一维空间中具有动态边界条件的线性阻尼波动方程的李雅普诺夫函数。

Yacine Chitour [a]、Hoai-Minh Nguyen [b]、Christophe Roman [c]

[a] *Laboratoire des signaux et systèmes, Université Paris Saclay, Centralesupelec CNRS, Gif-sur-Yvette, France.*

[b] *Laboratoire Jacques Louis Lions, Sorbonne Université, Paris, France.*

[c] *Laboratoire informatique et système, Aix-Marseille Université, Marseille, France.*

arXiv:2305.01969v2 [math.AP] 5 Feb 2024

摘要

本文研究区域 $[0,1]$，上的一维波动方程，其在 $x=0$ 和 $x=1$ 处满足二阶动态边界条件，文献中也称为温策尔边界条件。此外，波在区域内和边界处均受到恒定扰动。该模型受一项真实实验启发。通过比例积分控制，当阻尼系数为空间上的处处非零函数时，可实现具有指数收敛速率的调节。分析基于适当李雅普诺夫函数的确定，以及对相关误差系统的进一步分析。研究证明，后者指数稳定于一个吸引子。文中还给出了输出调节问题的数值仿真，以及相关波动方程的补充结果。

Key words: 一维波动方程，温策尔边界条件，调节，输出反馈控制。

波动方程是经典偏微分方程之一。其原因在于，波动方程是牛顿第二运动定律的连续对应形式，即动量等于各个力之和。因此，它也与欧拉-拉格朗日框架相关，进而与最小作用量原理有关。对于定常系统，能量守恒，作用量（或拉格朗日量）处于驻值状态。其他物理现象也与波动方程相关，例如电磁定律，以及由克莱因-戈尔登方程描述的量子现象。

在控制领域，波动方程主要用于机械振动和变形现象的建模、估计与控制。许多控制领域的研究者都关注将具有动态边界条件的一维波动方程应用于调节与控制问题：起重机调节 [8],[10], [14], 以及 [6], 浸没于水中的悬垂缆索 [5], 钻柱扭转振动 [38], [45] ,[1], [48],压电控制 [24],以及柔性结构 [18]。目前主要有两类问题：一类涉及纵向变化，例如桥式起重机和水下缆索；另一类涉及扭转变化，例如钻柱动力学。两者的区别在于控制目标：前者旨在控制位置，后者则旨在控制速度。

波动方程的行为与其边界条件密切相关。对于经典边界条件（即狄利克雷、诺伊曼、罗宾边界条件），在线性情形且不含高阶项时，这一问题已得到充分理解。某个边界上的特定项可以补偿其他边界乃至区域内部的反阻尼项，例如参见 [41], [40] 和[35]。此外，即使一维线性波动方程的能量沿轨迹递减，也仍有能量不呈指数衰减的情况[23, 节 4]。

所考虑的波动方程满足两个动态边界条件。该模型源自与实验室实验 [36] 相关的辨识问题。

Email addresses: yacine.chitour@l2s.centralesupelec.fr (Yacine Chitour), hoai-minh.nguyen@sorbonne-universite.fr (Hoai-Minh Nguyen), christophe.roman@lis-lab.fr (Christophe Roman).

1 问题陈述。

所考虑的系统定义在 $t \geqslant 0$ 和 $x \in (0,\ 1)$ 上，定义为

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x) = (a(x)v_x)_x(t,x) - q(x)v_t(t,x) + f(x), & \text{(1a)} \\ v_{tt}(t,1) = -\beta_1 v_x(t,1) - \nu v_t(t,1) + U(t) + f_c, & \text{(1b)} \\ v_{tt}(t,0) = \mu_1 v_x(t,0) - \gamma_1 v_t(t,0) + f_{ac}, & \text{(1c)} \\ v(0,\cdot) = v_0, \quad v_t(0,\cdot) = v_1. & \text{(1d)} \end{cases}$$

这里 $U(t)$ 是控制输入，我们假设变态另类

(h_1) 函数 a：$[0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ 属于 $W^{1,\infty}(0,1)$，且存在 a, $a > 0$ 使得 $a \leq a(\cdot) \leq \bar{a}$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处成立。此函数与波的质量和弹性有关，也与速度相关。(h_2) 描述区域内阻尼的函数 q：$[0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ 属于 $L^\infty(0,1)$，并且对某些 $q, q > 0$ 满足 $q \leq q(\cdot) \leq \bar{q}$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处成立。(h_3) 常数 β_1, γ_1, μ_1 为正实数，而 ν 为实数。(h_4) 源项 $f(\cdot)$ 属于 $L^\infty(0,1)$，实常数 f_c, f_{ac} 未知，因此无法用于计算控制律 $U(t)$。

在（h_1）中所述的 $a(\cdot)$ 正则性可由经典- 论证得到。具体而言，对于计算，我们需要 $a(\cdot)v_x(t,\cdot)$ 属于 $H^1(0,1)$。更准确地说，如果 $a(\cdot)v_x(t,\cdot)$ 和 $v_x(t,\cdot)$ 具有相同的正则- 性，则一切都将与常参数情形相同。为了获得（1）的强解，需要有 $v \in H^2(0,1)$。接下来，可以容易地证明，如果 $a \in W^{1,\infty}$ 和 $v \in H^2(0,1)$，那么 $a(\cdot)v_x(t,\cdot)$ 属于 $H^1(0,1)$。注意，这只是正则性的一个充分条件。关于 a 的正则性的更多细节，请读者参阅 [43, 章节 21]。在下文中，我们还需要 $qv_t(t,\cdot)^2$ 可积，这意味着 $q \in L^\infty(0,1)$。对于 f，我们实际上只需要它可积，尽管 $L^\infty(0,1) \subset L^1(0,1)$。

本文的目标是通过比例积分（PI）控制律，将 $v_t(t,\ \cdot)$ 调节至恒定参考值 v_1^{ref}。该控制律利用与驱动共置的速度测量值 $v_t(1,\ t)$，换言之，控制量 $U(t)$ 可写为

$$U(t) := -k(v_t(t,1) - v_1^{\text{ref}}) - k_i \int_0^t (v_t(s,1) - v_1^{\text{ref}})ds, \quad (2)$$

其中常数 k, k_i 需要选定。这可以等价地写为

$$\begin{cases} U(t) = -k(v_t(t,1) - v_1^{\text{ref}}) - k_i\eta_v(t), & \text{(3a)} \\ \dot{\eta}_v(t) = v_t(t,1) - v_1^{\text{ref}}, \quad \eta_v(0) = 0. & \text{(3b)} \end{cases}$$

在文献中，(1b)-(1c) 类型的边界条件可改写为 Wentzell边界条件[15]。这需要对通常的状态空间进行修改，在我们的情形中，需要以与 [39],[25], [10], [14] 和 [6] 类似的方式，增加两个有限维状态变量。当波动方程的维数高于一维时，读者可参考 [15] 和[4] 及其中的参考文献。

这类控制问题属于鲁棒输出调节。研究者一直致力于将线性有限维系统中的结果和方法推广到无限维系统。关于这方面的工作，读者可参阅 [29],[27], [28], 更近期的文献 [47] 以及其中所列的参考文献。这些论文建立了一些一般性结果，例如 [47] 讨论了非线性系统。然而，这些结果大多基于无源性、强单调性或指数衰减等性质。这些性质往往仍有待证明，本论文所讨论的情形便是如此。在 [44], 中，作者在预先假设零输入系统具有指数稳定性的基础上，建立了无限维系统 PI 控制的一般性结果。

域内阻尼 $q(x)$ 对衰减率的影响可能会成为一个问题，因为可能会出现某种过阻尼现象。直观而言，阻尼应有助于提高系统的衰减率。但正如 [17] 中所见，在考虑半线性波动方程时，无阻尼系统的衰减率为有限时间；加入阻尼后，这一性能下降为指数衰减率。请注意，在当前情形下，域内阻尼是证明所必需的。

式 (1) 的某些特定配置可以通过更精细、通用的控制律设计来求解，尤其是那些专为处理边界处偏微分方程与常微分方程耦合问题而设计的方法。若不考虑扰动，可以采用 [11] 及其扩展形式 [12] 。此外，假设 $a(\cdot)$ 为常数，则可以使用 [37], [50], 或 [49]。

这五篇论文主要采用无限维反步方法，这一发展与 Miroslav Krstic 的开创性工作 [21] 密切相关。鉴于波动方程可以表示为耦合的双向传播双曲偏微分方程（PDE），上述论文的主要策略是使用反步变换将 PDE 解耦或构造成级联系统。这样便可将闭环系统转换为目标系统，其稳定性更易于分析。值得注意的是，本文的独特之处在于，无需解耦即可实现指数稳定性，从而为基于反步设计建立新的潜在目标系统。

与本文最为接近的研究

是 [45] ，该文研究了采用 PI 的速度调节。然而， [45] 中考虑的受控边界条件并非二阶动态，因此与本文所考虑的情况不同。尽管如此， [45]中考虑的边界条件表明，即使在与驱动相对的边界处存在较小的黏性反阻尼，系统仍具有指数稳定性。在本文考虑的情况下，仅考虑相对边界处的黏性阻尼，并实现了指数稳定性。 [6] 中，波动方程受到两个动态边界条件的约束。作者证明了位置稳定化的渐近稳定性，并指出衰减率不是指数型；对于零输入系统，则未考虑黏性项。 [25],针对相同的模型（见 [6]）获得了原点处的指数稳定性，但控制律需要知道 $v_{xt}(1,\ t)$。这与 [14]中采用的有限维反步法有关。关于类波动方程可能无法实现指数稳定化的问题，已有研究予以探讨，例如 [26], [31],及其中的参考文献。从更广泛的角度看，对这一问题的研究也延伸到了更一般的情形，例如 [16], [46], 及相关参考文献。

近年来，比例积分控制器已成功用于调节线性和非线性偏微分方程，参见 [7],[22]。[36] 中针对系统 (1) 在无源项情况下，基于实验数据提出了一种辨识过程。这意味着所研究的问题可以与实验装置相关联。 [33] 对该系统进行了初步研究，采用了李雅普诺夫泛函的经典形式，但未能证明指数稳定性。利用 LaSalle不变性原理，仅确立了渐近稳定性。

本文针对当前设定，在李雅普诺夫泛函中引入了一个新项，并提出了相应的方法。第 3 节给出了指数稳定性的证明。第 4 节将该证明与已有结果进行比较。随后，第 5 节给出受控系统鲁棒性的证明。接着，第 6 节沿用相同的方法研究更简单的情形，其中一个边界条件为狄利克雷边界条件，并由此证明无扰情形下零输入系统的指数稳定性。本文最后一部分讨论数值仿真。这里的数值格式并非由通常的空间和时间导数近似方法推导而来。我们利用波动方程可由拉格朗日量和最小作用量原理导出的事实，以有限维连续时间欧拉-拉格朗日方程近似系统的空间能量。随后，使用辛积分器对该有限维连续时间系统进行数值求解。据作者所知，这种数值格式尚属新颖，与更为常见的离散化格式相比，提供了一种有趣的替代方案。

记号： 如果 I 是实数区间，则 $L^2(I;\mathbb{R})$表示从 I 到 $\mathbb{R}$的平方可积函数（等价类）。此外， $L^2([0,1];\ \mathbb{R})$也常简写为 $L^2(0,\ 1)$。另外， H^n 表示 Sobolev 空间 $W^{n,\ 2}$，即，

$$u \in H^1 \Leftrightarrow u \in L^2,\ u' \in L^2, \tag{4}$$

其中， u' 表示 u的导数。

2 主要结果

为了实现我们的目标，我们进行变量替换，以获得误差变量 $u(\cdot,\cdot)$，并证明其偏导数呈指数衰减。

误差变量 $u(\cdot,\ \cdot)$ 定义如下，对于每个 $(x,\ t) \in [0,1]\times[0,\infty)$

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= v(t,x) - tv_1^{\mathrm{ref}} \\ &\quad + \int_0^x \frac{1}{a(s)} \int_0^s [-v_1^{\mathrm{ref}} q(\chi) + f(\chi)] d\chi ds \\ &\quad + \frac{a(0)}{\mu_1}[-\gamma_1 v_1^{\mathrm{ref}} + f_{ac}] \int_0^x \frac{1}{a(s)} ds, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(t) &:= \eta_v(t) - \frac{\beta_1}{k_i a(1)} \int_0^1 [-v_1^{\mathrm{ref}} q(s) + f(s)] ds \\ &\quad - \frac{\beta_1 a(0)}{k_i \mu_1 a(1)}[-\gamma_1 v_1^{\mathrm{ref}} + f_{ac}] + \frac{\nu v_1^{\mathrm{ref}} - f_c}{k_i}. \end{aligned} \tag{6}$$

注意，对于每个 $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$,

$$u(t,x) = v(t,x) - tv_1^{\mathrm{ref}} + F(x), \tag{7}$$

$$u_t(t,x) = v_t(t,x) - v_1^{\mathrm{ref}}, \tag{8}$$

其中，我们将所有不确定性都归入函数 $F(\cdot)$ 中。由式（8）可以立即推知，证明 u_t （在适当意义下）的指数衰减，等价于证明 $v_t - v_1^{\mathrm{ref}}$ 的指数衰减，从而实现预期的控制目标。

因此，从现在起，我们将着重研究误差变量$u(\cdot,\ \cdot)$。直接计算可得，它是以下系统的解：

$$\begin{cases} u_{tt} - (a(x)u_x)_x = -q(x)u_t, \\ \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & \text{(9a)} \\ u_t(t,1) = \eta_1(t) & \text{(9b)} \\ u_t(t,0) = \xi_1(t) & \text{(9c)} \\ \dot{\eta}_1(t) = -\alpha_1\eta_1(t) - \alpha_2\eta_2(t) - \beta_1 u_x(t,1), & \text{(9d)} \\ \dot{\eta}_2(t) = \eta_1(t), & \text{(9e)} \\ \dot{\xi}_1(t) = -\gamma_1\xi_1(t) + \mu_1 u_x(t,0), & \text{(9f)} \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1 \quad \text{on } (0,1), & \text{(9g)} \\ \eta_1(0) = \eta_0, \quad \eta_2(0) = \eta_{2,0} \quad \xi_1(0) = \xi_0. & \text{(9h)} \end{cases}$$

其中， $\alpha_1 := k + \nu$ 且 $\alpha_2 := k_i$，并选择 k，使得 α_1 为正。

考虑以下希尔伯特空间

$$X_w := H^1((0,1);\mathbb{R}) \times L^2((0,1);\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3, \quad (10)$$
$$X_s := H^2((0,1);\mathbb{R}) \times H^1((0,1);\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3. \quad (11)$$

波动方程与以下抽象问题相关

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}}(t) + \mathcal{A}\mathcal{X}(t) = 0, & (12a) \\ \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_0 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \subset X_s \subset X_w, & (12b) \end{cases}$$

其中

$$\forall z \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}z := \begin{bmatrix} -z_2 \\ -(az_1')' + qz_2 \\ \alpha_1 z_3 + \alpha_2 z_4 + \beta_1 z_1'(1) \\ -z_3 \\ \gamma_1 z_5 - \mu_1 z_1'(0) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

and

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) := \{z \in X_s;\ z_2(1) = z_3,\ z_2(0) = z_5\}. \quad (14)$$

我们的适定性结果如下。

定理1 考虑假设(h_1)和(h_2)，抽象问题(12)是适定的。换句话说，对于任意初始数据 $\mathcal{X}_0 \in \mathit{Dom}(\mathcal{A})$，抽象问题(12)存在唯一解，使得对于任意$t \geq 0$, $\mathcal{X}(t) \in \mathit{Dom}(\mathcal{A}) \subset X_s$ 以及

$$\mathcal{X} \in C^0([0,\infty); Dom(A)) \cap C^1([0,\infty); X_w), \quad (15)$$

X_w 是弱解的状态空间，也是所考虑的希尔伯特空间，并在(10)中定义。 X_s 是强解的状态空间，并在(11)中定义。

此外，对于所有初始数据 $\mathcal{X}_0 \in X_w$，抽象问题(12)存在一个弱解 $\mathcal{X}(t) \in X_w$，其形式为

$$\mathcal{X}(t) = S(t)\mathcal{X}_0, \quad (16)$$

其中， S 是由无界算子 A生成的 C_0-半群。此外，有

$$\mathcal{X} \in C^0([0,\infty); X_w). \quad (17)$$

证明基于构造一个变换，使抽象问题与一个线性极大单调算子相关联。然后得出结论

利用 Hille-Yosida定理。关于弱解的部分基于以下事实：Dom($\mathcal{A}$) 在 X_w 中稠密，因此 $S(t)$ 定义了一个从 X_w 到 X_w 的强连续映射。详情见附录 A。状态为

$$\mathcal{X}(t) := [u(t,\cdot),\ u_t(t,\cdot), \\ \eta_1(t),\ \eta_2(t),\ \xi_1(t)] \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \subset X_s. \quad (18)$$

我们将方程 (9) 的解的能量 E_u 定义为 $\forall t \geq 0$

$$E_u(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t(t,x)^2 + a(x)u_x(t,x)^2)\,dx. \quad (19)$$

注意，此能量在常数平移下保持不变，即若 $u - v$ 是常值函数，则有 $E_u = E_v$。此外，绝对连续函数$u(\cdot, 1) - \eta_2(\cdot)$ 沿着方程 (9) 的一条轨道保持为常数，且等于 u_*，其中

$$u_* := u_0(1) - \eta_2(0). \quad (20)$$

我们的目标是证明轨道相对于以下吸引子的指数稳定性

$$S := \{z \in X_w,\ z_1(\cdot) = d, d \in \mathbb{R},\ z_2(\cdot) = 0, \\ z_3 = 0,\ z_4 = 0,\ z_5 = 0\}. \quad (21)$$

该吸引子是以下泛函的核

$$\Gamma(\mathcal{X}(t)) := \int_0^1 [u_t^2(t,x) + u_x^2(t,x)]dx \\ + \eta_1^2(t) + \eta_2^2(t) + \xi_1^2(t), \quad (22)$$

事实上，该结论成立

$$\Gamma(z) = 0 \Leftrightarrow z \in S. \quad (23)$$

我们建立如下结果。

定理 2 考虑满足假设 (9) (h_1)、(h_2)、(h_3)的 ***1D*** 波动方程，并满足 α_2、 $\alpha_1 > 0$。那么，存在正常数 ρ 和正常数M，使得对于每个弱解 $\mathcal{X}$，均有，

$$\Gamma(\mathcal{X}(t)) \leqslant M\Gamma(\mathcal{X}(0))e^{-\rho t}. \quad (24)$$

并且该系统以指数稳定的方式趋向吸引子 S。

此外，当 t 趋于无穷大时，$\max_{x\in[0,1]} |u(t,x) - u_*|$ 呈指数趋于零，其衰减率大于或等于 ρ。

定理 3 在假设 (h_1)-(h_2)下，对于任意$k_i = \alpha_2 > 0$和 β_1, $\mu_1 > 0$，定理 *2* 的结论仍然成立，如果

$$\alpha_1 > \frac{-\beta_1\kappa_2}{2a(1)} + \kappa_1\kappa_2, \tag{25}$$

$$\gamma_1 > \frac{-\mu_1\kappa_2}{2a(0)} + \kappa_1\kappa_2, \tag{26}$$

其中

$$\kappa_1 := \frac{1}{\underline{a}}\big(3\overline{a} + \frac{\|a_x\|_{L^\infty}}{2} + \frac{\overline{q}}{2}\big), \tag{27}$$

$$\kappa_2 := \frac{2}{\underline{q}}(1 + \frac{\overline{q}}{2} + \kappa_1). \tag{28}$$

注 1 α_1 与 ν 之间的联系在下方的(9)中定义。特别是，这个定理意味着(24)以稳健的方式成立，并且对于某些 μ_1、 $a(\cdot)$和 $q(\cdot)$取值，甚至允许在未受控边界处存在小幅反阻尼。

3 定理 2 的证明

证明遵循一种标准策略：首先，通过确定满足适当微分不等式的李雅普诺夫函数，证明强解情形下的结果；然后通过经典的稠密性论证将其推广到弱解。因此，在下文中，假设方程 (9) 的解均为强解。

我们先考察强解沿时间方向的导数。对于 E_u ，有

$$\begin{aligned}\dot{E}_u = &-\int_0^1 qu_t^2\,dx + a(1)\eta_1(t)u_x(t,1)\\ &- a(0)\xi_1(t)u_x(t,0).\end{aligned} \tag{29}$$

利用 (9d) 和 (9e) 后，对于 $t \geq 0$，还有

$$\begin{aligned}a(1)\eta_1(t)u_x(t,1) &= -\frac{a(1)}{\beta_1}\eta_1(t)\Big(\dot{\eta}_1(t) + \alpha_1\eta_1(t)\\ &\quad + \alpha_2\eta_2(t)\Big)\\ &= -\frac{d}{dt}\Big(\frac{a(1)}{2\beta_1}(\eta_1^2(t) + \alpha_2\eta_2^2(t))\Big)\\ &\quad - \frac{a(1)\alpha_1}{\beta_1}\eta_1^2(t).\end{aligned} \tag{30}$$

类似地，在使用 (9f) 后，对于 $t \geq 0$，也有：

$$\begin{aligned}-a(0)\xi_1(t)u_x(t,0) &= -\frac{a(0)}{\mu_1}\xi_1(t)\Big(\dot{\xi}_1(t) + \gamma_1\xi_1(t)\Big)\\ &= -\frac{d}{dt}\Big(\frac{a(0)}{2\mu_1}\xi_1^2(t)\Big) - \frac{a(0)\gamma_1}{\mu_1}\xi_1^2(t).\end{aligned} \tag{31}$$

为 $t \geq 0$ 定义

$$F(\mathcal{X}(t)) := E_u(t) + \frac{a(1)}{2\beta_1}\eta_1^2(t) + \frac{a(0)}{2\mu_1}\xi_1^2(t). \tag{32}$$

然后，综合式 (29)、(30) 和 (31)，可得对于 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(F + \frac{a(1)\alpha_2}{2\beta_1}\eta_2^2(t)\Big) &= -\int_0^1 qu_t^2\,dx\\ &\quad - \frac{a(1)\alpha_1}{\beta_1}\eta_1^2(t) - \frac{a(0)\gamma_1}{\mu_1}\xi_1^2(t).\end{aligned} \tag{33}$$

为了证明指数稳定性，我们还需要在 u_x^2 和 η_2^2 中得到一个负项。接下来，我们考虑一个附加项，并将在下文中将其加入候选李雅普诺夫函数。由式 (20) 可知

$$\eta_2(t) = u(t,1) - u_*, \quad t \geq 0. \tag{34}$$

Set

$$\xi_2(t) := u(t,0) - u_*, \quad t \geq 0. \tag{35}$$

对于 $t \geq 0$，有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 (u-u_*)u_t\,dx\Big) = \int_0^1 u_t^2 + \int_0^1 (u-u_*)u_{tt}\\ &= \int_0^1 u_t^2 + \int_0^1 (u-u_*)(au_x)_x - \int_0^1 q(u-u_*)u_t\\ &= \int_0^1 u_t^2 - \int_0^1 au_x^2 - \frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 \frac{q}{2}(u-u_*)^2\,dx\Big)\\ &\quad + a(1)\eta_2u_x(t,1) - a(0)\xi_2u_x(t,0).\end{aligned} \tag{36}$$

利用 (9d) 和 (9f)，经过与推导 (30) 和 (31) 类似的计算，可得对于 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\eta_2u_x(t,1) =& \frac{-\alpha_2\eta_2^2(t) + \eta_1^2(t)}{\beta_1}\\ &- \frac{d}{dt}\Big(\frac{\frac{\alpha_1}{2}\eta_2^2(t) + \eta_1(t)\eta_2(t)}{\beta_1}\Big),\end{aligned} \tag{37}$$

$$-\xi_2u_x(t,0) = \frac{\xi_1^2(t)}{\mu_1} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\frac{\gamma_1}{2}\xi_2^2(t) + \xi_2(t)\xi_1(t)}{\mu_1}\Big). \tag{38}$$

接下来，我们为 $t \geq 0$ 定义

$$\begin{aligned}W(\mathcal{X}(t)) = &\int_0^1 (u-u_*)u_t\,dx + \int_0^1 \frac{q}{2}(u-u_*)^2\,dx\\ &+ \frac{a(1)}{\beta_1}\Big(\frac{\alpha_1}{2}\eta_2^2(t) + \eta_2(t)\eta_1(t)\Big)\\ &+ \frac{a(0)}{\mu_1}\Big(\frac{\gamma_1}{2}\xi_2^2(t) + \xi_2(t)\xi_1(t)\Big).\end{aligned} \tag{39}$$

综合 (36)、(37) 和 (38)，对于 $t \geq 0$，有

$$\begin{aligned}\dot{W} =& -\int_0^1 a u_x^2 - \frac{a(1)\alpha_2}{\beta_1}\eta_2^2(t) + \int_0^1 u_t^2 \\ &+\frac{a(1)}{\beta_1}\eta_1^2(t) + \frac{a(0)}{\mu_1}\xi_1^2(t). \end{aligned} \tag{40}$$

最后，我们定义用于证明定理 2 的候选李雅普诺夫函数 V，对于某个常数 ℓ，该函数是正定的，使得 $\sqrt{2q} > \ell > 0$，其定义为

$$\begin{aligned}V(\mathcal{X}(t)) =& F(\mathcal{X}(t)) + \frac{a(1)\alpha_2}{2\beta_1}\eta_2^2(t) \\ &+ \ell W(\mathcal{X}(t)), \quad \geq 0. \end{aligned} \tag{41}$$

结合 (32) 和 (39)，对于 $t \geq 0$，有，

$$\begin{aligned}V(\mathcal{X}(t)) =& E_u(t) \\ &+ \ell \int_0^1 \Big((u-u_*)u_t + \frac{q}{2}(u-u_*)^2\Big)\, dx \\ &+ \frac{a(1)}{2\beta_1}\Big(\eta_1^2 + \alpha_2\eta_2^2 + \ell(2\eta_2\eta_1 + \alpha_1\eta_2^2)\Big) \\ &+ \frac{a(0)}{2\mu_1}\Big(\xi_1^2 + \ell(2\xi_2\xi_1 + \gamma_1\xi_2^2)\Big). \end{aligned} \tag{42}$$

同理，结合 (33) 和 (40)，对于 $t \geq 0$，有，

$$\begin{aligned}\dot{V} =& -\int_0^1 (\frac{q}{2} - \ell)u_t^2\, dx - \ell\int_0^1 a u_x^2\, dx \\ &- \frac{a(1)}{\beta_1}\Big((\alpha_1 - \ell)\eta_1^2 + \alpha_2\ell\eta_2^2\Big) \\ &- \frac{a(0)(\gamma_1 - \ell)}{\mu_1}\xi_1^2. \end{aligned} \tag{43}$$

与 F 相比，在 (42) 中定义 V 的目的是使 u_x^2 和 η_2^2 中出现负项。接下来，我们将泛函 V 与在 (22) 中定义的泛函 Γ 进行比较。

命题 1 采用上述记号，并设 Γ 定义于 (22)，则存在 $\ell > 0$ 以及两个正常数c、C、$\rho > 0$，使得对于每个强解 $\mathcal{X}(t)$，满足(9)，当 $t \geq 0$ 时，有

$$c\Gamma(\mathcal{X}(t)) \leq V(\mathcal{X}(t)) \leq C\Gamma(\mathcal{X}(t)), \tag{44}$$

$$\dot{V}(\mathcal{X}(t)) \leq -C\rho\Gamma(\mathcal{X}(t)). \tag{45}$$

注 2 将 α_1 和 α_2 用作调节参数，可以证明其必要条件是

$$\dot{V}(\mathcal{X}(t)) \leqslant -C\rho\Gamma(\mathcal{X}(t)). \tag{46}$$

是

$$C\rho < \min\{\frac{\underline{a}\underline{q}}{4},\ \underline{a}\sqrt{2\underline{q}},\ \frac{\underline{a}a(0)\gamma_1}{a\mu_1 + a(0)}\}. \tag{47}$$

该上界可由以下不等式推出，这些不等式取自 (43) 以及 V 为正定的条件。

$$\sqrt{2\underline{q}} > \ell \tag{48}$$

$$\frac{q}{2} - \ell > C\rho \tag{49}$$

$$\ell a > C\rho \tag{50}$$

$$\frac{a(0)(\gamma_1 - \ell)}{\mu_1} > C\rho \tag{51}$$

此外，由于 c 和 C 不依赖于 q，衰减率 ρ成立。

$$\rho \underset{\underline{q}\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{52}$$

所提出的方法只能让我们在 $q = 0$时得出稳定性结论，在这种情况下，我们可以止步于(33)。不过，按照 *[33]* 或 *[6]*，我们可以利用 ***LaSalle*** 不变性原理证明渐近稳定性。此外，如果 $\alpha_2 = 0$，在没有积分器的情况下，该系统可视为 *[4,* 定理 *1*的一个一维特例*2],* ，因此其衰减率至少为对数级。

证明。 利用(20)和(32)可以看出，对于每个 $t \geq 0$ 和 $x \in [0,1]$，都有

$$\begin{aligned}|u(t,x) - u_*|^2 &\leq 2|u(t,x) - u(t,1)|^2 + 2\eta_2^2(t) \\ &\leq 2\int_0^1 u_x^2(t,x)\, dx + 2\eta_2^2(t) \\ &\leq \frac{4}{\underline{a}}E_u(t) + 2\eta_2^2(t), \end{aligned} \tag{53}$$

由此立即可得，对于 $t \geq 0$,

$$\int_0^1 (u-u_*)^2\, dx \leq \frac{4}{\underline{a}}E_u(t) + 2\eta_2^2(t), \tag{54}$$

$$\xi_2^2(t) \leq \frac{4}{\underline{a}}E_u(t) + 2\eta_2^2(t). \tag{55}$$

(44)的证明现在依赖于(42)、(54)和(55)的结合、若干次配方以及柯西-施瓦茨不等式。至于(45)的论证，则可类似地利用(43)、(54)和(55)得到,

依靠命题 1，我们完成了定理 2 的证明。

由 (44) 和 (45) 可知， $\dot{V} \leq -\rho V$ 因此， V 以速率 ρ 指数衰减；得益于 (45)， Γ也有类似的结论。利用 (53) 后，定理 2 的所有内容均得以证明。

4 定理 2 证明的讨论

存在一些情形，使得一维线性波不会指数衰减。例如，系统的解u

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & (56a) \\ u(t,0) = 0, & (56b) \\ u_{tt}(t,1) = -u_x(t,1) - u_t(t,1), & (56c) \end{cases}$$

不会指数收敛到原点，见[23, 第 4] 节。它遵循 t^{-1} 尖锐衰减率。增添或抑制一项会使衰减率大为不同，例如

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = (au_x)_x(t,x), \quad \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & (57a) \\ u_{tt}(t,0) = u_x(t,0), & (57b) \\ u_{tt}(t,1) = -u_x(t,1) - u_t(t,1) - u(t,1) \\ \qquad\qquad - u_{xt}(t,1), & (57c) \end{cases}$$

是指数稳定的 [25],而

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = (au_x)_x(t,x), \quad \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & (58a) \\ u_{tt}(t,0) = u_x(t,0), & (58b) \\ u_{tt}(t,1) = -u_x(t,1) - u_t(t,1) - u(t,1), & (58c) \end{cases}$$

不是指数稳定的，见 [6]。然而，方程 (57) 的解需要更高的正则性，见 [25]。以下两个系统的能量

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & (59a) \\ u_x(t,0) = u_t(t,0), & (59b) \\ u_x(t,1) = -u_t(t,1), & (59c) \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & (60a) \\ u_x(t,0) = u_t(t,0), & (60b) \\ u_{tt}(t,1) = -u_x(t,1) - u_t(t,1), & (60c) \end{cases}$$

呈指数衰减 [34]。通常，对于前述两种情况，都可以通过能量/李雅普诺夫方法，利用如下形式的交叉项获得指数衰减和稳定性。

$$\int_0^1 (1+x) u_t u_x dx, \tag{61}$$

这样一来，能量/李雅普诺夫泛函的导数中就会出现 u_x^2 和 u_t^2 等负项。前述项意味着边界项具有如下形式

$$\left[u_x^2 + u_t^2\right]_{x=0}^1, \tag{62}$$

在 (59b)-(59c) 或 (60b)-(60c) 的情形下，我们能够处理这一项。然而，同时考虑边界条件 (9d) 和 (9f) 时，这一项便难以处理。事实上，即使当 $\alpha_2 = 0$ 时，我们也无法处理在 0 和 1 处的项 u_x^2。在 [33] 中，通过采用更一般形式的 $u_x u_t$交叉项，并考虑一大类重新表述，例如双曲型 PDE，恰当地展示了在同时具有两个动态边界条件时处理项 u_x^2 的这一困难。

特别地，如果区域上存在阻尼位置项（u），项（62）也可以得到处理。事实上，在这种情况下，该项使我们能够使用如下交叉项:

$$\int_0^1 u u_t, \tag{63}$$

在第 [32, 章 9]中，证明了具有动态边界条件且处处存在速度和位置阻尼的线性波动方程在原点处的指数稳定性。我们强调，本文研究的是速度调节问题，该问题已转化为速度指数稳定性问题。式（63）与我们提出的项很接近。

$$\int_0^1 (u - u_*) u_t, \tag{64}$$

这主要对应于对系统中 u 极限值的先验知识。之所以能够做到这一点，是因为系统的积分器部分捕捉了状态与吸引子之间的距离。在我们的情形下，由于 q 严格为正，因此可以添加这一项，见 (36)。

5 定理 3 的证明

我们从定理 2 的证明中式 (43) 开始，然后使用分部积分计算以下交叉项的导数。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 (1-2x) u_x u_t \, dx \Big) &= -\frac{a(1)u_x^2(t,1) + a(0)u_x^2(t,0)}{2} \\ &+ \int_0^1 (2a + \frac{(a(1-2x))'}{2}) u_x^2 - \frac{\eta_1^2(t) + \xi_1^2(t)}{2} dx \\ &+ \int_0^1 u_t^2 \, dx - \int_0^1 (1-2x) q u_x u_t \, dx. \end{aligned} \tag{65}$$

上述交叉项可用于引入关于 η_1^2 和 ξ_1^2 的负项，但代价是产生关于 u_t^2 和 u_x^2 的正项。

考虑到 $|\ell_2| < \sqrt{a}$，则

$$G_u = V_u + \ell_2 \int_0^1 (1-2x) u_x u_t \, dx, \tag{66}$$

为正。

综合式 (43) 和 (65)，并应用杨氏不等式，沿着 G_u 的轨迹，其导数为

$$\begin{aligned}\dot{G}_u \leq & -\int_0^1 (\frac{q}{2} - \ell - \ell_2 - \ell_2 \frac{q}{2}) u_t^2 \, dx \\ & - \int_0^1 (\ell a - \ell_2 (2a + \frac{(a(1-2x))'}{2}) - \ell_2 \frac{q}{2}) u_x^2 \, dx \\ & - \Big(\frac{a(1)}{\beta_1}(\alpha_1 - \ell) + \frac{\ell_2}{2} \Big) \eta_1^2 - (\frac{a(0)(\gamma_1 - \ell)}{\mu_1} + \frac{\ell_2}{2}) \xi_1^2 \\ & - \frac{a(1)}{\beta_1} \alpha_2 \ell \eta_2^2 \end{aligned} \tag{67}$$

若满足以下不等式，则指数稳定性仍然成立

$$\frac{\underline{q}}{2} - \ell - \ell_2 (1 + \frac{\overline{q}}{2}) > 0, \tag{68}$$

$$\ell \underline{a} - \ell_2 (3\overline{a} + \frac{\overline{a'}}{2} + \frac{\overline{q}}{2}) > 0, \tag{69}$$

$$2a(1)(\alpha_1 - \ell) + \beta_1 \ell_2 > 0, \tag{70}$$

$$2a(0)(\gamma_1 - \ell) + \mu_1 \ell_2 > 0. \tag{71}$$

使前述四个不等式成立的一个充分条件是

$$\ell_2 < \kappa_2, \tag{72}$$

$$\ell > \kappa_1 \kappa_2, \tag{73}$$

$$2a(1)(\alpha_1 - \kappa_1 \kappa_2) + \beta_1 \kappa_2 > 0, \tag{74}$$

$$2a(0)(\gamma_1 - \kappa_1 \kappa_2) + \mu_1 \kappa_2 > 0. \tag{75}$$

其中 κ_1 和 κ_2 在式 (27)–(28) 中定义。证明至此完成。

6 无扰动情况下零输入系统的指数稳定性。

下面我们研究并证明相关问题的结果。首先考虑一个满足狄利克雷边界条件和二阶动态边界条件的波动方程。第二个系统是在动力学边界条件中加入积分作用。第三个也是最后一个系统由具有两个二阶动态边界条件的波动方程构成，对应于无扰动的零输入系统。

命题 2 考虑以下一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - (a u_x)_x = -q u_t, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,1), & \text{(76a)} \\ u_t(t,1) = \eta_1(t), & \text{(76b)} \\ \dot{\eta}_1(t) = -\alpha_1 \eta_1(t) - \beta_1 u_x(t,1), & \text{(76c)} \\ u(t,0) = 0, \quad t \geq 0, & \text{(76d)} \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1, \quad on\ (0,1), & \text{(76e)} \\ \eta_1(0) = \eta_0. & \text{(76f)} \end{cases}$$

其中 $a(\cdot)$、$q(\cdot)$ 分别满足(h_1)-(h_2)，且 α_1 和β_1 均严格为正。

该系统的状态为

$$\mathcal{X}_2(t) = [u(t,\cdot),\, u_t(t,\cdot),\, \eta_1(t)] \in Dom(\mathcal{A}_2), \tag{77}$$

其中 $\mathcal{A}_2$ 是与(76)相关联的无界算子。区域定义为

$$Dom(\mathcal{A}_2) = \{ z \in X_{2,s},\, z_1(0) = 0,\, z_2(1) = z_3 \}, \tag{78}$$

其中$X_{2,s}$ 是强解空间，而 $X_{2,w}$ 是定义如下的弱解空间

$$X_{2,s} = H^2 \times H^1 \times \mathbb{R}, \tag{79}$$

$$X_{2,w} = H^1 \times L^2 \times \mathbb{R}. \tag{80}$$

最后，考虑

$$\begin{aligned}\Gamma_2(\mathcal{X}_2(t)) = & \int_0^1 (u_t^2(t,x) + u_x^2(t,x)) dx \\ & + \eta_1^2(t). \end{aligned} \tag{81}$$

那么，存在一个正常数 ρ 和一个正常数 M，使得对于每个弱解 $\mathcal{X}_2$，都有

$$\Gamma_2(\mathcal{X}_2(t)) \leqslant M \Gamma_2(\mathcal{X}_2(0)) e^{-\rho t}. \tag{82}$$

并且系统朝着 $X_{2,\ w}$ 的原点指数稳定。

此外，当 t 趋于无穷大时，$\max_{x \in [0,1]} |u(t,x)|$ 指数趋于零，且衰减率大于或等于 ρ。

以下系统是在式（76）的动态边界处考虑积分部分时得到的。

命题3 考虑以下一维波动方程——

tion,

$$\begin{cases} u_{tt}-(au_x)_x=-qu_t, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times(0,1), & (83a)\\ u_t(t,1)=\eta_1(t), & (83b)\\ \dot{\eta}_1(t)=-\alpha_1\eta_1(t)-\alpha_2\eta_2(t)-\beta_1u_x(t,1), & (83c)\\ \dot{\eta}_2(t)=\eta_1(t), & (83d)\\ u(t,0)=0, \quad t\geq 0, & (83e)\\ u(0,\cdot)=u_0, \quad u_t(0,\cdot)=u_1, \quad on\ (0,1), & (83f)\\ \eta_1(0)=\eta_0, \quad \eta_2(0)=\eta_{2,0}. & (83g) \end{cases}$$

其中 $a(\cdot)$、 $q(\cdot)$ 分别满足(h_1)-(h_2)，且 α_1、 α_2和 β_1 均严格为正。

对于 $x\in[0,1]$，定义

$$v(x):=C_2\int_0^x\frac{ds}{a(s)}, \tag{84}$$

$$C_2:=\frac{a(1)\alpha_2}{a(1)\alpha_2\int_0^1\frac{ds}{a(s)}+\beta_1}u_*(1). \tag{85}$$

该系统的状态为

$$\mathcal{X}_3(t)=[u(t,\cdot),\,u_t(t,\cdot),\,\eta_1(t),\,\eta_2(t)]\in Dom(\mathcal{A}_3), \tag{86}$$

其中 $\mathcal{A}_3$ 是与(83)相关联的无界算子。区域定义为

$$Dom(\mathcal{A}_3)=\{z\in X_{3,s},\,z_1(0)=0,\,z_2(1)=z_3\}, \tag{87}$$

其中$X_{3,s}$ 是强解空间，而 $X_{3,w}$ 是定义如下的弱解空间

$$X_{3,s}=H^2\times H^1\times\mathbb{R}^2, \tag{88}$$

$$X_{3,w}=H^1\times L^2\times\mathbb{R}^2. \tag{89}$$

最后，考虑

$$\Gamma_3(\mathcal{X}_2(t))=\int_0^1((u(t,x)-v(x))^2+u_t^2(t,x)+u_x^2(t,x))dx+\eta_1^2(t)+(\eta_2(t)-\frac{\beta_1C_2}{a(1)\alpha_2})^2. \tag{90}$$

那么，存在正常数 ρ 和正常数 M，使得对于任意弱解 $\mathcal{X}_2$，均有

$$\Gamma_3(\mathcal{X}_3(t))\leqslant M\Gamma_3(\mathcal{X}_3(0))e^{-\rho t}. \tag{91}$$

并且该系统关于由 *ker*（Γ_3（$\cdot$）定义的吸引子指数稳定。

此外，当 t 趋于无穷时，$\max_{x\in[0,1]}|u(t,x)-v(x)|$ 以大于或等于 ρ的衰减率指数趋于零。

现在我们考虑 $\alpha_2=0$ 在（9）中的情形。该系统已在 [4], 中以更一般的多维框架进行了研究，作者在较弱的假设下证明了对数衰减率。

命题4 考虑以下一维波动方程，

$$\begin{cases} u_{tt}-(au_x)_x=-qu_t,\ (t,x)\in\mathbb{R}^+\times(0,1), & (92a)\\ u_t(t,1)=\eta_1(t), & (92b)\\ u_t(t,0)=\xi_1(t), & (92c)\\ \dot{\eta}_1(t)=-\alpha_1\eta_1(t)-\beta_1u_x(t,1), & (92d)\\ \dot{\xi}_1(t)=-\gamma_1\xi_1(t)+\mu_1u_x(t,0), & (92e)\\ u(0,\cdot)=u_0, \quad u_t(0,\cdot)=u_1 \quad on\ (0,1), & (92f)\\ \eta_1(0)=\eta_0, \quad \xi_1(0)=\xi_0. & (92g) \end{cases}$$

其中 a（$\cdot$）、q（$\cdot$）分别满足（h_1）-（h_2），且 α_1、 β_1、 γ_1 和 μ_1 均为正常数。该系统的状态为

$$\mathcal{X}_4(t)=[u(t,\cdot),\,u_t(t,\cdot),\,\eta_1(t),\,\xi_1(t)]\in Dom(\mathcal{A}_4), \tag{93}$$

其中 $\mathcal{A}_4$ 是与（92）相关联的无界算子。其区域定义为

$$Dom(\mathcal{A}_4)=\{z\in X_{3,s};\ z_2(0)=z_4,\,z_2(1)=z_3\}, \tag{94}$$

其中 $X_{3,\ s}$ 是强解空间，而 $X_{3,\ w}$是弱解空间，两者均定义于（88）-（89）。最后，考虑

$$\Gamma_4(\mathcal{X}_4(t))=\int_0^1(u_t^2(t,x)+u_x^2(t,x))dx+\eta_1^2(t)+\xi_1^2(t). \tag{95}$$

那么，存在正常数 ρ 和正常数 M，使得对于每个弱解 $\mathcal{X}_4$，都有

$$\Gamma_4(\mathcal{X}_4(t))\leqslant M\Gamma_4(\mathcal{X}_4(0))e^{-\rho t}. \tag{96}$$

并且，该系统向由下式定义的吸引子 S_4 指数稳定：

$$S_4=\{z\in X_{3,w},\ z_1(\cdot)=d,d\in\mathbb{R},\,z_2(\cdot)=0,\ z_3=0,\,z_4=0\}. \tag{97}$$

它是 $\Gamma_4(\cdot)$ 的核。

此外，存在 u_*，使得 $\max_{x\in[0,1]}|u(t,\ x)-u_*|$ 在 t 趋于无穷时指数趋于零。

证明。

我们首先证明命题 2。和之前一样，论证基于一个适当的李雅普诺夫函数

$\bar{V}_u = F_u + \ell W_u$ 其中 ℓ 是一个待选取的正常数，并且

$$\bar{F}_u(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 (u_t^2 + a u_x^2)\,dx + \frac{a(1)}{2\beta_1}\eta_1^2, \tag{98}$$

$$\bar{W}_u(t) := \int_0^1 u u_t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 q u^2\,dx + \frac{a(1)}{\beta_1}\eta_1 u(t,1) + \frac{a(1)\alpha_1}{2\beta_1}u(t,1)^2. \tag{99}$$

利用分部积分、(76c) 和 (76d)，可得

$$\dot{\bar{F}}_u(t) := -\int_0^1 (q u_t^2)\,dx - \frac{a(1)\alpha_1}{\beta_1}\eta_1^2, \tag{100}$$

$$\dot{\bar{W}}_u(t) := \int_0^1 u_t^2\,dx - \int_0^1 a u_x^2\,dx + \frac{a(1)}{\beta_1}\eta_1^2. \tag{101}$$

因此

$$\dot{\bar{V}}_u = -\int_0^1 (q-\ell)u_t^2\,dx - \ell\int_0^1 a u_x^2\,dx - \frac{a(1)}{\beta_1}(\alpha_1 - \ell)\eta_1^2. \tag{102}$$

取 $\ell > 0$ 足够小，并注意到由狄利克雷边界条件 (83e) 可知，对每个 $t \ge 0$ 和 $x \in [0,1]$

$$|u(t,x)|^2 = |u(t,x) - u(t,0)|^2 \le \int_0^1 u_x^2(t,x)\,dx \le 2E_u(t) \le 2\bar{F}_u(t). \tag{103}$$

接下来，通过建立命题 1 的一个类似结果，其中 Γ 和 V 分别替换为 Γ_2 和 $\bar{V}_u$，首先证明 $\dot{\bar{V}}_u \le -\rho \bar{V}_u$，从而得到对于某个与状态无关的正常数 ρ，有 $\bar{V}_u \le -\rho \bar{V}_u$；最后，按照定理 2 论证的最后一部分完成证明。

接下来证明命题3。采用命题中的记号，令

$$w(t,x) := u(t,x) - v(x), \quad t \ge 0,\ x \in [0,1],$$
$$\bar{\eta}_2(t) := \eta_2(t) + \frac{\beta_1 C_2}{a(1)\alpha_2}, \quad t \ge 0. \tag{104}$$

通过初等计算可以验证，w 是满足（83）的解，其对应于不同的初始条件，并在 $x = 0$ 处满足狄利克雷边界条件（因为 $v(0) = 0$），而边界条件由以下条件给出。

$$\dot{\eta}_1(t) = -\alpha_1\eta_1(t) - \alpha_2\bar{\eta}_2(t) - \beta_1 w_x(t,1), \tag{105}$$
$$\dot{\bar{\eta}}_2(t) = \eta_1(t). \tag{106}$$

成立。

$$w_*(1) := w(t,1) - \bar{\eta}_2(t) = u_*(1) - v(1) - \frac{\beta_1 C_2}{a(1)\alpha_2} = u_*(1) - C_2\Big(\int_0^1 \frac{ds}{a(s)} + \frac{\beta_1 C_2}{a(1)\alpha_2}\Big) = 0. \tag{107}$$

我们基本上已将问题简化为只需处理满足 (92) 的解，其在 $x = 0$ 处满足狄利克雷边界条件，并且还满足约束 $w_*(1) = 0$。在这种情况下，我们考虑候选 Lyapunov 函数 $\tilde{V}_w = \tilde{F}_w + \ell \tilde{W}_w$，其中 ℓ 是一个待选取的正常数，并且

$$\tilde{F}_w(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 (w_t^2 + a w_x^2)\,dx + \frac{a(1)}{2\beta_1}(\eta_1^2 + \alpha_2\bar{\eta}_2^2), \tag{108}$$

$$\tilde{W}_w(t) := \int_0^1 w w_t\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 q w^2\,dx + \frac{a(1)}{\beta_1}\Big(\frac{\alpha_1}{2}\bar{\eta}_2^2 + \eta_1\bar{\eta}_2\Big). \tag{109}$$

由此可得

$$\dot{\tilde{V}}_u = -\int_0^1 (q-\ell)w_t^2\,dx - \ell\int_0^1 a w_x^2\,dx - \frac{a(1)}{\beta_1}(\alpha_1 - \ell)\eta_1^2 - \ell\frac{a(1)\alpha_2}{\beta_1}\bar{\eta}_2^2, \tag{110}$$

其中我们反复用到了等式 $w(t,1) = \bar{\eta}_2(t)$。按照前面的做法，即可得出结论。

最后，我们证明命题4。与前面一样，该论证基于一个适当的李雅普诺夫函数 V_u，其定义将在后文给出。我们首先考虑式(32)中给出的 F，并注意到对于$t \ge 0$，有如下结论。

$$\dot{F} = -\int_0^1 q u_t^2\,dx - \frac{a(1)\alpha_1}{\beta_1}\eta_1^2(t) - \frac{a(0)\gamma_1}{\mu_1}\xi_1^2(t). \tag{111}$$

接下来沿着（92）的解计算如下时间导数

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 \Big(u(t,x) - u(t,1)\Big)u_t(t,x)\,dx\Big) = + \int_0^1 u_t^2\,dx - \int_0^1 q\big(u(t,x) - u(t,1)\big)u_t(t,x)\,dx + \Big(u(t,1) - u(t,0)\Big)a(0)u_x(t,0) - \int_0^1 a u_x^2\,dx - \eta_1\int_0^1 u_t(t,x)\,dx. \tag{112}$$

在上述方程中，我们利用（92e）消去 u_x（t，0），并得到 $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Big(u(t,1)-u(t,0)\Big)u_x(t,0)= \\
&+\Big(u(t,1)-u(t,0)\Big)\frac{\dot{\xi}_1+\gamma_1\xi_1}{\mu_1} \\
&=\frac{d}{dt}\Big(\Big(u(t,1)-u(t,0)\Big)\frac{\xi_1}{\mu_1}\Big) \\
&-(\eta_1-\xi_1)\frac{\xi_1}{\mu_1}+\frac{\gamma_1\xi_1}{\mu_1}\Big(u(t,1)-u(t,0)\Big). \qquad (113)
\end{aligned}$$

$t \geq 0$ 的设定

$$\begin{aligned}
G_u(t):=&\int_0^1\Big(u(t,x)-u(t,1)\Big)u_t(t,x)\,dx \\
&-\frac{a(0)\xi_1}{\mu_1}\Big(u(t,1)-u(t,0)\Big), \qquad (114)
\end{aligned}$$

由上述内容，我们推得沿着（92）的解有

$$\begin{aligned}
\dot{G}_u=&\int_0^1 u_t^2\,dx-\int_0^1 au_x^2\,dx-\frac{a(0)\xi_1}{\mu_1}(\eta_1-\xi_1) \\
&+\frac{a(0)\gamma_1\xi_1}{\mu_1}\Big(u(t,1)-u(t,0)\Big)-\eta_1\int_0^1 u_t(t,x)\,dx \\
&-\int_0^1 q\Big(u(t,x)-u(t,1)\Big)u_t\,dx. \qquad (115)
\end{aligned}$$

最后，我们回顾一下，存在一个正常数C_a（与（92）的解无关），使得对于$t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1|u_t|\,dx+&\max_{x\in[0,1]}|u(t,x)-u(t,1)| \\
&\leq\int_0^1(|u_t|+|u_x|)\,dx \\
&\leq C_aE_u^{1/2}(t). \qquad (116)
\end{aligned}$$

现在，对于 $\ell>0$ 足够小的情形，我们选择 $V_u=F+\ell G_u$。反复使用柯西-施瓦茨不等式，并将（116）代入（111）和（115），可知当 ε 和 ℓ 足够小时，（44）和（45）成立，由此可推出命题4的条目（i）。

最后，为了得到命题4的条目（ii），首先注意到u（t, 1）在 t 趋于无穷时存在极限 u_*，因为对于每个 t, $t'>0$ 都有 u（t,1）$-u$（t',1）$=\int_{t'}^t\eta_1$，并且 η_1 指数趋于零。现在利用（116）即可得到结论。

注 3 在我们所有结果的证明中，可以使用函数 G_u（尤其是积分项）来获得 E_u 的指数衰减以及 *Wentzell*边界条件的某些分量。然而，这并不能确定解 u 的极限 u_* 与初始条件之间的关系。特别地，我们无法刻画命题*4*中的 u_*。

还应注意，

$$u(t,x)-u(t,1)=-\int_x^1 u_x(t,s)ds. \qquad (117)$$

这可以与 u_x 的手段联系起来，因此，我们通过对力/力矩的平均值进行空间移动评估，扩展了我们的李雅普诺夫函数。事实上，u_x 与机械装置中的力矩或力有关。

7 数值格式与模拟 ns.

存在多种方法可以计算与偏微分方程 [42]相关的演化问题解的数值近似。在当前所考虑的情况下，谱方法由于动力学边界条件，需要在每个时间步估计基函数。这需要相当大的计算能力。由于空间中只有一个维度，有限元方法可化为具有（可能不等的）空间步长的有限差分方法。为了同时确保数值稳定性和良好的近似效果，有限差分方法的设计可能较为棘手。还应注意，也存在基于黎曼不变量 [2]的专用格式。这些格式具有良好的数值性质，但将其扩展到动态边界条件并不显然。

本文提出了一种新方法，该方法能够保证数值格式的稳定性，从而实现结构稳定性。该方法基于与波动方程相关的拉格朗日量的离散化。这种方法导出了一种特殊的有限差分格式。如前所述，波动方程的定常形式可以与一个拉格朗日量相关联。对于所考虑的情形 **(1)**（即定常情形，其中 $\nu=U(t)=f_c=\gamma_1=f_{ac}=0$），该拉格朗日量表示为

$$\begin{aligned}
L(v(t,\cdot))=&\int_0^1\frac{1}{2}(v_t^2(t,x)-a(x)v_x^2(t,x))dx \\
&+\frac{1}{2}(\frac{a(1)}{\beta_1}v_t(t,1)^2+\frac{a(0)}{\mu_1}v_t(t,0)^2). \qquad (118)
\end{aligned}$$

按照 [20] 中的策略和最小作用量原理，系统的动力学与一个驻定作用量相关。任意时间区间内的作用量为

$$I(v)=\int_{t_i}^{t_f}L(v(t,\cdot))dt. \qquad (119)$$

驻定作用量意味着一阶变分等于零

$$\delta I(v, \delta v) = 0, \tag{120}$$

其中，一阶变分定义为

$$\delta I(v, \delta v) = \delta I(v + \delta v) - \delta I(v) + O(\|\delta v\|^2). \tag{121}$$

计算得到以下驻定系统

$$\begin{cases} v_{tt} - (a v_x)_x = 0, \quad (x,t) \text{ in } \mathbb{R}^+ \times (0,1), & \text{(122a)} \\ v_{tt}(t,1) = -\beta_1 v_x(t,1), & \text{(122b)} \\ v_{tt}(t,0) = \mu_1 v_x(t,0). & \text{(122c)} \end{cases}$$

这是式（1）的驻定部分。按照惯例，随后加入最小作用量原理、耗散项和输入项，从而准确得到式（1）。现在考虑式（118）的离散版本

$$\begin{aligned} L_d(v_d(t)[\cdot]) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} & [\dot{v}_d(t)[i]^2 \\ & - \frac{a_{i-1}}{12} \left(\frac{v_d(t)[i] - v_d(t)[i-1]}{dx_i}\right)^2 \\ & - \frac{a_i}{3} \left(\frac{v_d(t)[i+1] - v_d(t)[i-1]}{dx_i + dx_{i+1}}\right)^2 \\ & - \frac{a_{i+1}}{12} \left(\frac{v_d(t)[i+1] - v_d(t)[i]}{dx_{i+1}}\right)^2] dx_i \\ & + \frac{1}{2} \frac{a_N}{\beta_1} \dot{v}_d(t)[N]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_0}{\mu_1} \dot{v}_d(t)[0]^2. \end{aligned} \tag{123}$$

对 v_x^2 中的积分部分使用辛普森 $1/3$ 法则进行近似。随后可以通过符号数值计算推导欧拉-拉格朗日方程。由此得到一个自治的驻定线性有限维系统:

$$E \ddot{v}_d(t) = A v_d(t), \tag{124}$$

其中 $\sigma(A) \in \mathbf{i}\mathbb{R}$。成立

$$E = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{\beta_1} \; dx_1 \; \ldots \; dx_{N-1} \; \frac{1}{\mu_1}\right]. \tag{125}$$

然后，我们加入由正定对称矩阵 R 表示的耗散项、源项（扰动与作用）以及观测项,

$$\begin{cases} E \ddot{v}_d(t) = A v_d(t) - R \dot{v}_d(t) + B U(t) + f_{et}, & \text{(126a)} \\ y(t) = C \dot{v}_d(t). & \text{(126b)} \end{cases}$$

with

$$f_{et}^T = \begin{bmatrix} f_c \; f_1 \; f_2 \; \ldots \; f_{ac} \end{bmatrix} \tag{127}$$

该矩阵表示扰动，并且

$$R = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \nu \; q_1 \; \ldots \; q_{N-1} \; \gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{128}$$

控制量 $U(t)$ 通过以下方式计算

$$\begin{cases} \dot{\eta}_v(t) = y(t) - y_{\text{ref}}, & \text{(129a)} \\ U(t) = -k_i \eta_v(t) - k_p(y(t) - y_{\text{ref}}). & \text{(129b)} \end{cases}$$

由于该离散化方案的主要思想是对能量进行良好近似，我们建议沿用这一思想，采用辛积分器格式，参见 [13] 及其中的参考文献。这些方法（如 Crank-Nicolson 方法）具有在时间演化过程中保持能量的性质。已知，对于具有位于$\mathbf{i}\mathbb{R}$ 中的特征值的系统，显式格式是不稳定的，而隐式格式是指数稳定的，参见[13]。由于我们的系统在结构上具有零特征值，辛数值离散格式往往能给出更好的近似效果。

辛格式的思想是将一个隐式格式与一个显式格式结合起来。这将得到

$$v_d[k+1] = v_d[k] + \Delta t \, \dot{v}_d[k+1], \tag{130}$$

$$\begin{aligned} E \dot{v}_d[k+1] = & E \dot{v}_d[k] + \Delta t \, A v_d[k] - \Delta t \, R \dot{v}_d[k+1] \\ & + \Delta t \, B U[k] + \Delta t f. \end{aligned} \tag{131}$$

第二行是隐式的，但 R 在我们的情形下是一个对角矩阵，因此相应的逆矩阵很容易计算

$$\begin{aligned} \dot{v}_d[k+1] = & (1 + \Delta t E^{-1} R)^{-1} (\dot{v}_d[k] + \Delta t \, E^{-1} A v_d[k] \\ & + \Delta t \, E^{-1} B U[k] + \Delta t E^{-1} f). \end{aligned} \tag{132}$$

需要注意最后一个方程中的几个关键点。首先，在 R 为正的情况下，项 $(1 + E^{-1}\Delta t R)^{-1}$ 对应于一个压缩映射，因此与耗散项相关。其次，在 R 表示反耗散项的情况下，存在一些离散步长$\frac{\Delta t}{dx}$，使得数值格式未定义。第三，当 $R = 0$时，这些方程是两步显式方程。输出调节问题数值模拟所选取的数值参数总结于表1中。

图1展示了输出调节问题的行为。我们观察到，系统的边界速度呈指数趋势趋近于恒定参考值。图2描绘了调节问题目标的时间响应。域内速度在 L^2 范数下收敛至参考值。这些时间响应对应的控制律见图3。目前尚不清楚如何选择控制增益，才能兼顾快速响应和鲁棒性。为了使控制更快趋于稳态而采用较高的积分器增益，可能会导致剧烈振荡。然而，正如所证明的，指数稳定性仍然成立。

符号	值	符号	值
N	199	f_c	-1
$a(x)$	$\sin(2x) + 2$	f_{ac}	1
$q(x)$	$.01 + .1x^2$	k_p	10
$f(x)$	$sin(2\pi x)$	$k_i = \alpha_2$	20
β_1	20	v_1^{ref}	5
μ_1	20	$v_d[\cdot]$	0
ν	1	$\dot{v}_d[0:N]$	0
γ_1	1	Δt	0.001

表1 仿真参数值。

图4以三维透视图的形式绘制了波动方程速度的时间响应。起初出现了一些显著振荡，行波在边界间来回传播；随后振荡迅速减弱，最后速度平稳地趋近于参考值。位置的时间响应见图5。恒定扰动的影响在该图中更为明显。图5中观察到的振荡主要是由扰动引起的，因为该扰动需要位置沿空间呈现特定分布。一旦形成这种特定分布，积分器便会补偿恒定扰动。最后一幅图，即图6，描绘了 $v_x(t,\ \cdot)$，它展示了扰动和域内阻尼的影响。速度的平滑收敛可与 $v_x(t,\ \cdot)$ 的行为进行比较。

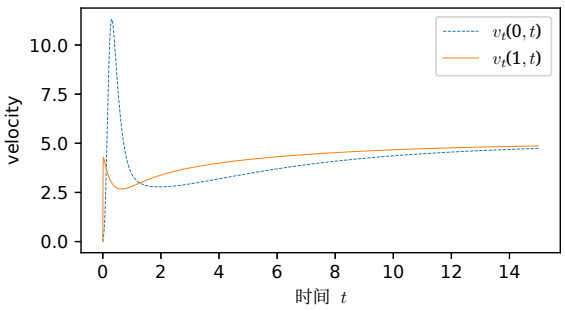

图1. 边界速度乘以响应。

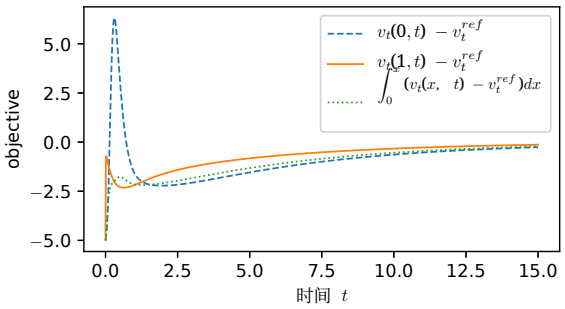

图 2. 目标的时间响应。

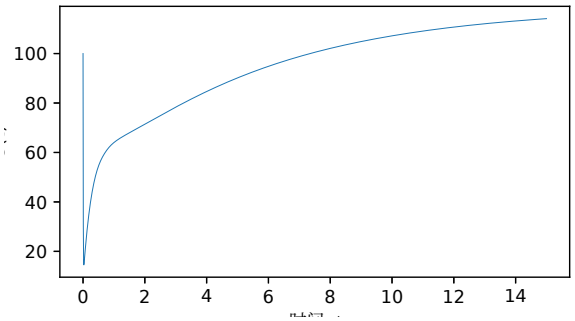

图 3. 控制律的时间响应。

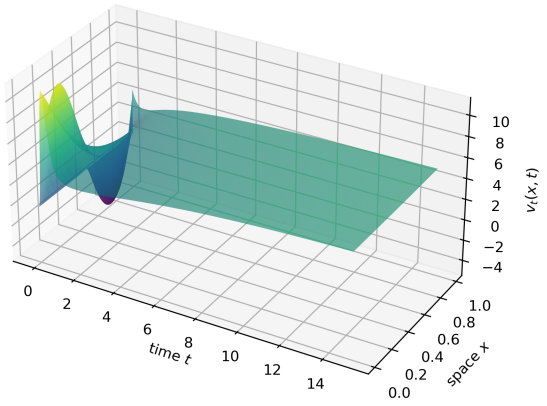

图 4. 分布式速度 $\dot{v}(t,\ x)$ 的时间响应。

8 结论

本文首次针对阻尼处处有效时满足各种动态（或 Wentzell）边界条件的一维阻尼波动方程，进行了系统的 Lyapunov 分析。作为一个特例，我们还通过 PI 控制为具有动态边界条件的波动方程提供了一种调节律。该控制律使系统以指数衰减率趋近于恒定参考值，并且恒定扰动的抑制。积分作用可能抑制扰动，这可以用内模原理来解释。数值仿真展示了存在未知扰动时闭环系统的行为。未来的工作将采用附录中研究的一些指数衰减系统作为目标系统，进行无限维反步控制设计。此外，人们也非常关注非线性项。例如，当阻尼像[17], 中那样呈非线性时会发生什么？我们甚至能否将结果推广到非线性波？

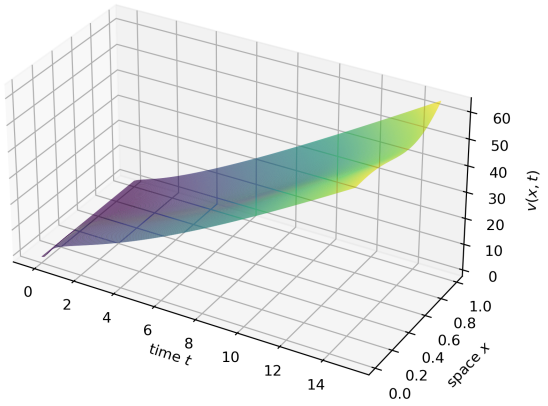

图 5. 分布式位置 $v(t,\ x)$ 时间响应。

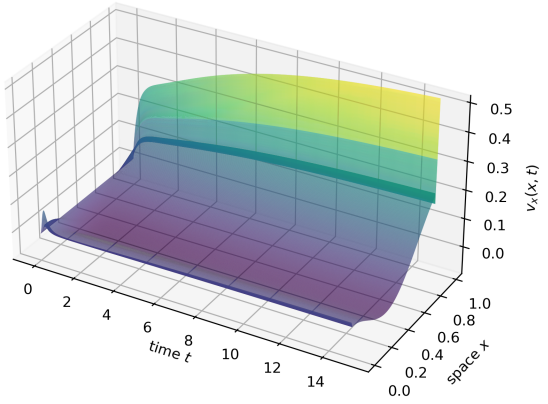

图 6. 分布式 $v_x(t,\ x)$ 时间响应。

as

$$u_{tt} = (\frac{a(x)u_x}{\sqrt{1+u_x^2}})_x - q(x)u_t. \tag{133}$$

此外，在实际应用中，人们非常关注研究具有动力学边界条件的波动方程，同时在与控制端相对的边界处存在非线性摩擦项，通常为 LuGre 摩擦项。

参考文献

[1] Matthieu Barreau、Fr´ed´eric Gouaisbaut 和 Alexandre Seuret。采用比例积分控制器的钻杆摩擦系统实用稳定性分析。 *IEEE Transactions on ControlSystems Technology*, 29(2): 620–634, 2021。[2] Sylvie Boldo、Fran¸cois Cl´ement、Jean-Christophe Filliˆatre、Micaela Mayero、Guillaume Melquiond 和 Pierre Weis。波动方程的数值求解：对一段 C 程序的全面机械化证明。 *Journal of AutomatedReasoning*, 50(4):423–456, 2013.[3] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. 施普林格科学与商业媒体, 2010.[4] R´emi Buffe. Ventcel 边界条件下波动方程的稳定化。 *Journal de Mathématiques Pures etAppliquées*, 108(2):207–259, 2017.[5] Michael B¨ohm, Miroslav Krstic, Sebastian K¨uchler, and Oliver Sawodny. 浸没于水中的悬垂缆索建模与边界控制。 *Journal of DynamicSystems, Measurement, and Control*, 136(1), 09 2013. 011006.[6] Francis Conrad and Abdelkrim Mifdal. 桥式起重机模型的强稳定性。 *Control and Cybernetics*, 27:363–374, 1998.[7] Jean-Michel Coron and Amaury Hayat. 一维非线性输运方程的比例积分控制器。 *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(11):4570–4582, 2019.[8]Brigitte D'Andr´ea-Novel, Fadi Boustany, and Francis Conrad. 桥式起重机控制：柔性结构的稳定化。载于 *Boundary control and boundary variation*, 第1–26页。Springer, 1992.[9]Brigitte D'Andr´ea-Novel, Fadi Boustany, and Francis Conrad. 桥式起重机控制：柔性结构的稳定化。 *Boundary Control and Boundary Variation*, 第1–26页, 1992.[10] Brigitte d'Andr´ea Novel, Fadi Boustany, Francis Conrad, and Bo Peng Rao. 混合偏微分方程—常微分方程系统的反馈稳定化：桥式起重机的应用。 *Mathematics ofControl, Signals and Systems*, 7:1–22, 1994.[11]Joachim Deutscher, Nicole Gehring, and Richard Kern. 一般线性异向双曲常微分方程—偏微分方程—常微分方程系统的输出反馈控制。 *Automatica*, 95:472–480, 2018.[12]Joachim Deutscher, Nicole Gehring, and Richard Kern. 空间变系数一般线性异向双曲偏微分方程—常微分方程系统的输出反馈控制。 *International Journal ofControl*, 92(10):2274–2290, 2019.[13]Denis Donnelly and Edwin Rogers. 辛积分器：简介。 *American Journal of Physics*, 73(10):938–945, 2005.[14] Brigitte d'Andr´ea Novel and Jean-Michel Coron. 通过反步法实现柔性缆索桥式起重机的指数稳定化。 *Automatica*, 36(4):587–593, 2000.[15] Nicolas Fourrier and Irena Lasiecka. 强阻尼及动态边界条件下波动方程的正则性与稳定性。 *Evolution Equations & Control Theory*, 2(4), 2013.[16]JS Gibson. 关于通过紧线性反馈稳定无限维线性振子的注记。 *SIAM Journalon Control and Optimization*, 18(3):311–316, 1980.[17]Martin Gugat. 电报方程的边界反馈稳定化：阻尼项趋于零时的衰减率。*Systems & Control Letters*, 66:72–84, 2014.[18] Yoram Halevi. 利用无限维传递函数控制由波动方程描述的柔性结构。 *Journal of Dynamic Systems, Measurement, andControl*, 127(4):579–588, 12 2004.[19] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*, 第132卷。施普林格科学与商业媒体, 2013.

[20]Mark Kot。 *A first course in the calculus of variations*，第72卷。美国数学学会，2014年。[21] Miroslav Krstic 和 Andrey Smyshlyaev。 *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs* 2008 。

SIAM，。[22]Hugo Lhachemi、Christophe Prieur 和 Emmanuel Tr´elat。一维半线性波动方程的比例积分调节控制。 *SIAM Journal on Control and Optimization* 60 1 1 21, 2022 ，（）：–。[23] Chan Li 、 Jin Liang 和 Ti-Jun Xiao。仅在非线性 Wentzel 边界上具有阻尼的波动方程的边界稳定化。 *Nonlinear Analysis*，164: 155–175，2017年。[24] Thomas Meurer 和 Andreas Kugi。具有动态边界条件的波动方程跟踪控制设计：压电堆执行器建模。 *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 21 5 542 ，（）：–562，2011年。[25] Abdelkrim Mifdal。混合系统的一致稳定化。 *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I - Mathematics* 324 1 37 42, 1997 ，（）：–。[26] Omer Morgul 、 Bo Peng Rao 和 Francis Conrad。关于带端部质量的缆索稳定化。 *IEEE Transactions on automatic control* 39 10 2140 2145, 1994 ，（）：–。[27] Lassi Paunonen。正则线性系统鲁棒输出调节的控制器设计。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 61 10 2974 ，（）：–2986，2015年。[28] Lassi Paunonen。无源线性系统的稳定性与鲁棒调节。 *SIAM Journal on Control and Optimization*，57 6 3827（）：–3856，2019年。[29] Lassi Paunonen 和 Seppo Pohjolainen。分布参数系统的内模理论。 *SIAM Journal on Control and Optimization* 48 7 4753 4775, 2010 ，（）：–。[30] Amnon Pazy。 *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* 44 ，第 卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[31]Bopeng Rao。弹性混合系统的一致稳定化。*SIAM Journal on Control and Optimization*，33 2 440 454，1995（）：。[32] Christophe Roman。 *Boundary control of a wave equation with in-domain damping* 。博士论文，格勒诺布尔阿尔卑斯大学，2018年。[33]Christophe Roman。二阶动态边界条件下波动偏微分方程的比例积分输出反馈。发表于*2022 10th International Conference on Systems and Control*，法国马赛，2022年11月。[34] Christophe Roman、Delphine Bresch-Pietri、Eduardo Cerpa、Christophe Prieur 和 Olivier Sename。存在区域内黏性阻尼时，针对反阻尼边界波动偏微分方程的反步观测器控制。发表于 *2018 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)* 549 ，第–554页，2016年。[35] Christophe Roman、Delphine Bresch-Pietri、Eduardo Cerpa、Christophe Prieur 和 Olivier Sename。具有不稳定源项和动态边界的波动偏微分方程反步控制。 *IEEE Control Systems Letters* 2 3 459 464, ，（）：–2018。[36] Christophe Roman 、 Francesco Ferrante 和 Christophe Prieur。基于实验边界数据的线性波动方程参数辨识。 *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 29 5 2166 2179, 2021 ，（）：–。[37] David Bou Saba 、 Federico Bribiesca-Argomedo 、 Michael Di Loreto 和 Damien Eberard。对与潜在不稳定的 2× 2 线性双曲偏微分方程进行反步稳定化，耦合……

不稳定的执行器和负载动力学。载于 *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*，第2498–2503页。IEEE，2017年。[38]Belem Saldivar、Sabine Mondi´e、Silviu-Iulian Niculescu、Hugues Mounier和Islam Boussaada。面向控制的油井钻探振动建模导览。 *Annual Reviews in Control* 42 100 ，：–113，2016年。[39] Marshall Slemrod。具有先验有界控制的希尔伯特空间中线性控制系统的反馈稳定化。*Mathematics of Control, Signals and Systems*，2(3):265–285，1989年9月。[40]Andrey Smyshlyaev、Eduardo Cerpa和Miroslav Krstic。具有域内反阻尼的一维波动方程的边界稳定化。 *SIAM Journal on Control and Optimization*，48 6 4014 4031，2010年（）：–。[41]Andrey Smyshlyaev和Miroslav Krstic。未受控边界上具有反阻尼的反稳定波动方程的边界控制。 *Systems & Control Letters*，58 8 617（）：–623，2009年。[42] Eitan Tadmor。非线性偏微分方程数值方法综述。 *Bulletin of the American Mathematical Society* 49 4 507 554, 2012 ，（）：–。[43] Luc Tartar。 *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces* 3 ，第卷。施普林格科学与商业媒体，2007年。[44] Alexandre Terrand-Jeanne、Vincent Andrieu、Val´erie Dos Santos Martins和Cheng-Zhong Xu。为开环指数稳定半群添加积分作用及其在偏微分方程系统边界控制中的应用。*Transactions on Automatic Control* 65 11 4481 4492, 2019 ，（）：–。[45]Alexandre Terrand Jeanne、Vincent Andrieu、Melaz Tayakout Fayolle和Valerie Dos Santos Martins。采用比例积分控制器对非齐次钻探模型进行调节。 *IEEE Transactions on Automatic Control*，65 1 58（）：–71，2019年。[46]Roberto Triggiani。紧扰动下非压缩半群缺乏一致稳定性。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，105 2 375（）：–383，1989年。[47] Nicolas Vanspranghe和Lucas Brivadis。无限维非线性系统的输出调节：一种针对压缩半群的前向方法。 *SIAM Journal on Control and Optimization* 61 4 2571 2594, 2023 ，（）：–。[48]Nicolas Vanspranghe、Francesco Ferrante和Christophe Prieur。具有非线性动态边界条件的波动方程的速度稳定化。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 67 12 6786 6793, 2022 ，（）：–。[49] Ji Wang和Miroslav Krstic。用于油井钻探和灾害救援的夹层式常微分方程–偏微分方程–常微分方程双曲系统的时滞补偿控制。 *Automatica*，120:109131，2020年。[50] Ji Wang和Miroslav Krstic。扩展类夹层式双曲偏微分方程–常微分方程系统的输出反馈控制。 *IEEE Transactions on Automatic Control* 66 6 2588 2603, ，（）：–。2020

定理1的证明

证明思路与[36]中所述相同。证明的关键是将式（13）中定义的算子$\mathcal{A}$分解为一个极大单调部分和一个剩余部分。我们应当能够通过双射变量代换消去剩余部分。最后，利用以下定理得出结论。

定理4（Hille-Yosida [3,定理7。4]）设$\mathcal{A}$ 是希尔伯特空间 H 上的极大算子，则对每个 $X_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ，都存在以下抽象问题的唯一解 X 。

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) + \mathcal{A}X(t) = 0, & \text{(A.1a)} \\ X(0) = X_0. & \text{(A.1b)} \end{cases}$$

with

$$X \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})). \tag{A.2}$$

现在考虑以下算子

$$\forall z \in \mathcal{D}(G),\ Gz = \begin{bmatrix} -z_2 \\ -(az_1')' + z_2 + z_1 \\ \beta_1\, z_1'(1) \\ 0 \\ -\mu_1\, z_1'(0) \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

以及以下矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -q+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

G 的区域等于 $\mathcal{A}$的区域。由此得到

$$\mathcal{A} = G + B. \tag{A.5}$$

G是一个单调部分，这一点将在下面的引理中得到证明，而 B 是一个有界算子。

引理5 在(A.3) 中定义的无界线性算子 G 是定义在(11)中的 X_w 上的极大单调算子。

证明。 考虑以下内积：

X_w

$$\begin{aligned} \langle z,\, q\rangle = &\int_0^1 (z_1\nu + z_2 q_2 + a z_1'\nu')dx + \\ &\frac{a(1)}{\beta_1} z_3 q_3 + z_4 q_4 + \frac{a(0)}{\mu_1} z_5 q_5, \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} \langle z,\, Gz\rangle = &\int_0^1 [-z_1 z_2 + z_2(-(az_1')' + z_2 + z_1) \\ &- a(x) z_1' z_2']dx + a(1) z_3 z_1'(1) \\ &- a(0) z_5 z_1'(0), \end{aligned} \tag{A.7}$$

利用分部积分以及 $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 这一事实，可得

$$\langle z,\, Gz\rangle = \int_0^1 z_2^2 dx \geqslant 0. \tag{A.8}$$

因此，算子 G 在希尔伯特空间 X_w上是单调的（参见 [3, 第7章第 181]页）。此外，如果我们证明

$$R(I+G) = X_w, \tag{A.9}$$

那么算子 G 是极大单调的（参见 [3, 第 7 章，第 181] 页），R 表示该算子的值域。令 $y \in X_w$，我们需要求解

$$z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad z + Gz = y, \tag{A.10}$$

这意味着

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= y_1, && \text{(A.11)} \\ z_2 - (az_1')' + z_2 + z_1 &= y_2, && \text{(A.12)} \\ z_3 + \beta z_1'(1) &= y_3, && \text{(A.13)} \\ z_4 + 0 &= y_4, && \text{(A.14)} \\ z_5 - \mu_1 z_1'(0) &= y_5, && \text{(A.15)} \end{aligned}$$

利用 $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned} 3z_1 - (az_1')' &= 2y_1 + y_2, && \text{(A.16)} \\ \beta_1 z_1'(1) + z_1(1) &= (y_3 + y_1(1)), && \text{(A.17)} \\ -\mu_1 z_1'(0) + z_1(0) &= (y_5 + y_1(0)). && \text{(A.18)} \end{aligned}$$

这是一个带有罗宾边界条件的经典定常问题（例如，参见 [3]）。根据标准结果（如 [3, 第 6 个例子，第 226] 页所示），可知当 $2y_1 + y_2 \in L^2(0,1)$ 时，(A.16)-(A.18) 有唯一解 $z_1 \in H^2(0,1)$。现在可以验证，元素 $z = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5)$ 满足

$$\begin{cases} z_1 \text{ is the solution to (A.16)-(A.18)}, & \text{(A.19a)} \\ z_2 = z_1 - y_1, & \text{(A.19b)} \\ z_3 = y_3 - a(1) z_1'(1), & \text{(A.19c)} \\ z_4 = y_4 z_4 = y_5 + a(0) z_1'(0), & \text{(A.19d)} \end{cases}$$

满足 (A.11)-(A.15)。此外，将 (A.16)-(A.18) 应用于 (A.19)，可得满足 (A.19) 的 z 属于 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$。

现在，我们可以开始证明 (12) 的适定性。注意， G 是极大单调的这一事实意味着 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 在 X_w 中稠密（即，$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = X_w$）。

利用双射变量代换

$$z_e(t) = z(t)e^{Bt}, \tag{A.20}$$

z 是方程（12）的解，等价于 $z_e \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是方程的解

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_e(t) + G z_e(t) = 0, & \text{(A.21a)} \\ z_e(0) = z_0, & \text{(A.21b)} \end{cases}$$

其中， B 在（A.4）中定义， G 在（A.3）中定义。

根据引理5，对（A.21）应用定理4，并利用变量代换（A.20），即可证明（i）。利用 $\mathcal{D}$在 X_w中的稠密性论证，以及 C_0-半群理论，可得弱解的正则性。

请读者参阅 [19], [30] ，了解弱解的概念。此外，证明的部分内容受到 [6] 和 [9] 的启发，而它们又源自 [39]。

B 补充材料

本节介绍论文录用版本中未包含的补充材料，并提供在线资源链接。

A的第一行是

$$\left[-\frac{a_0}{6dx_1} - \frac{2a_1 dx_1}{3(dx_1+dx_2)^2},\ \frac{a_0}{6dx_1},\ \frac{2a_1 dx_1}{3(dx_1+dx_2)^2},\ \dots \right] \tag{B.1}$$

第二行是

$$\left[\frac{a_0}{6dx_1},\ -\frac{a_0}{6dx_1} - \frac{a_1}{6dx_2} - \frac{a_2 dx_1}{6dx_2^2} - \frac{2a_2 dx_2}{3(dx_2+dx_3)^2},\ \frac{a_1}{6dx_2} + \frac{a_2 dx_1}{6dx_2^2},\ \frac{2a_2 dx_2}{3(dx_2+dx_3)^2},\ \dots \right] \tag{B.2}$$

$i \in [3, N-2]$ 的 i 行，列 $i-2$，位于 $i+2$ 处，是

$$\left[\frac{2a_{i-2}dx_{i-2}}{3(dx_{i-2}+dx_{i-1})^2},\ \frac{a_{i-1}dx_{i-2}+a_{i-2}dx_{i-1}}{6dx_{i-1}^2},\ -\frac{2a_{i-2}dx_{i-2}}{3(dx_{i-2}+dx_{i-1})^2} - \frac{a_{i-1}dx_{i-2}+a_{i-2}dx_{i-1}}{6dx_{i-1}^2} - \frac{a_i dx_{i-1}+a_{i-1}dx_i}{6dx_i^2} - \frac{2a_i dx_i}{3(dx_i+dx_{i+1})^2},\ +\frac{a_i dx_{i-1}+a_{i-1}dx_i}{6dx_i^2},\ \frac{2a_i dx_i}{3(dx_i+dx_{i+1})^2} \right] \tag{B.3}$$

其余位置均为零。 $N-1$ 线

$$\left[\dots,\ \frac{2a_{N-2}dx_{N-2}}{3(dx_{N-2}+dx_{N-1})^2},\ \frac{a_{N-2}}{6dx_{N-1}} + \frac{a_{N-1}dx_{N-2}}{6dx_{N-1}^2},\ -\frac{2a_{N-2}dx_{N-2}}{3(dx_{N-2}+dx_{N-1})^2} - \frac{a_{N-2}}{6dx_{N-1}} - \frac{a_{N-1}dx_{N-2}}{6dx_{N-1}^2} - \frac{a_N dx_{N-1}}{6dx_N^2},\ \frac{a_N dx_{N-1}}{6dx_N^2} \right] \tag{B.4}$$

第 N 行

$$\left[\dots,\ \frac{2a_{N-1}dx_{N-1}}{3(dx_{N-1}+dx_N)^2}\ \frac{a_N dx_{N-1}}{6dx_N^2},\ -\frac{2a_{N-1}dx_{N-1}}{3(dx_{N-1}+dx_N)^2} - \frac{a_N dx_{N-1}}{6dx_N^2} \right] \tag{B.5}$$

读者可以通过 https://colab.research.google.com/drive/ 找到用于数值仿真的在线环境。

1m6uhaur3eySqQ6eyjKf6SXxHXxXhSsWd?usp=sharing，以及用于数值仿真的 GitHub 代码库：https://github.com/christoautom/wave_1d。