相位等变极化编码调制

Marvin Geiselhart、Marc Gauger、Felix Krieg、Jannis Clausius 和 Stephan ten Brink电信研究所，Pfaffenwaldring 47，斯图加特大学，70569 斯图加特，德国{geiselhart,gauger,krieg,clausius,tenbrink}@inue.uni-stuttgart.de

arXiv:2305.01972v1 [cs.IT] 3 May 2023

摘要——对于随机接入信道上的短分组低时延通信，导频开销会显著降低频谱效率。因此，无导频系统近来备受关注。尽管维特比–维特比相位估计（VVPE）等盲相位估计算法仅利用载荷符号即可校正相位偏移，但仍存在相位模糊。我们首先证明，在采用格雷标记的极化编码正交幅度调制（QAM）传输中，剩余相位旋转是比特翻转与自同构的组合。因此，译码器对这类相位旋转具有等变性；通过巧妙选择冻结比特，无需导频符号或外码，即可联合译码并消除相位模糊。对于四相移键控（QPSK）和16阶正交幅度调制，我们提出的系统相比导频辅助传输分别可提升高达0.8分贝和2分贝的性能。

I. 引言

无线网络的最新发展趋势（如超可靠低时延通信（URLLC）和海量机器类通信（mMTC））使得可靠、高效地传输短分组成为迫切需求。这些场景通常涉及随机接入信道，并且由于传输具有突发性，接收机必须针对每次传输重新进行信道估计。传统系统依靠分组中专用的导频符号来实现这一目的，这种方式称为导频辅助传输（PAT）。然而，在短分组系统中，导频符号会带来不可忽视的开销，从而降低频谱效率。

因此，开销较小或无需导频的系统（也称为“非相干通信”）受到了越来越多的关注。一种常见方法是采用两阶段估计过程。第一阶段使用盲信道估计器处理所有接收符号，且不预先知道发送了哪些数据符号。第二阶段则利用少量导频符号或纠错码消除剩余的相位模糊。例如，在 [1], 中，使用低密度奇偶校验码（LDPC）来消除相位模糊。在 [2], 中，作者提出使用带外层循环冗余校验（CRC）码的极化码来实现这一目的。同样，在 [3], 中，研究者提出使用极化码对衰落信道进行联合译码和信道估计。

本文利用极化码的对称性，研究联合译码与相位估计。与 [2], 相比，我们的方法对极化码的限制很少，且不需要外码。此外，可以使用任何极化译码器，例如单个低复杂度连续消除（SC）译码器。不过，仍可结合列表译码器与循环冗余校验（CRC）来提升性能。

极化码的对称性，即其仿射自同构群 [4]–[6]，因其在密码分析 [7] 和低时延置换辅助译码器架构 [5], [8]中的应用而受到关注。此外，文献 [9], 提出了一种自同构，该自同构对应于按 $N/4$ 进行准循环移位，可简化广播场景中的检测。

II. 预备知识

A. 系统模型

我们考虑一个发射机，其包含由生成矩阵 G 描述的线性信道编码器，该编码器将 K 个信息比特 u 编码为长度为 N 的码字 $c = uG$。假设采用正交幅度调制（QAM），信息编码在发射信号的幅度和相位中。码字被分成若干组，每组包含 $M_b = \log_2(M) = \log_2(|\mathcal{K}|)$ 个比特，并分别映射到星座 $\mathcal{K}$中的一个复数符号。图 1 展示了本研究所考虑的四相相移键控（QPSK）和 16阶正交幅度调制的星座示例。比特 c 与符号 $x = \mathrm{map}(c)$ 之间的映射对应于格雷标记。[1] 信号 x 经调制后转换为带通信号，通过信道传输，并由接收机解调回复基带信号。接收机若错误地假设了初始载波相位，就会导致星座符号在复平面上旋转。等效基带信道建模为

$$y_i = x_i \cdot \mathrm{e}^{j\phi} + n_i \tag{1}$$

其中，$\phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$ 表示随机均匀分布的相位偏移，$n_i \sim \mathcal{CN}(0, 2\sigma^2)$ 表示噪声功率为 $N_0 = 2\sigma^2$ 的复加性高斯白噪声（AWGN）。

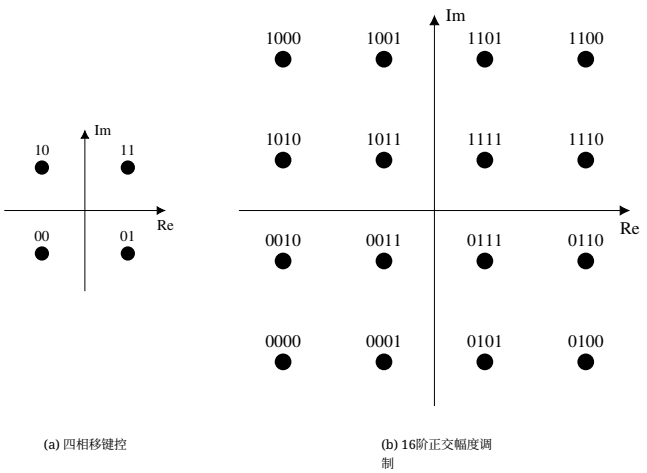
相位偏移 ϕ 的估计和校正是接收机的任务，将在第 II-C 节和第 III 节中介绍。解映射器根据经过相位校正的接收向量 y'，为每个编码比特计算对数似然比（LLR）。在假设各传输符号具有相同出现概率的情况下，符号中第 k 个比特的最大后验概率（MAP）判决规则为

$$\ell(y_i) \triangleq \ell\left(c_{i,k}|y_i\right) = \ln\left(\frac{\sum_{\hat{x}\in\mathcal{K}_{k,1}} p(y_i|x=\hat{x})}{\sum_{\hat{x}\in\mathcal{K}_{k,0}} p(y_i|x=\hat{x})}\right), \tag{2}$$

其中，$\mathcal{K}_{k,}0$ 和 $\mathcal{K}_{k,}1$ 分别表示星座图中第 k 位比特为 0 和 1 的点集。

本研究由德国联邦教育与研究部（BMBF）通过 Open6GHub 项目资助（资助编号：16KISK019）。

[1]对于第 III 节中提出的应用，必须使用图 1 所示的格雷标记，即不使用交织器。



(a) 四相移键控　(b) 16阶正交幅度调制

图 1：采用格雷标记的星座图。

B. 极化码

极化码基于信道极化原理 [10]。对于长度为 $N = 2^n$ 的极化码，应用 n 次Plotkin变换以获得 N 个极化合成信道。将 K 个极化的“可靠”信道指定为承载信息的信息集 $\mathcal{I}$，而其余 $N-K$ 个“不可靠”信道则作为冻结比特 $\mathcal{F}$ 并固定为 0。因此，生成矩阵 G 是 $G_N = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right]^{\otimes n}$ 中与 $\mathcal{I}$ 对应的那些行，其中 $(\cdot)^{\otimes n}$ 表示 n 阶克罗内克幂。合成信道可靠性的偏序关系会导出该码的仿射自同构群 [4], [11], ，即将该码映射到自身的码字比特置换集合。极化码的一种常用译码器是连续消除译码器 [10], ，其中信息比特按自然顺序依次译出。其扩展形式是连续消除列表（SCL）译码，它会保留最有希望的 L 条译码路径 [12]。

C. 盲相位估计

1）最大似然：假设有 N_c 个相互独立且均匀分布的已传输符号，相位角 ϕ 的对数似然函数 [13] 为

$$\ell(\phi) = \sum_{i=0}^{N_c-1} \ln\left(\sum_{x\in\mathcal{K}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}|y_i - x e^{j\phi}|^2\right)\right). \tag{3}$$

因此， ϕ 的最大似然（ML）估计为

$$\hat{\phi} = \arg\max_{\phi\in[0,2\pi)} \ell(\phi). \tag{4}$$

如果星座图具有旋转对称性，那么估计结果只能在这种对称性意义下唯一。对于具有四重旋转对称性的四相移键控和16阶正交幅度调制，相位可分解为 $\phi = \phi_i + \phi_f$ 整数部分 $\phi_i = m\frac{\pi}{2}$、$m \in \{0,1,2,3\}$ 和小数（精细）相移 $\phi_f \in [0, \pi/2)$。只有 ϕ_f 可以盲估计，而 ϕ_i 必须通过其他方法恢复。

2) 维特比–维特比算法：在 [14], 中介绍了 M-PSK 相位偏移的计算方法。维特比–维特比相位估计（维特比–维特比相位估计）利用了 PSK 星座的固有对称性。无论传输的符号是什么，将相位角乘以 M 都会使所有符号旋转到同一点，从而直接得到 $M\phi$ 的估计值。盲精细估计可计算为

$$\hat{\phi}_f = \frac{1}{M}\arctan\left(\frac{\sum_{i=0}^{N_c-1}\mathrm{Im}\left(\frac{y_i^M}{|y_i|^{M-1}}\right)}{\sum_{i=0}^{N_c-1}\mathrm{Re}\left(\frac{y_i^M}{|y_i|^{M-1}}\right)}\right). \tag{5}$$

然而，将相位乘以 M，再将反正切函数的结果除以 M，最终会导致相位估计 [14]存在 M 重歧义。

3) Rice–Rice–Cowley 算法：为了估计高阶正交幅度调制的相位偏移，需要调整盲估计方案。在 [15], 中，作者将 16-QAM 视为三个独立四相移键控的组合，以进行相位估计。我们将该估计方案称为 Rice–Rice–Cowley（RRC）估计。首先，根据幅度将接收符号分为三个环。对最内环和最外环上的八个符号进行联合估计，因为它们来自具有相同相位偏移的同一（缩放后）四相移键控星座。利用这一步的估计结果，再将中间圆环上剩余的八个符号划分为两个子星座，并再次通过维特比–维特比相位估计估计其偏移。借助这些附加信息，可以改进初始相位估计。

III. 相位等变极化编码调制

A. 极化编码调制的对称性

引理 1（2-循环极化码）：设 $\mathcal{C}$ 为信息集为 $\mathcal{I}$ 的极化码，满足 $i|1 \in \mathcal{I}\ \forall i \in \mathcal{I}$，其中“|”表示按位或运算。那么对所有 $c \in \mathcal{C}$，也有 $c' = [c_{(i+1) \bmod 2}]_i \in \mathcal{C}$。换言之，若对于每个偶数信息位索引 i，$i+1$ 也对应一个信息位，则该码是块长为 2 的准循环码，即置换

$$\tau = (1,0,3,2,5,4,\ldots,N-1,N-2) \tag{6}$$

是 $\mathcal{C}$ 的一个自同构。我们称这样的极化码为 2-循环码。注意，所有针对离散无记忆信道（DMC）构造的极化码都具有这一性质，因为对于偶数 i [10], 合成信道 $i+1$ 始终比 i 更可靠。

证明。该命题是 [4, 定理 2] 针对弱递减码的一个弱化版本。直观而言，τ 仅影响极化因子图的第一个阶段，因此只需考虑 $N = 2$ 个分量码。若每个分量码均为速率 0 码、速率 1 码或重复码，即 $\mathcal{I}_{N-2} \in \{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}$，则交换两个编码比特是一个自同构。■

此外，我们知道，码字比特上的一个自同构（由 $N \times N$ 置换矩阵 T 表示）对应于消息比特[16,的一个线性变换 S。第 8 章，第 5 节，引理 12]

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{G} = \mathbf{c} \iff \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{G} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{T}. \tag{7}$$

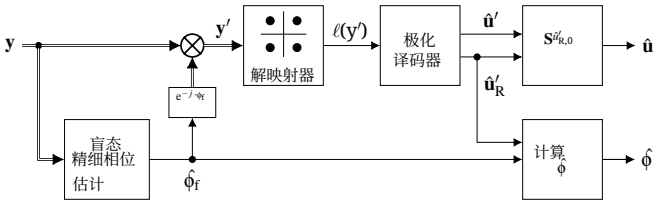


图 2：接收机处联合译码和相位估计的框图。

对于极化码和二循环移位 τ，我们可以得到如下变换矩阵： [17]

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{G}_N \mathbf{T} \mathbf{G}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_{N/2}. \tag{8}$$

˜请注意，在这种情况下，S 的维数也为 N ×N，并且也包含冻结比特。S 是通过仅选取对应于 $\mathcal{I}$ 的行和列得到的。

定理 1（旋转对称性）：设 $\mathcal{C}$ 是一个长度为 N ≥ 4、信息集为 $\mathcal{I}$ 的 2-循环极化码。此外，设 $\mathcal{X} = \{\mathrm{x} = \mathrm{map(c)}, \mathrm{c} \in \mathcal{C}\}$ 表示图 1 中某一种映射下所有复数发送信号的集合，并设对于四相移键控有 $\mathcal{R} = \{\mathrm{N}-2、\mathrm{N}-1\}$，对于 16阶正交幅度调制有 $\mathcal{R} = \{\mathrm{N}-4、\mathrm{N}-3\}$。那么

$$\mathbf{x} e^{-j\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{X} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \tag{9}$$

换言之，在旋转 $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ 作用下，一个映射后的码字会变换为另一个映射后的码字。

证明。对于四相移键控，$\pi/2$ 的旋转对应于交换相邻比特，然后翻转每隔一个比特，即，

$$(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (\bar{c}_1, c_0, \bar{c}_3, c_2, \ldots). \tag{10}$$

这是将 G_N 的第 N -2 行相加与引理 1 中的 2-循环自同构 τ 组合而成的。根据引理 1 的要求，N -1 也必须属于 $\mathcal{I}$。对于采用图 1b 标记方式的 16 正交幅度调制，$\pi/2$ 旋转意味着

$$(c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (\bar{c}_1, c_0, c_3, c_2, \ldots), \tag{11}$$

对应于引理 1 中的 τ，再加上 G_N 的第 N -4 行。同样，第 N -3 行也必须属于 $\mathcal{I}$。 ■

注：对于二进制相移键控（BPSK），关于旋转 π 的情况也存在类似的结论。这里需要注意，这相当于翻转所有比特，即加上全 1 码字。该码字是 G_N 的最后一行，因此当 N $-1 \in \mathcal{I}$ 时，它属于该码。

B. 联合译码与相位模糊消除

根据定理 1，我们提出一种无导频传输方法，用于消除极化译码后盲相位估计器产生的相位模糊。我们再次令$\mathcal{R} = \{\mathrm{N}-2, \mathrm{N}-1\}$ 对应四相移键控，令 $\mathcal{R} = \{\mathrm{N}-4, \mathrm{N}-3\}$ 对应16阶正交幅度调制，并定义一个旋转判别比特信道向量 $\mathrm{u_R}$，以便恢复相位。具体而言，对于四相移键控和16阶正交幅度调制，分别有 $\mathrm{u_{R,\ QPSK}} = (u_{N-2}, u_{N-1})$ 和 $\mathrm{u_{R,\ 16-QAM}} = (u_{N-4}, u_{N-3})$。请注意，如果发送端的 $\mathrm{u_R} = \mathbf{0}$，则旋转 $\pi/2$ 的整数倍会使接收机处的估计值 $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{R}$ 非零，即 $\hat{\mathrm{u}}_\mathrm{R}$ 表示

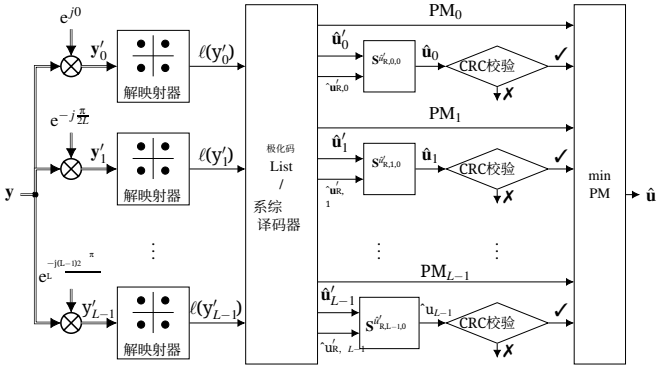


图3：用于列表译码或集成译码且无需盲相位估计的改进型接收机结构。

二进制表示的 $\pi/2$-旋转次数。根据定理 1 可直接得出这一性质，因为单次旋转会翻转比特 $\mathrm{u_{R,\ 0}}$，而两次旋转会翻转比特 $\mathrm{u_{R,\ 1}}$。不过，由于 2-循环自同构 τ，估计值 ˆu 中的其他比特也会受到影响，因此必须对 ˆu（或者相应地，对完整的 ˆu）应用式 8˜中的矩阵 S 来消除这些影响。因此，我们提出的联合估计与译码方案可概括如下：

1) 设计一个 2-循环极化码 $\mathcal{C}$，其中 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$。一种实用的方法是采用一种具有 K $+2$ 信息比特的码设计，然后将比特 $\mathcal{R}$ 冻结。2) 在发送端，使用 $\mathcal{C}$进行编码，随后根据图 1 进行四相移键控或 16阶正交幅度调制映射，即 x =map(uG)。3) 在接收端，对接收符号 y 进行盲精细相位估计，例如使用最大似然法或维特比–维特比相位估计，并校正精细相位偏移 $\hat{\phi}_\mathrm{f}$，得到 y′，使其在旋转 m_2^π 的范围内与星座图对齐。4) 使用任意采用信息集 $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cup \mathcal{R}$的极化译码器对 y′ 进行解映射和译码。与 $\mathcal{I}$ 对应的信息比特估计记为 ˆu′，与 $\mathcal{R}$对应的相位恢复比特记为 $\hat{\mathrm{u}}'_\mathrm{R}$。5) 恢复剩余的相位旋转，得到 $\hat{\phi}_\mathrm{i} = m_2^\pi$，其中 $\mathrm{m} = 2\hat{\mathrm{u}}'_{\mathrm{R},1} + \hat{\mathrm{u}}'_{\mathrm{R},0}$。总相位旋转为 $\hat{\phi} = \hat{\phi}_\mathrm{i} + \hat{\phi}_\mathrm{f}$。6) 消除消息中的相位模糊：$\hat{\mathrm{u}} = \hat{\mathrm{u}}' \cdot \mathrm{S}^m$。注意，$\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}$，因此 $\mathrm{S}^m = \mathrm{S}^{\hat{u}'_{\mathrm{R},0}}$，最多可通过 K/2 次二进制加法实现。

图 2 展示了所提出接收机的框图。

备注：同样的思路也可以应用于 BPSK 调制。在这种情况下，只需考虑 $\mathcal{R} = \{\mathrm{N}-1\}$ 和 π 的相位模糊。由于编码比特不会发生置换，因此无需应用校正矩阵 S，从而进一步简化了系统。

C. 列表译码与集成译码

定理 1 中的对称性是极化码的一种性质，因此，所提出的方案适用于任何极化译码器。然而，当极化译码中需要外码时，例如 CRC 辅助的 SCL，系统就必须进行修改。一般而言，$\pi/2$ 旋转所涉及的置换并不是

级联码的自同构，因此，$\hat{u}'$ 不是外码的码字。因此，对于列表中的每个候选项，都必须在消除相位模糊后检查其是否属于外码。

通过这一补充，系统的误码率性能（对于 u_R，最多存在 2 的比特率损失）仅受盲精细相位估计器精度的限制。对于短码块长度，这种性能限制可能并不理想。因此，我们提出了第二种与 SCL 译码兼容且无需盲相位估计的系统。

图3展示了使用列表译码的改进型接收机框图。标准 SCL 译码器仅使用单个输入，而已有一些变体提出用不同的 y 初始化全部 L 条路径，这些 y 由码字置换生成 [18], [19]。每当译码路径分支时，不同输入对应的译码路径便会相互竞争，并且只保留根据路径度量（PM）评估最有希望的 L 条路径。在本文中，我们用针对 ϕ 的不同假设初始化 L 条路径，取值范围从 0 到 $\pi/2$。在译码器输出端，将最终 PM 最小的消息候选 $\hat{u}_l$ 判定为最终译码结果。对于该消息，按照第三-B节所述消除剩余的相位模糊。使用外层 CRC 码时，会先对每个候选进行消歧，再移除未通过 CRC校验的候选并基于 PM 进行选择。

另一种译码方案是集成译码器，即由多个低复杂度、相互独立的（例如 SC）译码器[20]组成。与 SCL译码相比，各条译码路径彼此独立，不进行分支，因此在相同列表大小下，复杂度和译码时延有所降低，但误码率性能会略有下降 [19]。

IV. 结果

A. 基线系统

根据 5G 设计 [21]，采用极化码评估所提出系统的误码率性能。作为参考，我们将其与多种可能的基线系统进行比较：

1) 在接收机处完全已知 ϕ 的场景，仅对应加性高斯白噪声信道。2) 不进行任何盲估计的 PAT系统，即 ϕ 仅根据 p 个导频系统进行估计。为确保比较公平，极化码已缩短 $p \cdot M_b$ 位，使该系统具有相同的总码率。每种情况下，导频数 p 均经过优化，以获得最佳块错误率（BLER）性能。此情况记为“p- PAT”。3) 采用盲估计的混合PAT系统，即使用盲估计器估计 ϕ_f ，并使用 p 个导频消除剩余的相位模糊。与前一个系统类似，已对速率匹配进行优化。根据所使用的盲估计算法，此情况记为“p-PAT+ML/VVPE/RRC”。

B. 误码率性能

图4展示了PAT以及所提出的联合估计与译码在QPSK传输中的块错误率性能

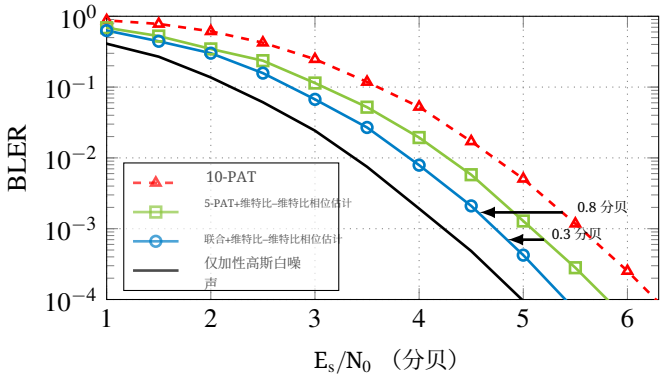


图4：基于四相移键控传输K =64个信息比特在$N_c = 64$ 次复信道使用下的块错误率性能比较（码率R $= 1/2$，SC译码）。

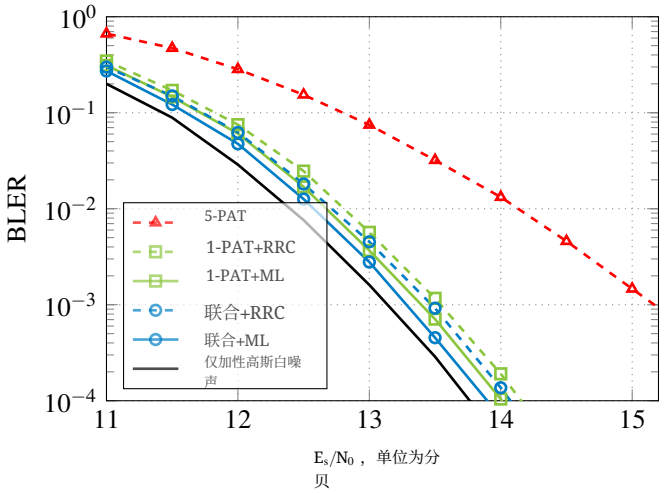


图 5：基于 16阶正交幅度调制的传输在 $N_c = 64$ 复信道使用次数中传输 K $= 192$ 信息比特时的块错误率性能比较（码率 R $= 3/4$，SC译码）。

其中信息量为 K $= 64$ 比特，使用 $N_c = 64$ 次信道使用。所有系统均采用 SC译码。基线 PAT系统需要 $p = 10$ 个导频符号才能获得最佳性能，而盲 VVPE 将所需导频符号数减少至 5 个，性能提升 0.5 分贝。我们提出的无导频等变系统比这种混合 PAT 再提升 0.3 分贝；在块错误率为 10^{-3} 时，与无相位偏移的情况相比仍有 0.5 分贝的差距。图5采用相同的设置，以 16阶正交幅度调制实现 3 比特/信道使用（bpcu）的目标频谱效率（K $= 192$，$N_c = 64$）。我们考察了 RRC 和 ML 盲相位估计。采用 ML 盲相位估计的所提出联合系统，性能与加性高斯白噪声情况相差不超过 0.15 分贝。此外，联合方法比混合 PAT 提升 0.1 分贝；在这两种情况下，RRC 估计的性能均比 ML 估计器低约 0.15 分贝。此处，最优 PAT系统需要 $p = 5$ 个导频符号，并且在块错误率为 10^{-3} 时需要高出 2 分贝的信噪比（SNR）。

C. 列表译码

图 6 比较了列表译码和集成译码情况下 PAT 与联合估计和译码的性能，列表大小为 L{v1}。

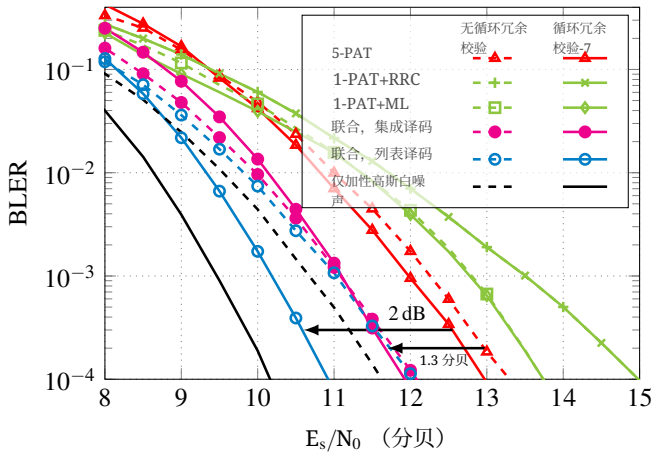


图 6：基于 16阶正交幅度调制的传输中，K ＝64 个信息比特通过 $N_c = 32$ 次复信道使用传输（码率 R ＝1/2，采用 SC 列表译码和集成译码，L ＝8）。

研究了采用和不采用 7 位 CRC 的系统；CRC 生成多项式为 $g(z) = z^7 + z^3 + 1$[22]。考虑的场景是通过 $N_c = 128$ 次复信道使用传输 K ＝64 个信息比特，即频谱效率为 2 bpcu。在此场景中，误差的主要来源是相位估计。因此，CRC 并未提升混合 PAT 系统的性能，而在标准 PAT 中则带来了小幅增益；标准 PAT 的性能优于混合方案。然而，所提出的无需盲估计的联合估计与译码方案，无论是否采用 CRC，分别比 PAT 好 1.3 分贝和 2 分贝。正如预期的那样，集成译码器无法从外层 CRC 码中获益，这与列表译码器不同。不过，如果不使用 CRC，集成译码器的性能与列表译码器非常相近，因此在这种情况下，由于实现复杂度和时延较低，应优先采用集成译码器。

V. 结论

本文提出了一种针对存在相位偏移的信道的联合估计与译码框架。该系统利用了采用四相移键控和16阶正交幅度调制的极化码传输所具有的相位等变对称性。本文还提出了适用于列表译码和集成译码的扩展方案，其块错误率性能显著优于 PAT。

尽管本文仅考虑了单次处理，但迭代估计与译码（例如使用软输入软输出译码器）也可能受益于相位等变特性。此外，未来工作还可关注其他信道，例如块衰落信道或多径信道。最后，可以考虑遵循二循环极化码自同构的不同外码（类似于[23]），从而在消除相位模糊之前对其进行检验，以降低实现复杂度。

参考文献

[1] R. Imad、S. Houcke 和 M. Ghogho，“LDPC编码系统的相位偏移与载波频率偏移盲估计”，EURASIP信号处理进展期刊，第2010卷，文章编号293572，2010年。

[2] P. Yuan、M. C. Cos.kun 和 G. Kramer，“极化编码非相干通信”，IEEE通信快报，第25卷，第6期，第1786–1790页，2021年。[3] M. Z heng、C. Ling 和 X. Wu，“非相干信道上的混合极化编码设计”，载于 WSA 2021；第25届国际ITG智能天线研讨会，2021年，第1–5页。[4] M. Bardet、V. Dragoi、A. Otmani 和 J. Tillich，“新多项式形式体系下极化码的代数性质”，载于 IEEE国际信息论研讨会（ISIT），2016年，第230–234页。[5] M. Geiselhart、A. Elkelesh、M. Ebada、S. Cammerer 和 S. ten Brink，“论极化码的自同构群”，载于2021 IEEE国际信息论研讨会（ISIT），2021年，第1230–1235页。[6] Y. Li、H. Zhang、R. Li、J. Wang、W. Tong、G. Yan 和 Z. Ma，“极化码的完整仿射自同构群”，载于2021 IEEE全球通信大会（GLOBECOM），2021年，第01–06页。[7] M. Bardet、J. Chaulet、V. Dragoi、A. Otmani 和 J. Tillich，“基于极化码的McEliece公钥密码系统的密码分析”，载于后量子密码学，2016年，第118–143页。[8] C. Pillet、V. Bioglio 和 I. Land，“用于自同构集成译码的极化码”，载于2021 IEEE信息论研讨会（ITW），2021年。[9] H. Luo、G. Zhang、A. Maevskiy、V. Gritsenko、Y. Zhou、Y. Chen、R. Li、Y. Ge、J. Wang 和 J. Wang，“置换极化码的分析与应用”，载于2018 IEEE全球通信大会（GLOBECOM），2018年，第1–5页。[10] E. Arıkan，“信道极化：一种为对称二元输入无记忆信道构造容量可达码的方法”，IEEE信息论汇刊，第55卷，第7期，第3051–3073页，2009年7月。[11] V. Bioglio、I. Land 和 C. Pillet，“用于自同构集成译码的极化码的群性质”，IEEE 信息论汇刊，2023年。[12] I. Tal 和 A. Vardy，“极化码的列表译码”，IEEE信息论汇刊，第61卷，第5期，第2213–2226页，2015年5月。[13] C. Georghiades，“QAM星座的盲载波相位捕获”，IEEE通信汇刊，第45卷，第11期，第1477–1486页，1997年。[14] A. J. Viterbi 和 A. M. Viterbi，“PSK调制载波相位的非线性估计及其在突发数字传输中的应用”，IEEE信息论汇刊，第29卷，第4期，第543–551页，1983年。[15] F. Rice、M. Rice 和 B. Cowley，“一种利用QPSK分区进行16QAM载波相位估计的新算法”，数字信号处理，第12卷，第1期，第77–86页，2002年。 [在线]。可访问：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200401904002 [16] F. J. MacWilliams 和 N. J. A. Sloane，纠错码理论，北荷兰数学文库系列。North-Holland Pub. Co.，1977年，第16号。[17] M. Geiselhart、A. Elkelesh、J. Clausius 和 S. ten Brink，“基于极化子码的置信传播列表译码方法”，载于2022 IEEE信息论研讨会（ITW），2022年，第243–248页。[18] I. Dumer 和 K. Shabunov，“Reed-Muller码的软判决译码：递归列表”，IEEE信息论汇刊，第52卷，第3期，第1260–1266页，2006年3月。[19] L. Johannsen、C. Kestel、M. Geiselhart、T. Vogt、S. ten Brink 和 N. Wehn，“极化码的连续消除自同构列表译码”，准备中。[20] M. Geiselhart、A. Elkelesh、M. Ebada、S. Cammerer 和 S. ten Brink，“Reed–Muller码的自同构集成译码”，IEEE通信汇刊，2021年。[21] “无线接入网技术规范组”，3GPP，2018年，TS 38.212 V.15.1.1。 [在线]。可访问：http://www.3gpp.org/ftp/Specs/ archive/38 series/38.212/[22] G. Liva、L. Gaudio、T. Ninacs 和 T. Jerkovits，“短码块码设计：综述”，ArXiv预印本，2016年10月。[23] S. Gelincik、C. Pillet 和 P. Giard，“采用基于自同构译码的Reed-Muller码动态冻结函数设计”，IEEE通信快报，第27卷，第2期，第497–501页，2023年。