arXiv:2305.01976v1 [math.AP] 3 May 2023

通过分部积分证明分数阶 Hardy-Rellich 不等式

NICOLA DE NITTI 和 SIDY MOCTAR DJITTE

摘要。我们证明了在 $C^{1,1}$ 类有界区域上的一个分数阶 Hardy-Rellich 不等式，并给出了显式常数。证明策略推广了 E. Mitidieri 在 Pohozaev 型恒等式基础上提出的方法（*Mat. Zametki*，2000 年）。

1. 引言

在 [20], G. H. Hardy 证明，若 $p>1$ 且 f 是 $L^p(\mathbb{R}_+)$ 上的非负函数，则对任意 $x>0$， f 在区间 $(0,x)$ 上可积，并且

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p\,\mathrm{d}x$$

成立；或者，令 $u(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，

$$\int_0^\infty \frac{u(x)^p}{x^p}\,\mathrm{d}x \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |u'(x)|^p\,\mathrm{d}x.$$

常数 $(p/(p-1))^p$ 由 Landau 于 [24] 证明是尖锐的。从这些开端以来，人们证明了许多 Hardy型不等式，它们已成为分析学多个分支中的基础工具。关于更多信息和历史背景，请参阅综述 [7, 32, 22]。

Hardy 不等式的经典 N 维推广指出，对于 $N>1, 1\le p<\infty$，其中 $p\neq N$，且对所有 $u\in C^1_c(\mathbb{R}^N\setminus\{0\})$，

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{|N-p|}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p\,\mathrm{d}x.$$

更确切地说，当 $1\le p<N$ 时，u 可以属于 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$；当 $N<p<\infty$ 时，W^1 可以属于 $L^p\left(\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\right)$。这里的常数 $(p/|N-p|)^p$ 是尖锐的，且在这些 Sobolev 空间中无法取到。若 $p=1$，则任意正的对称递减函数都能取等号。关于这些结果及其他结果（包括对相关常数最优取值的讨论），请读者参阅 [2, 18, 26, 29, 1] 及其中引用的文献；此处不声称内容面面俱到。

Rellich [33] 给出了一个相关不等式：

$$\frac{N^2(N-4)^2}{16}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{|x|^4}\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

对于 $u\in W^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ 和 $N>4$。关于 Rellich 型不等式的更多信息（特别是，例如，$N\in\{2,3,4\}$情形的相关评论，参见 [1, 14] 及其中的参考文献和 [1, 第 6.4 节。2] ）。在本文中，我们将重点讨论以下 Rellich 不等式（例如，参见 [29]）：

$$c_{p,\theta}^p\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \frac{|\Delta u(x)|^p}{|x|^{\theta+2-2p}}\,\mathrm{d}x, \tag{1.1}$$

2020 数学主题分类。 26D10, 46E35, 35R11, 35A15.关键词和短语。 Hardy 不等式；Rellich 不等式；Pohozaev恒等式；分数阶 Sobolev 空间；分数阶 Laplace 算子。

对于 $u \in C^1_c(\Omega)$, $p > 1$, $N > \theta + 2$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个光滑有界区域，且最佳常数由 $c_{p,\theta} = (N-2-\theta)[(p-1)(N-2)+\theta]/p^2$. 给出。我们的主要目标是建立 (1.1) 的一个对应结果，其中拉普拉斯算子被分数阶拉普拉斯算子取代:

$$\int_\Omega \frac{|u|^p(x)}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x \lesssim \int_\Omega \frac{|(-\Delta)^s u(x)|^p}{|x|^{\theta+2s-2sp}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

关于分数阶算子，已有若干 Hardy型不等式。例如，在 [21], 中，Herbst 证明了 that

$$\tilde{\mathcal{C}}^p_{N,s,p}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}\,\mathrm{d}x \le \|(-\Delta)^{s/2}u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{1.3}$$

对于 $1 < p < \infty$、 $s > 0$、 $N > ps$ 和 $u \in C^1_c\left(\mathbb{R}^N\right)$, 其最优常数为 $\tilde{\mathcal{C}}_{N,\,s,\,p} = 2^{-s}\,\Gamma\left(\frac{N(p-1)-ps}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{N-ps}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{N}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{N(p-1)+ps}{2p}\right)^{-1}$. 相关结果见 [17, 定理 1.1] (另见 [27]), 其中证明了 国产成人

$$\mathcal{C}_{N,s,p}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{|x|^{ps}}\,\mathrm{d}x \le \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1.4}$$

对于所有 $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, 其最优常数为[1]

$$\mathcal{C}_{N,s,p} := 2\int_0^1 r^{ps-1}\left|1-r^{(N-ps)/p}\right|^p \Phi_{N,s,p}(r)\,\mathrm{d}r, \tag{1.5}$$

其中

$$\Phi_{N,s,p}(r) := \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2})\int_{-1}^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{N-3}{2}}}{\left(1-2rt+r^2\right)^{\frac{N+ps}{2}}}\,\mathrm{d}t, \qquad N \ge 2,$$

$$\Phi_{1,s,p}(r) := \left(\frac{1}{(1-r)^{1+ps}} + \frac{1}{(1+r)^{1+ps}}\right), \qquad N = 1.$$

对于 $p = 2$, 由于 [8, 命题 3.6], (1.3) 的右端与 (1.4) 的右端成正比。进一步的结果也可参见 [16, 35, 25, 14, 30, 13, 15, 4, 3, 7] 。特别是， [31, 36] 中包含分数阶 Hardy 不等式的高阶版本，而近期的专著 [1, 14]中也介绍了 Rellich 不等式的一些分数阶对应形式。

然而，据我们所知，文献中尚无与 (1.2) 类型相同的 (1.1) 的分数阶类比。本文的主要目标是证明这一结果（精确表述见下文定理 2.2），具体做法是推广 Mitidieri 在 [29, Section 3], 中开创的策略，其关键观察是，适当选取一个辅助函数，便可由 Rellich-Pohozaev 型恒等式推出 (1.1)。这种方法似乎无法在分数阶情形下得到最佳常数。另一方面，我们认为，该方法因其简洁性而本身具有研究价值。证明的关键在于一个分数阶 Pohozaev 型恒等式（见 [11, 34]）。

1.1. **Mitidieri 关于 Hardy-Rellich 不等式的方法**。 为完整起见，我们概述 [29, 第 3] 节中采用的证明策略，以证明对于任意函数 $u \in C^1_c(\Omega)$, Hardy-Rellich 不等式 (1.1) 成立。其出发点是以下 ***Rellich-Pohozaev*** 恒等式 （参见

[1]另请参见 [17, 公式（3.5）和公式（3.6）] ，其中给出了$\mathcal{C}_{N,s,p}$的等价表达式。此外，根据 [17, 公式（1.6）], , 如果 $p = 2$, 则该常数可以更明确地表示为

$$\mathcal{C}_{N,s,2} = 2\pi^{N/2}\frac{\Gamma((N+2s)/4)^2}{\Gamma((N-2s)/4)^2}\frac{|\Gamma(-s)|}{\Gamma((N+2s)/2)}.$$

[28, 推论 2.1]）：对于所有 $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big((x\cdot\nabla v)\Delta u + (x\cdot\nabla u)\Delta v\Big)\,\mathrm{d}x \\ = (N-2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\Big(\partial_\nu u(x\cdot\nabla v) + \partial_\nu v(x\cdot\nabla u) - (\nabla u\cdot\nabla v)(x\cdot\nu)\Big)\,\mathrm{d}\sigma,\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中，ν 表示外向单位法向量，∂_ν 表示点 $x\in\partial\Omega$ 处的外法向导数。特别地，我们将考虑 $u\in C_c^2(\Omega)$，它会消去边界项。论证的关键在于式 (1.6) 中辅助函数的选取，具体如下。假设 $u>0$（在其支撑集内）且 $p>1$，将 $u\mapsto u^p$ 和 $v\mapsto v_t := (|x|^\theta + t)^{-1}$（其中 $t>0$和 $\theta\in\mathbb{R}$）代入式 (1.6)。令 $t\to 0^+$，并应用链式法则 $\Delta\phi(u) = \phi'(u)\Delta u + \phi''(u)|\nabla u|^2$（其中 $\phi(u)=u^p$），得到

$$\int_\Omega \frac{u^{p-1}\Delta u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x + (p-1)\int_\Omega \frac{u^{p-2}|\nabla u|^2}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x = \theta\int_\Omega \frac{u^{p-1}x\cdot\nabla u}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.7}$$

利用散度定理，(1.7) 右端可写为

$$\int_\Omega \frac{u^{p-1}x\cdot\nabla u}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{N-2-\theta}{p}\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

另一方面，由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{N-2-\theta}{p}\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{u^{p-1}x\cdot\nabla u}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x &\le \int_\Omega \frac{|\nabla u|\,|x|\,|u|^{p-1}}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2|u|^{p-2}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12},\end{aligned}$$

由此我们推出

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2|u|^{p-2}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x \ge \left(\frac{N-2-\theta}{p}\right)^2\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

最后，应用共轭指数为 p 和 $p/(p-1)$ 的 Hölder 不等式，我们估计得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{u^{p-1}\Delta u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x &\le \int_\Omega \frac{u^{p-1}}{|x|^\alpha}\,\frac{|\Delta u|}{|x|^{\theta-\alpha}}\,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\frac{\alpha p}{p-1}}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \frac{|\Delta u|^p}{|x|^{(\theta-\alpha)p}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1p},\end{aligned} \tag{1.10}$$

当 $\alpha\in\mathbb{R}$ 时。特别地，取 $\alpha = (\theta+2)(p-1)/p$ 并将 (1.8)、(1.9) 和 (1.10) 代入，可得 (1.7)

$$\left[\frac{N-2-\theta}{p^2}\Big((p-1)(N-2)+\theta\Big)\right]\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega \frac{|\Delta u|^p}{|x|^{\theta+2-p}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1p}.$$

也就是说,

$$c_{p,\theta}^p\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^{\theta+2}}\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \frac{|\Delta u|^p}{|x|^{\theta+2-2p}}\,\mathrm{d}x,$$

with

$$c_{p,\theta} = \frac{(N-2-\theta)[(p-1)(N-2)+\theta]}{p^2}.$$

为去除额外假设 $u>0$，我们在上述计算中使用 $u_t := (u^2+t^2)^{1/2} - t$（其中 $t>0$），最后令 $t\to 0^+$。

1.2. 推广到 $s \in (0,1)$ 及论文结构概述。 要将第 1.1 节概述的论证推广到分数阶情形，会遇到若干技术难题。

我们的出发点是 [11, Theorem 1.3] 中证明的广义分数阶 Pohozaev 恒等式。然而，形如 $v_t(\cdot) := (t^2 + |\cdot|^2)^{-\theta/2}$ 的函数不满足恒等式 [11, Theorem 1.3] 的适用条件。为解决这一问题，首先，我们采用一种逼近技巧，用 $z_k v_t$ 替换 v_t，其中 z_k 是支撑在 Ω 中的适当截断函数（见引理 A.1）。利用分数阶拉普拉斯算子的乘积法则展开所得恒等式，然后取极限，得到 (1.7) 的分数阶版本。在此过程中，必须显式计算表达式 $\lim_{t\to 0^+}(-\Delta)^s((t^2 + |\cdot|^2)^{-\theta/2})(x)$。这一计算或许是众所周知的，但为完整起见，我们在此给出（见引理 A.2）。最后，由于经典链式法则 $\Delta\phi(u) = \phi'(u)\Delta u + \phi''(u)|\nabla u|^2$ 对分数阶拉普拉斯算子不成立（我们只有 [10, Lemma 2.6]），因此需要改用 Cordoba-Cordoba 不等式来估计 $(-\Delta)^s u^p$（见 [6, Theorem 1] 和 [5, Theorem 1.1]）。换言之，在分数阶计算中，与 (1.9) 对应的界被一个粗糙得多的界所取代。

本文结构如下。第 2 节陈述主要定理，并介绍所需的预备概念。证明见第 3 节。论证中用到的一些技术引理汇集于附录 A。

2. 主要结果

设 $0 < s < 1$。分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 作用于足够正则的函数时，例如 $u \in C^{1,1}_c(\mathbb{R}^N)$，定义为如下奇异积分

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{N,s}\,\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y, \tag{2.1}$$

其中 p.v. 表示柯西主值，归一化常数 $c_{N,s}$ 定义为

$$c_{N,s} := \frac{s2^{2s}\Gamma(\frac{N+2s}{2})}{\pi^{N/2}\Gamma(1-s)} \tag{2.2}$$

（见 [8]）。对于任意 $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$，也可以通过令其弱定义为

$$\left\langle (-\Delta)^s u, v\right\rangle := \frac{c_{N,s}}{2}\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =: \mathcal{E}_s(u,v)$$

对所有 $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$。这里，$H^s(\mathbb{R}^N)$ 是 L^2 函数 u 的子空间，其中半范数 $\mathcal{E}_s(u,u)$ 有限。

在本文中，我们用 $\mathcal{H}^s_0(\Omega)$ 表示属于 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 的 L^2 函数中满足 $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ 的子集。我们回顾一下，根据 [19, 定理 1.4.2.1], ，如果 Ω 具有连续边界，那么 $\mathcal{H}^s_0(\Omega)$ 与关于半范数 $\mathcal{E}_s(\cdot,\cdot)$ 的 $C^\infty_0(\Omega)$ 的闭包相一致。

我们的第一个主要结果是以下积分恒等式。粗略地说，这对应于式（1.7）的广义非局部版本。

定理 2.1（带 Hardy 权重的 Rellich-Pohozaev 型恒等式）。设 $\theta \geq 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $N > \theta + 2s$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一个 $C^{1,1}$ 类有界开集，且包含原点 0。设 $Y \in C^{0,1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ 满足 $Y(0) = 0$。我们定义非局部算子

$$\left[\mathscr{L}_{\mathcal{K}_Y} u\right](x) := \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^N} (u(x)-u(y))\mathcal{K}_Y(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{2.3}$$

其中

$$\mathcal{K}_Y(x,y) = \frac{c_{N,s}}{2}\left[\operatorname{div} Y(x) + \operatorname{div} Y(y) - (N+2s)\frac{(Y(x)-Y(y))\cdot(x-y)}{|x-y|^2}\right]|x-y|^{-N-2s}. \tag{2.4}$$

令 $u \in C^{1,}{}_{c}{}^{1}(\Omega)$ 并定义 $U_{t,}{}_{p} = (u^2+t^2)^{p/2} - t^p \in C^{1,}{}_{c}{}^{1}(\Omega)$ 对所有 $t > 0$ 成立。那么对所有 p，下列恒等式成立。

$$\begin{aligned} &- b_{N,s,\theta} \int_\Omega \frac{U_{t,p}(x)}{|x|^{\theta+2s}} \operatorname{div} Y(x)\,\mathrm{d}x + b_{N,s,\theta}(\theta+2s) \int_\Omega U_{t,p}(x) \frac{x \cdot Y(x)}{|x|^{\theta+2s+2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \theta \int_\Omega \frac{x \cdot Y(x)}{|x|^{\theta+2}} (-\Delta)^s U_{t,p}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\mathscr{L}_{\mathcal{K}_Y} U_{t,p}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中

$$b_{N,s,\theta} := c_{N,s} \int_0^1 r^{2s-1}(1-r^\theta)(1-r^{N-2s-\theta})\psi_N(r)\,\mathrm{d}r,$$

其中 $c_{N,s}$ 如(2.2) 中所给，且

$$\psi_N(r) := 2\,\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2}) \int_{-1}^1 \frac{(1-h^2)^{\frac{N-3}{2}}}{\left(1+r^2-2rh\right)^{(N+2s)/2}}\,\mathrm{d}h \qquad \text{if } N \geq 2,$$

$$\psi_N(r) := 2\left(\frac{1}{(1-r)^{1+2s}} + \frac{1}{(1+r)^{1+2s}}\right) \qquad \text{if } N = 1.$$

注意到，根据假设，(2.5) 中的所有量均有良好定义。作为恒等式 (2.5) 的推论，我们得到以下分数阶 Hardy-Rellich 不等式。

定理 2.2 (有界区域中的广义分数阶 Hardy-Rellich 型不等式)**.** 设 $\theta \geq 0$和 $N \in \mathbb{N}$ 满足 $N > \theta + 2s$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一个包含原点 0的 $C^{1,1}$ 类有界开集。那么，对于所有 $u \in C^{1,}{}_{c}{}^{1}(\Omega)$，我们有

$$\left[\frac{b_{N,s,\theta}}{p}\right]^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{|(-\Delta)^s u|^p}{|x|^{\theta+2s-2sp}}\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

对于 $p > 1$ 和

$$b_{N,s,\theta} \int_\Omega \frac{|u|}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{\operatorname{sign}(u)(-\Delta)^s u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x \tag{2.7}$$

对于 $p = 1$。

将 $\theta = 2sp - 2s$ 代入上文的 (2.6)，即可得到 Herbst[21] 关于有界区域的一个结果（相关结果另见 [15, 定理 1.3] 和 [35] ）。

推论 2.3。（改进的分数阶 *Hardy* 不等式）设 $s \in (0,1)$、 $N/p > 2s$ 和 $p > 1$。设$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个包含原点 0 的 $C^{1,1}$ 类有界开集。那么，对所有 $u \in C^{1,}{}_{c}{}^{1}(\Omega)$，有

$$\left[\frac{b_{N,s,2s(p-1)}}{p}\right]^p \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2sp}}\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |(-\Delta)^s u|^p\,\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

特别地，对于 $p = 2$ 一个d>Ns，我们得到d

$$\begin{aligned} &\left[\frac{b_{N,s/2,s}}{2}\right]^2 \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |(-\Delta)^{s/2} u|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad \leq \frac{c_{N,s}}{2}\left[\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega}\left(\int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{N+s}}\,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

对所有 $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$。若 $N = 1$ 且 $0 < s < \frac{1}{4}$，估计式 (2.9) 化为

$$\begin{aligned} &\left[\frac{b_{1,s/2,s}}{2}\right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{u^2(x)}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{c_{1,s}}{2}\left[\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{1+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_1^\infty \left(\int_{-1}^{+1} \frac{u(y)}{(x-y)^{1+s}}dy\right)^2 \mathrm{d}x - \int_1^\infty \left(\int_{-1}^{+1} \frac{u(y)}{(x+y)^{1+s}}dy\right)^2 \mathrm{d}x\right]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

在给出证明之前，我们先对主要结果作几点说明。

注释 2.4（关于主要结果的说明）。

(1) 当 $\theta = 0$ 时，常数 $b_{N,s,0}$ 消失，并且方程 (2.5) 特别给出的是 уларниң t

$$\int_\Omega \operatorname{sign}(u)(-\Delta)^s u \,\mathrm{d}x \geq 0, \quad \text{for all } u \in C_c^{1,1}(\Omega). \tag{2.11}$$

类似于 (2.11) 的估计也可通过使用 Kato 型不等式以及分数阶拉普拉斯算子的对称性得到（见 [9]）：

$$\int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sign}(u)\,(-\Delta)^s u \,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^s |u| \,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{for all } u \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}^N).$$

(2) 若将 Ω 替换为 $\mathbb{R}^N$，利用恒等式

$$\int_{\mathbb{R}^N} x \cdot \nabla u (-\Delta)^s u \,\mathrm{d}x = (2s - N) \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^s u \,\mathrm{d}x \quad \text{for all } u \in C_c^{1,1}(\mathbb{R}^N),$$

我们通过类似的论证（事实上要简单得多）证明，

$$\left[\frac{b_{N,s,\theta}}{p}\right]^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^{\theta+2s}} \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(-\Delta)^s u|^p}{|x|^{\theta+2s-2sp}} \,\mathrm{d}x,$$

对所有 $\theta > -2s$, $p \in (1, \infty)$，以及所有 $u \in C^1{}_c{}^1(\mathbb{R}^N)$。

(3) 在 (2.6) 中令 $s \to 1^-$ 取极限，我们便得到 [29] 中所述的不等式 (1.1)，其常数为 $\left[\frac{2\theta}{p} \Gamma(\frac{N-\theta}{2}) / \Gamma(\frac{N-\theta-2}{2})\right]^p$。事实上，由于这样的事实，即

$$\lim_{t \to 0^+} (-\Delta)^s (t^2 + |\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}(x) = (-\Delta)^s |\cdot|^{-\theta}(x), \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

这可通过按引理 A.2 的方法计算 $(-\Delta)^s(|\cdot|^{-\theta})(x)$ 得出），以及恒等式... y

$$(-\Delta)^s |\cdot|^{-\theta}(x) = 2^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{N-\theta}{2}\right)\Gamma(\frac{2s+\theta}{2})}{\Gamma\left(\frac{N-\theta-2s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)} |x|^{-(\theta+2s)}, \quad \text{for all } x \neq 0, \quad N > \theta > -2s, \tag{2.12}$$

（包含在 [23, 表 1]中），我们推导得出

$$b_{N,s,\theta} = 2^{2s} \frac{\Gamma\left(\frac{N-\theta}{2}\right)\Gamma(\frac{2s+\theta}{2})}{\Gamma\left(\frac{N-\theta-2s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\theta}{2}\right)} \longrightarrow \frac{2\theta\Gamma(\frac{N-\theta}{2})}{\Gamma\left(\frac{N-\theta-2}{2}\right)} \quad \text{as} \quad s \to 1^-.$$

(4) 我们认为，通过在 (2.5) 中选取合适的向量场 Y，可以得到更一般的 Hardy型不等式。事实上，正如我们将看到的，估计式 (2.9) 是在取$Y \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$时由 (2.5) 推出的。

3. Proof of the main theorems

本节将证明我们的主要结果。我们从定理 2.1 开始。

定理 *2.1* 的证明。我们回顾 [11, 引理 2.1] 中的以下恒等式。设 Ω 为一个有界开集，并且 $u \in C^1{}_c{}^1(\Omega)$。设 $Y\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 为一个全局利普希茨向量场。记

$$\mathcal{E}_Y(u,u) := \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (u(x) - u(y))^2 \mathcal{K}_Y(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \tag{3.1}$$

其中

$$\mathcal{K}_Y(x,y) = \frac{c_{N,s}}{2} \left[\operatorname{div} Y(x) + \operatorname{div} Y(y) - (N+2s)\frac{(Y(x) - Y(y)) \cdot (x-y)}{|x-y|^2}\right] |x-y|^{-N-2s}, \tag{3.2}$$

我们有

$$\mathcal{E}_Y(u,u) = -2 \int_\Omega Y \cdot \nabla u (-\Delta)^s u \,\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

因此，我们有

$$\int_\Omega Y\cdot\nabla u(-\Delta)^s v\,\mathrm{d}x+\int_\Omega Y\cdot\nabla v(-\Delta)^s u\,\mathrm{d}x=\mathcal{E}_Y(u,v),\quad \text{for all } u,v\in C_c^{1,1}(\Omega). \tag{3.4}$$

在 (3.4) 中，我们将 u 替换为 $U_{t,\ p}=(u^2+t^2)^{p/2}-t^p$，并将 v ~~替换为~~ $v_k=\frac{1-\rho_k}{(t^2+|\cdot|^2)^{\frac{\theta}{2}}}$：$=\frac{z_k}{(t^2+|\cdot|^2)^{\frac{\theta}{2}}}$，其中 $t>0\,\rho_k$ 的定义同引理 A.1。根据同一个引理，我们知道 v_k 在 (3.4) 中是可采纳的。进行这一替换后，我们得到

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_\Omega Y\cdot\nabla U_{t,p}(-\Delta)^s\left(\frac{z_k}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\mathrm{d}x}_{=:I_k}+\int_\Omega z_k Y\cdot\nabla\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)(-\Delta)^s U_{t,p}\,\mathrm{d}x\\&\quad+\underbrace{\int_\Omega\frac{Y\cdot\nabla z_k}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}(-\Delta)^s U_{t,p}\,\mathrm{d}x}_{=:J_k}\\&=-\int_\Omega\frac{z_k}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\mathscr{L}_{\mathcal{K}_Y}U_{t,p}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{3.5}$$

回顾分数阶拉普拉斯算子的乘积法则，即

$$(-\Delta)^s(uv)=u(-\Delta)^s v+v(-\Delta)^s u-\mathcal{I}_s(u,v),$$

其中

$$\mathcal{I}_s(u,v)(x):=c_{N,s}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

该公式对满足 $(-\Delta)^s u$ 和 $(-\Delta)^s v$ 存在的函数 u 和 v 成立，并且

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))|}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y<\infty,$$

我们计算得到

$$\begin{aligned}I_k&:=\int_\Omega Y\cdot\nabla U_{t,p}(-\Delta)^s\left(\frac{z_k}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega Y\cdot\nabla U_{t,p}\left[z_k(-\Delta)^s\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)+\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}(-\Delta)^s z_k-\mathcal{I}_s\left(z_k,\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\right]\mathrm{d}x\\&:=I_k^1+I_k^2+I_k^3.\end{aligned}\tag{3.6}$$

根据连续性，我们有

$$\lim_{k\to+\infty}I_k^1=\int_\Omega Y\cdot\nabla U_{t,p}(-\Delta)^s\left(\frac{1}{(t^2+|\cdot|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\mathrm{d}x.\tag{3.7}$$

另一方面，根据引理 A.1，我们推得

$$\lim_{k\to+\infty}I_k^2=0=\lim_{k\to+\infty}I_k^3.\tag{3.8}$$

为处理 J_k，令 $Y_t\colon\ \mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N, x\mapsto Y_t(x):=\frac{Y}{(t^2+|x|^2)^{\theta/2}}\in C^0_{,\ 1}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$。由（3.4），我们有

$$\begin{aligned}J_k&:=\int_\Omega\frac{Y\cdot\nabla z_k}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}(-\Delta)^s U_{t,p}\,\mathrm{d}x=\int_\Omega Y_t\cdot\nabla z_k(-\Delta)^s U_{t,p}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega Y_t\cdot\nabla U_{t,p}(-\Delta)^s z_k\,\mathrm{d}x-\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}(z_k(x)-z_k(y))(U_{t,p}(x)-U_{t,p}(y))\mathcal{K}_{Y_t}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中，$\mathcal{K}_{Y_t}(\cdot,\cdot)$ 的定义见 (3.2)。由于 $\mathcal{K}_{Y_t}(\cdot,\cdot)$ 是对称的，我们可以写成

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}(z_k(x)-z_k(y))(U_{t,p}(x)-U_{t,p}(y))\mathcal{K}_{Y_t}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega U_{t,p}\mathcal{L}_{\mathcal{K}_{Y_t}}z_k\,\mathrm{d}x$$

with

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}_{Y_t}}(w)(x) := 2\,\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^N}(w(x)-w(y))\mathcal{K}_{Y_t}(x,y)dy.$$

综合以上各项，我们最终得到

$$J_k = -\int_\Omega Y_t\cdot\nabla U_{t,p}(-\Delta)^s z_k\,\mathrm{d}x - \int_\Omega U_{t,p}\mathcal{L}_{\mathcal{K}_{Y_t}} z_k\,\mathrm{d}x =: J_k^1 + J_k^2. \tag{3.9}$$

由 (3.8) 可知，当 $k\to+\infty$ 时， J_k^1 趋于零。接下来，仿照引理 A.1 中 (A.2) 的证明，并利用

$$\big|\mathcal{K}_{Y_t}(x,y)\big| \le C(t,\theta,N,s)|x-y|^{-N-2s}, \quad \text{for all } x,y\in\mathbb{R}^N,\, x\neq y,$$

可得 J_k^2 也趋于零。总之，我们有

$$\lim_{k\to\infty} J_k = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{Y\cdot\nabla z_k}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}(-\Delta)^s U_{t,p}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.10}$$

将 (3.5)、(3.6)、(3.7)、(3.8) 和 (3.10) 中的计算合并起来；利用引理 A.2，并在 $k\to+\infty$ 和 $t\to 0$ 时取极限（根据控制收敛定理），可得

$$b_{N,s,\theta}\int_\Omega Y\cdot\nabla U_{t,p}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^{\theta+2s}} - \theta\int_\Omega\frac{(-\Delta)^s U_{t,p}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega\frac{\mathscr{L}_{\mathcal{K}_Y}U_{t,p}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x$$

对所有 $u\in C^1_c(\Omega)$ 均成立。恒等式 (2.5) 可通过对上述恒等式的第一项分部积分得到。□

接下来，我们证明定理 2.2。

定理 *2.2* 的证明。对于任意 $u\in C^1_c(\Omega)$ 和 $p\ge 1$，令 $U_{t,p} := (u^2+t^2)^{p/2} - t^p \in C^1_c(\Omega)$，并按上述方式定义$t>0$。取 $Y=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}$，并回顾 (2.4)，恒等式 (2.5) 变为

$$-b_{N,s,\theta}(N-2s-\theta)\int_\Omega\frac{U_{t,p}}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x - \theta\int_\Omega\frac{(-\Delta)^s U_{t,p}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x = -(N-2s)\int_\Omega\frac{(-\Delta)^s U_{t,p}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

由于 $U_{t,p}=\phi_t(u) := (t^2+u^2)^{p/2}-t^p$，且 ϕ_t 是凸函数，由于 Cordoba-Cordoba 不等式（参见 [6,定理 1.1]），我们有

$$\begin{aligned} b_{N,s,\theta}\int_\Omega\frac{U_{t,p}}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega\frac{(-\Delta)^s U_{t,p}}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega\frac{\phi_t'(u)(-\Delta)^s u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x = p\int_\Omega\frac{u}{(t^2+u^2)^{1/2}}\frac{(t^2+u^2)^{(p-1)/2}(-\Delta)^s u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

我们区分两种情况。

情形 1：$p=1$。利用 Fatou 引理，再应用 Lebesgue 控制收敛定理，得到

$$\begin{aligned} b_{N,s,\theta}\int_\Omega\frac{|u|}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x &\le b_{N,s,\theta}\liminf_{t\to0^+}\int_\Omega\frac{U_{t,1}}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x \\ &\le \lim_{t\to0^+}\int_\Omega\frac{u}{(t^2+u^2)^{1/2}}\frac{(-\Delta)^s u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\frac{\mathrm{sign}(u)(-\Delta)^s u}{|x|^\theta}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

情形 2： $p>1$。利用 Fatou 引理、Lebesgue 控制收敛定理和 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned} b_{N,s,\theta}\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^{\theta+2s}}\,\mathrm{d}x &\le p\int_\Omega\frac{|u|^{p-1}}{|x|^\alpha}\frac{|(-\Delta)^s u|}{|x|^{\theta-\alpha}}\,\mathrm{d}x \\ &\le p\left(\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^{\frac{\alpha p}{p-1}}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega\frac{|(-\Delta)^s u|^p}{|x|^{(\theta-\alpha)p}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

令 $\alpha = (\theta + 2s)(p-1)/p$，即可得到结论。 □

最后，我们证明推论 2.3。

推论 *2.3* 的证明。我们只需证明 (2.9) 对所有 $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$ 成立。设 $u \in \mathcal{H}_0^s(\Omega)$ 和 $u_n \in C^{1,\,1\,0}(\Omega)$ 满足 $u_n \to u$ in $\mathcal{H}_0^s(\Omega)$。应用 Hölder 不等式并利用初等估计 $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$，可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big|\big|(-\Delta)^{s/2}u_n\big|^2 - \big|(-\Delta)^{s/2}u\big|^2\Big|\,\mathrm{d}x &\le \int_\Omega \Big|(-\Delta)^{s/2}(u_n-u)\Big|\Big|(-\Delta)^{s/2}u_n + (-\Delta)^{s/2}u\Big|\,\mathrm{d}x\\ &\le \sqrt{2}\Big(\int_\Omega \Big|(-\Delta)^{s/2}(u_n-u)\Big|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big([u_n]^2_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)} + [u]^2_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)}\Big)^{1/2}\\ &\le C\big[u_n-u\big]_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)}\Big(1+[u]^2_{\mathcal{H}_0^s(\Omega)}\Big)^{1/2} \to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

由 Fatou 引理可得：

$$\begin{aligned}\left[\frac{b_{N,s/2,s}}{2}\right]^2 \int_\Omega \frac{u(x)^2}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \le \left[\frac{b_{N,s/2,s}}{2}\right]^2 \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{u_n(x)^2}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x &\le \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega |(-\Delta)^{s/2}u|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

附录 A. 技术引理

在本附录中，我们汇总了主要结果证明中使用的技术引理。

引理 *A.1.* *设 Ω 是一个 C^1,1 类有界开集。我们定义截断函数 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$，满足 $\rho \equiv 1$ in $(-\infty, 1]$ and $\rho \equiv 0$ in $[2,+\infty)$，并考虑 $\rho_k(\cdot) = \rho(k\delta_\Omega(\cdot))$，其中 $\delta_\Omega\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a C^1,1$(\mathbb{R}^N)$ 函数，在边界 $\partial\Omega$ 附近与有符号距离函数重合（注意，由于边界是 C^1,1，有符号距离函数也是 C^1,1）。此外，我们假设 δ_Ω在 Ω 内为正，在 $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ 内为负。令 $z_k := 1-\rho_k$。那么，我们有*

$$z_k(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}} \in C_c^{1,1}(\Omega) \qquad \text{and, hence,} \qquad \frac{z_k}{(t^2+|\cdot|^2)^{\frac{\theta}{2}}} \in \mathcal{H}_0^s(\Omega). \tag{A.1}$$

此外，对于任意 $u \in C^{1,}{}_c{}^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega Y\cdot\nabla u \frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\big[(-\Delta)^s z_k\big](x)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{as} \quad k\to\infty, \tag{A.2}$$

$$\int_\Omega Y\cdot\nabla u\, \mathcal{I}_s\left(z_k, \frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\mathrm{d}x \to 0 \qquad \text{as} \quad k\to+\infty, \tag{A.3}$$

其中

$$\mathcal{I}_s(v,w)(\cdot) = \frac{c_{N,s}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(v(\cdot)-v(\cdot+y))(w(\cdot)-w(\cdot+y))}{|y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y.$$

证明。 我们先证明 (A.2) 和 (A.3)。设 $\Omega'' \Subset \Omega' \subset \Omega$ 满足 $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega''$，并令 $x \in \Omega''$。由于 $\delta_\Omega(x) \ge c > 0$，因此，对于充分大的 k，有 $\rho(k\delta_\Omega(x)) = 0$。于是，

$$\begin{aligned}\big[(-\Delta)^s z_k\big](x) &= -c_{N,s}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\rho_k(x)-\rho_k(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y\\ &= c_{N,s}\int_{\Omega_{2/k}}\frac{\rho(k\delta_\Omega(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}y\\ &\le \bar{c}(\Omega',\Omega'',N,s)\,\mathrm{vol}(\Omega_{2/k})\end{aligned}$$

对于充分大的 k。由此可得

$$\left|\int_\Omega Y\cdot\nabla u\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\big[(-\Delta)^s z_k\big](x)\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leq \bar{c}(\Omega',\Omega'')\mathrm{vol}(\Omega_{2/k})\int_\Omega\left|Y\cdot\nabla u\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right|\,\mathrm{d}x\to 0\quad\text{as}\quad k\to\infty,$$

这就得到了 (A.2)。类似地，对于 $x\in\Omega''$，我们有

$$\left|\mathcal{I}_s\left(z_k,\frac{1}{(t+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)(x)\right|=\frac{c_{N,s}}{2}\left|\int_{\Omega_{2/k}}\frac{-\rho(k\delta_\Omega(x))\big((t^2+|x|^2)^{-\frac{\theta}{2}}-(t^2+|y|^2)^{-\frac{\theta}{2}}\big)}{|x-y|^{N+2s}}dy\right|$$
$$\leq \bar{c}(\Omega',\Omega'',N,s,t)\,\mathrm{vol}(\Omega_{2/k}),$$

对于足够大的 k，由此可得 (A.3)。

$z_k(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}\in\mathcal{H}^s_0(\Omega)$ 这一事实是标准的，但为了完整性，我们在此给出证明。显然，在 Ω 中有 $\frac{z_k}{(t^2+|\cdot|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\overset{\equiv 0}{\cancel{=}}$。接下来，我们取满足 $\Omega\Subset B_{R_\Omega}$ 的 $R_\Omega>1$，并写出

$$\begin{aligned}
\frac{2}{c_{N,s}}\left[z_k(t^2+|\cdot|)^{-\frac{\theta}{2}}\right]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}&=\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\frac{\big(z_k(x)(t^2+|x|^2)^{-\frac{\theta}{2}}-z_k(y)(t^2+|y|^2)^{-\frac{\theta}{2}}\big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint_{B_{R_\Omega}\times B_{R_\Omega}}\frac{\big(z_k(x)(t^2+|x|^2)^{-\frac{\theta}{2}}-z_k(y)(t^2+|y|^2)^{-\frac{\theta}{2}}\big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&+\int_\Omega\frac{z_k^2(x)}{(t^2+|x|^2)^\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_\Omega}}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\\
&\leq 2\iint_{B_{R_\Omega}\times B_{R_\Omega}}\frac{\big(\rho_k(x)-\rho_k(y)\big)^2(t^2+|x|^2)^{-\theta}}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&+2\iint_{B_{R_\Omega}\times B_{R_\Omega}}\frac{\Big((t^2+|x|^2)^{-\frac{\theta}{2}}-(t^2+|y|^2)^{-\frac{\theta}{2}}\Big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&+c\int_\Omega\frac{\mathrm{d}x}{(t^2+|x|^2)^{\theta/2}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_\Omega}}\frac{\mathrm{d}y}{1+|y|^{N+2s}}\\
&\leq\left(\frac{2}{t^{2\theta}}\|\nabla\rho_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})}+2\Big[(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}\Big]_{C^1_{loc}(\mathbb{R}^N)}\right)\iint_{B_{R_\Omega}\times B_{R_\Omega}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+2s-2}}\\
&+c\int_\Omega\frac{\mathrm{d}x}{(t^2+|x|^2)^{\theta/2}}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{R_\Omega}}\frac{\mathrm{d}y}{1+|y|^{N+2s}}\\
&<\infty.
\end{aligned}$$

□

最后，我们将对该量进行显式计算

$$\lim_{t\to 0^+}(-\Delta)^s(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}(x).$$

引理 A.2. 设 $t>0$ 和 $\theta>-2s$。那么，我们有。

$$\lim_{t\to 0^+}(-\Delta)^s(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}(x)=|x|^{-(\theta+2s)}b_{N,s,\theta},\quad \textit{for all } x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}.\tag{A.4}$$

此外，该收敛在 $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ 上局部一致。这里，我们引入以下记号：

$$b_{N,s,\theta}=c_{N,s}\int_0^1 r^{2s-1}(1-r^\theta)(1-r^{N-2s-\theta})\psi_N(r)\,\mathrm{d}r,\tag{A.5}$$

$$c_{N,s} = \frac{s4^s\Gamma\left(\frac{N+2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(1-s)}, \tag{A.6}$$

$$\psi_N(r) = 2\,\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2})\int_{-1}^{1}\frac{(1-h^2)^{\frac{N-3}{2}}}{\left(1+r^2-2rh\right)}\,\mathrm{d}h \qquad \textit{if } N\geq 2, \tag{A.7}$$

$$\psi_N(r) = 2\left(\frac{1}{(1-r)^{1+2s}}+\frac{1}{(1+r)^{1+2s}}\right) \qquad \textit{if } N=1. \tag{A.8}$$

证明。我们仅对 $N\geq 2$ 进行计算。$N=1$ 的情形类似，但更简单。为简洁起见，令 $\psi:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2})}\psi(r) :&= \int_0^\pi \frac{\sin^{N-2}(\alpha_1)}{\left(1+r^2-2r\cos(\alpha_1)\right)^{(N+2s)/2}}\,\mathrm{d}\alpha_1\\ &= 2\int_{-1}^{1}\frac{(1-h^2)^{\frac{N-3}{2}}}{\left(1+r^2-2rh\right)^{(N+2s)/2}}\,\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

设 $x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$。根据定义并转换到极坐标，我们计算得

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s\left[\frac{1}{(t^2+|\cdot|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right](x) =&\ \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+|y|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{N+2s}}\\
=&\ c_{N,s}\,\text{p.v.}\int_0^\infty r^{N-1}\left((t^2+|x|^2)^{-\frac{\theta}{2}}-(t^2+r^2)^{-\frac{\theta}{2}}\right)\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{\mathrm{d}y}{(|x|^2+r^2-2r|x|y_1)^{\frac{N+2s}{2}}}\,\mathrm{d}r\\
=&\ c_{N,s}|x|^{-2s}\,\text{p.v.}\int_0^\infty r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\int_{\mathbb{S}^{N-1}}\frac{\mathrm{d}y}{(1+r^2-2ry_N)^{\frac{N+2s}{2}}}\,\mathrm{d}r\\
=&\ 2c_{N,s}|x|^{-2s}\,\text{p.v.}\int_0^\infty r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\\
&\qquad\times\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{N-2})\int_0^\pi\frac{\sin^{N-2}(\alpha_1)}{\left(1+r^2-2r\cos(\alpha_1)\right)^{(N+2s)/2}}\,\mathrm{d}\alpha_1\\
=&\ c_{N,s}|x|^{-2s}\,\text{p.v.}\int_0^\infty r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\psi(r)\,\mathrm{d}r\\
=&\ c_{N,s}|x|^{-2s}\left(\text{p.v.}\int_0^1\cdots\mathrm{d}r\ +\ \text{p.v.}\int_1^\infty\cdots\mathrm{d}r\right)\\
=&\ c_{N,s}|x|^{-2s}\,\text{p.v.}\int_0^1\psi(r)\Bigg(r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)\\
&\qquad\qquad+r^{2s-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+\frac{|x|^2}{r^2})^{\frac{\theta}{2}}}\right)\Bigg)\,\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{A.9}$$

W我们断言上述积分有限。为证明这一点，我们分两种情况讨论。

情形 1： $r\in(0,\gamma]$ 对某个 $\gamma\in(\frac{6-\sqrt{32}}{2},1)$。我们使用以下界

$$\begin{aligned}&\left|r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)+r^{2s-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+\frac{|x|^2}{r^2})^{\frac{\theta}{2}}}\right)\right|\\
&\leq\frac{r^{N-1}}{|x|^\theta}\left(1+\frac{1}{r^\theta}\right)+\frac{r^{2s-1}}{|x|^\theta}(1+r^\theta).\end{aligned} \tag{A.10}$$

情形 2： $r \in [\gamma, 1)$。我们使用幂级数展开

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_{\alpha,n}\, x^n \qquad (\text{for } |x|<1)$$

当 $t>0$ 足够小时，得到

$$\begin{aligned}
&\left| r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}} - \frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right) + r^{2s-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}} - \frac{1}{(t^2+\frac{|x|^2}{r^2})^{\frac{\theta}{2}}}\right)\right| \\
&= \frac{1}{|x|^\theta}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{-\frac{\theta}{2},k}\big(1-r^{\theta+2k}\big)\big(r^{2s-1}-r^{N-1-\theta-2k}\big)\frac{t^{2k}}{|x|^{2k}}\right| \\
&\le \frac{1}{|x|^\theta}\left((1-r^\theta)\big|r^{2s-1}-r^{N-1-\theta}\big| + \sum_{k=1}^{\infty}\big|c_{-\frac{\theta}{2},k}\big|\big|r^{2s-1+2k}-r^{N-1-\theta}\big|\frac{t^{2k}}{(r|x|)^{2k}}\right) \\
&\le \frac{1}{|x|^\theta}\left((1-r^\theta)\big|r^{2s-1}-r^{N-1-\theta}\big| + C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(r|x|)^{2k}}\right) \\
&\le \frac{C}{|x|^\theta}(1-r^\theta)\big|r^{2s-1}-r^{N-1-\theta}\big| \qquad (A.11)
\end{aligned}$$

对某个 $C = C(\theta) > 0$。在最后一行中，我们利用了前一行的幂级数一致收敛（关于 r）到零，因此它可由 $(1-r^\theta)|r^{2s-1}-r^{N-1-\theta}|$ 控制。此外，我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Bigg(&\chi_{(0,\gamma]}(r)\left(r^{N-1}\left(1+\frac{1}{r^\theta}\right)+r^{2s-1}(1+r^\theta)\right)\psi(r) \\
&+ \chi_{[\gamma,1)}(r)\frac{|1-r^\theta|}{(1-r)^{1+2s}}r^{2s-1}|1-r^{N-\theta-2s}|(1-r)^{1+2s}\psi(r)\Bigg)\,\mathrm{d}r < \infty. \qquad (A.12)
\end{aligned}$$

事实上，由于 $\psi(r)$ 在零点附近有界，很容易看出

$$\int_0^1 \chi_{(0,\gamma]}(r)\left(r^{N-1}\left(1+\frac{1}{r^\theta}\right)+r^{2s-1}(1+r^\theta)\right)\psi(r)\,\mathrm{d}r < \infty \qquad (A.13)$$

只要 $\theta > -2s$ 即可。另一方面，由于

$$(1-r)^{1+2s}\psi(r) = \frac{4}{(2\sqrt{r})^{\frac{N-1}{2}}}\left(\frac{1-r}{2\sqrt{r}}\right)^{1+2s}\int_0^1 \frac{(h(1-h))^{\frac{N-3}{2}}}{\left((\frac{1-r}{2\sqrt{r}})^2+h\right)^{\frac{N+2s}{2}}}\,\mathrm{d}h,$$

根据 $\gamma \in (\frac{6-\sqrt{32}}{2}, 1)$ 的选取以及 [12, 引理 2.1]，我们有其为 $C^{s+\kappa(s)}([\gamma,1])$（其中某个 κ 取决于 s），于是

$$\int_0^1 \chi_{[\gamma,1)}(r)\frac{|1-r^\theta|}{(1-r)^{1+2s}}r^{2s-1}|1-r^{N-\theta-2s}|(1-r)^{1+2s}\psi(r)\,\mathrm{d}r < \infty. \qquad (A.14)$$

由此可得结论 (A.12)，这是由 (A.13) 和 (A.14) 推出的。结合 (A.10) 和 (A.11)，这意味着 (A.9) 中的积分收敛。因此，

$$\begin{aligned}
&(-\Delta)^s(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}(x) \\
&= \frac{c_{N,s}}{|x|^{2s}}\int_0^1 \psi(r)\left(r^{N-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}\right)+r^{2s-1}\left(\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{(t^2+\frac{|x|^2}{r^2})^{\frac{\theta}{2}}}\right)\right)\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

鉴于 (A.10)、(A.11) 和 (A.12)，由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\frac{|x|^{2s}}{c_{N,s}}\lim_{t\to 0^+}(-\Delta)^s(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}(x)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \psi(r)\left(\frac{r^{N-1}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}} - \frac{r^{N-1}}{(t^2+r^2|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}} + \frac{r^{2s-1}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{\theta}{2}}} - \frac{r^{2s-1}}{(t^2+\frac{|x|^2}{r^2})^{\frac{\theta}{2}}}\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{|x|^\theta}\int_0^1 r^{2s-1}(1-r^\theta)(1-r^{N-2s-\theta})\psi(r)\,\mathrm{d}r.$$

换言之，我们得出

$$\lim_{t\to 0^+}(-\Delta)^s(t^2+|\cdot|^2)^{-\frac{\theta}{2}}(x) = |x|^{-(\theta+2s)}c_{N,s}\int_0^1 r^{2s-1}(1-r^\theta)(1-r^{N-2s-\theta})\psi(r)\,\mathrm{d}r.$$

□

致谢

我们感谢 A. Nazarov 和 E. Zuazua 的鼓励。我们还感谢 F. Glaudo 和 T. König 与我们进行的多次有益讨论，并感谢 M. M. Fall 对本文初稿提出的宝贵意见。Ni

cola De Nitti 是意大利国家数学分析、概率与其应用国家小组（GNAMPA）的成员，该小组隶属于意大利国家高等数学研究所（INdAM）。

本研究部分得到亚历山大·冯·洪堡教授计划以及德国研究联合会 Transregio154 项目“以天然气网络为例的数学建模、仿真与优化”的资助。

参考文献

[1] A. A. Balinsky、W. D. Evans 和 R. T. Lewis。*Hardy* 不等式的分析与几何。Universitext。Springer，Cham，2015。[2] G. Barbatis、S. Filippas 和 A. Tertikas。具有最佳常数的改进 L^p Hardy不等式的统一方法。美国数学学会汇刊，356(6):2169–2196，2004。[3] F. Bianchi、L. Brasco 和 A. C. Zagati。关于 Sobolev-Slobodeckiĭ 空间中的尖锐 Hardy 不等式。*ArXiv:2209.03012*，2022。[4] L. Brasco 和 E. Cinti。关于凸集中的分数阶 Hardy 不等式。离散与连续动力系统，38(8):4019–4040，2018。[5] L. A. Caffarelli 和 Y. Sire。关于涉及非局部算子的某些点态不等式。载于调和分析、偏微分方程及其应用，应用数值调和分析丛书，第1–18页。Birkhäuser/Springer，Cham，2017。[6] A. Córdoba 和 D. Córdoba。带有偏微分方程应用的分数阶导数点态估计。美国国家科学院院刊，100(26):15316–15317，2003。[7] A. Cotsiolis 和 N. Labropoulos。关于 Hardy-Sobolev 不等式。载于微分与积分不等式，第265–287页。Cham：Springer，2019。[8] E. Di Nezza、G. Palatucci 和 E. Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间指南。数学科学通报，136(5):521–573，2012。[9] J. I. Díaz、D. Gómez-Castro 和 J. L. Vázquez。具有一般非负势的分数阶薛定谔方程。加权空间方法。非线性分析，177(上册):325–360，2018。[10] D. Dier、M. Kassmann 和 R. Zacher。李-姚梯度估计的离散版本。比萨高等师范学校科学年鉴（第五辑），22(2):691–744，2021。[11] S. M. Djitte、M. M. Fall 和 T. Weth。广义分数阶 Pohozaev 恒等式及其应用。*ArXiv:2112.10653*，2021。[12] S. M. Djitte 和 S. Jarohs。薄环域中第二分数阶特征函数的非径向性。纯粹与应用数学通讯，22(2):613–638，2023。[13] B. Dyda 和 A. V. Vähäkangas。分数阶 Hardy 不等式的框架。芬兰科学院数学学报，39(2):675–689，2014。[14] D. E. Edmunds 和 W. D. Evans。分数阶 *Sobolev* 空间与不等式，剑桥数学论丛第230卷。剑桥数学论丛。剑桥大学出版社，剑桥，2023。[15] M. M. Fall。带 Hardy 势的分数阶拉普拉斯算子半线性椭圆方程。非线性分析，193:111311，29，2020。[16] R. L. Frank、E. H. Lieb 和 R. Seiringer。分数阶薛定谔算子的 Hardy-Lieb-Thirring 不等式。美国数学学会杂志，21(4):925–950，2008。

[17] R. L. Frank 和 R. Seiringer. 非线性基态表示与最佳Hardy不等式. 《函数分析杂志》, 255(12):3407–3430, 2008. [18] F. Gazzola, H.-C. Grunau 和 E. Mitidieri. 具有最优常数和余项的Hardy不等式. 《美国数学会汇刊》, 356(6):2149–2168, 2004. [19] P. Grisvard. 非光滑区域中的椭圆问题, 数学专著与研究丛书第24卷. Pitman（高级出版项目）, 波士顿, MA, 1985. [20] G. H. Hardy. 关于Hilbert定理的一条注记. 《数学杂志》, 6(3-4):314–317, 1920.[21] I. W. Herbst. 算子 $(p^2 + m^2)^{1/2} - Ze^2/r$ 的谱理论. 《数学物理通讯》, 53(3):285–294, 1977. [22] A. Kufner, L. Maligranda 和 L.-E. Persson. Hardy不等式的前史. 《美国数学月刊》, 113(8):715–732, 2006. [23] M. Kwaśnicki. 分数阶拉普拉斯算子及其性质. 载于《分数阶微积分及其应用手册》第1卷, 第159–193页. De Gruyter, 柏林, 2019. [24] E. Landau. 关于正项级数一个定理的注记. 摘自E. Landau教授致I. Schur教授的信（由G. H. Hardy转述）. 《伦敦数学会杂志》, 1:38–39, 1926. [25] M. Loss 和 C. Sloane. 一般区域上分数阶积分的Hardy不等式. 《函数分析杂志》, 259(6):1369–1379, 2010. [26] T. Matskewich 和 P. E. Sobolevskii. R^n中凸区域的广义Hardy不等式的最佳可能常数. 《非线性分析》, 28(9):1601–1610, 1997. [27] V. Mazya 和 T. Shaposhnikova. 勘误：“关于 Bourgain–Brezis–Mironescu定理及分数阶 Sobolev 空间的极限嵌入”[《函数分析杂志》195 (2002), 第2期, 230–238; MR1940355 (2003j:46051)]. 《函数分析杂志》, 201(1):298–300, 2003. [28] E. Mitidieri. Rellich型恒等式及其应用. 《偏微分方程通讯》, 18(1-2):125–151, 1993. [29] E. Mitidieri. Hardy不等式的简单方法. 《数学札记》, 67(4):563–572, 2000. [30] R. Musina 和 A. I. Nazarov. 分数阶Sobolev–Hardy不等式极小化子的完全分类与非退化性及其应用. 《微分方程杂志》, 280:292–314, 2021.[31] R. Musina 和 A. I. Nazarov. 关于高阶分数阶Hardy–Sobolev不等式的一条注记. 《非线性分析》, 203:论文编号112168, 3, 2021.[32] B. Opic 和 A. Kufner. Hardy型不等式, Pitman数学研究札记丛书第219卷. 朗文科技出版社, 哈洛 , 1990. [33] F. Rellich. 特征值问题的微扰理论 . Gordon and Breach 科学出版社 , 纽约 - 伦敦 - 巴黎 , 1969. J. Berkowitz协助, Jacob T. Schwartz作序.[34] X. Ros-Oton 和 J. Serra. 分数阶拉普拉斯算子的Pohozaev恒等式. 《理性力学与分析档案》, 213(2):587–628, 2014. [35] D. Yafaev. Hardy–Rellich不等式中的最佳常数. 《函数分析杂志》, 168(1):121–144, 1999. [36] J. Yang. $\mathbb{R}^N$中的分数阶Sobolev–Hardy不等式. 《非线性分析：理论、方法与应用》, A辑，理论与方法, 119:179–185, 2015.

（N. DE NITTI）埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，数学系，动力学、控制、机器学习与数值分析教席（亚历山大·冯·洪堡教授席），考尔街11号，埃尔朗根91058，德国。电子邮箱：nicola.de.nitti@fau.de（S. M. DJITTE）埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，数学系，动力学、控制、机器学习与数值分析教席（亚历山大·冯·洪堡教授席），考尔街11号，埃尔朗根91058，德国。电子邮箱：sidy.m.djitte@fau.de