arXiv:2305.01970v1 [math.LO] 3 May 2023

# 稳定框架与权重 SH839

萨哈伦·谢拉

Abstract. 我们希望将 [She90, Ch.III,V,§4] 中的虚元素、ortp($a, M, N$) 的权重、P-权重、P-简单类型等概念推广到优良框架的语境中。这需要允许词汇中包含无限元数的谓词和函数符号，但看起来并不会因此造成任何实质性损失。

版本 2023年3月24日。有关可能的更新，请参见 https://shelah.logic.at/papers/839/ *Date*: 2023年3月7日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：03C45、03C48。
*Key words and phrases.* 模型论、分类理论、稳定性、抽象初等类、稳定性、正交性、权重、主间隙。对于早期版本，作者感谢 Alice Leonhardt 截至 2019 年精美的打字工作。作者谨此感谢以色列科学基金会对本研究的部分资助（资助编号：242/03）。首次打字日期：2002 年 9 月 10 日。对于后续版本，作者谨此感谢美国国家科学基金会和美国—以色列双边科学基金会对本研究的部分资助——NSF-BSF 2021：与 M. Malliaris 合作的项目，美国国家科学基金会 2051825 号资助、美国—以色列双边科学基金会 3013005232 号资助（2021年10月—2026年9月）。作者还感谢一位希望保持匿名的人士慷慨资助打字服务，并感谢 Matt Grimes 细致而精美的打字工作。诸如 [Sh:950, Th0.2=Ly5] 这样的引用表示，Th0.2 的内部标签在 Sh:950 中为 y5。读者请注意，我个人网站上的版本通常比 arXiv 上的版本更新。

注释内容

§0 引言 第3页

§1 权重和 P-权重 第4页[对于具有某些附加性质的良好 $\lambda$-框架，我们定义放置的和 P-权重。]

§2 虚元素、一个 ess-$(\mu, \lambda)$-抽象初等类和框架 第8页

[定义一个允许无穷元函数的 ess-$(\mu, \lambda)$-抽象初等类。然后得到带有类型基的 $\mathfrak{s}$ 。]

§3 P-简单类型 第16页

## § 0. Introduction

我们假设 $\mathfrak{s}$ 是一个具有一些额外性质的良好 $\lambda$-框架，这些性质来自 [She09d]（例如，如 [She09d, §12]中的假设），因此我们假设读者了解 [She09d]以及 [She09c]中关于良好 $\lambda$-框架的基本事实。

我们可以看看 She 的结果，其中一些并未在优美的框架中重现。当然，对于原始的 $\mathfrak{s}$ ([She90, Ch.XIII]) 的主间隙，我们还相去甚远；并且有些结果显然与初等类的联系更为紧密，尤其是超积。这就使我们还剩下类型论的若干部分：正则和半正则类型、权重、p-简单类型、“遗传地与 P 正交”（后两者定义并研究于 [She78, Ch.V,§0 + Def4.4-Ex4.15], [She90, Ch.V,§0,pg.226,Def4.4-Ex4.15,pg.277-284]）。

Hrushovski 的一些深刻著作是对 [She78, §4] and[She90, §4], 的延续，但请注意，此处的“一个类型 $q$ 是 $p$-简单（或 P-简单）”和“$q$ 对 $p$ （或 P）遗传正交”本质上分别对应于前文中的“内部”和“外部”。

关于一阶情形中如何理解正则类型，更多内容请参见 [She04], 以及 Lasko wski 与作者合著的 [LS15]。

* * *

本文是原始 [Shec], 的第一部分，该文自 2002 年起便已存在（并在一定范围内流传）。第二和第三部分已分别拆分为 [Shea],[Sheb], 并分别续写于 [LS06] 和 [LS11], 。

记号 0.1. 与 [She90], [Shear] 一样， $M$ 和 $N$ 是模型， $M$ 的词汇为 $\tau_M$，$|M|$ 是其论域， $\|M\|$ 是其基数。我们用 ortp(–) 表示轨道类型。

---

[1]其动机在于，对于合适的 P（例如单个正则类型），一方面，$\mathrm{stp}(a, A) \not\perp \mathrm{P} \Rightarrow$“对于某个在 $A$ 上可定义的等价关系，$\mathrm{stp}(a/E, A)$ 是 P-简单的”；另一方面，若 $\mathrm{stp}(a_i, A)$ 对 $i < \alpha$ 是 P-简单的，那么 $\Sigma\{w(a_i, A) \cup \{a_j : j < i\}) : i < \alpha\}$ 不依赖于列出这些 $a_i$-s 的顺序。注意，这里的 P 是 $\mathscr{P}$那里。[2]注意，“外部于 P”和“遗传地正交于 P”等价。现在（为简便起见，令 $\mathrm{P} = \{p\}$），(a) 当存在某个集合 $A$，使得在 $\mathfrak{C}$ 中有 $q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{acl}(A \cup \bigcup p_i(\mathfrak{C}))$ 时， $q(x)$ 是 $p(x)$-简单的。(b) 当存在某个集合 $A$，使得在 $\mathfrak{C}$ 中有 $q(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{dcl}(A \cup p(\mathfrak{C}))$ 时， $q(x)$ 是 $p(x)$-内部的。注意，($\alpha$) 内部性蕴含简单性。($\beta$) 如果目标是计算权重，强调 acl 更好，因为它涵盖的范围更广。($\gamma$) 但两者的差异不大；若关注存在性，强调 dcl 更好。($\delta$) 此外，以下性质也很有用：$\{F \restriction (p(\mathfrak{C}) \cup q(\mathfrak{C}) :$ $F$一个在 $p$ 上固定 $\mathfrak{C}$ 的自同构（$\mathfrak{C}$）$\cup \mathrm{dom}(p)\}$ 在 $q(x)$ 为 $p$-内部的情况下是平凡的，但对于 $p$-简单的情形则未必如此（尽管它们构成一个副有限群）。

## §1. Weight and P-weight

关于“良好$^+$”，参见定义 [She09d, 1.3(1), 第7] 页，以及断言 [She09d, 1.5(1), 第7], 页，该断言依赖于 [She09c, §3], [She01]。
关于“类型充足”，参见定义 [She09c，第 6.35 节，第 112] 页：它表示 $\mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathcal{S}^1_{\mathbf{k}}$({v6)。
关于素元和 $K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$，参见 [She09d，第 5.15 节，第 73] 页。关于 $K^{3,\mathrm{vq}}_{\mathfrak{s}} = K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$，参见定义 [She09d，第 5.9 节，第 69] 页。关于正交性，参见 [She09d，第 6] 节。

上下文 1.1. 1) $\mathfrak{s}$ 是一个具有素元的类型充足良好$^+$ $\lambda$-框架，$K^{3,\mathrm{vq}}_{\mathfrak{s}} = K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$, $\perp = \perp^{\mathrm{wk}}$以及 $p \perp M \Leftrightarrow p \perp^{\mathrm{a}} M$。注意，由于 $\mathfrak{s}$是满的，因此 $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathcal{S}^{\mathrm{na}}_{\mathfrak{s}}(M)$；此外，$\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}} = \mathfrak{k}[\mathfrak{s}] =(K^{\mathfrak{s}}, \leq_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}})$是抽象初等类。
2) $\mathfrak{C}$ 是一个 $\mathfrak{s}$-怪兽，因此它在 $\lambda$ 上是 $K^{\mathfrak{s}}_{\lambda^+}$-饱和的，而 $M <_{\mathfrak{s}} \mathfrak{C}$ 表示 $M \leq_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$和 $M \in K_{\mathfrak{s}}$。由于 $\mathfrak{s}$ 是满的，它具有正则类型。

观察 1.2. $\mathfrak{s}^{\mathrm{reg}}$ 满足上述所有条件，唯独不是满的。

注 1.3. 回想一下，$\mathfrak{s}^{\mathrm{reg}}$ 是从 $\mathfrak{s}$导出的，将 $\mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(M)$ 替换为 $\{p \in \mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(M)$：$p$ 正则 $\}$（见 [She09d, 10.18, 第 164] 页）。
证明。见 [She09d, 10.18=L10.p19tex]以及定义 [She09d, 10.17=L10.p18tex]。 □

断言 1.4. 1) 如果 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M)$，那么我们可以找到 $b$、$N$和一个有限集 J，使得：

⊛ $(a)$ $M \leq_{\mathfrak{s}} N$ $(b)$ J $\subseteq N$是 $(M, N)$ 中的有限独立集。$(c)$ $c \in$ J $\Rightarrow$ ortp$(c, M, N)$ 是正则的（回想一下，ortp 表示“轨道类型”）。$(d)$ $(M, N,$ J$) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$ $(e)$ $b \in N$ 实现了 $p$。

2) 如果 $M$ 是饱满的，我们可以添加

$(f)$ $(M, N, b) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$.

3) 在 (2) 中，$\|\mathrm{J}\|$ 只依赖于 $(p, M)$。
4) 如果 $M$ 是饱满的，那么我们可以在 $\mathfrak{s}$(饱满部分) 中工作，并得到相同的 $\|\mathrm{J}\|$ 和 $N$（因此$N \in K_{\mathfrak{s}}$ 是饱满的）。

证明。1) 对 $\ell < \omega$ 作归纳，我们尝试选取 $N_\ell, a_\ell, q_\ell$，使得：

(∗) $(a)$ $N_0 = M$ $(b)$ $N_\ell \leq_{\mathfrak{s}} N_{\ell+1}$ $(c)$ $q_\ell \in \mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$，因此 $q_\ell \notin \mathcal{S}^{\mathrm{na}}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$ 可能成立。$(d)$ $q_0 = p$ $(e)$ $q_{\ell+1} \restriction N_\ell = q_\ell$ $(f)$ 在 $N_\ell$ 上分叉，因此现在必然有 $q_\ell \notin \mathcal{S}^{\mathrm{na}}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$。$(g)$ $(N_\ell, N_{\ell+1}, a_\ell) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$ $(h)$ $r_\ell =$ 正交类型 $(a_\ell, N_\ell, N_{\ell+1})$ 是正则的。$(i)$ $r_\ell$ 要么是 $\perp M$，要么不在 $M$ 上分叉。

如果我们成功地对所有 $\ell < \omega$ 进行归纳，令 $N = \bigcup\{N_\ell : \ell < \omega\}$。由于这是一个可数链（回想 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}}$ 具有融合），存在 $q \in \mathcal{S}(N)$ 使得 $\ell < \omega \Rightarrow q \restriction N_\ell = q$，并且由于 $q$ 不是代数的（因为每个 $q_n$ 都不是），而且 $\mathfrak{s}$ 是满的，显然 $q \in \mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(N)$；但 $q$ 与不分叉的有限特征相矛盾。因此，对某个 $n \geq 0$，我们会陷入困境，但若 $q_n \in \mathcal{S}^{\mathrm{na}}_{\mathfrak{s}}(N_n)$，这就不可能发生。

[为什么？因为我们假设 $\mathfrak{s}$ 是类型充足的。或者，我们可以使用$\mathfrak{s}^{\rm reg}$，回想一下，根据 1.2，我们知道 $\mathfrak{s}^{\rm reg}$ 有足够多的正则类型，然后就可以应用 [She09d, 8.3=L6.1tex].]

因此，对于某些 $b \in N_n$，我们有 $q_n =$正交类型$(b, N_n, N_n)$；即，$b$实现了 $q_n$，因此它实现了 $p$。

令 $\mathbf{J} = \{a_\ell : \text{ortp}(a_\ell, N_\ell, N_{\ell+1})$ 不在 $N_0\}$ 上分叉。由 [She09d，6.2] 我们有 $(M, N_n, \mathbf{J}) = (N_0, N_n, \mathbf{J}) \in K^{3,\rm vq}_{\mathfrak{s}}$，因此 $\in K^{3,\rm qr}_{\mathfrak{s}}$由 [She09d]，证毕。2) 令 $N, b, \mathbf{J}$ 如第 (1) 部分所述，且 $\|\mathbf{J}|$ 极小。我们可以找到 $N' \leq_{\mathfrak{s}} N$使得 $(M, N', b) \in K^{3,\rm pr}_{\mathfrak{s}}$，并且可以找到$\mathbf{J}'$，使得 $\mathbf{J}' \subseteq N'$ 在 $(M, N')$ 中是独立正则类型，并且在这些要求下极大。于是可以找到 $N'' \leq_{\mathfrak{s}} N'$使得 $(M, N'', \mathbf{J}') \in K^{3,\rm qr}_{\mathfrak{s}}$。若 $\text{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N'', N') \in \mathcal{S}^{\rm na}_{\mathfrak{s}}(N'')$ 不与$M$ 正交，就可以像第 (1) 部分的证明那样，推出 $\mathbf{J}'$ 在 $N'$ 中的极大性矛盾，因此 $\text{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N'', N') \perp M$ (或 $\notin \mathcal{S}^{\rm na}_{\mathfrak{s}}(N)$)。此外，不失一般性，$(N'', N', b) \in_{K^{3,\rm pr}_{\mathfrak{s}}}$，因此由 [She09d] 可知 $(M, N', \mathbf{J}') \in K^{3,\rm qr}_{\mathfrak{s}}$。故存在一个同构$f$，从 $N'$ 到 $N''$，且在 $M \cup \mathbf{J}'$ 上为恒等映射（根据 $K^{3,\rm qr}_{\mathfrak{s}}$ 的唯一性）。因此，用 $(N', f(b), \mathbf{J}')$ 替换 $(N, b, \mathbf{J})$，证毕。

3) 否则，我们可以找到 $N_1, N_2, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, b$ 使得 $M \leq_{\mathfrak{s}} N_\ell \leq_{\mathfrak{s}} N$，且四元组 $(M, N_\ell, \mathbf{J}_\ell, b)$ 如第 (1)+(2) 部分的 (a)-(e)+(f) 所示，其中 $\ell = 1, 2$。反设 $\|\mathbf{J}_1| \neq \|\mathbf{J}_2|$，则不失一般性，$\|\mathbf{J}_1| < \|\mathbf{J}_2|$。

不失一般性地，关于“$(M, N_\ell, b) \in K^{3,\rm pr}_{\mathfrak{s}}$”，$N_2 \leq_{\mathfrak{s}} N_1$。

根据 [She09d，10.15=L10b.11tex(3)]，对于某个 $c \in \mathbf{J}_2 \backslash \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1 \cup \{c\}$，其在 $(M, N_1)$ 中是独立的，这与 $(M, N, \mathbf{J}_1) \in K^{3,\rm vq}_{\mathfrak{s}}$ 根据 [She09d，10.15=L10b.11tex(4)] 矛盾。4）类似地。$\square_{1.4}$

定义 1.5. 1) 对于 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，令 $p$, $w(p)$ 的权重为满足以下条件的唯一自然数：若 $M \leq_{\mathfrak{s}} M'$, $M'$ 是饱满的，且 $p' \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M')$ 是 $p$ 的非分叉扩张，那么它就是断言 1.4(3) 中唯一的 $\|\mathbf{J}|$。（这是一个自然数。）2) 令 $w_{\mathfrak{s}}(a, M, N) = w$(正交类型$_{\mathfrak{s}}(a, M, N)$)。

断言 1.6. 1) 若 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}(M)$ 是正则的，则 $w(p) = 1$。2) 若 $\mathbf{J}$ 在 $(M, N)$ 中独立且 $c \in N$，则存在某个 $\mathbf{J}' \subseteq \mathbf{J}$，使得 $\leq w_{\mathfrak{s}}(c, M, N)$ 个元素中，$\{c\} \cup (\mathbf{J} \backslash \mathbf{J}')$ 在 $(M, N)$ 中独立。

证明。现在很容易了。 $\square_{1.6}$

注意，在定义 1.7 中使用 $\mathfrak{C}$ 只是为了透明起见，也可以避免；见下面的 1.11。

定义 1.7。1）当满足以下条件时，我们称 P 是一个 $M^*$-基于的族（在 $\mathfrak{C}$ 内）：

（A） $M^* <_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$ 和 $M^* \in K_{\mathfrak{s}}$（B）$\mathbf{P} \subseteq \bigcup\{\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$：$M \leq_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$ 和 $M \in K_{\mathfrak{s}}\}$（C）P 在 $\mathfrak{C}$ 关于 $M^*$ 的自同构作用下保持不变。

2）令 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，其中 $M \leq_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$。

(A) 当满足以下条件时，我们称 $p$ 遗传地正交于 P（或称 P-外部）：如果 $M \leq_{\mathfrak{s}} N \leq_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$，$q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$，且 $q \restriction M = p$，那么 $q$ 正交于 $p$。(B) 当 $p$ 是正则类型、不正交于 P，并且若$q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M')$、$M \leq_{\mathfrak{s}} M' <_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$，且 $q$ 是 $p$ 的一个分叉扩张，则 $q$ 遗传地正交于 P 时，我们称 $p$ 是 P-正则。(C) 如果 $p$ 是正则类型，且不正交于某个 P-正则$p'$，则称其为弱 P-正则。

3) 当 P 是正则类型的集合，且其中每个类型都是 P-正则时，称 P 为正规的。4) 对于 $q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 和 $M <_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$，令 $w_{\mathbf{P}}(q)$ 定义为满足以下条件的自然数：

⊛ 若 $M \le_{\mathfrak{s}} M_1 \le_{\mathfrak{s}} M_2 \le_{\mathfrak{s}} \mathfrak{C}$, $M_\ell$ 是 $(\lambda,*)$-饱满的，$b \in M_2$，正交类型$_{\mathfrak{s}}(b, M_1, M_2)$ 是 $q$ 的非分叉扩张，$(M_1, M_2, b) \in K^{3,\rm pr}_{\mathfrak{s}}$，$(M_1, M_2, \mathbf{J}) \in K^{3,\rm qr}_{\mathfrak{s}}$，并且 J 在 $(M_1, M_2)$ 中是正则的（即独立，且 $c \in \mathbf{J} \Rightarrow$ 正交类型$_{\mathfrak{s}}(c, M_1, M_2)$ 是正则类型），那么

$$w_{\mathbf{P}}(q) = \big|\{c \in \mathbf{J} : \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c, M_1, M) \text{ is weakly } \mathbf{P}\text{-regular}\}\big|.$$

5) 若 $\mathbf{P} = \{p\}$，我们用 $p$ 替换 P，其中 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}(M^*)$ 是正则的（见 1.8(1)）。

断言 1.8. 1) 若 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 是正则的，那么 $\{p\}$ 是一个 $M$-基族，且是正规的。

2) 假设 P 是一个 $M^*$-基族。若 $q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 且 $M^* \le_{\mathfrak{s}} M \le_{\mathfrak{k}[\mathfrak{s}]} \mathfrak{C}$，那么 $w_{\mathbf{P}}(q)$ 定义良好（且是一个自然数）。

3) 在定义 1.7(4) 中，我们可以找到 J，使得对于每个 $c \in \mathbf{J}_1$，都有：

$$\mathrm{ortp}(c, M_1, M) \textit{ is weakly } \mathbf{P}\textit{-regular} \Rightarrow \mathrm{ortp}(c, M_1, M) \textit{is } \mathbf{P}\textit{-regular}.$$

证明。显然易见。 $\square_{1.8}$

讨论 1.9。1）人们很容易想要尝试推广 P-简单（按照 Hrushovski 的术语，即 P-内部）和半正则的概念。在一阶情形中，这些概念的一个重要性质是：例如。

（$*$）如果 $(\bar{a}/A) \not\perp p$ 和 $p$ 是正则的，那么对于某个可在 $A$上定义的等价关系 $E$，ortp$(\bar{a}/E, A) \not\perp p$ 且是 $\{p\}$-简单的。

定义 $\{p\}$-简单的目的是：

(A) 对于一个在 $A \subseteq \mathfrak{C}^{\rm eq}_T$ 上实现 $p$ 的元素 $a$，我们可以定义 $p$-权重$w_p(a, A)$。(B) 此类元素的 $p$-权重表现得像向量空间中的有限序列——因此它们的表现类似于向量空间的维数。(C) 我们有适当的稠密性结果。

2) 对上述 (C) 的初步尝试：假设 $p, q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 不正交，那么我们可以在 $\{c \in \mathfrak{C}$ 上定义一个等价关系 $\mathscr{E}^{p,q}_M$：$c$ 实现 $p\}$，定义如下

$$c_1 \, \mathscr{E}^{p,q}_M \, c_2 \quad \underline{\text{iff}} \quad \begin{array}{l}\text{for every } d \in \mathfrak{C} \text{ realizing } q, \text{ we have} \\ \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c_1 d, M, \mathfrak{C}) = \mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c_2 d, M, \mathfrak{C}).\end{array}$$

即使在一阶情形下，这种（所需的性质）也可能不成立：假设 $p, q$ 在 $a^* \in M$ 上可定义（关于如何得到这一点，见后文），并且存在 $\langle c_\ell : \ell \le n\rangle$,$\langle M_\ell : \ell < n\rangle$，使得 ortp$(c_\ell, M_\ell, \mathfrak{C}) = p_\ell$，每个 $p_\ell$ 都与 $p$ 平行，$c_\ell \, \mathscr{E}^{p,q}_{M_\ell} \, c_{\ell+1}$但 $c_0$, $c_n$ 分别实现 $p$ 和 $q$，且 $\{c_0, c_n\}$ 在 $M_0$ 上独立。这种情形使得无法像 She90, Ch.V] 中那样定义一个 P-$\{q\}$-简单类型 $p/\mathscr{E}$。

然而（见 [She90, V, §4]），在一阶逻辑中，我们可以找到一个饱和的 $N$ 和 $a^* \in N$，使得

$$\mathrm{ortp}\big(M, \bigcup_\ell M_\ell \cup \{c_0, \dots, c_n\}\big)$$

不在 $a^*$ 上分叉，并使用“在类型上用超滤子 $c$ 对 $q(\mathfrak{C})$ 取平均 $+a^*_t$”（对于合适的 $a^*_t$）。详见下文。

讨论 1.10。1）假设（$\mathfrak{s}$ 是满的，且）每个 $p \in \mathcal{S}^{\rm na}_{\mathfrak{s}}(M)$ 都可由某个 $a_p \in M$ 表示（例如，在 [She90]，中的典范基 Cb($p$)）。当 ortp($\bar{a}, b, \mathfrak{C}$) 是平稳的（和/或不分叉的）时，我们可以为 $\bar{a}, b \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}$ 定义。我们应检查其基本性质。见 §3。

2) 假设 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 是正则的，且在 $\bar{a}^*$ 上可定义（按通常意义）。我们可能会想知道，依赖关系的良好性质是否对 $p \restriction \bar{a}^*$ 也成立?

如果你觉得在我们的语境中使用怪兽模型并不自然，那么我们该如何"翻译"一个在 $\mathfrak{C}^{\rm eq}$ 中、被 $\mathfrak{C}$ 上所有在 $A$ 上恒等的自同构所保持不变的类型集合呢? 可以通过使用如下定义的一个"位点"（place）来实现:

定义 1.11。1) 局部位置是一个对 $\mathfrak{a} = (M, A)$，满足 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$（比较 [Sheb，§1]）。

2) 若 $A_1 = A_2$，且存在 $n$ 和 $N_\ell \in K_{\mathfrak{s}}$，对 $\ell \leq n$ 满足 $A \subseteq N_\ell$（其中 $\ell = 0, \ldots\ldots, n$），使得 $M_1 = N_0$、$M_2 = N_n$，并且对每个 $\ell < n$，$N_\ell \leq_{\mathfrak{s}} N_{\ell+1}$ 或 $N_{\ell+1} \leq_{\mathfrak{s}} N_\ell$，则点 $(M_1, A_1)$、$(M_2, A_2)$ 等价。我们记作 $(M_1, A_1) \sim (M_2, A_2)$ 或 $M_1 \sim_{A_1} M_2$。

3) 对于一个局部位置 $\mathfrak{a} = (M, A)$，令 $K_{\mathfrak{a}} = K_{(M,A)} = \{N : (N, A) \sim (M, A)\}$，因此在 $(M, A)/\sim$ 中，我们将 $A$ 作为一个集合以及它在 $\varnothing$ 上的 $M$ 中所实现的类型固定下来。
4) 我们将这样的类 $K_{\mathfrak{a}}$ 称为一个位置。
5) 当满足以下条件时，我们称 P 是位置 $K_{(M,A)}$ 上类型的不变集[3]：

(A) $\mathrm{P} \subseteq \{\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N) : N \sim_A M\}$(B) P 中的成员资格在 $A$ 上的同构下保持不变。
(C) 如果 $N_1 \leq_{\mathfrak{s}} N_2$ 都属于 $K_{(M,A)}$，且 $p_2 \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_2)$ 不在 $N_1$ 上分叉，那么 $p_2 \in \mathrm{P} \Leftrightarrow p_2 \restriction N_1 \in \mathrm{P}$。

6) 当对某个 $N$ 有 $A \subseteq N \leq_{\mathfrak{s}} M$，且 $M$ 在 $N$ 上饱满时，我们称 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 在 $A$ 上饱满。

断言/定义 1.12. 1) 如果 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$ 且 $\mathrm{P}_0 \subseteq \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，那么在位置 $K_{(M,A)}$ 中，至多存在一个类型的不变集 P′，使得 $\mathrm{P}^+ \cap \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathrm{P}_0$ 并且

$$M \leq_{\mathfrak{s}} N \wedge p \in \mathbf{P}^+ \cap \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N) \Rightarrow \text{“}p \textit{ does not fork over } M\text{”}.$$

2) 此外，如果 $M$ 在 $A$ 上是饱满的[4]，那么我们可以省去第 (1) 部分中的最后一个要求。
3) 如果 $\mathfrak{a} = (M_1, A)$ 且 $(M_2, A) \in K_{\mathfrak{a}}$，那么 $K_{(M_2,A)} = K_{\mathfrak{a}}$。

证明。显然。 □1.12

定义 1.13. 1) 如果 1.12 中存在这样的 P，我们将其记为 $\mathrm{inv}(\mathrm{P}_0) = \mathrm{inv}(\mathrm{P}_0, M)$。

2) 如果 $\mathrm{P}_0 = \{p\}$，那么令 $\mathrm{inv}(p) = \mathrm{inv}(p, M) = \mathrm{inv}(\{p\})$。
3) 我们称 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}$ 在 $M$ 上不分裂（或可定义），前提是 inv($p$) 有良好定义。

[3]确实是一个类。[4]$M$ 在 $A$ 上是饱满的 $M_1$，意味着对于某个 $M_1$，$A \subseteq M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M$ 和 $M$ 在 $M_1$ 上是饱满的。

## §2. Imaginary elements、 an essential-（$\mu$、 $\lambda$）-AEC、 and frames

§ 2(A). 本质上的抽象初等类。

我们考虑修订抽象初等类 $\mathfrak{k}$ 的定义，允许$\tau_{\mathfrak{k}}$ 中的函数符号具有无限多个位置，同时保留局部特征，例如，如果 $M_n \le M_{n+1}$ 且 $M = \bigcup\{M_n : n < \omega\}$ 可被唯一确定。在此之前，我们先引入相关的等价关系。在这一语境下，我们可以为无限序列上的等价关系所对应的等价类命名。

定义 2.1。我们称 $\mathfrak{k}$ 为本质的 $[\lambda, \mu)$-抽象初等类，或 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类（或$[\lambda, \mu)$-EAEC[5]），如果（$\lambda < \mu$ 且）它是由以下内容组成的对象：

I. (a) 一个词汇 $\tau = \tau_{\mathfrak{k}}$，其中包含元数可能为无限的谓词和函数符号，但 $\le \lambda$。(b) 一个由 $\tau$-模型构成的类 $K = K_{\mathfrak{k}}$。(c) $K$ 上的一个二元关系 $\le_{\mathfrak{k}}$。（注意，我们允许 $\mu = \infty$。）

使得

II. (a) 如果 $M_1 \cong M_2$，则 $M_1 \in K \Leftrightarrow M_2 \in K$。(b) 如果 $(N_1, M_1) \cong (N_2, M_2)$，则 $M_1 \le_{\mathfrak{k}} N_1 \Leftrightarrow M_2 \le_{\mathfrak{k}} N_2$。(c) 每个 $M \in K$ 的基数都是 $\in [\lambda, \mu)$。(d) $\le_{\mathfrak{k}}$ 是 $K$上的偏序。

III$_1$. 如果 $\langle M_i : i < \delta\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，且 $\bigcup M_i$ 的基数小于$i<\delta$ $\mu$，那么存在唯一的 $M \in K$ 使得 $|M| = \bigcup\{|M_i| : i < \delta\}$ 且 $i < \delta \Rightarrow M_i \le_{\mathfrak{k}} M$。

III$_2$. 此外，如果 $i < \delta \Rightarrow M_i \le_{\mathfrak{k}} N$，则 $M \le_{\mathfrak{k}} N$。IV. 如果 $M_1 \subseteq M_2$ 且对于 $\ell = 1, 2$, $M_\ell \le_{\mathfrak{k}} N$，则 $M_1 \le_{\mathfrak{k}} M_2$。V. 如果 $A \subseteq N \in K$，那么存在满足 $A \subseteq M \le_{\mathfrak{k}} N$且 $\|M\| \le \lambda + |A|$的 $M$。（此处只需将范围限制在 $|A| \le \lambda$的情形。）

定义 2.2. 1) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-$\lambda$-抽象初等类，我们称之为 ess-$[\lambda, \lambda^+)$-抽象初等类。2) 若存在 $\lambda$ 使得 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-$[\lambda, \infty)$-抽象初等类，则称 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-抽象初等类，因此 $\lambda = \mathrm{LST}(\mathfrak{k})$。

3) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类且 $\lambda \le \lambda_1 < \mu_1 \le \mu$，则令

$$K^{\mathfrak{k}}_{\lambda_1} = (K_{\mathfrak{k}})_{\lambda_1} = \{M \in K_{\mathfrak{k}} : \|M\| = \lambda_1\}$$

且 $K^{\mathfrak{k}}_{\lambda_1,\ \mu_1} = \{M \in K_{\mathfrak{k}} : \lambda_1 \le \|M\| < \mu_1\}$。

4) 我们按 [She09b, 0.8=L11.1.3A(2)] 中的方式定义 $\Upsilon^{\mathrm{or}}_{\mathfrak{k}}$。

5) 当 $\mathrm{arity}(\tau_{\mathfrak{k}}) = \aleph_0$ 时，我们可以省略“本质上”一词；其中 $\mathrm{arity}(\mathfrak{k}) = \mathrm{arity}(\tau_{\mathfrak{k}})$，且对于词汇 $\tau$,

$$\mathrm{arity}(\tau) = \min\{\kappa : \text{每个谓词和函数符号的元数都是 } < \kappa\}.$$

现在我们来考察关于 ess-AEC 的断言。

断言 2.3. 设 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类。

1) $\mathrm{Ax}(III)_1$,$(III)_2$ 的平行命题在有向族 $\langle M_t$ 下成立：$t \in I\rangle$。

2) 如果我们可以找到 $\langle M_{\bar a} : \bar a \in {}^{\omega>}M\rangle$，使得：

(A) $\bar a \subseteq M_{\bar a} \le_{\mathfrak{k}} M$(B) $\|M_{\bar a}\| = \lambda$(C) 如果 $b$ 是 $\bar a$ 的一个排列，那么 $M_{\bar a} = M_{\bar b}$.(D) 如果 $\bar a$ 是 $b$ 的一个子序列，那么 $M_{\bar a} \le_{\mathfrak{k}} M_{\bar b}$.

[5]我们也可以写作（$\mu, \lambda$），而不是 $[\lambda, \mu)$。

3) 如果 $N \leq_{\mathfrak{k}} M$ 我们可以在 (2) 中加上 $\bar{a} \in {}^{\omega>}N \Rightarrow M_{\bar{a}} \subseteq N$。
4) 如果为简单起见

$$\lambda_* = \lambda + \sup\Big\{ \sum \big\{|R^M| : R \in \tau_{\mathfrak{k}}\big\} + \sum \big\{|F^M| : F \in \tau_{\mathfrak{k}}\big\} : M \in K_{\mathfrak{k}} \text{ has cardinality } \lambda \Big\}$$

那么 $K_{\mathfrak{k}}$和 $\{(M,N)$: $N \leq_{\mathfrak{k}} M\}$本质上是 PC$_{\chi,\ \lambda_*}$-类，其中

$$\chi = \big|\{M/\cong : M \in K^{\mathfrak{k}}_{\lambda}\}\big|$$

注意到 $\chi \leq 2^{2^{\theta}}$。也就是说，序列 $\langle M_{\bar{a}} :\ \bar{a} \in {}^{\omega>}A\rangle$ 满足第 (2) 部分的条款 (b)、(c)、(d)，使得 $A = \bigcup \big\{|M_{\bar{a}}| :\ \bar{a} \in {}^{\omega>}A\big\}$ 将表示一个具有论域 $A$ 的唯一$M \in K_{\mathfrak{k}}$ —— 对 $\leq_{\mathfrak{k}}$也类似。（关于 PC$_{\chi,\ \lambda_*}$的定义，参见 [She09a, 1.4(3)]。）请注意，如果在 $\tau_{\mathfrak{k}}$ 中，每个 $M \in K_{\mathfrak{k}}$ 的解释都不存在两个不同的符号具有相同解释，那么 $|\tau k_*| \leq 2^{2^{\lambda}}$。

5）关于在 [She99] 或 [She09b, 0.9=L0n.8,0.2=0n.11]中省略类型的结果成立；也就是说，如果 $\alpha < (2^{\lambda_*})^+ \Rightarrow K^{\mathfrak{k}}_{\beth_\alpha} \neq \varnothing$，那么 $\theta \in [\lambda,\mu) \Rightarrow K_\theta \neq \varnothing$，并且存在一个 EM 模型，即 $\Phi \in \Upsilon^{\rm or}_{\mathfrak{k}}$，其基数为 $\lambda + |I|$，满足 $|\tau_\Phi| = |\tau_{\mathfrak{k}}| + \lambda$ 和 EM$(I,\Phi)$，对任意线性序 $I$ 都成立。

6）关于泛模型齐性与饱和等价的引理（见 [She09e, 3.18=3.10]或 [She09c, 1.14=L0.19]）成立。

7) 我们可以推广 [She09c, §1] 中关于从本质上为 ess-$\lambda$-AEC 推导出 ess-$(\infty,\lambda)$-AEC 的结果。

证明。证明方法相同。关于 2.3(7) 中的推广，参见 [Shea, §1]。关键在于，按照 [Shea, §1], 的语言，我们的 $\mathfrak{k}$是一个 $(\lambda,\mu,\kappa)$-抽象初等类（自动具有素元）。 $\square_{2.3}$

注释 2.4. 1) 在 2.3(4) 中，如果我们对 $K_\lambda$ 有更好的定义，就可以降低 $\chi$ 的界限；例如，如果 arity($\tau$) $\leq \kappa$，那么 $\chi = 2^{(\lambda^{<\kappa}+|\tau|)}$，其中 arity($\tau$) =min$\{\kappa :\ \tau$ 的每个谓词和函数符号的元数都是 $< \kappa\}$。
2) 我们可以使用上面的 $|\tau_{\mathfrak{s}}| \leq \lambda$、元数($\tau_{\mathfrak{k}}$) $= \aleph_0$，得到

$$\big\{(M,\bar{a})/\cong : M \in K^{\mathfrak{k}}_{\lambda},\ \bar{a} \in {}^{\lambda}M \text{ lists } M\big\}$$

其基数为 $\leq 2^{\lambda}$。另见 2.18。
3) 在下面的 2.10 中，如果省略“$\mathbb{E}$是小的”以及 $\lambda_1 = \sup\{|\text{seq}(M)/\mathbb{E}_M| :\ M \in K^{\mathfrak{k}}_{\lambda}\}$是 $< \mu$，那么 $\mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu)}$ 是一个本质上的 $[\lambda_1,\mu)$-抽象初等类。
4) 在定义 2.1 中，我们可以省略公理 V，并自然地定义 LST($\mathfrak{k}$) $\in [\lambda,\mu]$；如果 $M \in K^{\mathfrak{k}}_{\lambda} \Rightarrow \mu > |\text{seq}(M)/\mathbb{E}_M|$，那么在下面的 2.10(1) 中，我们可以省略“$\mathbb{E}$是小的”。
5) 在这种“变换”中，我们能否保留元数有限性？一个自然的候选方法是尝试用 $\{\bar{a}$ 对 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 进行编码：$\bar{a} \in {}^{\omega>}M\}$，其中存在 $M_0 \leq_{\mathfrak{s}} M_1$ 使得 $M \leq_{\mathfrak{s}} M_1$，ortp$(a_\ell, M_0, M_1)$ 与 $p$ 平行，并且 $\bar{a}$ 在 $(M_0, M_1)$ 中是独立的。例如，如果 $K_{\mathfrak{s}}$ 是饱和的，这会有所帮助，但我们仍怀疑这可能会失败。

6) ess-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类是什么意思？我们能否只看 $\langle M_t :\ t \in I\rangle$, $I$有向，$t \leq_I s \Rightarrow M_t \leq_{\mathfrak{s}} M_{\mathfrak{s}} \in K_\lambda$？对于同构类型，我们采用某种完备化，从而使更多的对变得同构，但 $\bigcup_{t\in I} M_t$ 并不能确定 $\overline{M} = \langle M_t :\ t \in I\rangle$，而完备化可能取决于这种表示。
7）如果我们希望避免这种情况，并且这个数是 $\lambda'$，那么我们应该将 seq($N$) 的定义（见 2.5(b)）修改为

$$\text{seq}'(N) = \big\{\bar{a} : \ell g(\bar{a}) = \lambda,\ a_0 < \mu_*, \text{ and for some } M \leq_{\mathfrak{s}} N \text{ from } K^{\mathfrak{k}}_{\lambda},$$
$$\langle a_{1+\alpha} : \alpha < \lambda\rangle \text{ lists the members of } M\big\}.$$

§ 2(B). 虚元素与光滑等价关系。

现在我们回到目标：为轨道类型求得典范基。

定义 2.5. 设 $\mathfrak{k}=(K_{\mathfrak{k}},\leq_{\mathfrak{k}})$ 是一个 $\lambda$-抽象初等类，或简称 ess-$[\lambda,\mu)$-抽象初等类（如果 $\mathfrak{k}_\lambda=\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$我们可以用 $\mathfrak{s}$ 代替 $\mathfrak{k}_\lambda$，见 2.11）。当满足以下条件时，我们称 $\mathbb{E}$ 是一个光滑的 $\mathfrak{k}_\lambda$-等价关系：

(A) $\mathbb{E}$ 是一个定义域为 $K_{\mathfrak{k}}$、将 $M$ 映射到 $\mathbb{E}_M$ 的函数。

(B) 对于 $M\in K_{\mathfrak{k}}$, $\mathbb{E}_M$ 是定义在一个子集上的等价关系，

$$\mathrm{seq}(M)=\{\bar{a}\in {}^{\lambda}M : M\restriction \mathrm{Rang}(\bar{a})\leq_{\mathfrak{k}} M\}$$

因此，$\bar{a}$ 不一定没有重复项。注意，$\mathfrak{k}$ 决定了 $\lambda$（严格来说，仅当其非空时）。

(C) 如果 $M_1\leq_{\mathfrak{k}} M_2$，则 $\mathbb{E}_{M_2}\restriction \mathsf{seq}(M_1)=\mathbb{E}_{M_1}$。(D) 如果 $f$ 是从 $M_1\in K_{\mathfrak{s}}$ 到 $M_2$ 的一个同构，则 $f$ 将 $\mathbb{E}_{M_1}$ 映射到 $\mathbb{E}_{M_2}$。(E) 如果 $\langle M_\alpha:\alpha\leq\delta\rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增连续的，则

$$\big\{\bar{a}/\mathbb{E}_{M_\delta}:\bar{a}\in\mathrm{seq}(M_\delta)\big\}=\big\{\bar{a}/\mathbb{E}_{M_\delta}:\bar{a}\in\bigcup_{\alpha<\delta}\mathrm{seq}(M_\alpha)\big\}.$$

2) 如果每个 $\mathbb{E}_M$ 都有 $\leq\|M\|$ 个等价类，则称 $\mathbb{E}$ 是小的。

注记 2.6. 1) 请注意，如果我们有 $\langle\mathbb{E}_i:i<i^*\rangle$，其中每个 $\mathbb{E}_i$ 都是一个光滑的 $\mathfrak{k}_\lambda$-等价关系，且 $i^*<\lambda^+$，那么我们可以找到一个光滑的 $\mathfrak{k}_\lambda$-等价关系$\mathbb{E}$，使得对于 $i<i^*$，$\mathbb{E}_M$-等价类本质上就是 $\mathbb{E}_i$-等价类。具体而言：不失一般性地设 $i^*\leq\lambda$，并且 $\bar{a}\ \mathbb{E}_M\ b$ 当且仅当 $\ell g(\bar{a})=\ell g(b)$ 且

$\circledast_1$ $i(\bar{a})=i(\bar{b})$, and if $i(\bar{a})<i^*$ then

$$\bar{a}\restriction[1+i(\bar{a})+1,\lambda)\ \mathbb{E}_{i(\bar{a})}\ \bar{b}\restriction[1+i(\bar{b})+1,\lambda)$$

where $i(\bar{a})=\min\{j:j+1<i(*)\wedge a_0\neq a_{1+j}\text{ or }j=\lambda\}$.

2）事实上 $i^*\leq 2^\lambda$ 是可以的：例如，取一个函数 e，从 $\{e:e$ 上的一个等价关系到 $i^*$。对于 $\bar{a},\bar{b}\in\mathsf{seq}(M)$，我们令 $i(\bar{a})=\mathsf{e}\big(\{(i,j):a_{2i+1}=a_{2j+1}\}\big)$ 且

$\circledast_2$ $\bar{a}\ \mathbb{E}_M\ \bar{b}$ iff $i(\bar{a})=i(\bar{b})$ and $\langle a_{2i}:i<\lambda\rangle\ \mathbb{E}_{i(\bar{a})}\ \langle b_{2i}:i<\lambda\rangle$.

3) 我们可以将 $\mathsf{seq}(M)$ 重新定义为 ${}^{\lambda\geq}M$，但这样就必须对上文做些微小修改。

定义 2.7. 设 $\mathfrak{k}$ 是一个 $\lambda$-抽象初等类（AEC），或者仅仅是一个 ess-$[\lambda,\mu)$-AEC，且 $\mathbb{E}$ 是一个小的光滑$\mathfrak{k}$等价关系。为简单起见，读者可以假设词汇$\tau_{\mathfrak{k}}$ 仅包含谓词。此外，假设 $F_*$、$c_*$、$P_*\notin\tau_{\mathfrak{k}}$。我们定义 $\tau_*$ 和 $\mathfrak{k}_*=\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle=(K_{\mathfrak{k}_*},\leq_{\mathfrak{k}_*})$ 如下：

(A) $\tau^*=\tau\cup\{F_*,c_*,P_*\}$，其中 $P_*$是一个一元谓词，$c_*$是一个个体常量，$F_*$ 是一个 $\lambda$ 元函数符号。(B) $K_{\mathfrak{k}_*}$是 $\tau^*_{\mathfrak{k}}$ 模型的类，$M^*$满足：对于某个模型 $M\in K_{\mathfrak{k}}$，我们有：($\alpha$) $|M|=P_*^{M^*}$ ($\beta$) 若 $R\in\tau$，则 $R^{M^*}=R^M$。($\gamma$) 若 $F\in\tau$的元数为 $\alpha$，则 $F^{M^*}\restriction M=F^M$，并且对于任意 $\bar{a}\in{}^{\alpha}(M^*)$，$\bar{a}\notin{}^{\alpha}M$ 都有 $F^{M^*}(\bar{a})=c_*^{M^*}$（或者允许部分函数，或在 $\alpha>0$ 时使用 $F^{M^*}(\bar{a})=a_0$，并在 $\alpha=0$ 时使用 $F^{M^*}(\langle\rangle)$；即 $F$是一个个体常量）；($\delta$) $F_*$ 是一个 $\lambda$ 元函数符号，并且：

i. 若 $\bar{a} \in \mathrm{seq}(M)$，则 $F^{M^*}_*(\bar{a}) \in |M^*| \setminus |M| \setminus \{c^{M^*}_*\}$。 ii. 若 $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{dom}(\mathbb{E}) \subseteq \mathrm{seq}(M)$，则 $F^{M^*}_*(\bar{a}) = F^{M^*}_*(\bar{b}) \Leftrightarrow \bar{a}\ \mathbb{E}_M\ \bar{b}$。 iii. 若 $\bar{a} \in {}^{\lambda}(M^*)$ 且 $\bar{a} \notin \mathrm{dom}(\mathbb{E}) \subseteq \mathrm{seq}(M)$，则 $F^{M^*}_*(\bar{a}) = c^{M^*}_*$。 $(\varepsilon)$ $c^{M^*}_* \notin |M|$，且若 $b \in |M^*| \setminus |M| \setminus \{c^{M^*}_*\}$，则存在某个 $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathbb{E}) \subseteq \mathrm{seq}(M)$，使得 $F^{M^*}_*(\bar{a}) = b$。 (C) $\leq_{\mathfrak{k}_*}$ 是定义在 $K_{\mathfrak{k}_*}$ 上的二元关系，定义如下：若 $(\alpha)$ $M^* \subseteq N^*$ 且对于如条款 (B) 中的某些 $M, N \in \mathfrak{k}$，有 $(\beta)$，则 $M^* \leq_{\mathfrak{k}_*} N^*$ $\underline{M} \leq_{\mathfrak{k}} N$。

定义 2.8。1）在 2.7(1) 中，我们称 $M \in \mathfrak{k}$ 为 $M^* \in K_{\mathfrak{k}_*}$ 的见证，如果它符合上文条款 (B) 的描述。
2）如果它们符合上文条款 (C) 的描述，我们称 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$为 $M^* \leq_{\mathfrak{k}^*_\lambda} N^*$的见证。

讨论 2.9。到目前为止，我们将讨论范围限制在这样的词汇表上：每个谓词和函数符号的元数都是有限的；这一限制似乎非常合理。此外，乍看之下，若要与超稳定性相对应，无限元数似乎很不可取。尽管如此，我们希望引入虚元素（尤其是类型的典范基），这迫使我们接受无限元数。代价是，对于一般的 $\tau$-模型类，$\tau$-模型递增链的并并不是一个定义良好的 $\tau$-模型；更准确地说，我们可以证明它存在，却无法证明其光滑性。然而，在上述定义的 $\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle$ 类中，它将是一个定义良好的模型。

---

断言 2.10. 1）如果 $\mathfrak{k}$ 是一个 $[\lambda, \mu)$-抽象初等类，或者只是一个 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类，并且 $\mathbb{E}$ 是一个小的平滑$\mathfrak{k}$-等价关系，那么 $\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle$ 是一个 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类。
2）如果 $\mathfrak{k}$ 具有融合性质，且 $\mathbb{E}$ 是一个小的 $\mathfrak{k}$-等价类，那么 $\mathfrak{k}\langle\mathbb{E}\rangle$ 具有融合性质。

证明。证明方法相同。留作读者练习。 $\square_{2.10}$

§ 2(C). 优良框架。

现在我们回到优良框架。

定义 2.11. 如果定义 [She09c, 2.1=L1.1tex] 得到满足（但有以下例外），我们就称 $\mathfrak{s}$ 是一个优良 ess-$[\lambda, \mu)$- 框架：

(a) 在条款 (A) 中，$\mathfrak{K}_{\mathfrak{s}} = (K_{\mathfrak{s}}, \leq_{\mathfrak{s}})$，$\mathfrak{k}$是一个 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类，而 $\mathfrak{K}[\mathfrak{s}]$ 是一个 ess-$(\infty, \lambda)$-抽象初等类。(b) $K_{\mathfrak{s}}$ 在每个 $\chi \in [\lambda, \mu)$ 中的 $\chi$ 都有一个超极限模型。(c) 为方便起见，$K^{\mathfrak{s}}_\lambda/\cong$ 的基数为 $\leq 2^\lambda$。

讨论 2.12. 我们可以按自己的选择考虑其他相关变体，而且大多能得到类似结果。特别是：

(A) 我们可以降低要求：如 [SV, §2] 中所示，可以用 $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$ 的形式版本替换 $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$。
(B) 我们可以只要求 $\mathfrak{s}_\lambda$ 具有优良性，即 $\mathcal{S}_{\mathfrak{s}}$ 和 $\bigcup$ 仅适用于 $K^{\mathfrak{s}}_\lambda$ 中的模型$\mathfrak{s}$（因此我们可以利用它们在 [She09c, 2.1=L1.1tex] 中的良好性质），而融合和联合嵌入性质只要求对基数为 $\lambda$ 的模型成立。

断言 2.13. [She09c], [She09d] 中的所有定义和结果，以及此处的 §1，对良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架均成立。
证明。没问题。 $\square_{2.13}$

定义 2.14. 如果 $\mathfrak{s}$ 是一个 $[\lambda,\mu)$-框架（见 1.1），或者只是一个 ess-$[\lambda,\mu)$-框架，并且 $\mathbb{E}$是一个小的光滑 $\mathfrak{s}$-等价关系，则令 $\mathfrak{t}=\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 定义如下：

(A) $\mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}=\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}\langle\mathbb{E}\rangle$(B) $\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{t}}(M^*) = \{$正交类型$\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}}(a,M^*,N^*)$: $M^* \le_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}} N^*$，且若 $M \le_{\mathfrak{k}} N$见证$M^*$，$N^* \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{t}}$则 $a \in N\setminus M$且正交类型$_{\mathfrak{s}}(a,M,N) \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)\}$

(C) 不分叉的定义类似。

注 2.15. 我们还可以补充：如果 $\mathfrak{s}$ 是[6] 一个 NF-框架，我们类似地将 $\mathfrak{t}=\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 定义为一个 NF-框架，参见 [She09d]。

断言 2.16. 1) 如果 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda,\mu)$-框架，$\mathbb{E}$ 是一个小的、光滑的 $\mathfrak{s}$-等价关系，那么 $\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 是一个良好的 ess-$[\lambda,\mu)$-框架。2) 在第 (1) 部分中，对于每个 $\kappa$，$\dot{I}(\kappa,K^{\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle}) = \dot{I}(\kappa,K^{\mathfrak{s}})$。3) 如果 $\mathfrak{s}$ 有素元/正则类型，那么 $\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 也有。

注 2.17. 我们还可以补充：如果 $\mathfrak{s}$ 是一个 NF-框架，那么 $\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle$ 也是一个 NF-框架，因此 $(\mathfrak{s}\langle\mathbb{E}\rangle)^{\rm full}$ 是一个满的 NF-框架；参见 [She09d]。

证明。显然。 $\square_{2.16}$

我们的目标是对 $\mathfrak{s}$ 进行本质上无关紧要的改变，使得对于每个 $p\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，都存在一个典范基，等等。下面的断言表明，在我们所介绍的背景下，这是可以实现的。

断言 2.18. 虚元素 断言 A

ssume $\mathfrak{s}$ a goo $d$ $\lambda$-$f$框架还是只是一个优良的析取格。 $d$ $ess$-$[\lambda$ $\mu)$-框架。

1) 如果 $M_*\in K_{\mathfrak{s}}$ 和 $p^*\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_*)$，那么[7] 存在一个小的、光滑的 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$-等价关系 $\mathbb{E}=\mathbb{E}_{\mathfrak{s},M_*,p^*}$ 以及函数 F，使得：

(*) 若 $M_*\le_{\mathfrak{s}} N$，$\bar a\in$seq$(N)$（因此 $M:=N\restriction$Rang$(\bar a)\le_{\mathfrak{s}} N$），且 $M\cong M_*$，则 ($\alpha$) F$(N,\bar a)$ 定义良好当且仅当 $\bar a\in$dom$(\mathbb{E}_N)$。在此情况下，F$(N,\bar a)$ 属于 $\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$。($\beta$) $S\subseteq\{(N,\bar a,p)$: $N\in K_{\mathfrak{s}}$, $\bar a\in$dom$(\mathbb{E}_N)\}$ 是满足以下条件的最小类：($i$) 若 $\bar a\in$ seq$(M_*)$ 且 $p$ 不在 $M_*\restriction$ Rang$(\bar a)$ 上分叉，则 $(M_*,\bar a,p)\in S$。($ii$) $S$ 在同构下封闭。($iii$) 若 $N_1\le_{\mathfrak{s}} N_2$, $p_2\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_2)$ 不在 $\bar a\in$ seq$(N_1)$ 上分叉，则 $(N_2,\bar a,p_2)\in S\Leftrightarrow(N_1,\bar a,p_2\restriction N_1)\in S$。($iv$) 若 $\bar a_1$, $\bar a_2\in$seq$(N)$ 且对于 $\ell=1$, 2, $p\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 不在 $N\restriction$Rang$(\bar a_\ell)$ 上分叉，则 $(N_2,\bar a_1,p)\in S\Leftrightarrow(N_2,\bar a_2,p)\in S$。 ¯ ¯($\gamma$) F$(N,\bar a) = p$ 当且仅当 $(N,\bar a,p)\in S$；因此若 $\bar a,b\in$seq$(N)$，则 $\bar a\ \mathbb{E}_N\ b$当且仅当¯F$(\bar a,N) =$ F$(b,N)$。

2）存在唯一的光滑等价关系 $\mathbb{E}_{\mathfrak{s}}$ 和函数 F，使得：

(**)($\alpha$) F$(N,\bar a)$ 有定义当且仅当 $N\in K_{\mathfrak{s}}$ and $\bar a\in$seq$(N)$。

($\beta$) F$(N,\bar a)$，在有定义时，属于 $\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$。

[6]读者可以忽略此版本。[7]注意，可能确实存在一个 $M^*$ 的自同构，将 $p^*$ 映射到某个 $p^{**}\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M^*)$，使得 $p^{**}\ne p^*$。[8]对于“小”，我们采用 $\lambda$中的稳定性。

($\gamma$) 如果 $N \in K_{\mathfrak{s}}$ 和 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$，那么存在 $\bar{a} \in {\rm seq}(N)$，使得 ${\rm Rang}(\bar{a}) = N$ 且 ${\rm F}(N, \bar{a}) = p$。($\delta$) 如果 $\bar{a} \in {\rm seq}(M)$ 且 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$，那么 ${\rm F}(N, \bar{a})$ 是 ${\rm F}(M, \bar{a})$ 的（良定义的）非分叉扩张。($\varepsilon$) 如果 $\bar{a}_\ell \in {\rm seq}(N)$ 且 ${\rm F}(N, \bar{a}_\ell)$ 对于 $\ell = 1, 2$ 是良定义的，那么 $\bar{a}_1 \, \mathbb{E}_N \, \bar{a}_2 \Leftrightarrow {\rm F}(N, \bar{a}_1) = {\rm F}(N, \bar{a}_2)$。($\zeta$) F 与同构交换。

3) 对于 $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}\langle \mathbb{E} \rangle$，其中 $\mathbb{E}$ 与第 (2) 部分中的相同，并且每当 $M^* \in K_{\mathfrak{t}}$ 由 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 见证，且 $p^* \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{t}}(M^*)$ 投影到 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 时，我们令 ${\rm bas}(p^*) = {\rm bas}(p) = {\rm F}(\bar{a}, M^*)/\mathbb{E}$，当且仅当 ${\rm F}(M, \bar{a}) = p$。

($\alpha$) 如果 $M_\ell$ 见证了对于 $\ell = 1, 2$ 和 $(M_1^*, M_2^*, a) \in K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{t}}$ 那么 $(M_1, M_2, a) \in K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}}$ 并且 $p^* =$ 正交类型$_{\mathfrak{t}}(a, M_1^*, M_2^*)$，$p =$ 正交类型$_{\mathfrak{s}}(a, M_1, M_2)$。($\beta$) 如果 $M_\ell^* \leq_{\mathfrak{s}} M^*$ 且 $p_\ell \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{t}}(M_\ell^*)$，那么 $p_1^* \parallel p_2^* \Leftrightarrow {\rm bas}(p_1^*) = {\rm bas}(p_2^*)$。($\gamma$) $p^* \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{t}}(M^*)$ 不在 ${\rm bas}(p^*)$ 上分裂（参见定义 1.13(3) 或 [She09d, §2 end]）。

证明。1) 设 $M^{**} \leq_{\mathfrak{s}} M^*$ 的基数为 $\lambda$，且 $p^*$ 不在 $M^{**}$ 上分叉。令 $\bar{a}^* = \langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ 列出 $M^{**}$ 的元素。

当存在见证 $(M_0, M_2, p_2, f)$ 时，我们称 $p_1 \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ 是 $p^*$ 的弱副本，这意味着：

$\circledast_1$ (a) $M_0 \leq_{\mathfrak{s}} M_2$ 和 $M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_2$。(b) 若 $\|M_1\| = \lambda$，则 $\|M_2\| = \lambda$。(c) $f$ 是从 $M^{**}$ 到 $M_0$ 的同构。(d) $p_2 \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_2)$ 是 $p_1$ 的非分叉扩张。(e) $p_2$ 不在 $M_0$ 上分叉。(f) $f(p^* \restriction M^{**})$ 是 $p_2 \restriction M_0$。

对于 $M_1 \in K^{\mathfrak{s}}_\lambda$，$p_1 \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_1)$ 是 $p^*$ 的弱副本，我们称当存在某个见证 $(M_0, M_2, p_2, f)$ 和 $\bar{c}$ 时，$\bar{b}$ 阐明了其作为弱副本的性质，

$\circledast_2$ (a) $b = \langle b_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ 列出 $M_1$ 的元素。(b) $\bar{c} = \langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ 列出 $M_2$ 的元素。(c) $\{\alpha : b_{2\alpha} = b_{2\alpha+1}\}$ 编码以下集合：($\alpha$) $(M_2, \bar{c})$ 的同构类型。($\beta$) $\{(\alpha, \beta) : b_\alpha = c_\beta\}$ ($\gamma$) $\{(\alpha, \beta) : f(a_\alpha^*) = c_\beta\}$

Now

$\circledast_3$ 如果 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 是 $p^*$ 的弱副本，那么对于某个 $\bar{a} \in {\rm seq}(M)$，存在一个 $M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M$，使得 $p$ 不在其上分叉，并且 $\bar{a}$ 列出 $M_1$，并阐明“$p \restriction M_1$ 是 $p^*$ 的弱副本。”

$\circledast_4$ (a) 如果 $M \in K^{\mathfrak{s}}_\lambda$ 和 $\bar{b}$ 阐明了“$p_1 \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 是 $p^*$ 的一个弱副本”，那么我们就可以从 $M$ 和 $b$ 重构出 $p_1$。（将其称为 $p_{M,\bar{b}}$。）(b) 如果 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$，令 $p_{N,\bar{b}}$ 为其在 $\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 中的非分叉扩张。我们也将其记为 ${\rm F}(N, b)$。

现在我们定义 $\mathbb{E}$。首先，对于 $N \in K_{\mathfrak{s}}$，我们定义一个二元关系 $\mathbb{E}_N$。

$\circledast_5$ ($\alpha$) $\mathbb{E}_N$ 在 $\{\bar{a}$ 上：对于某个基数为 $\lambda$ 的 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$ 以及 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$（它是 $p^*$ 的一个副本），序列 $\bar{a}$ 明确说明 $p$ 是 $p^*\}$ 的一个弱副本。（$\beta$）当且仅当（$\bar{a}_1$、$\bar{a}_2$ 如上所述，且）$p_{N,\bar{a}_1} = p_{N,\bar{a}_2}$。

Now

$\odot_1$对于 $N \in K_{\mathfrak{s}}$， $\mathbb{E}_N$是 dom($E_N$) $\subseteq$seq($N$) 上的一个等价关系。$\odot_2$ 如果 $N_1 \leq_{\mathfrak{s}} N_2$ 且 $\bar{a} \in$ seq($N_1$)，那么 $\bar{a} \in$ dom($\mathbb{E}_{N_1}$) $\Leftrightarrow \bar{a} \in$ dom($\mathbb{E}_{N_2}$)。$\odot_3$ 如果 $N_1 \leq_{\mathfrak{s}} N_2$ 且 $\bar{a}_1$， $\bar{a}_2 \in$dom($\mathbb{E}_{N_1}$)，那么 $\bar{a}_2\ \mathbb{E}_{N_1}\ \bar{a}_2 \Leftrightarrow \bar{a}_1\ \mathbb{E}_{N_2}\ \bar{a}_2$。$\odot_4$ 如果 $\langle N_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增连续的，且 $\bar{a}_1 \in$ dom($\mathbb{E}_{N_\delta}$)，那么，对于某个 $\alpha < \delta$ 和 $\bar{a}_2 \in$ dom($\mathbb{E}_{N_\alpha}$)，我们有 $\bar{a}_1\ \mathbb{E}_{N_\delta}\ \bar{a}_2$。

[为什么？令 $\bar{a}_2$ 列出 $M_1 \leq_{\mathfrak{s}} N_\delta$ 的元素，并令 $p = p_{N_\delta,\ \bar{a}_1}$ 于是 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_\delta)$。因此，对于某个 $\alpha < \delta$， $p$ 不在 $M_\alpha$ 上分叉；所以，对于某个基数为 $\lambda$ 的 $M'_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_\alpha$，类型 $p$ 不在 $M'_1$ 上分叉。令 $\bar{a}_2$列出 $M'_1$ 的元素，使其阐明 $p \restriction M'_1$ 是 $p^*$ 的弱副本。显然， $\bar{a}_2 \in$dom($\mathbb{E}_{N_\alpha}$) $\subseteq$dom($\mathbb{E}_{N_\delta}$) 以及 $\bar{a}_1\ \mathbb{E}_{N_\delta}\ \bar{a}_2$。]

显然，我们已经完成了。

2）类似地，只改变（$M^*$， $p^*$），但只需考虑 $2^\lambda$ 这样的对。3）应该很清楚。

$\square_{2.18}$

定义/断言 2.19. 假设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架，因此不失一般性，可以假设它是满的。我们可以重复 2.18(3) 和 2.16(2) 中的操作，因此经过 $\omega$ 次后，我们得到 $\mathfrak{t}_\omega$，它是满的（也就是说，$\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{t}_\omega}(M^\omega) = \mathcal{S}^{\rm na}_{\mathfrak{t}_\omega}(M^\omega)$），并且 $\mathfrak{t}_\omega$ 具有典范类型基，由函数 bas$_{\mathfrak{t}_\omega}$ 作为见证（见定义 2.20）。

证明. 显然。 $\square_{2.19}$

定义 2.20. 我们称 $\mathfrak{s}$ 具有类型基，如果存在函数 bas(–)，满足：

(A) 若 $M \in K_{\mathfrak{s}}$ 且 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$, 则 bas($p$) 是（良定义的，并且是） $M$ 的一个元素。(B) $p$ 不在 bas($p$) 上分裂；也就是说，任何在 bas($p$) 上的 $M$ 的自同构[9] 都将 $p$ 映到自身。(C) 若 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$ 且 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$，则 bas($p$) $\in M$ 当且仅当 $p$ 不在 $M$ 上分叉。(D) 若 $f$ 是从 $M_1 \in K_{\mathfrak{s}}$ 到 $M_2 \in K_{\mathfrak{s}}$ 的同构，且 $p_1 \in \mathcal{S}^{\rm bs}(M_1)$，则 $f$(bas($p_1$)) =bas($f(p_1)$)。

备注 2.21. 1) 在 §3 中我们可以补充：

(E) 强唯一性：如果 $A \subseteq M \leq_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} \mathfrak{C}$ and $p \in \mathcal{S}(A, \mathfrak{C})$ 有定义，那么 bas($p$) $\in A$，并且至多存在一个 $q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 使得 $q$ 扩张 $p$。（非分叉扩张所需）。

2) 在 2.22 中，我们可以在 $\mathfrak{C}$ 中工作。

定义 2.22。当 $\mathfrak{s}$ 满足以下条件时，我们称其为等价闭的：

(A) $\mathfrak{s}$ 具有类型基 $p \mapsto$ bas($p$)。(B) 如果 $\mathbb{E}_M$ 是 $^{\omega>}M$ 上一个由同构映射和 $\leq_{\mathfrak{s}}$-扩张保持的等价关系的定义（即 $M \leq_{\mathfrak{s}} N \Rightarrow \mathbb{E}_M = \mathbb{E}_N \restriction {}^{\omega>}M$），那么存在一个从 $^{\omega>}M$到 $M$的可定义函数 $F$，使得 $F^M(\bar{a}) = F^M(\bar{b})^-$ 当且仅当 $\bar{a}\ \mathbb{E}_M\ b$。

为表述 $\mathfrak{k}$ 与 $\mathfrak{k}'$ 之间的关系，我们定义如下。

定义 2.23。设 $\mathfrak{k}_1$、$\mathfrak{k}_2$ 是 ess-$[\lambda, \mu)$-抽象初等类。

1) 我们称 i 是 $\mathfrak{k}_2$ 的一种解释，当 i 由.....构成。

[9]还有一些合理的更强版本，但可以证明函数 bas(–) 满足这些版本。

(A) 一个谓词 $P^*_{\mathbf{i}}$。

(B) $\tau_{\mathfrak{k}_2}$ 的一个子集 $\tau_{\mathbf{i}}$。

2) 在这种情况下，对于 $M_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$，令 $M_2^{[\mathbf{i}]}$ 为 $\tau_{\mathbf{i}}$-模型 $M_1 = M^{[\mathbf{i}_2]}$，其中

- 论域 $P^{M_2}_{\mathbf{i}}$，以及
- $R^{M_1} = R^{M_2} \restriction |M_1|$ 适用于 $R \in \tau_{\mathbf{i}}$。
- $F^{M_1}$ 的定义方式类似，因此即使 $F^{M_2}$ 是满的，它也可以是一个部分函数。

3) 当 $\mathfrak{k}_1$ 在 $\mathfrak{k}_2$ 中被 $\mathbf{i}$-解释（或由 $\mathbf{i}$ 解释）时，我们称：

(A) $\mathbf{i}$ 是 $\mathfrak{k}_1$ 中的一个解释。(B) $\tau_{\mathfrak{k}_1} = \tau_{\mathbf{i}}$(C) $K_{\mathfrak{k}_1} = \{M_2^{[\mathbf{i}]} : M_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}\}$(D) 如果 $M_2 \leq_{\mathfrak{k}_2} N_2$，那么 $M^{[\mathbf{i}_2]} \leq_{\mathfrak{k}_1} N_2^{[\mathbf{i}]}$。(E) 如果 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}_1} N_1$ 且 $N_1 = N_2^{[\mathbf{i}]}$（因此 $N_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$），那么存在某个 $M_2 \leq_{\mathfrak{k}} N_2$，使得我们有 $M_1 = M_2^{[\mathbf{i}]}$。(F) 如果 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}_1} N_1$ 且 $M_1 = M_2^{[\mathbf{i}]}$（因此 $M_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$），那么（可能将 $M_2$ 替换为一个在 $M_1$ 上与其同构的模型）存在 $N_2 \in K_{\mathfrak{k}_2}$，使得 $M_2 \leq_{\mathfrak{k}_2} N_2$ 且 $N_1 = N_2^{[\mathbf{i}]}$。

定义 2.24. 1) 假设 $\mathfrak{k}_1$ 在 $\mathfrak{k}_2$ 中由 $\mathbf{i}$ 解释。我们称其为严格解释，当且仅当：若 $M^{[\mathbf{i}_2]} = N_2^{[\mathbf{i}]}$，则 $M_2$ 与 $N_2$ 在 $M^{[\mathbf{i}_2]}$ 上同构。
2) 如果存在 $n$ 和 $\mathfrak{k}'_0, \ldots, \mathfrak{k}'_n$，使得 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}'_0$、$\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}'_n$，并且对于每个 $\ell < n$，$\mathfrak{k}_\ell$ 在 $\mathfrak{k}_{\ell+1}$ 中被严格解释，或反之，则称 $\mathfrak{k}_1$ 与 $\mathfrak{k}_2$ 等价。实际上，我们可以要求 $n = 2$，并且对于 $\ell = 1$，$k_\ell$ 在 $\mathfrak{k}'_1$ 中被严格解释，2.

定义 2.25。与上述（良好）ess-$[\lambda, \mu)$-框架的情形相同。

断言 2.26. 假设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架。那么存在 $\mathfrak{C}$（称为 $K_{\mathfrak{s}}$的$\mu$-饱和怪物），使得：

($a$) $\mathfrak{C}$ 是一个基数为 $\leq \mu$ 的 $\tau_{\mathfrak{s}}$-模型。($b$) $\mathfrak{C}$ 是某个 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增连续序列 $\langle M_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ 的并。($c$) 若 $M \in K_{\mathfrak{s}}$（因此 $\lambda \leq \|M\| < \mu$），则 $M$ 可嵌入到条款 ($b$) 中的某个 $M_\alpha$里。($d$) $M_{\alpha+1}$ 在 $M_\alpha$ 上对 $\alpha < \mu$ 是饱满的。

## § 3. P-simple types

我们定义集合上的基本类型，而不一定是模型上的基本类型。注意，在定义 3.5(2) 中，使用基数为 $\in (\lambda, \mu)$ 的 $C$ 并没有实际损失，因为我们可以用 $\lambda_1 = \lambda + |C|$ 替换 $\lambda$，从而将 $K_{\mathfrak{k}}$ 替换为 $K^{\mathfrak{k}}_{[\lambda_1,\mu)}$。

假设 3.1。1) $\mathfrak{s}$ 是一个良好的 ess-$[\lambda, \mu)$-框架（见定义 2.11）。2) $\mathfrak{s}$ 具有类型基（见定义 2.20）。3) $\mathfrak{C}$ 表示某个基数为 $\leq \mu$ 的 $K_{\mathfrak{s}}$ 的 $\mu$-饱和模型；见 2.26。4) 但是，$M$、$A$、.....将分别是 $<_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})}\mathfrak{C}$ 和 $\subseteq \mathfrak{C}$，但基数为 $< \mu$。

定义 3.2. 令 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$。

1) $\mathrm{dcl}(A, M) = \{a \in M$：如果 $M' \leq_{\mathfrak{s}} M''$、$M \leq_{\mathfrak{s}} M''$ 和 $A \subseteq M'$，那么 $a \in M'$，并且对于 $M'$ 的每个自同构 $f$，$f \restriction A = \mathrm{id}_A \Rightarrow f(a) = a\}$。2) $\mathrm{acl}(A, M)$ 的定义类似，但仅要求第一个条件。

定义 3.3. 1) 对于 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$ let

$$\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(A, M) = \{q \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M) : \mathrm{bas}(q) \in \mathrm{dcl}(A, \mathfrak{C})\}.$$

2) 如果 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(A, M)$ 作为 $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M)$ 的一个成员时是正则的，则称 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(A, M)$ 为正则。

定义 3.4. 1) $\mathbb{E}_{\mathfrak{s}}$ 与断言 2.18(2) 中相同。

2) 如果 $A \subseteq M \in K_{\mathfrak{s}}$ 和 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M)$，那么 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(A, M)$ 当且仅当 $p$ 可在 $A$ 上定义（见 1.13(3)），当且仅当定义 1.13 中的 $\mathrm{inv}(p)$ 是 $\subseteq A$ 且定义良好。

定义 3.5。令 $A \subseteq \mathfrak{C}$。

1) 我们在 $\mathrm{good}(A, \mathfrak{C}) = \{c \in \mathfrak{C}$ 上定义一个依赖关系：对于某些 $M <_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} \mathfrak{C}$，$A \subseteq M$，$\mathrm{ortp}(c, M, \mathfrak{C})$ 可在某个有限的 $\bar{a} \subseteq A\}$ 上定义如下：

⊛ $c$ 依赖于 $(A, \mathfrak{C})$，当且仅当不存在 $M <_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} \mathfrak{C}$ 使得 $A \cup \bar{J} \subseteq M$，且 $\mathrm{ortp}(c, M, \mathfrak{C})$ 是 $\mathrm{ortp}(c, \bar{a}, \mathfrak{C})$ 的非分叉扩张，其中 $\bar{a}$ 见证了 $c \in \mathrm{good}(A, \mathfrak{C})$。

2) 当存在一个饱满的 $M <_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} \mathfrak{C}$ 使得 $B \cup A \subseteq M$，且 $\mathrm{ortp}(C, M, \mathfrak{C})$（见定义 1.13(3)）在 $A$ 上可定义时，我们称 $C \in {}^{\mu >}[\mathfrak{C}]$ 在 $(A, B)$ 上是良好的。（在一阶语境中，我们可以说 $\{c, B\}$ 在 $A$ 上独立，但这里这样说有问题，因为 $\mathrm{ortp}(B, A, \mathfrak{C})$ 不一定是基本的。）

3) 如果我们能找到 $M$ 和 $\langle M_\alpha : \alpha < \alpha^* \rangle$，使得：那么我们称 $\langle A_\alpha : \alpha < \alpha^* \rangle$ 在 $A$ 中的 $\mathfrak{C}$ 上独立（见 [She09d, L8.8,6p.5(1)]）：

⊛ (a) $A \subseteq M \leq_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} M_\alpha <_{\mathfrak{s}} \mathfrak{C}$ 对于 $\alpha < \alpha^*$。(b) $M$ 是饱满的。(c) $A_\alpha \subseteq M_\alpha$ (d) $\mathrm{ortp}(A_\alpha, M, \mathfrak{C})$ 可在 $A$ 上定义（= 不在 $A$ 上分裂）。(e) $\langle M_\alpha : \alpha < \alpha^* \rangle$ 在 $M$ 上是独立的。

3A) 对于“在 $(A, B)$ 上”，同理。

4) 我们自然地定义“局部独立”；也就是说，每个有限子族都是独立的。

断言 3.6. 假设 $a \in \mathfrak{C}$，$A \subseteq \mathfrak{C}$.

1) $a \in \mathrm{good}(A, \mathfrak{C})$ 当且仅当 $a$ 实现了某个满足 $A \subseteq M <_{\mathfrak{k}(\mathfrak{s})} \mathfrak{C}$ 的 $M$ 所对应的 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M)$。

断言 3.7. 1) 如果 $A_\alpha \subseteq \mathfrak{C}$ 在 $(A, \bigcup_{i<\alpha} A_i)$ 上对于 $\alpha < \alpha^* < \omega$ 是良好的，那么 $\langle A_\alpha : \alpha < \alpha^* \rangle$ 在 $A$ 上是独立的。2) 重新排序会保持独立性。3) 如果 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(\bar{a}, \mathfrak{C})$ 是正则的，那么在 $p(\mathfrak{C})$ 上，$= \{c :$ $c$ 实现的 $p\}$ 独立关系满足：

(*a*) 类似条款 (1)。(*b*) 如果 $b^1_\ell$ 依赖于 $\{b^0_0,\dots,b^0_{n-1}\}$ 来实现 $\ell<k$，且 $b^2$ 依赖于 $\{b^1_\ell:\ \ell<k\}$，那么 $b^2$ 依赖于 $\{b^0_\ell:\ \ell<n\}$。(*c*) 如果 $b$ 依赖于 J，$\mathrm{J}\subseteq \mathrm{J}'$，~~那么~~ $b$ 依赖于 J′。

注记 3.8. 1）我们没有提到有限特征，但局部独立性显然满足这一点。

证明。简单。 $\square_{3.7}$

定义 3.9. 1）假设 $q\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(M)$ 且 $p\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$。当满足以下条件时，我们称 $q$ 显式地为 $(p,n)$-简单：

⊛ 存在 $b_0$、……、$b_{n-1}$、$c$，使得：[10](a) $b_\ell$ 实现 $p$。(b) $c$ 实现 $q$。(c) 对于 $\ell<n$，$b_\ell$ 在 $(\bar a,c)$ 上[11] 不好。(d) $\langle b_\ell:\ \ell<n\rangle$ 在 $\bar a$ 上独立。(e) $\langle c$、$b_0$、……、$b_{n-1}\rangle$ 在 $\bar a$ 上良好。(f) 如果[12] $c'$ 实现 $q$，那么对于每个 $b\in p(\mathfrak C)$，$c=c'$ 当且仅当 $b$ 在 $(\bar a,c)$ 上良好，当且仅当 $b$ 在 $(\bar a,c')$ 上良好。

1A) 我们称 $a$ 在 $A$ 上显式地为 $(p,n)$-简单，如果 ortp$(a,A,\mathfrak C)$ 是；类似地，在其他定义中，将 $(p,n)$ 替换为 $p$ 表示“对于某个 $n$”。

2) 假设 $q\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$，且 P 如定义 1.7 中所述。我们称 $q$ 为 P-简单，如果可以找到 $n$ 以及显式的 P-正则类型 $p_0,\dots,p_{n-1}\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$，使得每个$c\in p(\mathfrak C)$ 都由其在 $\bar a\cup\bigcup_{\ell<n} p_\ell(\mathfrak C)$ 上的类型可定义。

3A) 在第 (1) 部分中，如果将 ⊛ 中的条款 (f) 替换为以下内容，我们称其为弱 $(p,n)$-简单：

$(\mathrm{f})'$ If $b$ is good over $(\bar a,a^*_m)$ then $c$ and $c'$ realize the same type over $\bar a{}^\frown\langle a^*_m,b\rangle$.

3B) 在第 (1) 部分中，如果存在某个 $\bar a^*\in {}^{\omega>}\mathfrak C$ 在 $\bar a$ 上良好，且对于每个$c\in q(\mathfrak C)$，都存在 $b_0,\dots,b_{n-1}\in p(\mathfrak C)$，使得 $c\in \mathrm{dcl}(\bar a,\bar a^*,b_0,\dots,b_{n-1})$ 并且 $\bar a{}^\frown\langle b_0,\dots,b_{n-1}\rangle$ 在 $\bar a$ 上良好（如果简单），则称其为 $(p,n)$-简单。

4）与（2）类似。

5) 我们为 $p$（$b$，$\bar a$）定义 gw$_p$，其中 $p$ 正则且平行于某个 $p'\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a)$。（这里 gw 代表“一般权重”。）类似地，对于 gw$_p$（$q$）也作类似定义。

我们首先列出一些显而易见的性质。

命题 3.10. 1) 如果 $c$ 在 $\bar a$ 上是 p-简单的，且满足 $\bar a\subseteq A\subset \mathfrak C$，那么 $w_p(c,A)$ 是有限的。2) 显然的蕴含关系。

命题 3.11. 1) [简单 bs 的闭包]。

2) 假设 $p\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$。如果 $\bar b_1,\bar b_2$ 在 $A$ 上是 $p$-简单的，那么

(*a*) $\bar b_1{}^\frown\bar b_2$ 是 $p$-简单（当然，在 $\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$中并不要求正交类型$_{\mathfrak s}(\bar b_2\bar b_2,\bar a,\mathfrak C)$，即使对于 $\ell=1,2$，正交类型$_{\mathfrak s}(\bar b_\ell,\bar a,\mathfrak C)\in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$）。(*b*) 此外，正交类型$(b_2,\bar a b_1,\mathfrak C)$是 P-简单的。

[10]条款 (c) + (e) 是对“$c$ 在 $\bar a+\{b_\ell$ 上是代数的：$\ell<n\}$”和“每个 $b_\ell$ 都是必要的。”[11]此处的“不好”是对“ortp$(b_\ell,\bar a+c,\mathfrak C)$ 不在 $\bar a$ 上分叉”的替换。[12]这在此处似乎是合理的选择，但我们也可以采取其他选择；对于一阶而言，这是不合理的选择。

2）如果 $b_\alpha$ 在 $\bar a$ 上对于 $\alpha<\alpha^*$ 和 $\pi$ 是 $p$-简单的：$\beta^*\to\alpha^*$ 一一对应且满射，则

$$\sum_{\alpha<\alpha^*}\mathrm{gw}_p\big(b_\alpha,\bar a_*\cup\bigcup_{\ell<\alpha}b_\alpha\big)=\sum_{\beta<\beta^*}\mathrm{gw}\big(b_{\pi(\beta)},\bar a\cup\bigcup_{i<\beta}\bar b_{\pi(i)}\big).$$

以下定义出自 [Shea, 6.9(1)=Lg29]。

定义 3.12。设 $p_1,p_2\in\mathcal{S}^{\rm bs}(M)$。若满足以下蕴含关系，我们称 $p_1,p_2$ 弱正交（记作 $p_1\perp^{\rm wk}p_2$）：若 $M_0\le_{\mathfrak s}M_\ell\le_{\mathfrak s}M_3$，则 $(M_0,M_\ell,a_\ell)\in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak s}$ 且 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak s}(a_\ell,M_0,M_\ell)=p_\ell$ 对于 $\ell=1,2$ 则 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak s}(a_2,M_1,M_3)$ 不在 $M_0$ 上分叉。（由 Ax.E(f) 可知，这一关系是对称的。）

断言 3.13。[$\mathfrak s$ 是等价闭的。]
假设 $p,q\in\mathcal{S}^{\rm bs}(M)$ 不弱正交（见 3.12）。那么存在某个 $\bar a\in{}^{\omega>}M$，使得：$p,q$ 在 $\bar a$ 上可定义（即使不平稳也成立）；并且存在某个 $\mathfrak k_{\mathfrak s}$-可定义函数 F，使得对每个 $c\in q(\mathfrak C)$，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak s}(F(c,\bar a)\ \bar a,\mathfrak C)\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a,\mathfrak C)$，且对于某个 $n$，它显然是 $(p,n)$-简单的。（例如，若 $M$ 是 $(\lambda,*)$-饱满的，则 $n=w_p(q)$。）

证明。我们可以找到 $n$ 和 $c_1,b_0,\dots,b_{n-1}\in\mathfrak C$，使 $c$ 实现 $q$，$b_\ell$ 实现 $p$，$\{b_\ell,c\}$ 不在 $M$ 上独立，且 $n$ 极大。选择 $\bar a\in{}^{\omega>}M$ 使得

$$\mathrm{ortp}_{\mathfrak s}(\langle c,b_0,\dots,b_{n-1}\rangle,M,\mathfrak C)$$

在 $\bar a$ 上可定义。定义 $E_{\bar a}$，它是 $q(\mathfrak C)$ 上的一个等价关系：$c_1\ E_{\bar a}\ c_2$ 当且仅当对于每个 $b\in p\mathfrak C$，我们都有“$b$ 在 $(a,c_1)$ 上是良好的” $\Rightarrow$ “$b$ 在 $(\bar a,c_2)$ 上是良好的。”由于“$\mathfrak s$ 是等价闭的”，结论得证。$\square_{3.13}$

断言 3.14. 1) 假设 $p,q\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(M)$ 是弱正交的（见 3.12）$p,q$ 但不是正交的。那么我们可以找到 $\bar a\in{}^{\omega>}M$，使得 $\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}\ \bar a\ \mathfrak C$ $p_1=p\restriction\bar a\ \ q_1=q\restriction\bar a\ \ n:=w_p\ q\ \ge1$ [13] 在其上可定义，并且 $(,)$，从而令 $,,()$，我们有：

$\circledast^n_{\bar a,p_1,q_1,r_2}$ (a) $p_1,q_1,r_1\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak s}(\bar a)$，$\bar a\in{}^{\omega>}\mathfrak C$。(b) $p_1,q_1$ 弱正交。(c) 若 $\{a^*_n:n<\omega\}\subseteq r_1(\mathfrak C)$ 在 $\bar a$ 上独立，且 $c$ 实现了 $q$，那么对于无穷多个 $m<\omega$，存在 $b\in p(\mathfrak C)$，使得 $b$ 在 $(\bar a,a^*_n)$ 上是良好的，但在 $(\bar a,a^*_n,c)$ 上不是良好的。(d) 在 (c) 中，确实存在 $n$ 个相互独立的 $b_0,\dots,b_{n-1}$，它们在 $(\bar a,a^*_n)$ 上都良好，但在 $(\bar a,a^*_n,c)$ 上都不良好（但我们找不到 $n+1$ 个这样的 $b$）。

2) 如果 $\circledast^n_{\bar a,\ p_1,\ q_1,\ r_1}$ 那么（参见定义 3.9(3)），对于某个可定义函数 F，若 $c$ 实现了 $q_1$，则 $c^*=F(c,\bar a)$ 和正交类型 $\mathfrak n(c^*,\bar a,\mathfrak C)$ 是 $(p_1,n)$-简单的。

见下文证明。

断言 3.15. 0) 假设 $A\subseteq\mathfrak C$ 和 $a\in A$，我们称 $\mathrm{ortp}(a,A,\mathfrak C)$ 是有限性的，当且仅当它在某个 $n$ 上可定义于 $A\cup\{a_0,\dots,a_{n-1}\}$，其中每个 $a_\ell$ 都属于 $\mathfrak C$，并且在 $\mathfrak C$ 内关于 $A$ 是良好的。

1) 如果 $a\in$ 定义闭包$\big(\bigcup\{A_i:i<\alpha\}\cup A,\mathfrak C\big)$，正交类型$(a,A,\mathfrak C)$ 具有有限性，并且 $\{A_i:i<\alpha\}$ 在 $A$ 上独立，那么存在某个有限的 $u\subseteq\alpha$，使得

$$a\in\mathrm{dcl}\big(\bigcup\{A_i:i\in u\}\cup A,\mathfrak C\big).$$

2) 如果 $\mathrm{ortp}(b,\bar a,\mathfrak C)$ 是 p-简单的，那么它就是有限性的。

3) 如果 $\{A_i:i<\alpha\}$ 在 $A$ 上独立，且 $a$ 在 $A$ 上具有有限性，那么对于某个有限的 $u\subseteq\alpha$（甚至 $|u|<\mathrm{wg}(c,A)$），$\{A_i:i\in\alpha\setminus u\}$ 在 $A,A\cup\{c\}$ 上独立。（或者使用 $(A',A'')$、$(A',A''\cup\{c\})$。）

[13] 关于简单类型，我们还能说得更多。

定义 3.16. 1) 对 $\mathfrak{C}$} 的每个自同构 $f$，$\mathrm{dcl}(A) = \{a : f(a) = a$。2) $\mathrm{dcl}_{\mathrm{fin}}(A) = \bigcup\{\mathrm{dcl}(B) : B \subseteq A$ 有限}。3) 如果存在 $n < \omega$ 和 $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathrm{good}(A)$ 使得$a \in \mathrm{dcl}(A \cup \{c_0, \dots, c_{n-1}\})$，则称 $a$ 在 $A$ 上具有有限性。4) 对于这样的 $A$，当 $\mathrm{wg}(a, A)$ 有定义时，令其为 $w(\mathrm{tp}(a, A, \mathfrak{C}))$。5) 强简单蕴含简单。

断言 3.17。在定义 3.9(3) 中，对某些足够大的 $m, k < \omega$，对于每个$c \in q(\mathfrak{C})$，存在 $b_0,\dots,b_{m-1} \in \bigcup_{\ell<n} p_\ell(\mathfrak{C})$，使得

$$c \in \mathrm{dcl}\big(\bar{a} \cup \{a^*_\ell : \ell < k\} \cup \{b_\ell : \ell < m\}\big).$$

证明。令 $M_1, M_2 \in K_{\mathfrak{s}(\mathrm{brim})}$ 为使得 $M \le_{\mathfrak{s}} M_1 \le_{\mathfrak{s}} M_2$，$M_1$ 在 $M$，$p_\ell \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$ 上关于 $\lambda, *$ 饱满的（$M_\ell$）的非分叉扩张，$p, q_\ell \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$（$M_\ell$）的非分叉扩张实现了 $q_1$，且（$M_1, M_2, c$）$\in K^3_{\mathfrak{s}^{\mathrm{pr}}}$（饱满）的对象。令 $b_\ell \in p_1(M_2)$ 对于 $\ell < n^* := w_p(q)$ 满足 $\{b_\ell : \ell < n^*\}$ 在（$M_1, M_2$）中独立；令 $\bar{a}^* \in {}^{\omega>}(M_1)$ 满足正交类型$_{\mathfrak{s}}$（$\langle c, b_0, \dots, b_{n-1}\rangle, M_1, M_2$）在 $\bar{a}^*$ 上可定义，且$r =$正交类型$_{\mathfrak{s}}$（$\bar{a}^*, M_1, M_2$），$r^+ =$正交类型（$\bar{a}^\frown\langle b_0, \dots, b_{n-1}\rangle, M, M_2$）。

令 $\bar{a} \in {}^{\omega>}M$ 满足：$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(\bar{a}^*, \langle c, b_0, \dots, b_{n-1}\rangle, M, M_2)$ 在 $\bar{a}$ 上可定义。由于 $M_1$ 在 $M$ 上是 $(\lambda, *)$-饱和的，因此存在 $\{\bar{a}^*_f : f < \omega\} \subseteq r(\mathfrak{C})$ 在 $(M, M_1)$ 中独立。此外，令 $a^*_\omega = \bar{a}^*$，我们有 $\langle a^*_\alpha : \alpha \le \omega\rangle$ 在 $(M, M_1)$ 中独立。显然，$\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(c\bar{a}^*_n, M, M_2)$ 不依赖于 $n$，因此我们可以找到$\big\langle\langle b^\alpha_\ell : \ell < n\rangle : \alpha \le \omega\big\rangle$，使得 $b^\alpha_\ell \in M_2$、$b^\omega_\ell = b_\ell$ 和 $\{c\bar{a}^*_\alpha, b^\alpha_0 \dots b^\alpha_{n-1} : \alpha \le \omega\}$。（如常，这是因为指标集在 $(M_1, M_2)$ 中独立。）

其余部分应该很清楚。 $\square_{3.14}$

定义 3.18。假设 $\bar{a} \in {}^{\omega>}\mathfrak{C}$、$n < \omega$ 和 $p$、$q$、$r \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M)$ 如 $p$-简单$^{[-]}$ 的定义中所述，但 $p$ 和 $q$ 弱正交（例如参见定义 3.12(1)）。令 $p$ 为一个可定义相关函数，使得对于任意 $\bar{a}^\nu_\ell \in r(\mathfrak{C})$、$\ell < k^*$，独立映射 $c \mapsto \big\{b \in q(\mathfrak{C}) : R\mathfrak{C} \models R(b, c, \bar{a}^*_\ell)\big\}$ 是一个从 $q(\mathfrak{C})$ 到

$$\big\{\langle J_\ell : \ell < k^*\rangle : J_\ell \subseteq p(\mathfrak{C}) \text{ 对依赖封闭，且具有 } p\text{-权重 } n^*\big\}.$$

1) 我们可以定义 $E = E_{p,\,q,\,r}$，这是 $r(\mathfrak{C})$ 上的一个二元关系：$\bar{a}^*_1 \,E\, \bar{a}^*_2$ 当且仅当 $\bar{a}_1$、$\bar{a}_2 \in r(\mathfrak{C})$ 具有相同的投影，该投影是 $p(\mathfrak{C})$ 和 $q(\mathfrak{C})$ 的公共投影。
2) 定义 [一个 / 在] 上的无单位元群 $r/E$ 及其在 $q(\mathfrak{C})$ 上的作用。

备注 3.19。1) 一个要点：由于 $q$ 是 $p$-简单的，$w_p(-)$ 在 $p(\mathfrak{C})$ 上的作用“良好”，因此若 $c_1, c_2, c_3 \in q(\mathfrak{C})$，则 $w_p(\langle c_1, c_2, c_3\rangle\bar{a}) \le 3n^*$。这使我们能够以相当令人满意的方式，利用有限序列来定义平均。另一种做法是进一步考察独立集的平均。

2) 荒唐群：关于群的解释，请注意，在我们当前的语境中，对于每个可定义集 $P^M$，我们都可以在 $P^M$ 的有限子集上添加一个群，并以对称差作为加法。

3) 上述公理化的原型是 $\mathfrak{s}$，其中 $K_{\mathfrak{s}} = \{M : M$ 是 $T\}$ 的一个 $\kappa$-饱和模型，$\le_{\mathfrak{s}} = \prec{\restriction}K_{\mathfrak{s}}$，$\bigcup$ 不分叉；$T$ 是一个稳定一阶理论，且 $\mathfrak{s}\kappa(T) \le \mathrm{cf}(\kappa)$。但我们或许更倾向于将带有 $\mathfrak{s}$ 的对 $(\mathfrak{t}, \mathfrak{s})$（如上所述）形式化，$K_{\mathfrak{t}} =$ 是 $T$ 的模型，$\le_{\mathfrak{t}} = \prec{\restriction}K_{\mathfrak{t}}$，$\bigcup$ 不分叉。$\mathfrak{t}$

从 $\mathfrak{s}$ 出发，我们可以通过在直接极限下对 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 取闭包来重构一个 $\mathfrak{t}$，但在有趣的情形下，我们最终会得到一个更大的 $\mathfrak{t}$。

## References

[LS06] Michael Chris Laskowski 和 萨哈伦·谢拉, *Decompositions of saturated models of stable theories* **191** 2006 124 2231058, Fund. Math.（），第 2 期，95–。MR

[LS11]，*A trichotomy of countable, stable, unsuperstable theories*，《美国数学学会汇刊》363（2011），第3期，1619–1629，arXiv：0711.3043。MR 2737280[LS15] _____, P-*NDOP and* P-*decompositions of* $\aleph_\epsilon$*-saturated models of superstable theories*，Fund. Math. **229** 2015 1, 47 81, 1206 6028 3312115 （），第–期，arXiv：[ ] *AEC for strictly stable* ..... MR Shea 萨哈伦·谢拉，。[Sheb]，*AEC for strictly stable II*。[Shec]，*AEC: weight and p-simplicity*。[She78]，*Classification theory and the number of nonisomorphic models*，《逻辑与数学基础研究》第92卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约，1978年。MR 513226[She90]，*Classification theory and the number of nonisomorphic models*，第2版，《逻辑与数学基础研究》第92卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1990，[ ] 1083551 [ 99] _____ *Categoricity for abstract classes with amalgamation* 《Sh:a》的修订版。MR She，，《纯粹与应用逻辑年刊》98（1999），第1–3期，261–294，arXiv：math/9809197。MR 1696853[She01]，*Categoricity of an abstract elementary class in two successive cardinals*，《以色列数学杂志》126（2001），29–128，arXiv：math/9805146，MR 1882033[She04] *Characterizing an* $\aleph_\epsilon$*-saturated model of superstable NDOP theories by its* $\mathbb{L}_{\infty}$ $\aleph_\epsilon$*-theory* **140** 2004 61 111, 9609215 2054839 ，《以色列数学杂志》（），–，arXiv：math/。MR [She09a]，*Abstract elementary classes near* $\aleph_1$，《抽象初等类的分类理论》，《逻辑研究》（伦敦），第18卷，College Publications，伦敦，2009年，arXiv：0705.4137，《Sh:h [》第I章，], 第vi页+813。[She09b]，*Categoricity and solvability of A.E.C., quite highly*，2009年，arXiv：0808.3023，《Sh:h [》第IV章]。[She09c]，*Categoricity in abstract elementary classes: going up inductively*，2009年，arXiv：math/0011215，《Sh:h [》第II章]。[She09d]，*Toward classification theory of good* $\lambda$ *frames and abstract elementary classes*，2009年，0404272，arXiv：math/，《Sh:h [》第III章]。[She09e]，*Universal Classes: Axiomatic Framework [Sh:h]*，2009年，《Sh:i [》第V（B）章]。[Shear]，*Non-structure theory*，牛津大学出版社，即将出版。[SV] 萨哈伦·谢拉和塞巴斯蒂安·瓦西，*Categoricity and multidimensional diagrams*，arXiv：1805.06291。

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram, The He-brew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904, Israel, and, Department of Mathe-matics, Hill Center - Busch Campus, Rutgers, The State University of New Jersey, 110Frelinghuysen Road, Piscataway, NJ 08854-8019 USA*Email address*: shelah@math.huji.ac.il*URL*: http://shelah.logic.at