$，且 y 至多有 3 个邻点的度严格大于 3。根据引理 3，保证存在这样的边 xy。此外，我们选取 x 作为 y 的邻点，使其在 $N(y)$ 的顶点中度最小。设 $G' = G \setminus xy$，即从 G 中删除边 xy 所得的图。注意， G' 也是 3- 退化图，且其边数少于 m。此外，我们有 $\Delta(G') \leq \Delta(G)$。因此，根据归纳法，我们有 G' 的一个无圈边染色 g，使用 $\Delta + 5$ 种颜色。设 $N'(y)$ 是 G' 中 y 的所有度小于或等于 3 的邻点集合，并设 $N''(y)$ 是 G' 中 y 的所有度严格大于 3 的邻点集合。注意，我们有 $|N''(y)| \leq 3$。设 S 是 F_y 中除去属于集合 $\{g(yz) \mid z \in N''(y)\}$ 的颜色后得到的颜色集合。由于 $|N''(y)| \leq 3$，我们有 $|F_y \setminus S| \leq 3$。

现在，我们尝试通过从可用的 $\Delta + 5$ 颜色中为边 xy 指定一种颜色，将 g 扩展为 G 的无圈边染色 f。如果 $deg_G(x) = 1$，那么只要为边 xy 指定一种不同于 F_{xy} 中颜色的颜色，我们就可以将 g 扩展为 G 的所需着色 f，因为 $|F_{xy}| \leq \Delta - 1$。因此，我们可以假设 $deg(x) \geq 2$。进一步地，根据 x 在 G 中的度，我们有以下几种情况:

情况 1. $deg(x) = 2$。

设 x' 是 x 在 G' 中的唯一邻点。设 $g(xx') = \alpha$。如果 $\alpha \notin F_y$，那么我们可以为边 xy 指定任意一种满足正常着色的颜色，并将 g 扩展为 G 的所需着色 f。因此，我们可以假设 $\alpha \in F_y$。设 y' 是 y 的邻点，且 $g(yy') = \alpha$。注意，对于边 xy 无效的候选颜色恰好是 $F_{yy'}$ 中的颜色。此外，由于 $\alpha \in F_{xy}$，不是边 xy 的候选颜色的颜色是 F_{xy} 中的颜色。因此，不属于 $F_{xy} \cup F_{yy'}$ 的任何颜色对于边 xy 都是有效的。根据 $\alpha \in S$ 是否成立，我们有以下几种情况:

情形 1.1。 $\alpha \in S$。

由于 $\alpha \in S$，我们有 $deg(y') \leq 3$，这意味着 $|F_{yy'}| \leq 2$。因此，我们有 $|F_{xy} \cup F_{yy'}| \leq \Delta + 1$。对于边 xy，我们仍有 4 种颜色可用；使用其中任意一种颜色，我们就可以将 g 扩展为 G的所需着色 f。

情形 1.2。 $\alpha \notin S$。

Re称我们有 $|F_{xx'}| \leq \Delta - 1$ 和 $|F_y \setminus S| \leq 3$。因此，我们可以推断出以下结论 g:

$$|F_{xx'} \cup (F_y \setminus S)| \leq \Delta + 2$$

现在，我们选取一种 β 在集合 $F_{xx'} \cup （F_y \setminus S）$ 中不存在的颜色，并将边 xx' 从 α重新着色为 β。由于 $\beta \notin F_{xx'}$，该重新着色是正常的。由于边 xy 尚未

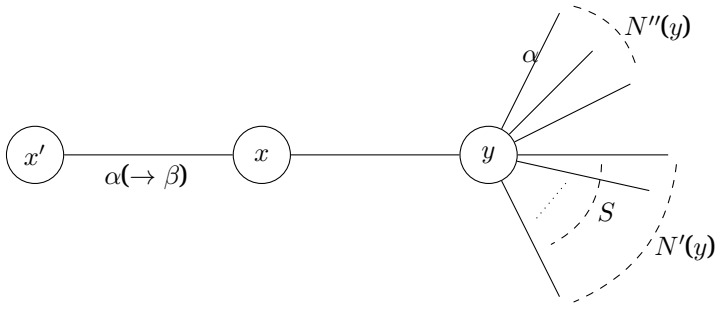

图 2：边 xy 在 G 在情形 1.2

着色。注意，如果 $\beta \notin F_y$，那么我们可以为边 xy 分配任何满足正常着色条件的颜色，并将 g 扩展为所需着色 f 中的 G。因此，我们可以假设 $\beta \in F_y$。此外，由于β 的选取满足 $\beta \notin F_{xx'} \cup (F_y \setminus S)$，我们可以得出 $\beta \in S$。这归结为情形1.1，因此证明完毕。

情形 2. $deg(x) = 3$。

注意，对于这种情况，根据顶点 x 的选取， y 的任何不在 $N''(y)$ 中的邻点，其度恰好为 3。设 x 在 G 中除 y 之外的两个邻点为 x_1 和 x_2。设 $g(xx_1) = \alpha$，并令$g(xx_2) = \beta$。我们将 R 定义为总共可用的 $\Delta + 5$ 种颜色中不在 $F_{xy} \cup F_{yx}$ 中的所有颜色组成的集合。如果 R 中有任何一种颜色适用于边 xy，那么我们就可以将 g 扩展为 G 的一个着色 f，如所需。因此，我们可以假设 R 中没有任何一种颜色适用于边 xy。根据颜色 $g(xx_1)$ 和 $g(xx_2)$ 是否属于 $F_{xy} \setminus S$，可分为以下几种情况：

情形 2.1. $\{g(xx_1)\ g(xx_2)\} \cap (F_{xy} \setminus S) = \emptyset$。

回忆一下， $g(xx_1) = \alpha$，并令 $g(xx_2) = \beta$。对于此情形， $\{\alpha, \beta\}$ 中没有颜色属于 $F_{xy} \setminus S$，这意味着 $\{\alpha, \beta\}$ 中的每种颜色要么出现在 S 中，要么未出现在 F_{xy}中。

若 $\{\alpha, \beta\}$ 中没有颜色属于 S，则这意味着 $\{\alpha, \beta\}$ 中没有颜色属于 F_{xy}。因此，我们可以为边 xy 使用任何满足正常着色条件的颜色，并将 g 扩展为 G的所需着色 f。

否则，令 $\{\alpha, \beta\}$ 中恰有一种颜色属于 S。不失一般性，令 $\alpha \in S$，这意味着$\alpha \in F_{xy}$。令 y_m 为 y 的邻点，使得 $g(yy_m) = \alpha$。注意， $y_m \in N'(y)$。因此，我们有 $|F_{yy_m}| \leq 2$。此外，可以看出，对于此情形，边 xy 不可使用的候选颜色集合为 F_{yy_m}。由于 $\alpha \in F_{xy}$，我们有 $|F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta$，这意味着$|F_{xy} \cup F_{yx} \cup F_{yy_m}| \leq \Delta + 2$。

否则，令 $\{\alpha, \beta\}$ 中的两个颜色都属于 S。因此， $\alpha \in S$ 且 $\beta \in S$，这意味着 $\alpha \in F_{xy}$ 且 $\beta \in F_{xy}$。令 y_m 和 y_n 为 y 的邻点，使得 $g(yy_m) = \alpha$ 且 $g(yy_n) = \beta$。注意，$y_m \in N'(y)$ 且 $y_n \in N'(y)$。因此，我们有 $|F_{yy_m} \cup F_{yy_n}| \leq 4$。此外，可以看出，在此情况下，对于边 xy 无效的候选颜色集合为 $F_{yy_m} \cup F_{yy_n}$。由于α 和 β 都属于 F_{xy}，我们有 $|F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta - 1$，这意味着：

$$\begin{aligned} |F_{xy} \cup F_{yx} \cup F_{yy_m} \cup F_{yy_n}| &\leq \Delta - 1 + 2 + 2 \\ &= \Delta + 3 \end{aligned}$$

由于我们共有 $\Delta+5$种颜色，因此无论 $\{\alpha, \beta\}$ 和 S中有多少种公共颜色，边 xy在任何情况下都有一种有效颜色 γ。将 γ 分配给 xy后，我们可以将 g 扩展为 G的所需着色 f。

情形 2.2. $\{g(xx_1)\ g(xx_2)\} \cap (F_{xy} \setminus S) \neq \emptyset$。

在这种情况下，$\{\alpha, \beta\}$ 中至少有一种颜色属于 $F_{xy} \setminus S$。现在，我们如下定义相对于边 xy 可释放的 S 中的一种颜色。

定义 5. 对于 $N'(y)$ 中的任意顶点 y'，若我们可以用 R 中的一种颜色重新着色$g(yy')$，且不形成任何新的双色环，则称 S 中的颜色 $g(yy')$ 是可释放的。

注意，经过这次重新着色后，$g(yy')$ 成为 G 中边 xy 的一个候选颜色。现在，我们对 S 中可释放颜色的数量作出如下断言。

断言5. S 中至多有 2 种颜色不可释放。

证明。反设 S 中至少有 3 种颜色不可释放。设这些颜色为 γ_1、γ_2 和 γ_3，使得对于 y_1、y_2、$y_3 \in N'(y)$，有 $g(yy_1) = \gamma_1$、$g(yy_2) = \gamma_2$ 以及 $g(yy_3) = \gamma_3$。在断言的整个证明过程中，每当我们使用 i时，都默认假设对于任意满足$1 \leq i \leq 3$的 i。由于 $\gamma_i \in S$，我们有 $y_i \notin N''(y)$。这意味着 $deg(y_i) = 3$。设 y_i' 和 y_i'' 是 y_i 除 y 之外的邻点，并设 $g(y_iy_i') = \nu_i$ 且 $g(y_iy_i'') = \eta_i$。

如果 α 和 β 中恰有一个属于 F_{xy}，那么我们有 $|F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta$，这意味着 $|R| \geq (\Delta + 5) - (\Delta) = 5$。否则，如果 α 和 β 都属于 F_{xy}，那么我们有 $|F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta - 1$，这意味着 $|R| \geq (\Delta + 5) - (\Delta - 1) = 6$。由于我们假设 α 和 β 中至少有一个属于 F_{xy}，因此无论哪种情况，都有 $|R| \geq 5$。令 $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$ 为 R 中任意五种颜色。

由于 $g(yy_i) = \gamma_i$ 无法释放，这意味着如果我们用 R 中任意一种颜色对 $g(yy_i)$ 重新着色，就会形成一个新的双色环。因此，对于每个 $\mu_j \in R$，要么存在一条 (ν_i, μ_j, yy_i)-临界路径，要么存在一条 (η_i, μ_j, yy_i)-临界路径，或者上述两条临界路径都存在于 G' 中。因此，五条 yy_i-临界路径中至少有三条经过 ν_i，或者五条 yy_i-临界路径中至少有三条经过 η_i。回想一下，对于任意满足 $1 \leq i \leq 3$ 的 i，该陈述都成立。因此，不失一般性，假设至少三条 yy_1-临界路径经过 ν_1，至少三条 yy_2-临界路径经过 ν_2，并且至少三条 yy_3-临界路径经过 ν_3。注意，经过 ν_i 的至少三条 yy_i-临界路径应通过一个满足 $deg(z_i) \geq 4$ 的顶点 $z_i \in N(y)$ 到达 y，这意味着 $z_i \in N''(y)$ 和 $\nu_i \in F_{xy} \setminus S$。

子断言5.1。颜色 ν_1、ν_2 和 ν_3 两两不同。

证明。反设，不妨设对于某个颜色ν，有 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$。令 $y' \in N''(y)$，其中 $g(yy') = \nu$。于是，对于 $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$ in R，至少存在三条(ν, μ_j, yy_1)-临界路径和至少三条(ν, μ_k, yy_2)-临界路径。注意到，我们正在考虑五种颜色和至少六条临界路径。因此，在 R 中存在一种颜色 μ_j，使得存在一条(ν, μ_j, yy_1)-临界路径和一条(ν, μ_j, yy_2)-临界路径。这意味着存在一条从顶点 y 出发、终止于顶点 y_1 的(ν, μ_j)-极大双色路径，并且存在一条从顶点 y 出发、终止于顶点 y_2的(ν, μ_j)-极大双色路径，这与引理1矛盾。因此，我们关于 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ 的假设是错误的，子断言得证。■

由于 μ_j 中的任意颜色 R（满足 $1 \leq j \leq 5$）都不能用于边 xy，因此在 G' 中必定存在一条 (α, μ_j, xy)-临界路径或一条 (β, μ_j, xy)-临界路径，或两者皆有。因此，至少存在三条 (α, μ_j, xy)-临界路径或至少三条 (β, μ_j, xy)-临界路径。不失一般性，假设至少存在三条 (α, μ_j, xy)-临界路径。现在回顾一下，我们有 $\nu_i \in F_{xy} \setminus S$。由于 $|F_{xy} \setminus S| \leq 3$，子断言 5.1 推出 α 是 $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ 中的一种颜色。不失一般性，令 $\alpha = \nu_3$。那么，对于 $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$，在 R 中，除已假设的至少三条 (α, μ_j, xy)-临界路径外，还至少存在三条 (α, μ_j, yy_3)-临界路径。注意，我们考虑的是五种颜色和至少六条临界路径。因此，存在一种颜色 μ_j，属于 R，使得存在一条

$(\alpha,\ \mu_j,\ yy_3)$-临界路径，以及一条$(\alpha,\ \mu_j,\ xy)$-临界路径。这意味着存在一条$(\alpha,\ \mu_j)$-极大双色路径，从顶点 y 出发并终止于顶点 y_3；同时还存在一条$(\alpha,\ \mu_j)$-极大双色路径，从顶点 y 出发并终止于顶点 x，这与引理 1矛盾。因此，我们关于 中至少存在 3 种不可释放颜色的假设是错误的，断言成立。 ■

令 $S' \subset S$ 为 S 中所有不可释放颜色的集合。现在，我们将集合 T 定义为$T = R \cup (S \setminus S')$。此外，关于集合 T 的基数，我们提出以下断言。

断言 6. $|T| \geq \Delta - 1$。

证明。 注意，集合 T恰好是所有不属于 $F_{yx} \cup (F_{xy} \setminus S) \cup S'$ 的颜色所构成的集合。根据命题 5，我们有 $|S'| \leq 2$。我们还有 $|F_{xy} \setminus S| \leq 3$。由于 $deg(x) = 3$，因此有 $|F_{yx}| = 2$。具体而言，$F_{yx} = \{\alpha, \beta\}$。但我们已经假设 α 或 β 至少有一个属于$F_{xy} \setminus S$。因此，集合 $F_{yx} = \{\alpha, \beta\}$ 中至多存在一个不属于 $F_{xy} \setminus S$ 的颜色。综合以上观察，我们可以推导出以下结论：

$$\begin{aligned} |T| &= \Delta + 5 - |F_{yx} \cup (F_{xy} \setminus S) \cup S'| \\ &\geq \Delta + 5 - (1 + 3 + 2) \\ &= \Delta - 1 \end{aligned}$$

因此，我们得到了集合 T 的下界，正如所声称的那样。 ■

此外，根据 $\{g(xx_1)\ g(xx_2)\}$ 中属于集合 F_{xy} 的颜色数量，我们有以下几种情形：

情形 2.2.1. $\{g(xx_1)\ g(xx_2)\}$ 中恰有一种颜色属于 F_{xy}。

回顾一下，我们有 $g(xx_1) = \alpha$ 和 $g(xx_2) = \beta$。不失一般性，设 $\alpha \in F_{xy}$ 和 $\beta \notin F_{xy}$。设 y_1 是 G 中 y 的邻点，使得 $g(yy_1) = \alpha$。由于我们已经知道 α 或 β 中至少有一个属于 $F_{xy} \setminus S$，而 β 不出现在 F_{xy} 中，这意味着 $\alpha \notin S$。综合起来，我们可以推断出 $\alpha \in (F_{xy} \setminus S)$。注意，由于 $\alpha \in F_{xy}$，我们有 $|F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta$，这意味着 $|R| \geq 5$。设 $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\} \in R$。如果 R 中的任一颜色对边 xy 都有效，那么结论成立。因此，我们可以假设 R 中边 xy 的每一种候选颜色都无效。这意味着，对于 R 中的每一种颜色 μ_i，在 G' 中都存在一条相对于 g 的 (α, μ_i, xy)-临界路径。

现在，根据断言 6，我们有 $|T| \geq \Delta - 1$。如果存在一种颜色 $\zeta \in T$，使得不存在一条关于 g 的 G' 中的 (α, ζ, xy)-临界路径，那么我们可以在必要时腾出颜色 ζ，并将 ζ 指派给边 xy，从而将 g 扩展为 G 的所需着色 f。因此，我们可以假设，对于每一种颜色 $\zeta \in T$，都存在一条关于 g 的 G' 中的 (α, ζ, xy)-临界路径。

假设 $\beta \in F_{xx_1}$。注意 $|F_{xx_1}| \leq \Delta - 1$。由于 $\beta \in F_{yx}$，我们有 $\beta \notin T$。结合假设 $\beta \in F_{xx_1}$，这意味着存在一种颜色 η，使得 $\eta \in T$，但$\eta \notin F_{xx_1}$。这意味着相对于 g，G' 中不存在任何 (α, η, xy)-临界路径。由于$\eta \in T$，这与我们先前的假设矛盾：对于每种颜色 $\zeta \in T$，相对于 g，G' 中都存在一条 (α, ζ, xy)-临界路径。因此，我们关于 $\beta \in F_{xx_1}$ 的假设不成立，这意味着我们可以得出结论：$\beta \notin F_{xx_1}$。

由于 $|F_{xx_1} \cup \{\beta\}| \leq \Delta$ 且 $|F_{xy} \setminus S| \leq 3$，我们可以确定存在一个颜色 γ 使得 $\gamma \notin F_{xx_1} \cup \{\beta\} \cup (F_{xy} \setminus S)$。现在，我们使用 γ对边 xx_1 进行重新着色。此次重新着色是有效的，因为 $\beta \notin F_{xx_1}$。如果 $\gamma \notin S$，那么显然 $\gamma \notin F_{xy}$，这意味着我们可以为边 xy 分配任意一个满足正常着色条件的颜色，从而将 g 扩展为 f 的所需着色 G。否则，如果 $\gamma \in S$，那么由于$\beta \notin F_{xy}$，根据情况 2.1，结论得证。

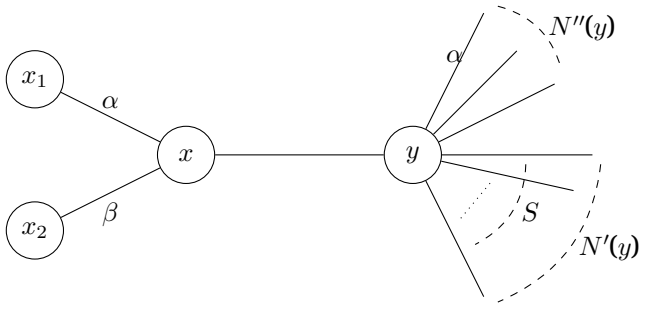

图3：边的邻域 xy 在 G 在情形 2.2.1

情形 2.2.2。 $\{g(xx_1)\ g(xx_2)\}$ 中的两种颜色都属于 F_{xy}。

回顾一下，我们有 $g(xx_1) = \alpha$ 和 $g(xx_2) = \beta$。设 y_1 和 y_2 为 y 的邻点，使得$g(yy_1) = \alpha$ 且 $g(yy_2) = \beta$。由于在 G'中的顶点 x 和 y 处都能看到颜色 α 和 β，因此我们有 $|F_{xy} \cup F_{yx}| \leq \Delta - 1$，这意味着在这种情况下 $|R| \geq 6$。令 $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} \in R$。如果 R 中的任意颜色都可以合法地用于边 xy，那么结论即得。因此，我们可以假设，在 R 中，边 xy 的每一种候选颜色都不是合法的。这意味着，对于 R 中的每一种颜色 μ_i，在 G' 中，相对于 g，要么存在一条(α, μ_i, xy)-临界路径，要么存在一条(β, μ_i, xy)-临界路径，或者两者都存在。此外，如果存在一种颜色 $\zeta \in T$，使得在 G' 中相对于 g，既不存在(α, ζ, xy)-临界路径，也不存在(β, ζ, xy)-临界路径，那么我们可以在必要时释放颜色 ζ，并将 ζ 赋给边 xy，从而将 g 扩展为 G的所需着色 f。因此，我们还可以假设，对于每一种颜色$\zeta \in T$，在 G' 中相对于 g，要么存在一条(α, ζ, xy)-临界路径，要么存在一条(β, ζ, xy)-临界路径，或者两者都存在。

由于我们已经知道 α 或 β 中至少有一个属于 $F_{xy} \setminus S$，因此可以确定，集合 $\{\alpha, \beta\}$ 中至多有一种颜色在 S 中。这也意味着，集合 $\{\alpha, \beta\}$ 中至少有一种颜色不在 S 中。不失一般性，假设 $\beta \notin S$。那么由于 $\beta \in F_{xy}$，我们可以推断出 $\beta \in F_{xy} \setminus S$。

假设 $\beta \in F_{xx_1}$。注意到 $|F_{xx_1}| \leq \Delta - 1$。由于 $\beta \in F_x$，我们有 $\beta \notin T$。结合断言 6 和假设 $\beta \in F_{xx_1}$，可知存在一种颜色 η，使得 $\eta \in T$，但 $\eta \notin F_{xx_1}$。因此，关于 g，G' 中不可能存在一条 (α, η, xy)-临界路径，这意味着存在一条 (β, η, xy)-临界路径，因为 $\eta \in T$。因此，我们可以空出颜色 η，并用 η 重新着色边 xx_1，而不会形成任何新的双色圈，因为从顶点 x 出发的 (β, η)-双色路径不可能到达 x_1，因为它终止于 y。现在，由于 $\eta \notin F_{xy}$ 和 $\beta \in F_{xy}$，根据情形 2.2.1，结论得证。

现在，假设 $\beta \notin F_{xx_1}$。现在，我们有 $|F_{xx_1} \cup \{\beta\}| \leq \Delta$和 $|F_{xy} \setminus S| \leq 3$。但由于 $\beta \in F_{xy} \setminus S$，我们有 $|F_{xx_1} \cup \{\beta\} \cup (F_{xy} \setminus S)| \leq \Delta + 2$。此外，由于 $|S'| \leq 2$，我们有 $|F_{xx_1} \cup \{\beta\} \cup (F_{xy} \setminus S) \cup S'| \leq \Delta + 4$。因此，由于我们总共有 $\Delta + 5$ 个颜色，可以确定存在一种颜色 γ，使得$\gamma \notin F_{xx_1} \cup \{\beta\} \cup (F_{xy} \setminus S) \cup S'$。现在，我们释放颜色 γ，并用 γ对边 xx_1 重新着色。由于 $\beta \notin F_{xx_1}$，这次重新着色是有效的。由于 $\gamma \notin F_{xy}$，且 $\beta \in F_{xy}$，根据情形 2.2.1，我们就完成了。

因此，在任何情况下，我们都可以将着色扩展 g 为 G' 一种着色 f 为 G 且使用相同数量的颜色，这反过来证实了定理的有效性2。■

5 结论

最后，我们重申定理1 和定理2，以结束关于退化图无圈色指数的讨论。对于任意 k-退化图 G，我们有 $a'(G) \leq \lceil (\frac{k+1}{2})\Delta \rceil + 1$。此外，对于

对于任意 3-退化图 G，我们有 $a'(G) \leq \Delta + 5$。但是，无圈边染色猜想给出了任意图的上界 $\Delta + 2$。因此，可以着手研究 3-退化图，并尝试证明该猜想对 3-退化图成立。对于 k-退化图也同样如此；我们可以尝试改进 k-退化图的无圈色指数现有上界，这是一个很好的研究问题。

参考文献

[1] Alon, N.、Sudakov, B. 和 Zaks, A.（2001）。图的无圈边染色。《图论杂志》，37(3)：157–167。[2] Amar, D.、Raspaud, A. 和 Togni, O.（2001）。全光复合网络中的全对全波长路由。《离散数学》，235(1-3)：353–363。[3] Andersen, L. D.、M´aˇcajov´a, E. 和 Maz´ak, J.（2012）。三次图的最优无圈边染色。《图论杂志》，71(4)：353–364。[4] Basavaraju, M. 和 Chandran, L. S.（2010）。2-退化图的无圈边染色。《图论杂志》，69(1)：1–27。[5] Basavaraju, M.、Chandran, L. S.、Cohen, N.、Havet, F. 和 M¨uller, T.（2011）。平面图的无圈边染色。《SIAM 离散数学杂志》，25(2)：463–478。[6] Cranston, D. W.（2019）。平面图的无圈边染色：当 Δ 很大时，Δ 种颜色就足够了。《SIAM 离散数学杂志》，33(2)：614–628。[7] Diestel, R.（2017）。《图论》，数学研究生教材第173卷。Springer，柏林，第 5th 版。[8] Fertin, G.、Raspaud, A. 和 Reed, B.（2004）。图的星着色。《图论杂志》，47(3)：163–182。[9] Fialho, P. M. S.、de Li ma, B. N. B. 和 Procacci, A.（2020）。关于无圈边色数的新界。《离散数学》，343(11)：112037。[10] Fiamˇc´ık, I.（1978）。图的无圈着色类。《斯洛伐克数学学报》，28(2)：139–145。[11] Fiedorowicz, A.（2011）。边数关于顶点数呈线性有界的图的无圈边着色。《信息处理快报》，111(6)：287–290。[12] Gr¨unbaum, B.（1973）。平面图的无圈着色。《以色列数学杂志》，14：390–408。[13] Hou, J.-F. 和 Wu, J.-L.（2013）。《外平面图的无圈边色数》的勘误 [mr2656747]。《图论杂志》，72(3)：364–365。[14] Hou, J.-F.、Wu, J.-L.、Liu, G.-Z. 和 Liu, B.（2010）。外平面图的无圈边色数。《图论杂志》，64(1)：22–36。[15] Kostochka, A. V.、Sopena, E. 和 Zhu, X.（1997）。图的无圈色数和定向色数。《图论杂志》，24(4)：331–340。[16] Wang, W. 和 Shu, Q.（2011）。不含 k_4-minor 的图的无圈色指标。《中国科学：数学》，41(8)：733–744。[17] West, D. B.（2001）。《图论导论》。Prentice Hall，新泽西州上萨德尔河，第 2nd 版。