负折射率材料圆锥尖端处具有超奇异性的麦克斯韦方程组

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia[1],Lucas Chesnel[2],Mahran Rihani[3]

[1] POEMS、法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究所、巴黎国立高等技术学院、巴黎综合理工学院，91120 帕莱索，法国；[2] 法国国家信息与自动化研究所、巴黎国立高等技术学院、巴黎综合理工学院，91120 帕莱索，法国；[3] 应用数学中心，´巴黎综合理工学院，巴黎综合理工学院，91128 帕莱索，法国。

电子邮件： anne-sophie.bonnet-bendhia@ensta-paris.fr, lucas.chesnel@inria.fr, mahran.rihani@polytechnique.edu。

（2025年1月7日）

摘要： 我们研究经典正参数材料与所谓负折射率材料之间的时谐麦克斯韦方程透射问题，其中介电常数ε 和磁导率 μ 均取负值。此外，我们假设两个区域之间的界面处处光滑，唯有一点处局部呈圆锥尖端。在此背景下，已知当 ε 中的对比度和 μ中的对比度达到某些临界值时，相应的标量算子在通常的 H^1 空间中不属于 Fredholm 型。在这项工作中，我们证明，在这些情形下，由于存在在尖端处具有无限能量的超奇异场，麦克斯韦方程在经典的 $\mathbf{L}^2$框架中并不适定。通过结合 T-强制性方法与 Kondratiev理论，我们阐释如何构造新的函数框架，以恢复麦克斯韦问题的适定性。我们还说明如何选择与极限吸收原理相一致的设定。从技术角度来看，这些场及其旋度均可分解为两部分之和：一部分是与标量算子的黑洞奇异性相关的显式奇异部分，另一部分是属于某些加权空间的光滑部分。我们所提出的分析尤其依赖于对奇异场的标量势表示和矢量势表示中的新关键结果的证明。

关键词： 麦克斯韦方程组、负折射率材料、Kondratiev理论、黑洞奇异性、Mandelstam辐射原理、极限辐射原理。

MSC（数学学科分类）： 78A25, 35Q61, 78A48, 35B65, 78M30

arXiv:2305.01982v2 [math.AP] 5 Jan 2025

目录

1 引言 2

<escape>**2 问题的设定 5**2.1 一般符号约定 .52.2 圆锥尖端的描述 .6</escape>

3 研究 of 标量问题 7

3.1 Kondratiev空间 .73.2 Kondratiev空间中的标量算子 .83.3 超奇异性 .93.4 Kondratiev空间中标量算子的其他性质 . . . . . 113.5 Mandelstam辐射原理 .123.6 标量问题的新函数框架 .13

<escape>**4 电问题的新框架 14**4.1 电问题的定义 .154.2 电问题的等价表述.16</escape>

4.3 $\mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$ 中的等价范数，以及 $\mathscr{X}_{\mathrm{out}N}$ .184.4 主部的分析 .194.5 紧性结果 .214.6 电问题的主要结果.214.7 极限吸收原理 .22

5 磁问题的新框架 24

5.1 磁问题的定义 .255.2 磁场的等价表述 .255.3 $\mathbf{X}_T^{\mathrm{out}\,\beta}$ 、和 $\mathscr{X}_{\mathrm{out}T}$ .265.4 磁问题的主要结果 . 26

6 经典麦克斯韦框架 27

7 总结 29

8 附录 30

8.1 经典亥姆霍兹分解 .308.2 经典拉普拉斯算子 .308.3 加权Sobolev空间中的分解 .318.4 紧嵌入结果 .328.5 稠密性结果 .358.6 带有锥形尖点区域中的齐次麦克斯韦算子 .36

1 引言

近期，在构想具有奇特有效性质的人工微结构材料方面取得的进展，以及与之相关的令人振奋的物理实验，推动了应用数学中新研究领域的发展。特别是，人们需要重新审视声学、电磁学和弹性动力学方程，以及那些不符合经典理论的材料定律。例如，在电磁学中，通常假设介电常数 ε 和磁导率 μ 为实数正值，或对于各向异性材料为正定张量。然而，如今看来，人们似乎可以设计出超材料，在某些频率范围内，它们可由有效的 ε， μ 来近似描述，而这些有效参数是实数负值函数或负定张量。实践中，为了获得有实际应用价值的器件，需要将这些非标准材料与经典材料结合起来，从而形成能够产生奇特现象的界面。例如，正如 Veselago 在其开创性论文中所述，[58], 对于平面界面，从一侧入射的平面波会向另一侧折射，方向与常规情况相反。这就是所谓的负折射，或可用于制造完美透镜 [52] ，也因此有了“负折射率材料”这一名称。在数学上，在时谐状态下，这引出了对非经典透射问题的研究，并成为我们现在介绍的一系列论文的研究动机。

在二维中，麦克斯韦方程组可以化简为一个标量亥姆霍兹型问题，其理论如今已相当完备 [5, 7, 9, 22, 47]。下面简要总结主要结果。在分析中，正材料与负材料之间的界面 Σ 的光滑性，以及对比度（定义为负系数与正系数在 Σ处的取值之比）起着关键作用。当 Σ 属于 $\mathscr{C}^1$类时，系数变号不会产生显著影响，唯一的例外是对比度等于 -1这一极其临界的情形。当界面存在几何奇异点时，系数变号的影响则更为显著。因此，当 Σ具有角点时，与该问题相关的算子在

经典 Sobolev 空间 H^1 中不是 Fredholm 算子，其对比参数存在一个完整区间（即所谓的临界区间），该区间包含 -1。这是由于存在非经典奇异性，且越接近角点，这些奇异性就越发振荡（见图1 左图）。

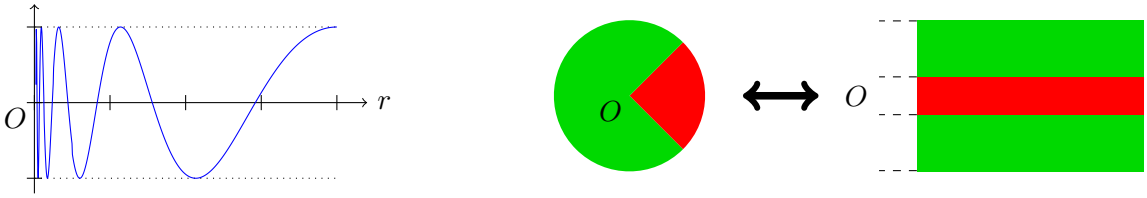

图 1：左：二维中超奇异性径向行为的实部（$Re\, r^{i\eta} = \cos(\eta \ln\, r)$）。右：角点问题与波导问题之间对应关系的示意图。

为了理解这一现象，可以借助与波导问题的类比；在考虑变量变换 $(r, \theta) \mapsto (\ln\, r, \theta)$ 时，这种类比自然会出现，其中 (r, θ) 是以角点为中心的极坐标。注意，这一映射将角点附近区域变换为一个半无限条带（波导），并将角点推至无穷远处（图1右图）。此外，角点处的奇异性对应于条带中的模式。重要的是，只有当对比度属于临界区间时，才存在传播模式。回到极坐标中，传播模式便成为我们所称的超奇异性或传播奇异性。它们的径向行为具有如下形式 $r^{\pm i\eta} = e^{\pm i\eta \ln r}$ 其中某个实数 η。与波导中的散射问题类似，为了得到适定问题，必须在条带的无穷远处，或等价地在角点处施加辐射条件。该辐射条件使我们能够选取物理上相关的解：它是通过向介质中加入少量耗散所得到的解的极限，这相当于给变号系数加上一个小的、处处为正的虚部。这就是所谓的极限吸收原理。注意，由于系数变号，出射行为的选取，$r^{i\eta}$ 或 $r^{-i\eta}$，无法根据 η的符号推断。相反，我们依据能量考量：出射传播奇异性会将能量输送至角点，因此有时称为黑洞波。严格论证上述形式分析，并提供一种能够纳入黑洞波、从而恢复适定问题的框架，本身就是一项任务；这项工作已在 [9] 中借助 Kondratiev空间中的分离渐近理论得以完成（综述见 [42, 41]）。

尽管二维标量情形已得到深入研究，但对于具有变号系数的三维麦克斯韦方程组，关注却少得多。除了麦克斯韦方程组分析本身固有的困难外，原因之一是，要处理这一问题，必须充分了解相应的三维标量问题（具有变号系数）。而只要界面不是光滑的，这就比二维情形复杂得多。这解释了为什么直到最近，相关文献还只有 [8]和 [48]。在 [48], 中，作者详细研究了负 ε、 μ 材料与正 ε、μ材料之间光滑界面的情形。在 [8], 中，作者证明，只要 ε 和 μ 中的对比参数不处于临界值，麦克斯韦问题就在经典框架下适定，即电场和磁场 $\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{H}$ 属于 $\mathbf{L}^2$, 。请注意，如果界面不光滑，已知当对比参数位于某个包含 -1的给定区间之外时，后一条件成立。在现有文献中，我们还要提及 [15] ，其中作者为一种含有周期性分布的小型负材料夹杂物的复合介质推导了均匀化模型。

本文旨在补充先前的研究，并更精确地考虑包含具有临界对比参数的非光滑界面的配置中的时谐三维麦克斯韦方程组，因此通常无法找到具有 $\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{H}$ 属于 $\mathbf{L}^2$的解。我们重点关注这样的情形：界面除一点外均为光滑的，而在该点处与圆锥尖端重合；这是最接近二维角点情形的三维配置。

我们还假设圆锥尖端的底面是光滑的，因此不存在边缘。

本研究是对文章 [10]的后续研究。在该研究中，我们通过考虑 ε 为临界情形但 μ 不为临界的情况，解决了部分难题。此外，我们假设关于 ε的标量问题（涉及微分算子$\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\cdot)$）恰有一个传播奇异性，与二维角点的情形相同。这里要指出的是，在三维情形下，传播奇异性的表现类似于 $r^{-1/2\pm i\eta}$ ，其中 $\eta\in\mathbb{R}$。我们证明，由于尖端处的黑洞效应，电场 $\boldsymbol{E}$ 不应在L^2中寻求。相反，它必须是一个L^2 函数与传播奇异性的梯度的线性组合。为了描述这种行为，我们将Kondratiev空间中的分离渐近理论推广到了麦克斯韦方程组，这似乎是首次尝试。值得注意的是，即使是将更经典的Kondratiev理论应用于标准麦克斯韦方程组，相关研究也寥寥无几（参见 [21] 和 [55, 56]）。此外还需指出，在 [10], 提出的框架中，旋度 $\boldsymbol{E}$ 属于L^2 （因为 μ 不为临界），而如预期所示，$\boldsymbol{H}\in\mathrm{L}^2$, 旋度 $\boldsymbol{H}\notin\mathrm{L}^2$。

本文将 [10] 的分析拓展到几个方面。首先，我们假设 ε和 μ都处于临界状态，因此一般而言 $\boldsymbol{E}$、**旋度** $\boldsymbol{E}$、 $\boldsymbol{H}$、**旋度** $\boldsymbol{H}$不属于$\mathbf{L}^2$。此外，我们考虑到，涉及微分算子 $\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\cdot)$ 和 $\mathrm{div}(\mu\nabla\cdot)$ 的两个标量问题中，可能分别存在多个黑洞奇异性。粗略而言，圆锥开口角越小，黑洞奇异性的数量就越多。我们将在§3.3 中看到，黑洞奇异性由一个非自伴问题的特征值和特征函数确定。因此，对于 ε 或 μ中某些特殊的对比参数值，会出现 Jordan块。借助 Mandelstam原理，我们将提供相应的数学框架，使得即使在 [10]中未予考虑的这种情形下，适定性仍然成立。最后，我们在此考虑的几何设置比前一篇文章中的稍为一般，因为我们允许圆锥尖端与区域边界相接（见图2中间）。这看起来或许只是一个小小的技术问题，但它迫使我们为奇异场的矢量势表示撰写更系统的证明（见附录）。

需要指出的是，带变号系数的时谐 Maxwell 方程也出现在磁化等离子体的研究中，但与本文所进行的研究相比存在一个重要差异。事实上，冷等离子体模型会导致考虑在变号时为零的光滑 ε（这对于 ε 和 μ 而言从未发生，见下文）。这导致了 ε 等于零的界面附近出现混合共振现象（见 [27, 49]）。另一方面，需要注意的是，带变号系数的标量算子与诺伊曼–庞加莱算子的谱理论之间存在若干联系。事实上，后者作用于定义在某个曲面上的函数，而该曲面在本文中发挥着类似于界面的作用。已知当该曲面在二维中具有角点 [13]或在三维中具有尖端时， [31], 诺伊曼–庞加莱算子的谱包含一个本质谱区间，其中可能嵌有特征值 [38, 11, 37]。这个本质谱区间与我们的临界区间完全对应，并且由相同的黑洞奇异性产生。对于描述时谐电磁波散射的强奇异体积分算子，也已证明了类似结果（对于三维光滑界面，见 [18]；对于二维 Lipschitz界面，见 [19]）。

本文的组织结构如下。首先，我们介绍问题及相关符号。在第3节中，我们回顾麦克斯韦方程组分析中涉及的标量算子的若干性质。特别地，我们介绍如何将相应问题中的某些超奇异性纳入函数框架，以获得适定性。第4 节构成了本文的核心。在该节中，我们提出一种新的函数框架来研究电问题。对于 ε，电场可分解为与相应标量问题相关的超奇异性，而其旋度则可分解为与 μ对应的标量问题相关的超奇异性。

此外，我们证明，只要两个标量问题满足极限吸收原理，新的框架也满足极限吸收原理。在第 5 节中，我们总结磁问题的结果。在第 6 节中，我们证明麦克斯韦方程组在经典 $\mathbf{L}^2$ 框架下并非适定。随后，我们简要总结结论，并在第 8 节中证明势函数表示的关键结果，以及加权Sobolev空间中紧嵌入的结果。本文的主要结果是关于电场的定理 4.15 和关于磁场的定理5.8。

2 问题设定

2.1 一般记号

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个开、连通且有界的子集，其边界为 Lipschitz 连续$\partial\Omega$。为简化起见，我们假设 Ω 是单连通的，且 $\partial\Omega$ 是连通的。若此假设不成立，则可通过采用 [8, §8.2] 中的方法对以下结果进行调整。对于某个频率 $\omega \neq 0, (\omega \in \mathbb{R})$，时谐 Maxwell 方程组为

$$\mathbf{curl}\, \boldsymbol{E} - i\omega\mu \boldsymbol{H} = 0 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{curl}\, \boldsymbol{H} + i\omega\varepsilon \boldsymbol{E} = \boldsymbol{J} \ \text{ in } \Omega. \tag{1}$$

上式中， $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是电磁场的电分量和磁分量，而 $\boldsymbol{J}$ 表示注入 Ω 中的某个电流密度。本文假设 Ω 被理想导体包围。因此，我们在前述方程组中补充以下边界条件

$$\boldsymbol{E} \times \nu = 0 \qquad \text{and} \qquad \mu \boldsymbol{H} \cdot \nu = 0 \ \text{ on } \partial\Omega. \tag{2}$$

这里 ν 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。式（ ε 1 μ ）中的介电常数 和磁导率 ε均假定为实值函数，且满足 $\mu \in,^{\infty}\mathrm{L}\ \varepsilon^{-1}(\Omega)$，以及 $\mu^{-1} \in,^{\infty}\mathrm{L}(\Omega)$。然而，它们在 Ω 中的符号会发生变化，具体如下所述。按照麦克斯韦方程组研究中的惯例，我们将使用以下空间

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^2(\Omega) &:= (\mathrm{L}^2(\Omega))^3 \\
\mathbf{H}^1(\Omega) &:= (\mathrm{H}^1(\Omega))^3 \\
\mathrm{H}^1_0(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \,|\, \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \\
\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \,|\, \int_\Omega \varphi \, dx = 0\} \\
\mathbf{H}(\mathbf{curl}) &:= \{\boldsymbol{H} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{H} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \\
\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}) &:= \{\boldsymbol{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}) \,|\, \boldsymbol{E} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.
\end{aligned}$$

密度电流 $\boldsymbol{J}$ 在（1）中属于$\mathbf{L}^2$（Ω）的一个稍后将予以指定的子空间，并满足散度 $\boldsymbol{J} = 0$ 在 Ω 中$\backslash\{O\}$。因此，对于 $\xi \in \mathrm{L}^\infty$（$\Omega$），我们引入空间

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_N(\xi) &:= \{\boldsymbol{E} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{curl}) \,|\, \mathrm{div}(\xi \boldsymbol{E}) = 0\} \\
\mathbf{X}_T(\xi) &:= \{\boldsymbol{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}) \,|\, \mathrm{div}(\xi \boldsymbol{H}) = 0,\, \xi \boldsymbol{H} \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

我们不加区分地用 $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 表示 $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 和 $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 的经典内积。此外， $\|\cdot\|_\Omega$表示相应的范数。我们赋予空间 $\mathbf{H}(\mathbf{curl})$、$\mathbf{H}_N(\mathbf{curl})$、$\mathbf{X}_N(\xi)$、$\mathbf{X}_T(\xi)$ 以下范数

$$\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})} := (\|\cdot\|^2_\Omega + \|\mathbf{curl}\, \cdot\|^2_\Omega)^{1/2}.$$

让我们回顾一下关于特殊空间 $\mathbf{X}_N$（1）和 $\mathbf{X}_T$（1）的一个众所周知的性质（参见 [59, 1]）。

命题 2.1。 $\mathbf{X}_N$（1） 到$\mathbf{L}^2$（Ω） 的嵌入，以及$\mathbf{X}_T$（1） 到$\mathbf{L}^2$（Ω） 的嵌入都是紧的。此外，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_\Omega \leq C \, \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N(1) \cup \mathbf{X}_T(1).$$

因此，在 $\mathbf{X}_N(1)$ 和 $\mathbf{X}_T(1)$中， $\|$**旋度** $\cdot\|_\Omega$是一个范数，且与 $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}$等价。

2.2 圆锥尖端的描述

本段详细说明对几何的假设。我们研究 Ω 被划分为两个非空子域 Ω_+ 和 Ω_- 的情形，它们分别对应正材料和负材料。我们假设 $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$，$\Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset$，并且 $\partial\Omega_+$、$\partial\Omega_-$ 均为 Lipschitz 连续。函数 ε、μ 满足

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_+ > 0 & \text{in } \Omega_+ \\ \varepsilon_- < 0 & \text{in } \Omega_-, \end{cases} \qquad \mu = \begin{cases} \mu_+ > 0 & \text{in } \Omega_+ \\ \mu_- < 0 & \text{in } \Omega_-, \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_\pm$，$\mu_\pm$ 是一些常数。在研究问题（1）-（2）时，对比参数 κ_ε，κ_μ 定义为

$$\kappa_\varepsilon := \varepsilon_-/\varepsilon_+, \qquad \kappa_\mu := \mu_-/\mu_+$$

起着关键作用。现在我们来描述圆锥尖端。我们假设 Ω_- 除某一点 O 外属于 $\mathscr{C}^2$ 类，在该点处 Ω_- 局部与一个圆锥 $\mathcal{K}_-$ 重合。更准确地说，我们选择坐标系，使得 $O = (0,0,0)$，并假设存在 $\rho > 0$，以及单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的某个光滑区域 ϖ_-（属于 $\mathscr{C}^2$ 类）：$= \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = 1\}$，使得

$$\Omega_- \cap B(O,\rho) = \mathcal{K}_- \cap B(O,\rho) \qquad \text{with } \mathcal{K}_- := \{r\boldsymbol{\theta} \,|\, r > 0,\, \boldsymbol{\theta} \in \varpi_-\}. \tag{4}$$

这里 $B(O,\rho)$ 表示以 O 为中心、半径为 ρ 的开球。此外，我们假设该情形满足以下两个假设之一：

<escape>**情形 1：** 存在</escape> $O \in$ <escape>Ω，因此我们可以选择</escape> ρ <escape>使得</escape> B <escape>(</escape>O<escape>，</escape> ρ<escape>) </escape> $\subset$ <escape>Ω（内部圆锥尖端，见图2 左图）。在这种情况下，我们定义</escape> ϖ <escape>：</escape>$=\mathbb{S}^2$<escape>。</escape>

情形 2： 此时有 $O \in \partial\Omega$（圆锥尖端位于边界上）。在这种情况下，为了简化起见，我们假设 Ω 在 O 的某个邻域内也与一个圆锥尖端重合：

$$\Omega \cap B(O,\rho) = \mathcal{K} \cap B(O,\rho) \qquad \text{with } \mathcal{K} := \{r\boldsymbol{\theta} \,|\, r > 0,\, \boldsymbol{\theta} \in \varpi\}$$

其中 ϖ 是 $\mathbb{S}^2$ 的一个光滑区域，满足$\varpi_- \subset \varpi$（见图2 中心）。 (5)

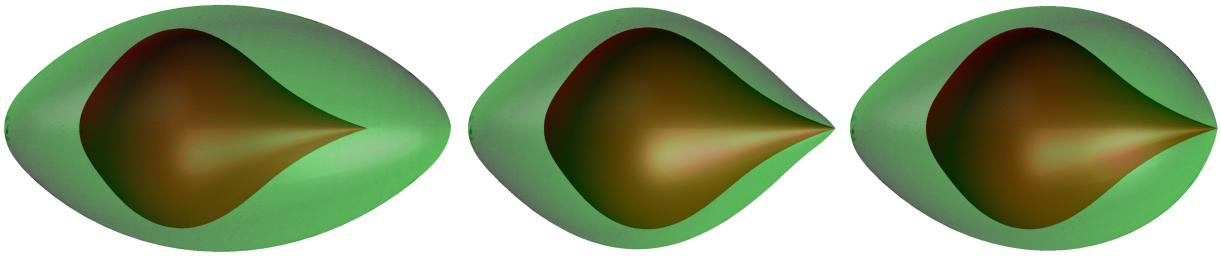

图 2：内部圆锥尖端（左），边界上的锥形尖点（中间和右侧）。

备注 2.2. 诚然，上述情形 *2* 相当学术化。不过，这将促使我们撰写更系统的证明。另请注意，通过微分同胚来拉直边界，例如借鉴 *[39, §1.3.7 卷 1]*, 中的思路，我们可以考虑如下情形：$O \in \partial\Omega$ 其中 $\partial\Omega$ 在 O 的某个邻域内是光滑的（见图 *2* 右侧）。

既然几何已经确定，接下来需要明确对比参数 κ_ε、κ_μ 所作的假设。Maxwell系统的研究与我们现在介绍的两个标量算子的性质直接相关。在本文中，对于巴拿赫空间 X，X^* 表示 X 的拓扑反对偶空间（即 X 上连续反线性泛函的集合）。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示相应的对偶配对。定义 $\mathrm{A}_\varepsilon : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to (\mathrm{H}^1_0(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}_\varepsilon\varphi, \varphi'\rangle = \int_\Omega \varepsilon\nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx, \qquad \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \tag{6}$$

并定义 $A_\mu : H^1_\#(\Omega) \to (H^1_\#(\Omega))^*$，使得

$$\langle A_\mu \varphi, \varphi' \rangle = \int_\Omega \mu \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx, \qquad \forall \varphi, \varphi' \in H^1_\#(\Omega). \tag{7}$$

在 [8]中证明，当函数 ε、μ 满足 A_ε、A_μ 为 Fredholm 型时（不对 ε、μ的符号作任何假设），Maxwell系统在经典 L^2 框架下也是 Fredholm 意义下适定的（更多细节见下文第 6 节）。在本研究中，我们的目标是研究 A_ε、A_μ 恰好不属于 Fredholm 型的情形。当 ε 和 μ 的符号不是常数时，判断这一结论是否成立并非易事。对于材料之间的一般 Lipschitz连续界面 $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$，已知 A_ε（分别地，A_μ）为 Fredholm 型，当且仅当 $\kappa_\varepsilon \in \mathbb{R}^*_- \backslash I_\varepsilon$（分别地，$\kappa_\mu \in \mathbb{R}^*_- \backslash I_\mu$），其中 I_ε（分别地，I_μ）是 $\mathbb{R}^*_- := (-\infty; 0)$ 的一个有界闭子集，称为临界区间。

如引言中所述，当界面光滑时，可以证明 $I_\varepsilon = I_\mu = \{-1\}$[22, 47]。当界面不光滑时，情况则有所不同。对于带有角点的二维界面，这一问题已在 [25, 7, 9] 中进行了详细研究；对于带有锥形尖点的三维界面，则见 [57, 第 2]章。在后面的这些研究中，已经证明，对于这些构型，I_ε，I_μ 是具有非空内部的区间。对于二维角点，I_ε，I_μ 的表达式可以显式推导出来。可以发现，I_ε，I_μ 会随着角点变得尖锐而进一步扩大。对于三维圆锥尖端，情况的多样性更大，一般来说，我们无法得到 I_ε，I_μ的简单表达式。不过，我们仍然可以对 I_ε，I_μ 给出刻画；下一节将通过回顾如何研究标量问题来完成这一工作。需要指出的是，对于本文不予考虑的楔形体，可以参阅 [7]以及较新的工作 [26]。

3 标量问题的研究

3.1 Kondratiev空间

我们首先介绍适用于我们希望处理的奇异性的加权Sobolev空间。对于 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们将Kondratiev空间（参见 [33, 39, 34]）$V^m_\beta(\Omega)$ 定义为 $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega\backslash\{O\})$ 在以下范数下的闭包

$$\|\varphi\|_{V^m_\beta(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|r^{|\alpha|-m+\beta} \partial^\alpha_x \varphi\|^2_\Omega \right)^{1/2}.$$

这里，$r = |x|$ 和 $\mathscr{C}^\infty_0(\overline{\Omega}\backslash\{O\})$ 表示支集包含于 $\Omega\backslash\{O\}$ 中的无穷次可微函数空间。对于 $m \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$，我们有如下包含关系。

$$V^m_\beta(\Omega) \subset V^{m-1}_{\beta-1}(\Omega). \tag{8}$$

显然，当 $\beta \le \gamma$ 时，有 $V^m_\beta(\Omega) \subset V^m_\gamma(\Omega)$。此外，$V^m_\beta(\Omega)$ 的元素属于任意不含 O 邻域的区域上的 H^m。此外，我们还有以下紧性结果（例如参见 [34，引理 6.2.1]）。

引理 3.1。 对于 $m \in \mathbb{N}^*$ 和 $\beta < \gamma$，嵌入 $V^m_\beta(\Omega) \subset V^{m-1}_{\gamma-1}(\Omega)$ 是紧的 $t.$

显然，$V^1_0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$。此外，由于 Ω 有界，经典的 Hardy不等式（参见例如 [34, 定理 7.1.1]）保证 $H^1(\Omega) = V^1_0(\Omega)$（注意，这在二维情况下并不成立）。

为研究带有狄利克雷边界条件的问题，引入空间 $\mathring{V}^1_\beta(\Omega)$，其定义为 $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega\backslash\{O\})$ 在范数 $\|\cdot\|_{V^1_\beta(\Omega)}$ 下的闭包 (注意，在情形 2 中，当 $O \in \partial\Omega$，见（5），可得 $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega\backslash\{O\}) = \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$）。我们有如下刻画

$$\mathring{V}^1_\beta(\Omega) = \{\varphi \in V^1_\beta(\Omega) \,|\, \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

有 $\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \mathring{\mathrm{V}}_0^1(\Omega)$，并且对于 $\beta > 0$，有以下包含关系

$$\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega) \subset \mathrm{H}_0^1(\Omega) \subset \mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta}(\Omega) \qquad \text{and so} \qquad (\mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta}(\Omega))^* \subset (\mathrm{H}_0^1(\Omega))^* \subset (\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega))^*.$$

另一方面，对于 $0 \le \beta \le 1$，由（8）可得 $\mathrm{H}_0^1(\Omega) \subset \mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega)$，这意味着

$$\mathrm{L}^2(\Omega) \subset \mathrm{V}^0_{\beta}(\Omega) \subset (\mathrm{H}_0^1(\Omega))^*.$$

上面我们还用到了 $(\mathrm{V}^0_{\beta}(\Omega))^* = \mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$。

为了研究具有诺伊曼边界条件的问题，我们将在零均值函数空间中进行。为定义这些空间，先注意到对于所有 $\beta > -3/2$，都有

$$\int_\Omega r^{2\beta}\, dx < +\infty.$$

因此，对于满足 $\beta < 5/2$ 的 $u \in \mathrm{V}^1_{\beta}(\Omega)$，可以写成

$$\Big|\int_\Omega u\, dx\Big| \le \|1\|_{\mathrm{V}^0_{-\beta+1}(\Omega)}\, \|u\|_{\mathrm{V}^0_{\beta-1}(\Omega)} \le C\, \|u\|_{\mathrm{V}^1_{\beta}(\Omega)}. \tag{9}$$

这使我们能够对所有 $\beta < 5/2$， 定义空间

$$\mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega) := \{u \in \mathrm{V}^1_{\beta}(\Omega) | \int_\Omega u\, dx = 0\}.$$

特别注意，我们有 $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) = \mathcal{V}^1_0(\Omega)$。

3.2 Kondratiev空间中的标量算子

对于 $\beta \in \mathbb{R}$，定义连续算子 $\mathrm{A}^{\beta}_{\varepsilon}$： $\mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta}(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}^{\beta}_{\varepsilon}\varphi, \varphi'\rangle = \int_\Omega \varepsilon \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta}(\Omega),\ \varphi' \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega).$$

同理，对于 $\beta \in (-5/2; 5/2)$，定义 A^{β}_{μ}： $\mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega) \to (\mathcal{V}^1_{-\beta}(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}^{\beta}_{\mu}\varphi, \varphi'\rangle = \int_\Omega \mu \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega), \varphi' \in \mathcal{V}^1_{-\beta}(\Omega).$$

应用Kondratiev方法 [33, 46, 39, 34, 25]，尤其是Mellin变换，来分析（粗略地说）A的性质$^{\beta}_{\varepsilon}$、A^{β}_{μ} 在 O的邻域内，会引出对如下算子的研究： $\mathscr{L}_{\varepsilon}(\lambda) : \mathrm{H}^1_0(\varpi) \to \mathrm{H}^1_0(\varpi)$， $\mathscr{L}_{\mu}(\lambda) : \mathrm{H}^1(\varpi) \to \mathrm{H}^1(\varpi)$，它们由Riesz表示定理定义，满足：对 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\mathscr{L}_{\varepsilon}(\lambda)\varphi, \phi)_{\mathrm{H}^1(\varpi)} = \int_\varpi \varepsilon \nabla_S\varphi \cdot \nabla_S\overline{\phi}\, d\boldsymbol{\theta} - \lambda(\lambda+1)\int_\varpi \varepsilon\varphi\overline{\phi}\, d\boldsymbol{\theta}, \qquad \forall \varphi, \phi \in \mathrm{H}^1_0(\varpi), \tag{10}$$

$$(\mathscr{L}_{\mu}(\lambda)\varphi, \phi)_{\mathrm{H}^1(\varpi)} = \int_\varpi \mu \nabla_S\varphi \cdot \nabla_S\overline{\phi}\, d\boldsymbol{\theta} - \lambda(\lambda+1)\int_\varpi \mu\varphi\overline{\phi}\, d\boldsymbol{\theta}, \qquad \forall \varphi, \phi \in \mathrm{H}^1(\varpi). \tag{11}$$

上文中的 $\varpi \subset \mathbb{S}^2$ 是式（5）中引入的区域，$\mathrm{H}^1_0(\varpi) := \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\varpi)\,|\,\varphi = 0 \text{ 在 } \partial\varpi\}$（注意，若 $\varpi = \mathbb{S}^2$，则 $\mathrm{H}^1_0(\varpi) = \mathrm{H}^1(\varpi)$），而 ∇_S 表示 $\mathbb{S}^2$上的曲面梯度。此处稍作滥用，对于$\sigma = \varepsilon$、 μ，我们重新将 σ 定义为满足以下条件的函数： ϖ_+ 中的 $\sigma = \sigma_+ := \varpi\backslash\varpi_-$，且 ϖ_-中的 $\sigma = \sigma_-$。

注意，对于 $\sigma = \varepsilon$、 μ，在坐标 $(r, \boldsymbol{\theta})$ 中寻找可分离变量的函数，使得 $\mathrm{div}(\sigma\nabla s) = 0$ in $\Omega \cap B(O, \rho)$，并满足 $\partial\Omega \cap \partial B(O, \rho)$ 上的齐次狄利克雷/诺伊曼（视具体情况而定）边界条件时，符号 $\mathscr{L}_{\sigma}(\cdot)$ 会自然出现。

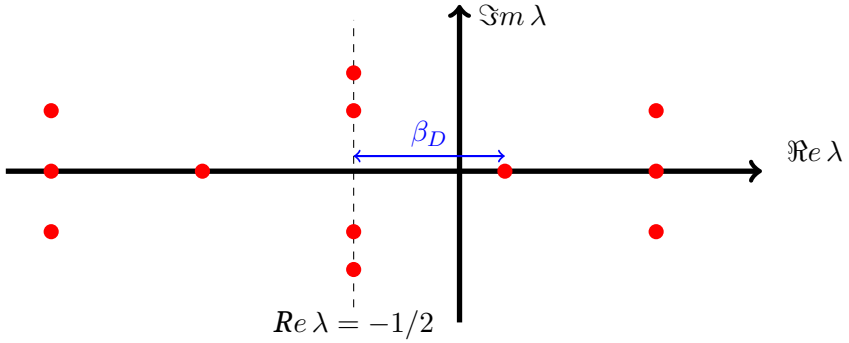

图 3：满足假设 $\mathscr{L}_\varepsilon$ 1 时，复平面上的特征值示意图。对于 $\mathscr{L}_\mu$，也有类似结果。

如果 $\mathscr{L}_\sigma(\lambda)$ 不可逆，我们就称 λ 属于 $\mathscr{L}_\sigma$ ($\lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_\sigma)$) 的谱。此外，若 $\ker \mathscr{L}_\sigma(\lambda) \neq \{0\}$，则称 λ 是 $\mathscr{L}_\sigma$ 的特征值。需要注意的是，由于变号系数 σ 同时出现在主部和紧部中，无法确定内积，因此对 $\mathscr{L}_\sigma$ 谱性质的分析变得复杂。为此，我们无法将对应于 (10)、(11) 的谱改写为某些自伴算子的谱；实际上，有些情况下会出现复特征值。然而，已有研究表明，在 $\kappa_\sigma \neq -1$ 时，$\mathscr{L}_\sigma$ 的谱是离散的，由特征值组成，且这些特征值不会在 $\mathbb{C}$ 的有界区域内聚集。写作 $\lambda(\lambda+1) = (\lambda+1/2)^2 - (1/2)^2,$，可以看出，若 $\lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_\sigma)$，则 $-1-\lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_\sigma)$（关于点 $-1/2+0i$ 对称，见图 3）。此外，利用 σ 为实值函数这一点可得，若 $\lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_\sigma)$，则 $\lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_\sigma)$（关于直线 $\mathrm{I}m\,\lambda = 0$ 对称）。接着，将 Kondratiev方法应用于当前具有变号系数的情形（详见 [57, 第 2] 章），即可得到以下结果。

命题 3.2。对于 $\sigma = \varepsilon, \mu$，假设 $\kappa_\sigma \neq -1$。那么对于 $\beta \in \mathbb{R}$，算子 A_σ^β 是 *Fredholm* 型，当且仅当 $\mathscr{L}_\sigma$ 在直线 $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Re\,\lambda = -1/2 + \beta\}$ 上没有特征值。

3.3 超奇异性

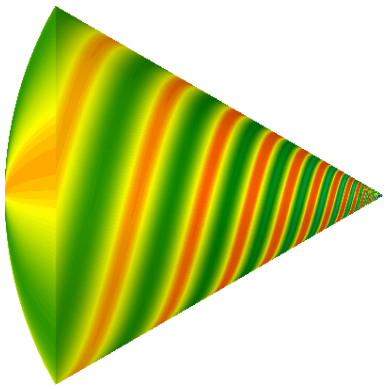

图 4：内部圆形圆锥尖端的传播奇异性虚部在 $\mathcal{K}_-$ 上的限制。

注意，由于 $\mathring{\mathrm{V}}_0^1(\Omega) = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$，$\mathrm{V}_0^1(\Omega) = \mathrm{H}_\#^1(\Omega)$，因此有 $\mathrm{A}_\varepsilon^0 = \mathrm{A}_\varepsilon$ 和 $\mathrm{A}_\mu^0 = \mathrm{A}_\mu$，其中 A_ε、A_μ 在 (6)、(7) 中定义。因此，对于 $\sigma = \varepsilon$、μ，位于能量直线 $\mathrm{R}e\,\lambda = -1/2$ ($\beta = 0$) 上的 $\mathscr{L}_\sigma$ 的特征值尤为重要。必要时将 (10)、(11) 除以一个常数后可知，$\mathscr{L}_\sigma$ 的谱先验上是 σ_+、σ_- 的函数，但实际上仅取决于对比度 $\kappa_\sigma = \sigma_-/\sigma_+$。命题 3.2 直接给出集合 I_σ 的如下刻画结果。

命题 3.3. 对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，有

$$I_\sigma = \{-1\} \cup \{\kappa_\sigma \in \mathbb{R}^*_- \mid \mathscr{L}_\sigma \text{ has an eigenvalue on the line } \Re e\,\lambda = -1/2\}.$$

在本文中，我们将作出以下假设。

假设1。 我们假设 ε 和 μ 满足 $\kappa_\varepsilon \in I_\varepsilon \backslash \{-1\},\ \kappa_\mu \in I_\mu \backslash \{-1\}$。

我们称 $\kappa_\varepsilon,\ \kappa_\mu$ 分别在 $\kappa_\varepsilon \in I_\varepsilon \backslash \{-1\}$、$\kappa_\mu \in I_\mu \backslash \{-1\}$时为临界情形。请注意，在本文中，我们将始终排除 $\kappa_\varepsilon = -1$ 或 $\kappa_\mu = -1$的情形。在后一种情况下，奇异性似乎不仅出现在尖端处，还沿着整个界面出现。此时的分析截然不同，而且目前尚未得到充分理解。感兴趣的读者可参阅 [50, 2, 51, 16, 47, 48]，了解更多相关细节。

让我们在最简单的几何情形下考察假设 1。这里假设 $O \in \Omega$，且 $\mathcal{K}_-$ 与一个圆形锥尖重合，也就是说

$$\varpi_- = \{(\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \mid -\pi \le \theta \le \pi,\ -\pi/2 \le \phi < -\pi/2 + \alpha\} \tag{12}$$

对于某些 $\alpha \in (0; \pi)$（见图 2 左图）。在这种情形下，如 [10, §2.1], 中所述，通过调整 [32, 31, 37], 的结果，可以证明 $I_\varepsilon = I_\mu = (-1; -\aleph_\alpha)$（分别为 $I_\varepsilon = I_\mu = (-\aleph_\alpha; -1)$，当$\alpha < \pi/2$（分别为 $\alpha > \pi/2$）时。这里 $\aleph_\alpha$ 是由下式定义的常数

$$\aleph_\alpha := \frac{{}_2\mathrm{F}_1(1/2, 1/2, 1, \cos^2(\alpha/2))\ {}_2\mathrm{F}_1(3/2, 3/2, 2, \sin^2(\alpha/2))}{{}_2\mathrm{F}_1(1/2, 1/2, 1, \sin^2(\alpha/2))\ {}_2\mathrm{F}_1(3/2, 3/2, 2, \cos^2(\alpha/2))} > 0, \tag{13}$$

其中，${}_2\mathrm{F}_1$ 表示高斯超几何函数。注意，对于 $\alpha \in (0; \pi/2)$，有 $\aleph_\alpha = 1/\aleph_{\pi-\alpha}$，且 $\aleph_\alpha \in (0; 1)$。此外，例如，还有 $\aleph_{\pi/4} \approx 0.218$，以及 $\lim_{\alpha\to\pi/2}\aleph_\alpha = 1$、$\lim_{\alpha\to 0^+}\aleph_\alpha = 0^+$、$\lim_{\alpha\to\pi^-}\aleph_\alpha = +\infty$。因此，对于满足 $\kappa_\varepsilon, \kappa_\mu \in (-1; 0)$（分别地，$\kappa_\varepsilon, \kappa_\mu \in (-\infty; -1)$）的给定材料，通过取足够小（分别地，足够大）的 α，总能找到满足假设1的几何构型。

我们回到一般分析。根据命题3.2，当假设1成立时，A_ε、A_μ 不是 Fredholm 型。这与由尖端支集的超奇异性的存在直接相关，我们现在对此进行描述。对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，记

$$\lambda_j^\sigma = -1/2 + i\eta_j^\sigma, \qquad j = 1, \dots, n^\sigma,$$

$\mathscr{L}_\sigma$ 位于直线 $\mathrm{Re}\,\lambda = -1/2$上的特征值。令 $I_j^\sigma = \dim\ker\mathscr{L}_\sigma(\lambda_j^\sigma)$ 表示 λ_j^σ的几何重数，并令 φ_j^σ,0,...,φ_j^σ,I_j^σ,0 为与特征值 λ_j^σ对应的$\mathscr{L}_\sigma$ 的典范特征函数系。对于某些对比参数，还可能存在必须纳入考虑的广义特征函数。记 $\kappa_{j,k}^\sigma$ 为 λ_j^σ 的部分重数（定义见 [34,§5.1.1]）。最后，令

$$\varphi_{j,k,0}^\sigma, \dots, \varphi_{j,k,\kappa_{j,k}^\sigma-1}^\sigma, \qquad k = 1, \dots, I_j^\sigma,$$

为与特征值 λ_j^σ对应的 Jordan 链典范系统（再见 [34, §5.1.1]）。对于 $j = 1$、...、n^σ, $k = 1$、...、I_j^σ, $l = 0$、...、$\kappa_{j,\,k}^\sigma - 1$，我们定义超奇异性

$$s_{j,k,l}^\sigma := r^{-1/2+i\eta_j^\sigma} \sum_{p=0}^{l} \frac{1}{p!} (\log r)^p \varphi_{j,k,l-p}^\sigma(\boldsymbol{\theta}). \tag{14}$$

注意，如果 $\lambda_j = -1/2 + i\eta_j$ 是一个简单特征值（几何重数等于一且不存在广义特征函数），我们就有 $s_{j,1,0}^\sigma = r^{-1/2+i\eta}\varphi_{j,1,0}^\sigma(\boldsymbol{\theta})$（此类函数的示意图见图 4）。此外，根据约当链的定义，我们发现对于 $\lambda_j^\sigma \neq -1/2$,

我们有 $\kappa^{\sigma}_{j,k} = 1$，即 只要满足以下条件，就不存在与特征对 $(\lambda^{\sigma}_{j},\varphi^{\sigma}_{j,k,0})$ 相关的广义特征函数。

$$\int_{\varpi} \sigma\varphi^{\sigma}_{j,k,0}\,\varphi^{\sigma}_{j,\tilde{k},0}\,d\boldsymbol{\theta} \neq 0 \qquad \text{for some } \tilde{k} \in \{1,\dots,I^{\sigma}_{j}\}.$$

超奇异性 s^{σ} 在（14）中满足

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla s^{\sigma}) = 0 \qquad \text{in } \Omega \cap B(O,\rho) \tag{15}$$

以及 $\partial\Omega \cap \partial B(O,\ \rho)$ 上的齐次狄利克雷/诺伊曼（视具体情况而定）边界条件。此外，它们属于 $\mathrm{L}^2(\Omega)$，但“刚好不属于”$\mathrm{H}^1(\Omega)$。更准确地说，对于所有 $\tau > 0$，我们有 $s^{\sigma} \notin \mathrm{H}^1(\Omega)$ 和 $r^{\tau}s^{\sigma} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$。这与微积分直接相关

$$\int_{\delta}^{1} |\nabla(r^{-1/2+i\eta})|^2\, r^2 dr = |-1/2+i\eta|^2 \int_{\delta}^{1} r^{-1} dr = (1/4+\eta^2)|\ln\delta| \underset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

超奇异性也称为传播奇异性或黑洞奇异性。为简化起见，下文将统称其为奇异性。它们可以解释为沿两种材料之间的界面传播、向 O 或从 $r \to 0$ 传播的波。这些波的群速度趋近于 0，因此 O 永远无法到达（这就是它们被称为黑洞波的原因）。这一切仿佛能量被困在尖端处；请参见下文的重要恒等式（37），以理解这句话；而点 O 则起到无穷远的作用。关于能捕捉这些波的适配数值方法，可参见 [5, 29, 11, 30]。有关相关问题，请参阅 [6, 54, 13, 12, 28, 53]。

为了特别排除在远离 O 的 $\partial\Omega$ 上考虑边界条件问题时的影响，经典做法是将奇异性乘以一个截断函数。引入 $\chi \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$，使得 $\chi(r) = 1$ 在 $r \le \rho/2$ 上成立，且$\chi(r) = 0$ 在 $r \ge \rho$ 上成立。对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，这促使我们定义空间

$$\mathcal{S}_{\sigma} := \operatorname{span}\{\ \chi(r)s^{\sigma}_{j,k,l}(x)\ ,\ j = 1,\dots,n^{\sigma},\ k = 1,\dots,I^{\sigma}_{j},\ l = 0,\dots,\kappa^{\sigma}_{j,k}-1\}. \tag{16}$$

利用（15），当 $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}_{\sigma}$ 时，我们得到

$$\operatorname{div}(\sigma\nabla\mathfrak{s}) \in \mathrm{L}^2(\Omega) \qquad \text{and} \qquad \operatorname{div}(\sigma\nabla\mathfrak{s}) = 0 \text{ in } \Omega \cap B(O,\rho/2). \tag{17}$$

对 [57,第 2] 章的研究给出以下结果。

引理 3.4。假设假设条件*1* 成立。那么 $\mathcal{S}_{\varepsilon}$ 和 $\mathcal{S}_{\mu}$ 均为有限维空间，且其维数为偶数，即有 维数$(\mathcal{S}_{\varepsilon}) = 2N_{\varepsilon}$，维数$(\mathcal{S}_{\mu}) = 2N_{\mu}$，其中 $N_{\varepsilon},\ N_{\mu} \in \mathbb{N}^{*}$。

注 3.5。对于式（*12*）中描述的圆形锥尖这一特殊情形，可以证明，取对比参数 κ_{ε}、κ_{μ} 接近 -1，就能使维数 N_{ε}、N_{μ} 任意大。

接下来，我们简要说明如何在函数框架中考虑奇异性，从而得到 Fredholm 算子。

3.4 Kondratiev空间中标量算子的其他性质

引入以下量

$$\begin{aligned}\beta_D &:= \min\{\Re e\,(\lambda-1/2)\,|\,\lambda \in \operatorname{spec}(\mathscr{L}_{\varepsilon}) \text{ and } \Re e\,\lambda > -1/2\},\\ \beta_N &:= \min(\{\Re e\,(\lambda-1/2)\,|\,\lambda \in \operatorname{spec}(\mathscr{L}_{\mu}) \text{ and } \Re e\,\lambda > -1/2\} \cup \{5/2\})\end{aligned} \tag{18}$$

(见图 3的示意图）。[57, 第 2] 章的结果保证我们同时具有$\beta_D > 0$ 和 $\beta_N > 0$。根据此定义，$\mathscr{L}_{\varepsilon}$（分别为 $\mathscr{L}_{\mu}$）在条带$-\beta_D < Re\,\lambda < \beta_D$（$-\beta_N < Re\,\lambda < \beta_N$）中的所有特征值都位于直线 $Re\,\lambda = -1/2$上。此外，我们还有以下结果（回顾一下，Fredholm算子的指标定义为其核的维数与其余核的维数之差）。

<escape>**命题 3.6**。 假设 *1* 成立。</escape>
对于 $\beta \in (0;\beta_D)$，$\mathrm{A}_\varepsilon^\beta$ 的指标为 N_ε，而 $\mathrm{A}_\varepsilon^{-\beta}$的指标为 $-N_\varepsilon$。
对于 $\beta \in (0;\beta_N)$，A_μ^β 的指标为 N_μ，而 $\mathrm{A}_\mu^{-\beta}$的指标为 $-N_\mu$。

注意，我们可以证明 $\ker \mathrm{A}_\varepsilon^{-\beta}$（分别地，$\ker \mathrm{A}_\mu^{-\beta}$）的维数与 $\beta \in (0;\beta_D)$（分别地，$\beta \in (0;\beta_N)$）无关。因此，对于所有 $\beta \in (0;\beta_D)$（分别地，$\beta \in (0;\beta_N)$），$\mathrm{A}_\varepsilon^{-\beta}$（分别地，$\mathrm{A}_\mu^{-\beta}$）均为单射，当且仅当它对于某个 $\beta \in (0;\beta_D)$（分别地，某个 $\beta \in (0;\beta_N)$）为单射。为简化下面的分析，并避免不得不处理有限维的核，我们将作出.....

假设 2。 我们假设 ε（分别地，μ）满足以下条件：对于所有$\beta \in (0;\beta_D)$（分别地，$\beta \in (0;\beta_N)$），$\mathrm{A}_\varepsilon^{-\beta}$（分别地，$\mathrm{A}_\mu^{-\beta}$）是单射。

根据命题 3.6，可得这些估计

$$\begin{aligned} &\forall \beta \in [0;\beta_D), \qquad \|u\|_{\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega)} \leq C\,\|\mathrm{A}_\varepsilon^{-\beta}u\|_{(\mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta}(\Omega))^*}, \qquad \forall u \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega), \\ &\forall \beta \in [0;\beta_N), \qquad \|u\|_{\mathcal{V}^1_{-\beta}(\Omega)} \leq C\,\|\mathrm{A}_\mu^{-\beta}u\|_{(\mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega))^*}, \qquad \forall u \in \mathcal{V}^1_{-\beta}(\Omega). \end{aligned} \tag{19}$$

借助应用于符号 $\lambda \mapsto \mathscr{L}_\varepsilon(\lambda)$ 和 $\lambda \mapsto \mathscr{L}_\mu(\lambda)$ 的留数定理（调整 [34,定理 5.4。2]），可以得到以下正则性结果。

命题 3.7。 假设 *1-2* 成立。
如果 $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 满足 散度$(\varepsilon\nabla u) \in (\mathring{\mathrm{V}}^1_{\beta}(\Omega))^* \subset (\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega))^*$ 对于某个 $\beta \in (0;\beta_D)$，那么 $u \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega)$。如果 $u \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ 满足 散度$(\mu\nabla u) \in (\mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega))^* \subset (\mathcal{V}^1_{-\beta}(\Omega))^*$ 对于某个 $\beta \in (0;\beta_N)$，那么 $u \in \mathcal{V}^1_{-\beta}(\Omega)$。

这些奇异性属于算子 $\mathrm{A}_\varepsilon^\beta$、$\mathrm{A}_\mu^\beta$ 的区域。然而，这些算子目前仍不够理想，因为它们是满射的（作为单射算子的伴随算子），但并非单射。为了构造同构，我们必须对奇异性进行筛选，并且只将其中一部分纳入函数框架。这是分析过程中的下一步。

3.5 曼德尔施塔姆辐射原理

性质 (17) 保证，对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，我们可以定义型 $q_\sigma(\cdot,\ \cdot)\colon \mathcal{S}_\sigma \times \mathcal{S}_\sigma \to \mathbb{C}$ 使得

$$q_\sigma(u,v) = \int_\Omega -\mathrm{div}(\sigma\nabla u)\overline{v} + u\,\mathrm{div}(\sigma\nabla\overline{v})\,dx \qquad \forall u,v \in \mathcal{S}_\sigma.$$

注意，$q_\sigma(\cdot,\cdot)$ 是半线性的且为反厄米，即它是辛的。利用控制收敛定理并进行分部积分，我们得到

$$q_\sigma(u,v) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\{|x|=\delta\}\cap\Omega} \sigma(\partial_r u\overline{v} - \partial_r u\overline{v})\,ds.$$

这表明 $q_\sigma(\cdot,\cdot)$ 不依赖于 (χ 式（16）中截断函数 的选择。另一方面，我们注意到，对所有 $u \in \mathcal{S}_\sigma$,

$$q_\sigma(u,u) = 2i\Im m(\int_\Omega u\,\mathrm{div}(\sigma\nabla\overline{u})\,dx) \in i\mathbb{R}.$$

从物理上看，幅值 $q_\sigma(u,u)$ 表示波 $u \in \mathcal{S}_\sigma$ 向点 O 传输或从该点传出的能量（取决于符号）。如果 $\mathrm{I}m(q_\sigma(u,u)) > 0$（分别为 $\mathrm{I}m(q_\sigma(u,u)) < 0$），则称波 $u \in \mathcal{S}_\sigma$ 为出射（分别为入射）。如果 $u \in \mathcal{S}_\sigma$ 满足 $q_\sigma(u,u) = 0$，则称 u 为未分类。第 [57, 章已证明，$q_\sigma(\cdot,\cdot)$ 是非退化的（对所有 $v \in \mathcal{S}_\sigma$，$q_\sigma(u,v) = 0$ 意味着 $u \equiv 0$）。应用 Sylvester惯性定律，我们得到以下结果。

引理3.8。 假设条件 *1* 成立。对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，存在 $(\mathfrak{s}^\pm_{\sigma,j})_{j=1,\dots,N_\sigma}$ $\mathcal{S}_\sigma$ 的一组基，使得我们有

$$q_\sigma(\mathfrak{s}^\pm_{\sigma,j},\mathfrak{s}^\pm_{\sigma,k}) = \pm i\delta_{j,k}, \qquad q_\sigma(\mathfrak{s}^\pm_{\sigma,j},\mathfrak{s}^\mp_{\sigma,k}) = 0 \quad \textit{and} \quad \mathfrak{s}^+_{\sigma,j} = \overline{\mathfrak{s}^-_{\sigma,j}} \qquad \textit{for } j,k = 1,\dots,N_\sigma. \tag{20}$$

在文献中（尤其参见 [46, 43, 44]），前一个引理中给出的分解称为Mandelstam辐射原理。这意味着波的空间可以分解为出射波空间与入射波空间之和。

注3.9。 我们强调，基 $(\mathfrak{s}^{\pm}_{\sigma,\ j})_{j=1,\ \dots N_\sigma}$ 并非唯一。更准确地说，可以找到无穷多个满足引理*3.8*所有条件的基。从数学角度来看，这并不是一个问题，任意基的选择都能提供一个函数框架，使相应的标量问题适定。然而，从更具物理意义的角度来看，在大多数情况下，只有一种特定的选择与极限吸收原理相一致。我们将在 *§4.7* 中重新讨论这一点。

从现在起，对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，我们固定 $(\mathfrak{s}^{\pm}_{\sigma,\ j})_{j=1,\dots,N_\sigma}$ 一组 $\mathcal{S}_\sigma$ 满足引理 3.8 的正交关系的基。此外，我们定义空间

$$\mathcal{S}^+_\sigma := \operatorname{span}\{\mathfrak{s}^+_{\sigma,j},\ j = 1, \dots, N_\sigma\}. \tag{21}$$

利用（20），可直接得到以下结果。

引理 3.10。 假设 *1* 成立。对于 $\sigma = \varepsilon,\ \mu$，若 $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}^+_\sigma$ 满足 $q_\sigma(\mathfrak{s},\ \mathfrak{s}) = 0$，则 $\mathfrak{s} \equiv 0$。

3.6 标量问题的新函数框架

对于 $\beta > 0$，定义所谓的脱离渐近空间

$$\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) := \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega) \oplus \mathcal{S}^+_\varepsilon.$$

赋予范数

$$\|u\|_{\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)} := (\|\tilde{u}\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)} + \|\mathfrak{s}^+_\varepsilon\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)})^{1/2}, \quad u = \tilde{u} + \mathfrak{s}^+_\varepsilon, \quad \tilde{u} \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega),\ \mathfrak{s}^+_\varepsilon \in \mathcal{S}^+_\varepsilon,$$

这是一个巴拿赫空间。注意，$\mathcal{S}^+_\varepsilon$ 是有限维的，因此在该空间中，$\|\cdot\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)}$ 是若干范数之一。不过，在下文中使用它会比较方便。接着引入算子 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\varepsilon$: $\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\varepsilon u, v\rangle = \fint_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx, \qquad \forall u = \tilde{u} + \mathfrak{s}^+_\varepsilon \in \mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega),\ v \in \mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega),$$

其中

$$\fint_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx := \int_\Omega \varepsilon \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \overline{v}\, dx - \int_\Omega \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \mathfrak{s}^+_\varepsilon)\overline{v}\, dx. \tag{22}$$

我们强调，由于 $\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s}^+_\varepsilon)$ 在原点的某个邻域内为零，(22) 是定义良好的，并且我们有

$$\Big|\fint_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx\Big| \le C\, \|u\|_{\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)} \|v\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)}$$

其中，C 与 u、v 无关。这保证了 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\varepsilon$: $\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$ 是连续的。还需注意，对于 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega\backslash\{O\})$，我们只需有

$$\langle \mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\varepsilon u, \varphi\rangle = \int_\Omega \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dx.$$

类似地，对于 $\beta > 0$，令

$$\mathcal{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) := \{u \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega) \oplus \mathcal{S}^+_\mu \mid \int_\Omega u\, dx = 0\}.$$

赋予范数

$$\|u\|_{\mathcal{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)} := (\|\tilde{u}\|_{\mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega)} + \|\mathfrak{s}^+_\mu\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)})^{1/2}, \quad u = \tilde{u} + \mathfrak{s}^+_\mu, \quad \tilde{u} \in \mathrm{V}^1_{-\beta}(\Omega),\ \mathfrak{s}^+_\mu \in \mathcal{S}^+_\mu,$$

这也是一个巴拿赫空间。对于 $\beta \in (0; 5/2)$，定义连续算子 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\mu$: $\mathcal{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega) \to (\mathcal{V}^1_\beta(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\mu u, v\rangle = \fint_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx, \qquad \forall u = \tilde{u} + \mathfrak{s}^+_\mu \in \mathcal{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega),\ v \in \mathcal{V}^1_\beta(\Omega)$$

其中

$$\fint_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx := \int_\Omega \mu \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \overline{v}\, dx - \int_\Omega \mathrm{div}(\mu \nabla \mathfrak{s}^+_\mu)\overline{v}\, dx.$$

至于 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\varepsilon$，注意，对于 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega\backslash\{O\})$，我们只需

$$\langle \mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\mu u, \varphi\rangle = \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla \overline{\varphi}\, dx.$$

由于 [57, 第 2], 章，我们在此给出标量问题的以下关键定理，它将 [9] 的结果推广到了三维。

定理 3.11. 假设 *1-2* 成立。那么对于所有 $\beta \in (0;\, \beta_D)$ (分别为 $\beta \in (0;\, \beta_N)$)，算子 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\varepsilon$(分别为 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_\mu$) 均为同构。这里 β_D, β_N 定义见（*18*）。

注 3.12. 注意，在 $\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$, $\mathcal{V}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$ 中寻求解，归结为在原点施加辐射条件。

4 电问题的新框架

在第 6 节中，我们将证明，当 κ_ε 和 κ_μ 处于临界状态时，经典 $\mathbf{L}^2$ 空间中的麦克斯韦方程组是不适定的。本节是本文的核心，我们提出一个新的框架。固定 β 使其对所有情况都成立

$$\beta \in (0; \beta_\star) \qquad \text{with } \beta_\star := \min\{\beta_D, \beta_N, 1/2\}. \tag{23}$$

这里 β_D, β_N 是式（18）中出现的权重。对于 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$\mathbf{V}^m_\beta(\Omega) := (\mathrm{V}^m_\beta(\Omega))^3$$

并赋予该空间以下范数

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^m_\beta(\Omega)} := \Big(\sum_{i=1}^3 \|u_i\|^2_{\mathrm{V}^m_\beta(\Omega)}\Big)^{1/2}, \qquad \forall \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{V}^m_\beta(\Omega).$$

然后定义

$$\nabla\mathcal{S}^+_\varepsilon := \mathrm{span}\{\nabla\mathfrak{s}^+_{\varepsilon,j}, j = 1, \dots, N_\varepsilon\}, \qquad \nabla\mathcal{S}^+_\mu := \mathrm{span}\{\nabla\mathfrak{s}^+_{\mu,j}, j = 1, \dots, N_\mu\}$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}_N(\mathbf{curl}) := \{\boldsymbol{u} \in \nabla\mathcal{S}^+_\varepsilon \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega) \,|\, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\beta(\Omega),\ \boldsymbol{u} \times \nu = 0 \,\mathrm{on}\, \partial\Omega\backslash\{O\}\}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}}_N(\mathbf{curl}) := \{\boldsymbol{u} \in \nabla\mathcal{S}^+_\varepsilon \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega) \,|\, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \in \mu\nabla\mathcal{S}^+_\mu \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega),\ \boldsymbol{u} \times \nu = 0 \,\mathrm{on}\, \partial\Omega\backslash\{O\}\}.$$

为简化以下结果的表述，我们采用如下约定：- 若 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^{\mathrm{out}\,\beta}_N$(旋度)，则令 $\tilde{\boldsymbol{u}}$, $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}$ 为 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 的元素，$\mathcal{S}^+_\varepsilon$满足 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}$；- 若 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}_{\mathrm{out}N}$(旋度)，则令 $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}$, $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$ 为 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 的元素，$\mathcal{S}^+_\mu$满足 旋度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} + \mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$。

我们在 $\nabla\mathfrak{S}_\varepsilon^+$, $\nabla\mathfrak{S}_\mu^+$ 上赋予范数 $\mathbf{V}_\beta^0(\Omega)$，它是这些有限维空间上的诸多范数之一。另一方面，对于 $\boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{u}}+\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}^+\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$,**(旋度)**，我们定义

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl})}:=(\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}+\|\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}+\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)})^{1/2},$$

而对于 $\boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{u}}+\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\in\mathscr{H}_{\text{外}N}$**(旋度)**，满足 **旋度**$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}+\mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$，我们记 e

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathscr{H}_N^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl})}:=(\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}+\|\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}+\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}+\|\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\mu}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)})^{1/2}.$$

赋予相应的范数后，前述所有空间都是希尔伯特空间。还要注意，我们有连续嵌入

$$\mathscr{H}_N^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl})\subset\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl})\subset\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$$

并且这些空间非空，因为它们包含 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})=\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})^3$。还要注意，我们既有 $\mathscr{H}_{\text{外}N}$**(旋度)** $\not\subset$ $\mathbf{H}_N$**(旋度)**，也有 $\mathbf{H}_N$**(旋度)** $\not\subset$ $\mathscr{H}_{\text{外}N}$**(旋度)**。

注 4.1。注意，若 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{H}_{\text{外}N}$ **(旋度)**，根据（*17*），我们有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}=-\operatorname{div}(\mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu})\in\mathrm{L}^2(\Omega).\tag{24}$$

4.1 电问题的定义

在 §4.7下文中，我们将说明极限吸收原理要求在空间 $\mathscr{H}_{\text{外}N}$ **(旋度)** 中寻找一个电场。因此，我们考虑与（1）-（2）相关联的以下电问题

$$\left|\begin{array}{ll}\text{Find } \boldsymbol{u}\in\mathscr{H}_N^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}) \text{ such that}\\ \mathbf{curl}\,(\mu^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u})-\omega^2\varepsilon\boldsymbol{u}=i\omega\boldsymbol{J} & \text{in } \Omega\backslash\{O\}\\ \boldsymbol{u}\times\nu=0 & \text{on } \partial\Omega\backslash\{O\}.\end{array}\right.\tag{25}$$

上文中，我们在 $\Omega\backslash\{O\}$ 内而非在 Ω 中写出这些方程，以允许原点处出现奇异行为。下一步是写出（25）的变分形式。我们假设 $\boldsymbol{J}$ 属于 $\mathbf{V}^0_{-\eta}(\Omega)$，其中 $\eta>0$，并且满足在 $\Omega\backslash\{O\}$ 中的散度 $\boldsymbol{J}=0$。注意，如果 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{H}_{\text{out}N}$（**旋度**），则关系 **旋度**$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}+\mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$ 意味着

$$\mathbf{curl}\,(\mu^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u})=\mathbf{curl}\,(\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}})\quad\text{ in }\Omega\backslash\{O\}.$$

利用这一点，我们考虑该问题

$$\left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{u}\in\mathscr{H}_N^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}) \text{ such that}\\ \displaystyle\int_\Omega\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx-\omega^2\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx=i\omega\int_\Omega\boldsymbol{J}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx,\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl}),\end{array}\right.\tag{26}$$

其中，对于 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{H}_{\text{外}N}$（**旋度**），$\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$.（**旋度**），我们令

$$\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx:=\int_\Omega\varepsilon\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx+\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\cdot\overline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx+\int_\Omega\varepsilon\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}}\,dx-\int_\Omega\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon})\,\overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}}\,dx.$$

不难证明，半双线性型

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx$$

对于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$,**(旋度)**，其定义良好，且在该空间中连续。然而，它不是厄米的。事实上，对于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$,**(旋度)**，我们有

$$\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx-\overline{\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{v}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}\,dx}=-\int_\Omega\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon})\overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}}\,dx+\int_\Omega\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}})\,dx=q_\varepsilon(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon},\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}).\tag{27}$$

注意，在（26）中，解和检验函数不属于同一空间。该型的意义由以下结果得以证明。

命题 4.2。 *(25)* 的每个解 (25) 都满足 (26)。反之，*(26)* 的每个解 (26) 都满足(25)。

证明。 由于 $\boldsymbol{\mathscr{C}}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\}) \subset \mathbf{H}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,**(旋度)**，(26) 的任意解都是 (25) 的解。现在我们来证明逆命题。为此，首先注意到，若 $\boldsymbol{u}$ 是 (25) 的解，则利用命题 8.10 （它保证 $\boldsymbol{\mathscr{C}}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})$ 在 $\{\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,**(旋度)** $|\, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon} = 0\}$ 中稠密），可知 $\boldsymbol{u}$ 满足

$$\int_\Omega \mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx - \omega^2 \int_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx = i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl}\,) \text{ such that } \mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon} = 0.$$

因此，只需证明26）对 $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi \in \nabla\mathfrak{S}_\varepsilon^+$成立。引入 $\varphi_n)_n$ ，它是 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\}$中的一列元素，且收敛于 φ ，在 $\mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega)$ 中。利用下面的引理 4.3 ，可写为

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx - \omega^2 \fint_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx \\
= \quad & -\omega^2 \fint_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\varphi}\,dx = \lim_{n\to+\infty} -\omega^2\int_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\varphi_n}\,dx = \lim_{n\to+\infty} i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\nabla\overline{\varphi_n}\,dx = i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx.
\end{aligned}$$

证明到此结束 □

引理 4.3。 设 $\boldsymbol{u}$ 是一个属于 $\mathbf{H}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,**(旋度)** 的场，且 $(\varphi_n)_n$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega|\{O\})$ 中的一列元素，收敛于某个 $\varphi \in \mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega)$。则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\varphi_n}\,dx = \fint_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\varphi}\,dx.$$

证明。 通过分部积分，我们得到

$$\int_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\varphi_n}\,dx = \int_\Omega \varepsilon\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\overline{\varphi_n}\,dx - \int_\Omega \mathrm{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon})\,\overline{\varphi_n}\,dx.$$

由于 $\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}) \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ 在 O 的某个邻域内消失（见 (17)），并且 $(\varphi_n)_n$ 在 $\mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega)$ 中收敛到 φ ，意味着 $(\nabla\varphi_n)_n$ 也在 $\mathrm{V}_\beta^0(\Omega)$ 中收敛到 $\nabla\varphi$ ，同时，对于任意给定的 $\delta > 0$，$(\varphi_n)_n$ 在 $\mathrm{L}^2(\Omega\backslash B(O,\delta))$ 中收敛到 φ ，因此我们得到了所需结果。 □

4.2 电问题的等价表述

对于所有 $\varphi \in \mathring{\mathrm{V}}_{-\beta}^1(\Omega)$，我们有 $\nabla\varphi \in \boldsymbol{\mathscr{H}}_{\mathrm{out}N}$ **(旋度)**。利用这一观察，我们推得 (26) 与$\omega = 0$ 具有无限维核。为处理这一问题，我们像处理 κ_ε 一样， κ_μ 在临界区间之外进行分析，并考虑无散条件。这引导我们引入以下空间

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta} &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl}\,) \,|\, \mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}) = 0 \text{ in } \Omega\backslash\{O\}\}, \\
\boldsymbol{\mathscr{X}}_N^{\mathrm{out}} &:= \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}_N^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}\,) \,|\, \mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}) = 0 \text{ in } \Omega\backslash\{O\}\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

我们分别赋予 $\mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,, $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}$ 以 $\mathbf{H}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,**(旋度)** 和 $\boldsymbol{\mathscr{H}}_{\mathrm{out}N}$ **(旋度)** 的范数。

注 4.4。 关于元素 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$, , 我们提出两点观察。

1) $\mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}) = 0$ 在 $\Omega|\{O\}$ 中的约束必须理解为

$$\int_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{\varphi}\,dx = 0, \qquad \forall\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\}).$$

因此，根据引理 4.3，我们推知，若 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,, 则有

$$\fint_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\overline{v}\,dx = 0, \qquad \forall v \in \mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega). \tag{29}$$

2) 如果 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon} \in \mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$,, 那么我们有

$$\mathrm{div}(\varepsilon\tilde{\boldsymbol{u}}) = -\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}) \in \mathrm{L}^2(\Omega). \tag{30}$$

通过分别将 $\mathscr{H}_{\mathrm{out}N}$(旋度)、$\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$、(旋度) 替换为 $\mathscr{X}_{\mathrm{out}N}$、$\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta}$, in (26) 中，我们得到如下问题

$$\left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{u}\in\mathscr{X}_N^{\mathrm{out}} \text{ such that}\\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx-\omega^2\fint_\Omega \varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx=i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx,\qquad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta}.\end{array}\right. \tag{31}$$

关于（26），注意到在（31）中，解与检验函数并不属于同一个空间。这一特征对于证明问题的适定性至关重要，而且我们尚无法消除这一特征（解释见注释 4.9 ）。此外，我们强调，在 $\mathscr{X}_N^{\mathrm{out}}$ 中，解所在的空间中，场及其旋度在原点处均具有奇异性。

命题 4.5. 假设 $\omega\neq 0$。

- 的每个解都(26)满足(31)。
- 假设*1-2* 成立。那么，方程(31) 的每一个解都满足方程 (26)。

证明。 为证明陈述的第一部分，需要说明每个解 $\boldsymbol{u}$ （26）都满足方程 $\mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{u})=0$在 $\Omega\backslash\{O\}$中。为此，取 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$ 属于（26），其中 $\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})$，并利用 $\mathrm{div}\boldsymbol{J}=0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$中。

第二部分的证明稍微复杂一些。假设 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}_N^{\mathrm{out}}$满足 (31)。由于$\mathscr{X}_{\mathrm{out}N}\subset\mathscr{H}_{\mathrm{out}N}$ (旋度)，只需证明变分恒等式 (31) 对于 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$、(旋度) 也成立。考虑某些 $\boldsymbol{v}=\tilde{\boldsymbol{v}}+\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}\in\mathbf{H}_N^{\mathrm{out},\beta}$、(旋度)，其中 $\tilde{\boldsymbol{v}}\in\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 且 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}\in\mathcal{S}_\varepsilon^+$。命题 8.4 的第一项保证函数 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ 具有分解。

$$\tilde{\boldsymbol{v}}=\nabla\varphi+\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta} \tag{32}$$

满足 $\varphi\in\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega)$ 且 $\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{X}_T(1)$，使得旋度 $\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$。由于 $\mathrm{div}(\varepsilon($旋度 $\boldsymbol{\zeta}+\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}))\in(\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$，定理 3.11 保证存在唯一的 $\phi\in\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$，使得

$$\langle\mathrm{A}_\varepsilon^{\mathrm{out}}\phi,\phi'\rangle=\fint_\Omega\varepsilon\nabla\phi\cdot\nabla\overline{\phi'}\,dx=\fint_\Omega\varepsilon(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}+\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon})\cdot\nabla\overline{\phi'}\,dx,\qquad\forall\phi'\in\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega).$$

现在，令 $\hat{}\boldsymbol{v}:=$旋度$\boldsymbol{\zeta}+\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}-\nabla\phi=\boldsymbol{v}-\nabla\varphi-\nabla\phi$。注意到 $\mathrm{div}(\varepsilon\hat{}\boldsymbol{v})=0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$中，我们推得 $\hat{}\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta}$。因此，可以将 $\hat{}\boldsymbol{v}$ 作为（31）中的检验函数。另一方面，利用（29）以及 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}=0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$这一事实，我们得到

$$\left\{\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_\Omega\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx&=&\displaystyle\int_\Omega\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx\\ \displaystyle\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx&=&\displaystyle\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx+\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\nabla(\varphi+\phi)}\,dx=\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx\\ \displaystyle\int_\Omega\boldsymbol{J}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx&=&\displaystyle\int_\Omega\boldsymbol{J}\cdot\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx.\end{array}\right.$$

这表明 $\boldsymbol{u}$ 满足（26），并结束了第二项的证明。 □

在本节的其余部分，我们将重点研究问题（31）。定义连续算子 $\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}},\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}:\mathscr{X}_{\mathrm{out}N}\to(\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta})^*$，使得对于 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}_{\mathrm{out}N},\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta}$，

$$\langle\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\int_\Omega\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx,\qquad\langle\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx. \tag{33}$$

最后，令 $\mathscr{A}_{\text{外部}N}(\omega):=\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}-\omega^2\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}$使得对于 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{X}_{\text{外部}N},\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta}$，

$$\langle\mathscr{A}_N^{\mathrm{out}}(\omega)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\int_\Omega\mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx-\omega^2\fint_\Omega\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx. \tag{34}$$

在深入探讨细节之前，请注意，对于 $\boldsymbol{u}$， $\boldsymbol{v} \in \mathscr{X}_{\text{外部}N}$，利用关系（24），我们得到

$$\langle \mathbb{A}_N^{\text{out}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \mu^{-1} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} \cdot \overline{\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{v}}}\, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\mu \nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu})\, \overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\mu}}\, dx. \tag{35}$$

另一方面，利用（29）、（30），对于 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}_{\text{out}N}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$，我们可以写成，

$$\langle \mathbb{K}_N^{\text{out}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \varepsilon \boldsymbol{u} \cdot \overline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\, dx = \int_\Omega \varepsilon \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \overline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\, dx + \int_\Omega \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon} \operatorname{div}(\varepsilon \nabla \overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}})\, dx. \tag{36}$$

因此，对于 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathscr{X}_{\text{out}N}$，我们得到

$$\langle \mathscr{A}_N^{\text{out}}(\omega) \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle - \overline{\langle \mathscr{A}_N^{\text{out}}(\omega) \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = -q_\mu(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\mu}) - \omega^2 q_\varepsilon(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}). \tag{37}$$

这是一个重要的恒等式。右边的各项正是分部积分两次后留下的项。对于 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$，它们表示滞留在尖端处的能量。其中一部分来自场的奇异性，另一部分来自场的旋度的奇异性。

4.3 $\mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$ 和 $\mathscr{X}_N^{\text{out}}$ 中的等价范数

本节旨在为 $\mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$ 和 $\mathscr{X}_{\text{out}N}$ 引入新的“更简单”的等价范数。首先，考虑空间 $\mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$。

命题 4.6。 假设 *1-2* 成立。存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N^{\text{out},\beta}. \tag{38}$$

因此，范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{\text{out},}{}_N{}^{\beta}}$（旋度）和 $\|$旋度 $\cdot\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}$ 在 $\mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$, 中等价。

证明。 设 $\boldsymbol{u}$ 是 $\mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$, 的一个元素。根据 $\mathbf{X}_N^{\text{out}\,\beta}$, 的定义，有 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}$ 其中$\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{V}^0_{-\beta}($ Ω) 且 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon} \in \mathcal{S}_\varepsilon^+$。利用命题 iii8.1 的第 8.1 条，可以将 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 分解为

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \nabla \varphi + \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\psi} \tag{39}$$

与 $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_T$(1)。注意到 $\mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\psi})$ =旋度 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$，且旋度 $\boldsymbol{\psi} \times \nu = 0$ 在 ∂ Ω\{O} 上成立，可得

$$\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{Z}_N^\beta := \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}^0_\beta(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,\ \boldsymbol{v} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega \backslash \{O\}\}. \tag{40}$$

因此，根据命题 8.9，我们得到 旋度 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$，并且有如下估计

$$\|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}. \tag{41}$$

此外，由于 div($\varepsilon \boldsymbol{u}$) $= 0$ 在 Ω\{O} 中成立， unerquicklich

$$\langle \mathrm{A}_\varepsilon^{\text{out}}(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon} + \varphi), \phi' \rangle = \oint_\Omega \varepsilon \nabla(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon} + \varphi) \cdot \nabla \overline{\phi'}\, dx = -\int_\Omega \varepsilon\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\psi} \cdot \nabla \overline{\phi'}\, dx, \qquad \forall \phi' \in \mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega).$$

利用 $\mathrm{A}_\varepsilon^{\text{out}}$: $\quad \mathring{\mathrm{V}}^{\text{out}}_\beta(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$ 是一个同构（定理 3.11），我们得到

$$\|\nabla \varphi\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}.$$

通过结合（39）、（41）以及前面的估计，我们得到所需结果。 □

现在，我们将注意力转向 $\mathscr{X}_{\text{出}N}$。

命题 4.7。 假设假设条件 *1-2* 成立。存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}+\|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}\le C\,\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)},\quad \forall \boldsymbol{u}\in \boldsymbol{\mathscr{X}}^{\mathrm{out}}_N \ \textit{with}\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}+\mu\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}. \tag{42}$$

因此，在 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}$ 中，映射 $\boldsymbol{u}\mapsto\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}$ 是一个范数，且与 $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}N}}$ (旋度)等价。

证明。 由于有 $\boldsymbol{\mathscr{X}}^{\mathrm{out}}_N\subset \mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_N$，由命题 4.6 可知，只需证明我们有

$$\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}\le C\,\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)},\qquad \forall \boldsymbol{u}\in \boldsymbol{\mathscr{X}}^{\mathrm{out}}_N. \tag{43}$$

考虑某个 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}$。我们有

$$\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}+\mu\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}=\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}+\mu\nabla(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}-c_{\boldsymbol{u}})\qquad \text{with}\qquad c_{\boldsymbol{u}}:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}.$$

在 $\partial\Omega\backslash\{O\}$ 上的关系 $\boldsymbol{u}\times\nu=0$ 蕴含**旋度** $\boldsymbol{u}\cdot\nu=0$ 在 $\partial\Omega\backslash\{O\}$上。此外，由于 **div(旋度** $\boldsymbol{u}$**)** $=0$，我们推得 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}$ 满足

$$\langle \mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{\mu}(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}-c_{\boldsymbol{u}}),\phi'\rangle=\int_\Omega \mu\nabla(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}-c_{\boldsymbol{u}})\cdot\nabla\overline{\phi'}\,dx=-\int_\Omega \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\overline{\phi'}\,dx,\qquad \forall\phi'\in\mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega).$$

注意 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}-c_{\boldsymbol{u}}$ 确实是 $\mathcal{V}^{\mathrm{out}}_{\beta}(\Omega)$ 的一个元素，因为 $1\in\mathrm{V}^1_{-\gamma}(\Omega)$ 对所有 $\gamma<1/2$ 都成立，且有 $\beta<1/2$。利用 $\mathrm{A}^{\mathrm{out}}_{\mu}$: $\mathcal{V}^{\mathrm{out}}_{\beta}(\Omega)\to(\mathcal{V}^1_{\beta}(\Omega))^*$ 是一个同构（定理3.11），我们得到

$$|c_{\boldsymbol{u}}|+\|\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\|_{\mathrm{V}^1_{\beta}(\Omega)}\le C\,\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}$$

其中，此处及下文中， C 与 $\boldsymbol{u}$无关。这给出

$$\|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}\le C\,\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}.$$

并将此估计代入

$$\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}\le C(\|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}+\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)})\le C(\|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}+\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)})$$

最终得到（43）。 □

4.4 主部分析

本节中，我们研究在（ $\mathbb{A}^{\mathrm{out}}_N=\mathscr{A}^{\mathrm{out}}_N$33）中定义的算子 $\mathbb{T}$。我们强调，在下一个命题中构造的算子是分析电问题的关键要素。

命题 4.8。 假设条件*1-2* 成立。存在一个连续算子 $\mathbb{T}$:$\mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_N\to\boldsymbol{\mathscr{X}}_{,\mathrm{out}N}$，使得

$$\langle\mathbb{A}^{\mathrm{out}}_N\circ\mathbb{T}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\int_\Omega r^{2\beta}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx,\qquad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_N. \tag{44}$$

注 4.9。 请注意，若考虑在 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}\subset\mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_N$ 中取检验函数的变分形式（*31*），则需要处理一个算子 $\tilde{\mathbb{A}}^{\mathrm{out}}_N$: $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}_N}\to(\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N})^*$。于是，要证明 $\tilde{\mathbb{A}}^{\mathrm{out}}_N$ 的可逆性，就需要构造某个连续算子 $\tilde{\mathbb{T}}$: $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}\to\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}$，使得 $\langle\tilde{\mathbb{A}}^{\mathrm{out}}_N\circ\tilde{\mathbb{T}}\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}$ 中是强制的。但是 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N}$ 的范数比 $\mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_N$ 的范数限制更严，且 ˜我们不知道能否找到这样的 $\mathbb{T}$。

证明。 选取一些 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta}$，。我们分三步进行。

步骤 1. 算子 $\mathrm{A}_\mu^{\mathrm{out}}$: $\mathcal{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega) \to (\mathcal{V}_\beta^1(\Omega))^*$ 是一个同构。因此，存在唯一的$\varphi = \tilde{\varphi} + \mathfrak{s}_\mu^+ \in \mathcal{V}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega)$，$\tilde{\varphi} \in \mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)$，$\mathfrak{s}_\mu^+ \in \mathcal{S}_\mu^+$，使得

$$\langle \mathrm{A}_\mu^{\mathrm{out}} \varphi, \varphi' \rangle = \fint_\Omega \mu \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx = -\int_\Omega \mu\, r^{2\beta} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \cdot \nabla\overline{\phi'}\, dx, \qquad \forall \phi' \in \mathcal{V}_\beta^1(\Omega).$$

此外，我们有如下估计

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathrm{V}_{-\beta}^1(\Omega)} + \|\nabla \mathfrak{s}_\mu^+\|_{\mathbf{V}_\beta^0(\Omega)} \le C \, \|r^{2\beta} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_{-\beta}^0(\Omega)} = C \, \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_\beta^0(\Omega)}. \tag{45}$$

步骤 2. 定义函数 $\boldsymbol{F} := \mu(\nabla\varphi + r^{2\beta}$**旋度** $\boldsymbol{u}) \in \mathbf{V}_\beta^0(\Omega)$。有

$$\left| \begin{array}{rcl} \operatorname{div} \boldsymbol{F} & = & 0 \quad \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{F} \cdot \nu & = & 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

由于 $\beta \in (0; 1/2)$，命题 8.5 保证存在唯一的 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{Z}_N^\beta$ (参见 (40))，用于定义 $\mathbf{Z}_N^\beta$)，使得

$$\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{F} = \mu(\nabla\varphi + r^{2\beta} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}).$$

此外，命题 8.9 确保 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{V}_{-\beta}^0(\Omega)$。

步骤 3. 由于 $\mathrm{A}_\varepsilon^{\mathrm{out}}$: $\mathring{\mathrm{V}}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega))^*$ 是一个同构，存在唯一的 $\phi = \tilde{\phi} + \mathfrak{s}_\varepsilon^+ \in \mathring{\mathrm{V}}_\beta^{\mathrm{out}}(\Omega)$，$\tilde{\phi} \in \mathring{\mathrm{V}}_{-\beta}^1(\Omega)$，$\mathfrak{s}_\varepsilon^+ \in \mathcal{S}_\varepsilon^+$，使得

$$\langle \mathrm{A}_\varepsilon^{\mathrm{out}} \phi, \phi' \rangle = \fint_\Omega \varepsilon \nabla\phi \cdot \nabla\overline{\phi'}\, dx = \int_\Omega \varepsilon\, \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla\overline{\phi'}\, dx, \qquad \forall \phi' \in \mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega).$$

最后，我们令 $\mathbb{T}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\zeta} - \nabla\phi$。可以验证，$\mathbb{T}\boldsymbol{u}$ 属于 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\text{外部}N}$。此外，我们有**旋度**$(\mathbb{T}\boldsymbol{u})$ $= \boldsymbol{\psi}_{\mathbb{T}(\boldsymbol{u})} + \mu\nabla\mathfrak{s}_{\mathbb{T}(\boldsymbol{u})}$，$\mu$ 其中

$$\boldsymbol{\psi}_{\mathbb{T}(\boldsymbol{u})} = \mu(\nabla\tilde{\varphi} + r^{2\beta} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}), \qquad \mathfrak{s}_{\mathbb{T}(\boldsymbol{u}),\mu} = \mathfrak{s}_\mu^+. \tag{46}$$

利用（45），我们得到

$$\|\boldsymbol{\psi}_{\mathbb{T}(\boldsymbol{u})}\|_{\mathbf{V}_{-\beta}^0(\Omega)} \le C \, \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}_\beta^0(\Omega)}.$$

根据命题 4.7，这表明 $\mathbb{T}$： $\mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta} \to \boldsymbol{\mathcal{X}}_{,\,\mathrm{out}N}$ 是连续的。此外，利用（33）、（46），我们得到

$$\langle \mathbb{A}_N^{\mathrm{out}} \circ \mathbb{T}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \mu^{-1} \boldsymbol{\psi}_{\mathbb{T}\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\boldsymbol{v}}\, dx = \int_\Omega r^{2\beta} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\boldsymbol{v}}\, dx, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta},$$

这只不过是所需的恒等式（44）。 □

定理 4.10。 假设条件*1*-*2* 成立。那么算子 $\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}$: $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathrm{out}N} \to (\mathbf{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta},)^*$是一个同构。

证明。设 $\mathbb{T}$ 是命题 4.8 中的算子。由恒等式 (44)、Lax-Milgram 定理以及命题 4.6 的结果，我们推得 $\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}} \circ \mathbb{T} : \mathrm{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta} \to , (\mathrm{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta},)^*$ 是同构。这保证了 $\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}$ 是满射。剩下需要证明 $\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}$ 是单射。设 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{\mathcal{X}}\mathrm{out}_N$ 的一个元素，使得对所有 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{X}_N^{\mathrm{out}\,\beta},$，都有 $\mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} = 0$。根据 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ out_N 的定义，我们有 $\mathrm{curl}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} + \mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$。在关系式 (37) 中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$，令 $\omega = 0$，并利用引理 3.10，我们推得 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu} = 0$。由 (35)，这意味着

$$0 = \langle \mathbb{A}_N^{\mathrm{out}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \mu^{-1} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} \cdot \overline{\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{v}}}\, dx = \overline{\langle \mathbb{A}_N^{\mathrm{out}} \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}_N^{\mathrm{out}}.$$

在前述关系中取 $\boldsymbol{v} = \mathbb{T}\boldsymbol{u}$，根据（44），可得 **旋度** $\boldsymbol{u} = 0$，因此 $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} = 0$。由命题 4.7，我们推得 $\boldsymbol{u} \equiv 0$。 □

4.5 紧性结果

现在我们将注意力集中在算子 $\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}$，其定义见（33）。

定理 4.11. 假设 *1-2* 成立。则 $\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}\colon \boldsymbol{\mathscr{X}}_{\mathrm{out}N} \to (\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta},)^*$ 是紧的。证明。 利用 (36)，我们得到如下估计

$$\|\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}\boldsymbol{u}\|_{(\mathbf{X}_N^{\mathrm{out},\beta})^*} \le C(\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|_{\mathbf{V}^1_{\beta}(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{X}}_N^{\mathrm{out}}, \tag{47}$$

其中， $C>0$ 与 $\boldsymbol{u}$相互独立。现在考虑由$\boldsymbol{u}_n$ 构成的有界元素序列 $\boldsymbol{\mathscr{X}}\mathrm{out}_N$。根据 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_N^{\mathrm{out}}$的定义，对于所有 $n\in\mathbb{N}$、 $\tilde{\boldsymbol{u}}_n \in \mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$以及满足$\boldsymbol{u}_n = \tilde{\boldsymbol{u}}_n + \mathfrak{s}_n$的 $\mathfrak{s}_n \in \mathcal{S}_\varepsilon^+$，可以引入相应的量。序列$(\mathfrak{s}_n)_n$和$(\tilde{\boldsymbol{u}}_n)_n$ 分别在 $\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)$ 和 $\mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中有界。由于 $\mathcal{S}_\varepsilon^+$是有限维的，因此可以从$(\mathfrak{s}_n)_n$中提取一个子列，仍记为$(\mathfrak{s}_n)_n$，使其在 $\mathcal{S}_\varepsilon^+$中收敛。因此，为了证明我们的结论，根据（47），只需证明存在一个子序列，使得$(\tilde{\boldsymbol{u}}_n)_n$ 在 $\mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中收敛。根据命题 8.4，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，向量场$\tilde{\boldsymbol{u}}_n$ 可分解为

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_n = \nabla\varphi_n + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}_n,$$

其中 $\varphi_n \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega)$，且 $\boldsymbol{\psi}_n \in \mathrm{X}_T(1)$ 满足 $\boldsymbol{\psi}_n \in \mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$（命题 8.7）。鉴于$\nabla\varphi_n\times\nu = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，且 $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi}_n = \operatorname{curl}\boldsymbol{u}_n \in \mathrm{V}^0_\beta(\Omega)$，我们推得 $\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi}_n \in \mathrm{Z}_N^\beta$（见 (40)）。由于假设 $\beta\in(0;1/2)$，利用命题 8.9 可得，$(\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi_n})_n$ 收敛；取一个子列（仍记作 $(\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi_n})_n$）后，它在 $\mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中收敛。此外，我们知道 $\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{u}_n) = 0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$ 中。这意味着

$$\langle \mathrm{A}_\varepsilon^{\mathrm{out}}\varphi_n, \varphi'\rangle = \int_\Omega \varepsilon\nabla\varphi_n\cdot\nabla\overline{\varphi'}\,dx = -\int_\Omega \varepsilon(\nabla\mathfrak{s}_n + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}_n)\cdot\nabla\overline{\varphi'}\,dx, \qquad \forall\varphi'\in\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega).$$

注意到上文右端出现的泛函在 $(\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$ 中收敛，并利用 $\mathrm{A}_\varepsilon^{\mathrm{out}}$ 是一个同构，可推得 $(\varphi_n)_n$ 在 $\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\beta}(\Omega)$ 中收敛。由此得到所需结果：$(\tilde{\boldsymbol{u}}_n)_n$ 收敛；取一个子列后，它在 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中收敛。

□

4.6 电问题的主要结果

最后，我们来讨论 $\mathscr{A}_{\mathrm{out}N}(\omega) = \mathbb{A}_N^{\mathrm{out}} - \omega^2\mathbb{K}_N^{\mathrm{out}}$在（34）中引入的算子的性质。结合定理 4.10、4.11 和解析 Fredholm 定理（注意，根据定理 $\mathscr{A}_N^{\mathrm{out}}(0) = \mathbb{A}_N^{\mathrm{out}}$，它是单射），我们得到以下结果。4.10

定理 4.12。 假设*1-2* 成立。

- 算子 $\mathscr{A}_{\mathrm{out}N}(\omega)$ 对所有 $\omega\in\mathbb{R}$均为指标为零的 *Fredholm* 算子。
- $\mathscr{A}_{\mathrm{out}N}(\omega)$ 对所有 $\omega\in\mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 均为同构，其中 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 是一个仅能在无穷远处聚集的离散集。

本段其余部分将研究 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$，即使得 $\omega\in\mathbb{R}$ 的$\mathscr{A}_N^{\mathrm{out}}(\omega)$不具单射性的取值集合。

命题 4.13. 假设*1-2* 成立。定理 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 中出现的集合 *4.12*与所选的 β 满足 *(23)* 无关。

证明。设 $\boldsymbol{u}$是某个满足 (23) 的 β所对应的核 $\mathscr{A}\mathrm{out}_N(\omega)$ 中的一个元素。那么我们有 $\mathscr{A}\mathrm{out}_N(\omega)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u} - \mathscr{A}\mathrm{out}_N(\omega)\boldsymbol{u},\boldsymbol{u} = 0$，根据 (37) 可得

$$q_\mu(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu},\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}) + \omega^2 q_\varepsilon(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon},\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}) = 0.$$

鉴于 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u}、\varepsilon}\in\mathcal{S}_\varepsilon^+$ 和 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u}、\mu}\in\mathcal{S}_\mu^+$，我们推得 $q_\varepsilon(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon},\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}) = q_\mu(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu},\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}) = 0$。随后，引理 3.10 保证 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon} = \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu} = 0$。这表明 $\boldsymbol{u}$ 属于 $\mathrm{X}_N(\varepsilon)$，并满足方程 旋度 $(\mu^{-1}$旋度 $\boldsymbol{u}) = \omega^2\varepsilon\boldsymbol{u}$。我们推得 μ^{-1}旋度 $\boldsymbol{u}\in\mathrm{X}_T(\mu)$。由命题 8.8 可知，对于所有满足 (23) 的 β，均有 $\boldsymbol{u}$、旋度 $\boldsymbol{u}\in\mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$。因此，对于所有满足 (23) 的 β，均有 $\boldsymbol{u}\in$核 $\mathscr{A}\mathrm{out}_N(\omega)$。

□

同样地，我们有如下结果。

命题 4.14。 假设条件 *1-2* 成立，且设 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$。方程 (31)的解与 β 满足 *(23)* 的选择无关。

证明。 设 $\beta_1 < \beta_2$ 满足 (23)。对于 $j = 1,\ 2$，记为

$\boldsymbol{u}_j$ 方程 (31)$\mathscr{A}_{\text{外}N,\ j}(\omega)$ 在 (34)$\boldsymbol{\mathscr{X}}_N^{\text{out}}$
中定义的算子，j 在 (28)中引入的空间

对 $\beta = \beta_j$。由于 $\beta_1 < \beta_2$，我们有 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\text{外}N,\ 2} \subset \boldsymbol{\mathscr{X}}_{\text{外}N,\ 1}$。因此，函数 $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$属于 $\boldsymbol{\mathscr{X}}_{\text{外}N,\ 1}$。

⋆ 当 $\omega \neq 0$ 时，利用命题 4.2 和 4.5，我们发现 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 都满足方程 (25)，其意义为在 $\Omega\backslash\{O\}$ 上的分布。这意味着 $\boldsymbol{e}$ 是 $\ker\ \mathscr{A}_{\text{外}N,\ 1}(\omega)$ 的一个元素。由于 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$，我们得到 $\boldsymbol{e} \equiv 0$，因此 $\boldsymbol{u}_1 \equiv \boldsymbol{u}_2$。

⋆ 当 $\omega = 0$时，我们按照定理4.10证明末尾的做法。首先，注意到$\langle \mathscr{A}_{\text{out}N,1}(0)\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle = 0$，根据（37），可得:

$$0 = \langle \mathscr{A}_{N,1}^{\text{out}}(0)\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle - \overline{\langle \mathscr{A}_{N,1}^{\text{out}}(0)\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}\rangle} = -q_\mu(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{e},\mu}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{e},\mu}).$$

由引理 3.10，可得 $\mathfrak{s}_{\boldsymbol{e},\ \mu} \equiv 0$ 因此

$$\langle \mathscr{A}_{N,1}^{\text{out}}(0)\boldsymbol{e}, \boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \mu^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{e}} \cdot \overline{\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{v}}}\, dx = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathscr{X}}_{N,1}^{\text{out}}.$$

在前述关系中取 $\boldsymbol{v} = \mathbb{T}\boldsymbol{e}$，其中 $\mathbb{T}$ 是由命题 4.8 利用 $\beta = \beta_1$构造的算子，我们得到 $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{e}} = 0$。由命题 4.7，可推得 $\boldsymbol{e} \equiv 0$，因此 $\boldsymbol{u}_1 \equiv \boldsymbol{u}_2$。 □

综合命题 4.5 和定理 4.12，我们可以陈述本节的主要结果。

定理 4.15。 假设条件 *1-2* 成立， $\boldsymbol{J} \in \mathbf{V}_{-\eta}^0(\Omega)$ 对某个 $\eta > 0$ 且 散度 $\boldsymbol{J} = 0$属于 Ω。

• 对于所有 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$，其中 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 出现在定理 *4.12*中，问题 (31) （或等价地，当 $\omega \neq 0$时）存 (26)在唯一解。

• 当 $\omega \in \mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 问题 (31) （或等价地 (26)）在 *Fredholm* 意义下适定。此外，它的核是有限维的，且与满足（ β 的 *23*）的 β 无关。

注4.16。 上文可以去掉假设 散度 $\boldsymbol{J} = 0$ 在 Ω|*{O}* 中，并且只需假设 $\boldsymbol{J} \in \mathbf{V}_{-\eta}^0(\Omega)$。在这种情况下，为研究电问题，第一步是引入某个势函数 $p \in \mathring{\mathrm{V}}_\beta^{\text{out}}(\Omega)$， $\beta \in (0;\min(\beta_D, \eta))$，使得 $\mathrm{A}_\varepsilon^{\text{out}} p = -(i\omega)^{-1}$散度 $\boldsymbol{J} \in (\mathring{\mathrm{V}}_\beta^1(\Omega))^*$，然后处理 $\boldsymbol{E}_0 :\ = \boldsymbol{E} - \nabla p$。

截至目前，我们已经证明，给定的向外传播奇异性空间 $\mathcal{S}_\varepsilon^+$和 $\mathcal{S}_\mu^+$能够构成一个函数框架，使电问题适定。另一方面， $\mathcal{S}_\varepsilon^+$的选择有无穷多个 $\mathcal{S}_\mu^+$ （见注 3.9），而它们都为麦克斯韦问题提供了不同的函数框架。下一节的目标是解释如何确定与极限吸收原理相一致的函数框架。

4.7 极限吸收原理

设 $\boldsymbol{J}$ 如定理 4.15 所述。为了模拟材料的耗散，对于 $\delta > 0$，引入函数 $\varepsilon_\delta := \varepsilon + i\delta$ 和 $\mu_\delta := \mu + i\delta$。记 $\mathrm{A}_{\varepsilon_\delta} : \mathrm{H}_0^1(\Omega) \to (\mathrm{H}_0^1(\Omega))^*$、$\mathrm{A}_{\mu_\delta} : \mathrm{H}_\#^1(\Omega) \to (\mathrm{H}_\#^1(\Omega))^*$ 为算子，它们由 (6)、(7) 中的 A_ε、A_μ 定义，其中 ε、 μ 分别替换为 ε_δ、 μ_δ。由于该.....

ε_δ、 μ_δ 的虚部在 Ω 中为正，Lax-Milgram 定理保证对于所有 $\delta>0$，$\mathrm{A}_{\varepsilon_\delta}$、$\mathrm{A}_{\mu_\delta}$ 都是同构。此外，它还保证对于所有 $\omega\in\mathbb{R}$，该问题

$$\left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{u}_\delta\in\mathbf{X}_N(\varepsilon_\delta) \text{ such that}\\ \mathbf{curl}\,(\mu_\delta^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_\delta)-\omega^2\varepsilon_\delta\boldsymbol{u}_\delta=i\omega\boldsymbol{J}\quad \text{in } \Omega\end{array}\right. \tag{48}$$

存在唯一解。粗略地说，我们的目标是证明：如果 $\mathcal{S}_\varepsilon^+$、 $\mathcal{S}_\mu^+$ 在（21）中所选取的空间使标量问题满足极限吸收原理，那么（$\boldsymbol{u}_\delta$）$_\delta$ 就会收敛到（31）的解。换言之，在框架（31）下表述的电问题满足极限吸收原理。下面将对此作更精确的说明。

A假设 3。 假设假设 *1-2* 成立。设 $\mathcal{S}_\varepsilon^+,\mathcal{S}_\mu^+$ 满足以下条件 *at*

- *if* $(f_\delta)_{\delta>0}$ *converges to* f *in* $(\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*\subset(\mathrm{H}^1_0(\Omega))^*$, *then* $\lim\limits_{\delta\to0^+}\|(\mathrm{A}_{\varepsilon_\delta})^{-1}f_\delta-(\mathrm{A}_\varepsilon^{\mathrm{out}})^{-1}f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)}=0$;
- *if* $(f_\delta)_{\delta>0}$ *converges to* f *in* $(\mathcal{V}^1_\beta(\Omega))^*\subset(\mathrm{H}^1_\#(\Omega))^*$, *then* $\lim\limits_{\delta\to0^+}\|(\mathrm{A}_{\mu_\delta})^{-1}f_\delta-(\mathrm{A}_\mu^{\mathrm{out}})^{-1}f\|_{\mathrm{V}^1_\beta(\Omega)}=0$.

请注意，前述假设要求通过极限吸收原理为标量问题建立的框架满足Mandelstam辐射原理。一般而言，这种情况似乎大多数时候都会发生，但在某些罕见情形下也可能不成立。在文献 [45, 44], 中，作者给出了涉及无界区域内椭圆型偏微分方程的问题实例，在这些问题中，两种原理在所谓的截止频率处相互矛盾。在我们的情形下，可以证明（见 [57, 第 2]章），前述假设是否成立取决于 $\mathscr{L}_{\varepsilon_\delta}$、 $\mathscr{L}_{\mu_\delta}$的谱、特征函数和广义特征函数的行为，其中梅林符号定义为 $\mathscr{L}_\varepsilon$ ，$\mathscr{L}_\mu$ 在（10）、（11）中将 ε、 μ 替换为 ε_δ、 μ_δ。对于圆形锥尖（12）这一特例，文献 [57, 第 2] 章证明，除一组离散的对比度外，假设 3 均成立。

本节的主要结果由以下定理给出，该定理证明了问题(25)的物理相关性。

定理 4.17。 假设假设条件 *1-2-3* 成立， $\boldsymbol{J}$ 与定理 *4.15* 中的定义相同，且 $\omega\in\mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$，其中 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 定义见定理 *4.12*。我们有

$$\lim_{\delta\to0^+}\|\boldsymbol{u}_\delta-\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}+\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_\delta-\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}=0$$

其中 $\boldsymbol{u}_\delta$， $\boldsymbol{u}$ 分别表示方程（*48*）、（*25*）的解。

前一个定理的证明主要基于以下命题。

命题 *4.18.* 假设假设 *1-2-3* 成立。设 $(\boldsymbol{u}_\delta)_\delta$ 是 $X_N(\varepsilon_\delta)$（分别为 $X_T(\mu_\delta)$）中的一个元素序列，使得 *(*旋度 $\boldsymbol{u}_\delta)_\delta$ 在 $V^0_\beta(\Omega)$ 中有界。那么，经过选取一个子列，$(\boldsymbol{u}_\delta)_\delta$ 在 $V^0_\beta(\Omega)$ 中收敛于 $\nabla\mathcal{S}_\varepsilon^+\oplus V^0_{-\beta}($ *Ω)*（分别为 $\nabla\mathcal{S}_\mu^+\oplus V^0_{-\beta}(\Omega)$）中的一个元素，当 $\delta\to0^+$ 时。

证明。 设 $(\boldsymbol{u}_\delta)_{\delta>0}$ 是 $\mathbf{X}_N(\varepsilon_\delta)$ 中的一个元素序列，使得 **(旋度** $\boldsymbol{u}_\delta)_\delta$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中有界。根据命题 *iii* 的第) 项，对于所有 $\delta>0$，我们有如下分解

$$\boldsymbol{u}_\delta=\nabla\varphi_\delta+\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}_\delta \tag{49}$$

其中 $\varphi_\delta\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi}_\delta\in\mathbf{X}_T(1)$。此外，还有 **旋度** $\boldsymbol{\psi}_\delta\in\mathbf{Z}^\beta_N$（该空间的定义见（40））。但是，命题 8.9 保证，在 $\mathbf{Z}^\beta_N$ 中， $\|$**旋度** $\cdot\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}$ 是一个范数，与自然范数等价，并且 $\mathbf{Z}^\beta_N$ 紧嵌入于 $\mathbf{V}^0_{-\beta}$ (Ω)。由此我们推断，取一个子序列后，**(旋度** $\boldsymbol{\psi}_\delta)_\delta$ 在 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中收敛，当 $\delta\to0^+$ 时。

由于我们有 $\mathrm{div}(\varepsilon_\delta\,\boldsymbol{u}_\delta)=0\,\mathrm{in}\,\Omega$，因此可推出 $\mathrm{A}_{\varepsilon_\delta}\varphi_\delta=-\mathrm{div}(\varepsilon_\delta$ **旋度** $\boldsymbol{\psi}_\delta)$。另一方面，**旋度** $\boldsymbol{\psi}_\delta\in\mathbf{V}^0_{-\beta}$ (Ω)这一事实意味着 $\mathrm{div}(\varepsilon_\delta$ **旋度** $\boldsymbol{\psi}_\delta)\in(\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$。此外，

由于 (旋度 $\boldsymbol{\psi}_\delta)_\delta$ 在 $\mathrm{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中收敛，因此 (div(ε_δ 旋度 $\boldsymbol{\psi}_\delta$))$_\delta$ 在 $(\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega))^*$ 中收敛。由此，根据假设 3，我们推知存在一个子列，使得 $(\varphi_\delta)_\delta$ 在 $\mathring{\mathrm{V}}^1_\beta(\Omega)$ 中收敛到 $\mathring{\mathrm{V}}^{\mathrm{out}}_\beta(\Omega)$ 的一个元素。结合 (49)，即可得到所需结果。对于 $\mathrm{X}_T(\mu_\delta)$ 中元素组成的有界序列，证明类似。

□

定理的证明 *4.17*。 设（δ_n）$_n$ 是一个收敛于零的正数序列，当$n \to +\infty$时。记 $\varepsilon_n = \varepsilon + i\delta_n$, $\mu_n = \mu + i\delta_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。记 $\boldsymbol{u}_n$ 为对 48的解，其中 $\delta = \delta_n$。我们分两步进行。首先，假设（**旋度** $\boldsymbol{u}_n$）$_n$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中有界，证明所需结果。然后证明这一假设确实成立。

步骤 1。 假设（**旋度** $\boldsymbol{u}_n$）$_n$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中有界。根据前一个命题，我们知道，取一个子序列后，（$\boldsymbol{u}_n$）$_n$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中收敛于 $\boldsymbol{u}$ 中的一个元素 $\nabla\mathcal{S}^+_\varepsilon \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$。特别地，这意味着（$\boldsymbol{u}_n$）$_n$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中有界。接下来，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们定义向量场 $\boldsymbol{v}_n := \mu_n^{-1}$**旋度** $\boldsymbol{u}_n$。在 $\Omega\backslash\{O\}$ 中有 散度$(\mu_n \boldsymbol{v}_n) = 0$，并且在 $\partial\Omega\backslash\{O\}$上有 $\mu_n \boldsymbol{v}_n \cdot \nu = 0$。此外，注意到

$$\mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}_n = \omega^2 \varepsilon_n \boldsymbol{u}_n + i\omega \boldsymbol{J} \quad \text{in } \Omega\backslash\{O\}, \tag{50}$$

我们得出， $\boldsymbol{v}_n \in \mathbf{X}_T(\mu_n)$，并且 **(旋度** $\boldsymbol{v}_n)_n$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中有界。再次应用前面的命题，我们推得 (**旋度** $\boldsymbol{u}_n)_n$ 在 $\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)$ 中收敛于 $\mu^{-1}\nabla\mathcal{S}^+_\mu \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 中的一个元素，而该元素恰好就是 **旋度** $\boldsymbol{u}$ （利用 $\Omega\backslash\{O\}$ 上分布意义下的收敛性来证明这一性质）。因此，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} + \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} - \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} = 0$$

并通过取（50）中的极限（同样是在 Ω 的分布意义下$\backslash\{O\}$），我们得到 et

$$\mathbf{curl}\,(\mu^{-1}\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}) - \omega^2\varepsilon\boldsymbol{u} = i\omega\boldsymbol{J} \quad \text{in } \Omega\backslash\{O\}.$$

这尤其意味着 $\boldsymbol{u}$ 属于 $\boldsymbol{\mathscr{X}}^{\mathrm{out}}_N$。鉴于 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$，这表明 $\boldsymbol{u}$ 是（31）的解。因此，我们得到了所需的结果。

步骤 2. 假设存在一个解的序列 $(\boldsymbol{u}_n)_n$ ，其满足 (48)，并与某个趋于零的序列 $(\delta_n)_n$ 相关联，使得 $\|$**旋度**$\boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} \to +\infty$ 当 $n \to +\infty$ 时。考虑序列 $(\boldsymbol{u}_n/\|$**旋度**$\boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)})_n$ 并利用第一步中证明的结果，我们便得到矛盾。

□

5 磁学问题的新框架

在本节中，我们提供一个适用的框架来研究当对比参数 κ_ε， κ_μ 满足假设 1时的磁问题。该过程与上文针对电场所做的类似。因此，我们不再给出详细步骤，而仅陈述主要结果。

对于 β 满足（23），我们定义这些空间

$$\mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl}) := \{\boldsymbol{u} \in \nabla\mathcal{S}^+_\mu \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega) \,|\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\beta(\Omega)\}$$
$$\boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}) := \{\boldsymbol{u} \in \nabla\mathcal{S}^+_\mu \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega) \,|\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \in \varepsilon\nabla\mathcal{S}^+_\varepsilon \oplus \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)\}.$$

对于 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\mu} \in \mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}$**(旋度)**，我们设定

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl})} := (\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\mu}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} + \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)})^{1/2}$$

而对于 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\mu} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}^{\text{外}}$**(旋度)**，使得 **旋度**$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} + \varepsilon\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}$，我们记为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl})} := (\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\mu}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)} + \|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|^2_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla\mathfrak{s}^+_{\boldsymbol{u},\varepsilon}\|^2_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)})^{1/2}.$$

我们采用以下约定:
- 如果 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}$（**旋度**），令 $\tilde{\boldsymbol{u}}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$ 为 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 的元素，$\mathcal{S}^+_\mu$ 使得 $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}$; - 如果 $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}_{\mathrm{out}}$（**旋度**），令 $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}$ 为 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 的元素，$\mathcal{S}^+_\varepsilon$ 使得 **旋度** $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} + \varepsilon \nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}$。

5.1 磁问题的定义

关于电问题所做的工作，并利用磁场 $\boldsymbol{H}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 通过（1）相互关联的事实，我们需要在 $\boldsymbol{H}$ 中寻找 $\boldsymbol{\mathscr{H}}_{\mathrm{out}}$（**旋度**）。更确切地说，我们考虑这个问题

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Find } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}) \text{ such that} & \\ \mathbf{curl}\,(\varepsilon^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}) - \omega^2\mu\boldsymbol{u} = \mathbf{curl}\,(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}) & \text{in } \Omega\backslash\{O\} \\ \qquad\qquad \mu\boldsymbol{u}\cdot\nu = 0 & \text{on } \partial\Omega\backslash\{O\}. \end{array}\right. \tag{51}$$

这次我们假设 $\boldsymbol{J}$ 属于 $\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$，其中 β 满足 (23)。然后我们考虑变分问题

$$\left|\begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}) \text{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx - \omega^2 \fint_\Omega \mu\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\,\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl}), \end{array}\right. \tag{52}$$

其中，项 $\fint_\Omega \mu\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,dx$ 定义为

$$\fint_\Omega \mu\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx := \int_\Omega \mu\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\overline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx + \int_\Omega \mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\cdot\overline{\tilde{\boldsymbol{v}}}\,dx + \int_\Omega \mu\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\mu}}\,dx - \int_\Omega \mathrm{div}(\mu\nabla\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu})\,\overline{\mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\mu}}\,dx.$$

通过采用命题 4.2 的证明中的相同方法，我们得到

命题 5.1。 方程 (51) 的每个解都满足 (52)。反过来，方程 (52) 的每个解都满足(51)。

5.2 磁场的等价表述

为考虑无散条件，我们定义以下空间

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_T &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^{\mathrm{out},\beta}(\mathbf{curl}) \,|\, \mathrm{div}(\mu\boldsymbol{u}) = 0 \text{ in } \Omega\backslash\{O\},\ \mu\boldsymbol{u}\cdot\nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\backslash\{O\}\}, \\ \boldsymbol{\mathscr{X}}^{\mathrm{out}}_T &:= \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{H}}^{\mathrm{out}}(\mathbf{curl}) \,|\, \mathrm{div}(\mu\boldsymbol{u}) = 0 \text{ in } \Omega\backslash\{O\},\ \mu\boldsymbol{u}\cdot\nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\backslash\{O\}\}. \end{aligned} \tag{53}$$

分别赋予 $\mathrm{X}^{\mathrm{out}\ \beta}_T$, , $\boldsymbol{\mathscr{X}}\mathrm{out}_T$ 以 $\mathrm{H}^{\mathrm{out},\beta}$(旋度), $\boldsymbol{\mathscr{H}}$out(旋度) 的范数。将（52）中的 $\mathrm{H}^{\mathrm{out},\beta}$(旋度), $\boldsymbol{\mathscr{H}}$ out(旋度) 分别替换为 $\mathrm{X}^{\mathrm{out}\ \beta}_T$, , $\boldsymbol{\mathscr{X}}\mathrm{out}_T$，得到问题

$$\left|\begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathscr{X}}^{\mathrm{out}}_T \text{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx - \omega^2 \fint_\Omega \mu\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx = \int_\Omega \varepsilon^{-1}\,\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}^{\mathrm{out},\beta}_T. \end{array}\right. \tag{54}$$

命题的类似结果4.5 可表述为

命题 5.2。假设 $\omega \neq 0$。
- 每个解都满足(52)，且满足(54)。
- 假设*1-2* 成立。那么 (54) 的每个解都满足 (52)。

定义连续算子 $\mathbb{A}_T^{\text{out}}$, $\mathbb{K}_T^{\text{out}}$: $\mathscr{X}_T^{\text{out}} \to (\mathbf{X}_T^{\text{out},\beta},)^*$，使得对于所有 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}_T^{\text{out}}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_T^{\text{out},\beta},$，

$$\langle \mathbb{A}_T^{\text{out}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \varepsilon^{-1} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\boldsymbol{v}}\, dx, \qquad \langle \mathbb{K}_T^{\text{out}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \mu \boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}\, dx.$$

最后，设定 $\mathscr{A}_{\text{out}T}(\omega) := \mathbb{A}_T^{\text{out}} - \omega^2 \mathbb{K}_T^{\text{out}}$，使得对于 $\boldsymbol{u} \in \mathscr{X}_{\text{out}T}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_T^{\text{out},\beta},$，

$$\langle \mathscr{A}_T^{\text{out}}(\omega) \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega \varepsilon^{-1} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} \cdot \mathbf{curl}\, \overline{\boldsymbol{v}}\, dx - \omega^2 \int_\Omega \mu \boldsymbol{u} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}\, dx.$$

与（37）类似，我们有如下重要恒等式：对于 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathscr{X}_{\text{out}T}$,

$$\langle \mathscr{A}_T^{\text{out}}(\omega) \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle - \overline{\langle \mathscr{A}_T^{\text{out}}(\omega) \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = -q_\varepsilon(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\varepsilon}) - \omega^2 q_\mu(\mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}, \mathfrak{s}_{\boldsymbol{v},\mu}). \tag{55}$$

5.3 $\mathbf{X}_T^{\text{out},\beta}$ 中的等价范数，以及 $\mathscr{X}_T^{\text{out}}$

与命题 4.6、4.7类似，我们有以下结果。

命题 第 5.3 节。 假设 *1-2* 成立。存在一个常数 $C > 0$ 使得 t

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)} \le C \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_T^{\text{out},\beta}. \tag{56}$$

因此，范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^{\text{out},\beta}}$（旋度）以及 $|\text{旋度}\cdot\|_{\mathbf{V}^0_\beta(\Omega)}$ 在 $\mathbf{X}_T^{\text{out},\beta}$, 中等价。

命题 5.4。 假设 *1-2* 成立。存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)} + \|\nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\mu}\|_{\mathbf{V}^0_{\beta}(\Omega)} \le C \|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathscr{X}_T^{\text{out}} \text{ with } \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}} + \varepsilon \nabla \mathfrak{s}_{\boldsymbol{u},\varepsilon}. \tag{57}$$

因此，在 $\mathscr{X}_{\text{out}T}$ 映射 $\boldsymbol{u} \mapsto \|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u}}\|_{\mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)}$ 是一个范数，且与 $\|\cdot\|_{\mathscr{H}^{\text{out}}(\text{旋度})}$等价。

5.4 磁问题的主要结果

通过交换 和 ε 的角色 μ 在以下证明中 §4.4、§4.5，我们得到以下定理 .

定理 5.5. 假设条件 *1-2* 成立。那么，算子 $\mathbb{A}_T^{\text{out}}$: $\mathscr{X}_{\text{out}T} \to (\mathbf{X}_T^{\text{out},\beta},)^*$是一个同构，而 $\mathbb{K}_T^{\text{out}}$: $\mathscr{X}_{\text{out}T} \to (\mathbf{X}_T^{\text{out},\beta},)^*$ 是紧算子。

由此可以推导出以下定理。

定理 5.6. 假设条件 *1-2* 成立。

- 算子 $\mathscr{A}_{\text{out}T}(\omega)$ 对所有 $\omega \in \mathbb{R}$ 都是指标为零的 *Fredholm* 算子。
- $\mathscr{A}_{\text{out}T}(\omega)$ 是一个同构，对于所有 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$ 均成立，其中 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$ 是一个只能在无穷远处聚集的离散集。
- 集合 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$ 与满足 β （*23*）的条件无关。
- 如果 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$，则（*54*）在 $\boldsymbol{J} \in \mathbf{V}^0_{-\beta_\star}(\Omega)$ 中的解与满足（*23*）的 β （$\beta_\star$ 定义于（*23*）中）无关。

注 5.7. 回到初始的麦克斯韦方程组（*1*）-（*2*）在 $\Omega\backslash\{O\}$ 中的分布意义下，得益于命题 *4.2*、*4.5*、*5.1*、*5.2*，可以证明 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$ 与定理 $\mathscr{S}_{\boldsymbol{E}}$ 中出现的集合 *4.15*相同。

最后，我们陈述磁场的主要结果：

定理 5.8。 假设 *1-2* 成立，且 $\boldsymbol{J} \in \mathbf{V}^0_{-\beta}(\Omega)$ 满足 β 并符合（*23*）。

- 对于所有 $\omega \in \mathbb{R}\backslash\mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$ 问题(54)（或等价地，(52)）当 $\omega \neq 0$）均有唯一解。
- 当 $\omega \in \mathscr{S}_{\boldsymbol{H}}$ 问题(54)（或等价地，(52)）在 *Fredholm* 意义下适定时，它的核为有限维，且与 β 满足（*23*）无关。

注 5.9. 可以验证，*§4.7* 中关于极限吸收的结果，在考虑磁问题而非电问题时仍然成立。

6 经典 Maxwell 框架

本节中，我们考虑初始系统（1）-（2，并在经典空间中寻找场 $\boldsymbol{E}$， $\boldsymbol{H}$，其中 $\mathbf{L}^2(\Omega)$。这引出我们考虑以下问题（参见（25）、（51））

$$\left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{E}\in\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}) \text{ such that}\\ \mathbf{curl}\,(\mu^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{E})-\omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}=i\omega\boldsymbol{J} \text{ in } \Omega\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{E}\times\nu = \ 0 \quad \text{on } \partial\Omega\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{H}\in\mathbf{H}(\mathbf{curl}) \text{ such that}\\ \mathbf{curl}\,(\varepsilon^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{H})-\omega^2\mu\boldsymbol{H}=\mathbf{curl}\,(\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}) \text{ in } \Omega\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mu\boldsymbol{H}\cdot\nu = \ 0 \qquad \text{on } \partial\Omega.\end{array}\right.$$

这里，体方程是在 Ω 的分布意义下写出的。这些问题等价于以下变分形式

$$\left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{E}\in\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}) \text{ such that}\\ \displaystyle\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}-\omega^2\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx=i\omega\int_\Omega \boldsymbol{J}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N(\mathbf{curl})\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\text{Find } \boldsymbol{H}\in\mathbf{H}(\mathbf{curl}) \text{ such that}\\ \displaystyle\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{H}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}-\omega^2\mu\boldsymbol{H}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx=\int_\Omega \varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \qquad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}(\mathbf{curl}).\end{array}\right.$$

我们的目标是说明，当 $\kappa_\varepsilon, \kappa_\mu$ 为临界值时，这并非一个令人满意的框架。定义连续算子 $\mathcal{A}_N(\omega):\mathbf{H}_N(\text{旋度})\to(\mathbf{H}_N(\text{旋度}))^*$ 和 $\mathcal{A}_T(\omega):\mathbf{H}(\text{旋度})\to(\mathbf{H}(\text{旋度}))^*$，使得

$$\langle\mathcal{A}_N(\omega)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\int_\Omega \mu^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}-\omega^2\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \qquad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N(\mathbf{curl})$$

$$\langle\mathcal{A}_T(\omega)\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\int_\Omega \varepsilon^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{curl}\,\overline{\boldsymbol{v}}-\omega^2\mu\boldsymbol{u}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,dx, \qquad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}(\mathbf{curl}).$$

命题 6.1。假设 *1-2*成立。那么算子 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 和 $\mathcal{A}_T(\omega)$ 不是 *Fredholm* 型。

证明。我们来考察 $\mathcal{A}_N(\omega)$，对 $\mathcal{A}_T(\omega)$ 的论证类似。若 $\omega=0$, $\nabla\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 属于 $\mathcal{A}_N(0)$ 的核。由于该空间是无限维的，我们推知 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 不是 Fredholm 型。请注意，即使 $\kappa_\varepsilon, \kappa_\mu$ 不是临界值，这一点仍然成立，尤其是当 $\kappa_\varepsilon, \kappa_\mu$ 为正值时；这与下文的结论相反。

现在假设 $\omega\neq 0$。我们通过反证法进行论证，并假设 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 是 Fredholm 型。由于 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 是对称的，因此其指标必然为零。

如果此外 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 是单射，则它是同构，并且存在常数 $c>0$ 使得下式成立

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}\leq c\,\|\mathcal{A}_N(\omega)\boldsymbol{u}\|_{(\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}))^*}, \qquad \forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}). \tag{58}$$

让我们证明这是不可能的。为此，对于 $n\in\mathbb{N}^*$，定义场

$$\boldsymbol{u}_n:=\nabla\mathfrak{s}_n \qquad \text{with} \qquad \mathfrak{s}_n:=r^{1/n}\mathfrak{s} \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{s}(x):=\chi(r)s^\varepsilon_{1,1,0}(x), \tag{59}$$

其中 χ 和 $s^\varepsilon_{1,\,1,\,0}$ 分别出现在（16）和（14）中。由于乘以正则化项 $r^{1/n}$，函数 $\mathfrak{s}_n$ 属于 $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$，这保证了 $\boldsymbol{u}_n$ 属于 $\mathbf{H}_N(\text{旋度})$。此外，我们有

$$\begin{array}{rcl}\|\boldsymbol{u}_n\|^2_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}=\|\nabla\mathfrak{s}_n\|^2_\Omega & \geq & C\displaystyle\int_0^{\rho/2}|\nabla(r^{-1/2+i\eta_1^\sigma+1/n})|^2\,r^2dr\\ & = & C\,\dfrac{n}{2}|-1/2+1/n+i\eta_1^\sigma|^2\left(\dfrac{\rho}{2}\right)^{2/n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.\end{array} \tag{60}$$

这里及下文中，$C>0$ 表示一个常数，它可能随行而变，但与 n无关。现在我们来计算 $\|\mathcal{A}_N(\omega)\boldsymbol{u}_n\|_{(\mathbf{H}_N(\text{旋度}))^*}$。由于 $\boldsymbol{u}_n=\nabla\mathfrak{s}_n$，我们只需有

$$\|\mathcal{A}_N(\omega)\boldsymbol{u}_n\|_{(\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}))^*}=\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N(\mathbf{curl})\setminus\{0\}}\frac{\left|\omega^2\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\boldsymbol{v}\,dx\right|}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}}. \tag{61}$$

<escape>根据 iii）命题8.1中的条款 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}_N(\textbf{旋度})$ 可以分解为 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi+\textbf{旋度}\ \boldsymbol{\psi}$ 其中 $\varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 且 $\boldsymbol{\psi}\in\mathbf{X}_T(1)$。通过观察可知，**旋度** $\boldsymbol{\psi}$属于$\mathbf{X}_N(1)$，并应用命题8.7，我们推得**旋度**$\boldsymbol{\psi}\in\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$，其中某个 $\gamma>0$。此外，我们有</escape>

$$\|\nabla\varphi\|_\Omega+\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)}\le C\,\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}. \tag{62}$$

我们来写出

$$\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\boldsymbol{v}\,dx=\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\nabla\varphi\,dx+\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}\,dx. \tag{63}$$

为了估计（63）右端的第二个积分，我们可以注意到

$$\|\nabla\mathfrak{s}_n\|_{\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)}\le\|r^{1/n}\nabla\mathfrak{s}\|_{\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)}+\|r^{1/n-1}\mathfrak{s}\|_{\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)}\le C\|\nabla\mathfrak{s}\|_{\mathbf{V}^1_\gamma(\Omega)}\le C,$$

结合（62）可得，

$$\left|\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}\,dx\right|\le C\,\|\nabla\mathfrak{s}_n\|_{\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)}\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)}\le C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}. \tag{64}$$

右端（63）中的第一个积分可以展开为

$$\begin{aligned}\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\nabla\varphi\,dx&=\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}\cdot\nabla(r^{1/n}\varphi)\,dx+\int_\Omega\varepsilon\mathfrak{s}\nabla(r^{1/n})\cdot\nabla\varphi\,dx-\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}\cdot\nabla(r^{1/n})\varphi\,dx\\&=-\int_\Omega\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s})\,r^{1/n}\varphi\,dx+\int_\Omega\varepsilon\mathfrak{s}\nabla(r^{1/n})\cdot\nabla\varphi\,dx-\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}\cdot\nabla(r^{1/n})\varphi\,dx.\end{aligned} \tag{65}$$

利用 $\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s})=0$ for $r\le\rho/2$，我们得到

$$\left|\int_\Omega\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s})\,r^{1/n}\varphi\,dx\right|=\left|\int_{\Omega\setminus\overline{B(O,\rho/2)}}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\mathfrak{s})\,r^{1/n}\varphi\,dx\right|\le C\,\|\nabla\varphi\|_\Omega. \tag{66}$$

此外，利用柯西-施瓦茨不等式，我们可以写出

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\varepsilon\mathfrak{s}\nabla(r^{1/n})\cdot\nabla\varphi\,dx\right|&\le\frac{C}{n}\left|\int_\Omega r^{-2}|\mathfrak{s}|^2r^{2/n}\,dx\right|^{1/2}\|\nabla\varphi\|_\Omega\\&\le\frac{C}{n}\left|\int_\Omega r^{-3+2/n}\,dx\right|^{1/2}\|\nabla\varphi\|_\Omega\le\frac{C}{\sqrt{n}}\|\nabla\varphi\|_\Omega.\end{aligned} \tag{67}$$

对于式（65）右端的第三项，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}\cdot\nabla(r^{1/n})\varphi\,dx\right|&\le\frac{C}{n}\left|\int_\Omega r^{-2}|\mathfrak{s}|^2r^{2/n}\,dx\right|^{1/2}\|r^{-1}\varphi\|_\Omega\\&\le\frac{C}{n}\left|\int_\Omega r^{-3+2/n}\,dx\right|^{1/2}\|\nabla\varphi\|_\Omega\le\frac{C}{\sqrt{n}}\|\nabla\varphi\|_\Omega.\end{aligned} \tag{68}$$

将 (66)–(68) 代入 (65)，利用 (62)，可得

$$\left|\int_\Omega\varepsilon\nabla\mathfrak{s}_n\cdot\nabla\varphi\,dx\right|\le C\,\|\nabla\varphi\|_\Omega\le C\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})}. \tag{69}$$

将 (64) 和 (69) 合并到 (63) 中，根据定义 (61)，可得

$$\|\mathcal{A}_N(\omega)\boldsymbol{u}_n\|_{(\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}))^*} \leq C. \tag{70}$$

结合式（60），这与式（58）矛盾，并证明 $\mathcal{A}_N(\omega)$不是同构。

为完成证明，还需考虑假设 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 的核的维数为 K 的情形。在这种情况下，令 $\boldsymbol{\lambda}^1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}^K$，$K \geq 1$ 为 ker $\mathcal{A}_N(\omega)$ 的一组正交归一基。设

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_N(\mathbf{curl}) &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{curl}) \,|\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}^k)_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})} = 0,\ k = 1, \ldots, K\} \\ \mathcal{H} &:= \{\boldsymbol{F} \in (\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}))^* \,|\, \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\lambda}^k \rangle = 0,\ k = 1, \ldots, K\} \end{aligned}$$

~ ~ ~并定义连续算子 $\tilde{\mathcal{A}}_N(\omega) := \mathcal{A}_N(\omega)|_{\tilde{\mathbf{H}}_N(\text{旋度})}$。那么 $\tilde{\mathcal{A}}_N(\omega) : \mathbf{H}_N(\text{旋度}) \to \mathcal{H}$ 是同构，因此存在常数 $c > 0$，使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})} \leq c\, \|\tilde{\mathcal{A}}_N(\omega)\boldsymbol{u}\|_{(\mathbf{H}_N(\mathbf{curl}))^*}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{H}}_N(\mathbf{curl}). \tag{71}$$

下面证明这是不可能的。对于 $n \in \mathbb{N}^*$，取 $\boldsymbol{u}_n$ 如式（59）所示，并设

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_n := \boldsymbol{u}_n - \sum_{k=1}^{K} a_n^k \boldsymbol{\lambda}^k \qquad \text{with} \qquad a_n^k := (\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{\lambda}^k)_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})} = (\nabla \mathfrak{s}_n, \boldsymbol{\lambda}^k)_\Omega.$$

场 $\tilde{\boldsymbol{u}}_n$ 显然属于 ~$\mathbf{H}_N$(旋度)。此外可以看出，$\boldsymbol{\lambda}^k$ 不仅属于 $\mathbf{H}_N$(旋度)，还属于 $\mathbf{X}_N(\varepsilon)$（该空间的定义见式（3））。由命题 4.13 的证明可知，对于某个固定的 $\gamma > 0$，$\boldsymbol{\lambda}^k$ 属于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。由于当 n 足够大时，$\boldsymbol{u}_n$ 不属于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$，我们推知当 n 足够大时，$\tilde{\boldsymbol{u}}_n$ 非零。另一方面，由于当 n 趋于 $+\infty$ 时，$(a_n^k)_n$ 收敛于 $(\nabla \mathfrak{s}, \boldsymbol{\lambda}^k)_\Omega$，由式（60）可得

$$\lim_{n \to +\infty} \|\tilde{\boldsymbol{u}}_n\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl})} = +\infty.$$

~ ~最后，由于 $\mathcal{A}_N(\omega)\tilde{\boldsymbol{u}}_n = \mathcal{A}_N(\omega)\boldsymbol{u}_n$，估计式（70）保证（$\|\mathcal{A}_N(\omega)\tilde{\boldsymbol{u}}_n\|_{(\mathbf{H}_N(\text{旋度}))^*})_n$在 n 趋于 $+\infty$时仍有界。由此我们推知，估计式（71）不可能成立。这就完成了证明，即 $\mathcal{A}_N(\omega)$ 不可能是指标为零的 Fredholm 算子。 □

7 总结

本文研究了这样一种情形下的时谐 Maxwell 方程：包含一个负折射率材料夹杂体，其几何形状除一点外均光滑，而该点处有一个圆锥尖端。我们证明，当电磁参数的对比参数取某些临界值时，由于存在超奇异性（亦称黑洞奇异性），麦克斯韦方程组在经典框架下不再适定。我们说明了如何通过在尖端施加辐射条件来考虑其中某些奇异性，从而建立新的框架，使 Fredholm 性得以恢复。值得一提的是，对于相应的解，场及其旋度均为奇异的。通过对分析中出现的两个标量算子 ε 和 μ 应用 Mandelstam辐射原理，确定出射行为。然而，Mandelstam辐射原理并不能给出唯一的适定问题框架。为选出具有物理意义的框架，我们还应用了极限吸收原理；当该原理适用于标量问题时，我们能够证明其成立。

在这项工作的可能延伸中，可以考虑负折射率夹杂物具有若干棱边的情形。在这种情况下，超奇异性前的系数应替换为一个函数。这会使分析更加复杂。另一个有趣的方向

将是通过数值方法研究新框架中解的近似。为此，困难在于，由于场及其旋度在接近尖端时会无限振荡，简单的基于网格的方法无法捕捉这一现象，并会产生虚假反射。在 [5], 中，已有一种使用完美匹配层（PML）的方法被提出，用于处理二维标量情形。更确切地说，其思路是在角点的邻域内实现完美匹配层，以吸收通过黑洞奇异性离开区域的能量。目前尚不清楚该方法能否适用于麦克斯韦问题。实际上，系数 ε 和 μ 取决于频率 ω。因此，将这一因素纳入分析是有意义的，正如对 [28]标量问题所做的那样。然而，对于此处所考虑的奇异几何中的麦克斯韦方程组，这似乎远非显而易见，因为黑洞波的数量及其特征（尤其是奇异指数）取决于 ω。

8 附录

提醒读者，根据假设，Ω 是单连通的，且其边界是连通的。若这一假设不成立，则必须对下文的结果作相应调整。

8.1 经典亥姆霍兹分解

我们先介绍一些众所周知的结果。

命题 8.1。
i) 根据 *[1, 定理 3.12],* ，若 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 满足 散度 $\boldsymbol{u} = 0$ 在 Ω 中，则存在唯一的$\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_T(1)$ 使得 $\boldsymbol{u} =$ **旋度** $\boldsymbol{\psi}$。

ii) 根据 *[1, 定理 3.17]*) ，如果 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 满足 散度 $\boldsymbol{u} = 0$ 在 Ω 中，且 $\boldsymbol{u} \cdot \nu = 0$ 在$\partial\Omega$上成立，则存在唯一的 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_N(1)$，使得 $\boldsymbol{u} =$**旋度** $\boldsymbol{\psi}$。

iii) 根据 *[40, 定理 3.45],* ，每个 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 都可以分解为 $\boldsymbol{u} = \nabla p +$ **旋度** $\boldsymbol{\psi}$，其中 $p \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_T(1)$ 均具有唯一确定性。

iv) 根据 *[40, 注释 3.46],* ，每个 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 都可分解为 $\boldsymbol{u} = \nabla p +$ **旋度** $\boldsymbol{\psi}$，其中 $p \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_N(1)$ 均有唯一确定的定义。
在我们的分析中，我们需要一些与上文类似、但在加权Sobolev空间中的势函数表示结果。为建立这些结果，我们回顾加权Sobolev空间中经典拉普拉斯算子的相关结果。证明请参阅专著 [34, 36, 39]（另见 [23, 24]）。

8.2 经典拉普拉斯算子

对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义线性连续算子 $\mathrm{A}_D^\gamma : \mathring{\mathrm{V}}^1_\gamma(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\gamma}(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}_D^\gamma \varphi, \varphi' \rangle = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathring{\mathrm{V}}^1_\gamma(\Omega),\ \varphi' \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\gamma}(\Omega).$$

同理，对于 $\gamma \in (-5/2; 5/2)$，定义 $\mathrm{A}_N^\gamma : \mathcal{V}^1_\gamma(\Omega) \to (\mathcal{V}^1_{-\gamma}(\Omega))^*$，使得

$$\langle \mathrm{A}_N^\gamma \varphi, \varphi' \rangle = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\overline{\varphi'}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{V}^1_\gamma(\Omega),\ \varphi' \in \mathcal{V}^1_{-\gamma}(\Omega).$$

这里的 下标 $_D$， $_N$ 分别表示狄利克雷和诺伊曼。与 β_D， β_N 在（18）中类似，设

$$\begin{aligned} \gamma_D &:= \min\{\Re e\,(\lambda - 1/2) \,|\, \lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_D) \text{ and } \Re e\,\lambda > -1/2\}, \\ \gamma_N &:= \min(\{\Re e\,(\lambda - 1/2) \,|\, \lambda \in \mathrm{spec}(\mathscr{L}_N) \text{ and } \Re e\,\lambda > -1/2\} \cup \{5/2\}) \end{aligned} \tag{72}$$

其中，符号 $\mathscr{L}_D$， $\mathscr{L}_N$ 定义为 $\mathscr{L}_\varepsilon$， $\mathscr{L}_\mu$ （见（10）、（11））， 其中 $\varepsilon \equiv 1$， $\mu \equiv 1$。

命题 8.2。

- 对于 $\gamma \in (-\gamma_D; \gamma_D)$， 算子 $\mathrm{A}_D^\gamma : \ \mathring{\mathrm{V}}^1_\gamma(\Omega) \to (\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\gamma}(\Omega))^*$ 是一个同构。
- 对于 $\gamma \in (-\gamma_N; \gamma_N)$， 算子 $\mathrm{A}_N^\gamma : \ \mathcal{V}^1_\gamma(\Omega) \to (\mathcal{V}^1_{-\gamma}(\Omega))^*$ 是一个同构。

注 *8.3*。 γ_D, γ_N 的取值取决于 Ω 在 O 附近的几何形状（参见 *[36, §2.2]* 以及 *[34, §6.6]* 中的狄利克雷问题和 *[36, §2.3]* 中的诺伊曼问题）。当 $O \in \Omega$（*(5)* 中的情形 *1*）时，有 $\gamma_D = \gamma_N = 1/2$。当 $O \in \partial\Omega$ 且 $\mathcal{K}$ 与半空间重合（*(5)* 中的情形 *2*）时，有 $\gamma_D = 3/2$, $\gamma_N = 1/2$。注意，我们总有 $\gamma_D \geq 1/2$, $\gamma_N \geq 1/2$。后一性质用于 *(23)* 中 $\beta_\star$ 的定义，并确保 $\beta_\star \leq \gamma_D$, $\beta_\star \leq \gamma_N$。

8.3 加权Sobolev空间中的分解

下一个结果推广了命题 *iii*）、 *iv*）中的条目8.1。

命题 8.4。

- 固定 $\gamma \in [0;\ \gamma_D)$。任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 均可分解为 $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \text{旋度}\ \boldsymbol{\psi}$，其中 $\varphi \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\gamma}(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_T(1)$ 满足 $\text{旋度}\ \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。
- 固定 $\gamma \in [0;\ \gamma_N)$。任意 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 若满足 $\boldsymbol{u} \cdot \nu = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，则可分解为 $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \text{旋度}\ \boldsymbol{\psi}$，其中 $\varphi \in \mathcal{V}^1_{-\gamma}(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_N(1)$ 满足 $\text{旋度}\ \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。

证明。固定 $\gamma \in [0; \gamma_D)$，并考虑某个 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。由于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$，命题 8.1 的条目 *iii)* 保证存在 $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + $ 旋度 $\boldsymbol{\psi}$，其中 $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 且 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_T(1)$。注意到 $\Delta\varphi = $ 散度 $\boldsymbol{u} \in (\mathring{\mathrm{V}}^1_\gamma(\Omega))^*$，再利用命题 8.2，可得 φ 属于 $\mathring{\mathrm{V}}^1_{-\gamma}(\Omega)$。第一项证明完毕。第二项可类似地证明。 □

现在我们将条目 *i)*、 *ii)* 中的结果推广到命题 8.1。对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，引入空间

$$\mathbf{Z}^\gamma_N := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\gamma(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{u} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\backslash\{O\}\}$$
$$\mathbf{Z}^\gamma_T := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\gamma(\Omega),\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{u} \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\backslash\{O\}\}.$$

我们赋予 $\mathbf{Z}^\gamma_N$ 和 $\mathbf{Z}^\gamma_T$ 范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{Z}^\gamma} := (\|\cdot\|^2_\Omega + |\text{旋度}\ \cdot\|^2_{\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)})^{1/2}$。令

$$\tilde{\gamma}_D := \min(\gamma_D, 1), \qquad \tilde{\gamma}_N := \min(\gamma_N, 1). \tag{73}$$

命题 8.5. 设 $\tilde{\gamma}_D$， $\tilde{\gamma}_N$ 如（*73*）所示。

- 固定 $\gamma \in [0;\ \tilde{\gamma}_D)$。如果 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)$ 满足 散度 $\boldsymbol{u} = 0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$ 中，则存在唯一的 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{Z}^\gamma_T$，使得 $\boldsymbol{u} = \text{旋度}\ \boldsymbol{\psi}$。
- 取定 $\gamma \in [0;\ \tilde{\gamma}_N)$。若 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)$ 满足 散度 $\boldsymbol{u} = 0$ 在$\Omega\backslash\{O\}$中，且 $\boldsymbol{u} \cdot \nu = 0$ 在 $\partial\Omega\backslash\{O\}$上成立，则存在唯一的 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{Z}^\gamma_N$，使得 $\boldsymbol{u} = \text{旋度}\ \boldsymbol{\psi}$。

注 8.6。 该结果还推广了 *[10, 附录 B]* 中所得到的结果，其中仅考虑了 $O \in \Omega$ 的情形。此外，这里给出了一个更简单的证明。

证明。 令 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)$，其中 $\gamma \in [0;\ \tilde{\gamma}_D)$，使得散度 $\boldsymbol{u} = 0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$。命题 8.7 保证 $\mathbf{X}_N(1) \subset \mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。这表明我们有 $\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega) \subset (\mathbf{X}_N(1))^*$，因此我们可以考虑问题

$$\left|\begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{X}_N(1) \text{ such that} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}'\,dx = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\zeta}'\,dx, \qquad \forall \boldsymbol{\zeta}' \in \mathbf{X}_N(1). \end{array}\right.$$

利用命题 2.1，可以通过经典方法证明它存在唯一的解 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{X}_N(1)$。此外，利用 $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$中的性质，可以得到

$$\mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{u} \quad \text{in } \Omega\backslash\{O\}.$$

令 $\boldsymbol{\psi} := \text{旋度}\ \boldsymbol{\zeta}$。则 $\boldsymbol{\psi}$ 是$\mathbf{Z}^\gamma_T$的一个元素，满足 $\boldsymbol{u} = \text{旋度}\ \boldsymbol{\psi}$。至此，第一项的证明完成。第二项的证明步骤相同。 □

8.4 紧嵌入结果

在本段中，我们证明麦克斯韦空间嵌入加权Sobolev空间的紧性结果。值得一提的是，这与文献[14]中的工作有一定联系。在我们的方法中，我们将研究场在 O邻域内的正则性。为此，我们设 $\mathscr{O} := \Omega \cap B(O, \rho)$，其中 ρ 在(4)中定义，并引入以下空间

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_N(\mathscr{O}) &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\mathscr{O}) \,|\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\mathscr{O}),\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(\mathscr{O}),\, \boldsymbol{u} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\mathscr{O}\} \\
\mathbf{Y}_T(\mathscr{O}) &:= \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\mathscr{O}) \,|\, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\mathscr{O}),\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \in \mathrm{L}^2(\mathscr{O}),\, \boldsymbol{u} \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\mathscr{O}\} \\
\mathbf{H}_N(\mathscr{O}) &:= \mathbf{Y}_N(\mathscr{O}) \cap \mathbf{H}^1(\mathscr{O}) \\
\mathbf{H}_T(\mathscr{O}) &:= \mathbf{Y}_T(\mathscr{O}) \cap \mathbf{H}^1(\mathscr{O}).
\end{aligned}$$

当 $\mathscr{O}$为凸的，尤其是当 $O \subset \Omega$时，我们有 $\mathrm{Y}_N(\mathscr{O}) = \mathrm{H}_N(\mathscr{O})$，$\mathrm{Y}_T(\mathscr{O}) = \mathrm{H}_T(\mathscr{O})$（见 [17]）。然而，这对所有锥形尖点 $\mathscr{O}$并不成立。一般而言，已知商空间 $\mathrm{Y}_N(\mathscr{O})/\mathrm{H}_N(\mathscr{O})$，$\mathrm{Y}_T(\mathscr{O})/\mathrm{H}_T(\mathscr{O})$总是有限维[20] 的，并且后者取决于圆锥尖端的特征，更准确地说，取决于 ϖ。当该维数为正时，Birman-Solomyak 分解（见 [3, 定理 3.1], [4],[20, 定理 1.1]）保证存在一些有限维空间 $S_D \subset \mathrm{H}^1_0(\mathscr{O})\backslash\mathrm{H}^2(\mathscr{O})$，$S_N \subset \mathrm{H}^1_{\#}(\mathscr{O})\backslash\mathrm{H}^2(\mathscr{O})$，使得

$$\mathbf{Y}_N(\mathscr{O}) = \mathbf{H}_N(\mathscr{O}) \oplus \nabla S_D, \qquad \mathbf{Y}_T(\mathscr{O}) = \mathbf{H}_T(\mathscr{O}) \oplus \nabla S_N. \tag{74}$$

此外，可以选择 S_D、 S_N 的基中的元素，使其拉普拉斯算子属于 $\mathscr{C}^\infty(\mathscr{O}\backslash\{O\})$。

话虽如此，我们从一个关于经典空间 $\mathbf{X}_N(1)$、$\mathbf{X}_T(1)$ 的结果开始，该结果推广了 [10, 命题 A.2]，其中只考虑了 $O \in \Omega$ 的情形。

命题 8.7. 设 $\tilde{\gamma}_D$， $\tilde{\gamma}_N$ 如（73）所示。

- 固定 $\gamma \in [0;\ \tilde{\gamma}_D)$。空间 $\mathbf{X}_N(1)$ 紧嵌入于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。此外，存在与 $\boldsymbol{u}$ 无关的 $C > 0$，使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \leq C \, \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N(1).$$

- 固定 $\gamma \in [0; \tilde{\gamma}_N)$。空间 $\mathbf{X}_T(1)$ 紧嵌入于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 中。此外，存在一个与 $C > 0$无关的 $\boldsymbol{u}$ 常数，使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \leq C \, \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}\|_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_T(1).$$

证明。 对于 $\gamma = 0$，这不过是命题 2.1 中回顾的经典结果。现在我们讨论 $\gamma \neq 0$ 的情形。令 $(\boldsymbol{u}_n)_n$ 为 $\mathbf{X}_N(1)$ 中的一个有界元素序列。对于 $n \in \mathbb{N}$，写作

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{w}_n \qquad \text{with} \quad \boldsymbol{v}_n := \chi \boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{w}_n := (1 - \chi)\boldsymbol{u}_n, \tag{75}$$

其中 $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ 是前文（16）中引入的截断函数，满足 $\chi(r) = 1$ 当 $r \leq \rho/2$且 $\chi(r) = 0$ 当 $r \geq \rho$ 时。我们分别研究（$\boldsymbol{v}_n$）和（$\boldsymbol{w}_n$）的行为。

⋆我们从（$\boldsymbol{w}_n$）开始。我们有 Ω 中 $\mathbf{curl}\ \boldsymbol{w}_n = -\nabla\chi \times \boldsymbol{u}_n + (1-\chi)\ \mathbf{curl}\ \boldsymbol{u}_n$ 以及 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_n = -\nabla\chi \cdot \boldsymbol{u}_n$。因此，序列（$\boldsymbol{w}_n$）、（$\mathbf{curl}\, \boldsymbol{w}_n$）和（$\mathrm{div}\ \boldsymbol{w}_n$）在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中有界。此外，由于 $\boldsymbol{w}_n \times \nu = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，根据 [59]，我们可以从（$\boldsymbol{u}_n$）中抽取一个子序列，使得（$\boldsymbol{w}_n$）在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中收敛。注意，由于 $\boldsymbol{w}_n$ 在 $\Omega \cap B(O, \rho/2)$ 中消失，这保证了（$\boldsymbol{w}_n$）对所有 $\gamma \in \mathbb{R}$ 都在 $\mathrm{V}^0_\gamma(\Omega)$ 中收敛。

⋆ 现在我们处理（$\boldsymbol{v}_n$）。注意， $\boldsymbol{v}_n$ 是 $\mathbf{Y}_N$（$\mathscr{O}$）的一个元素。根据 Birman-Solomyak 分解（74），对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{reg}} + \nabla\varphi_n \tag{76}$$

其中，$\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{reg}} \in \mathbf{H}_N(\mathscr{O})$，且 $\varphi_n \in S_D$ 满足 $\nabla\varphi_n \in \mathbf{Y}_N(\mathscr{O})$（当 $\mathscr{O}$ 为凸的时，只需取 $\varphi_n \equiv 0$）。此外，还伴有如下估计式。

$$\|\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{reg}}\|_{\mathbf{H}^1(\mathscr{O})} + \|\nabla\varphi_n\|_{\mathscr{O}} + \|\Delta\varphi_n\|_{\mathscr{O}} \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{v}_n\|_{\mathscr{O}}$$

其中 C 与 n 无关。利用对所有 $\eta \in (1-\gamma_D; 1)$，$\Delta : \mathrm{V}^2_\eta(\mathscr{O}) \cap \mathrm{H}^1_0(\mathscr{O}) \to \mathrm{V}^0_\eta(\mathscr{O})$ 是一个同构（见 [34, 36, 39]），以及对所有 $\eta \ge 0$，$\mathrm{L}^2(\mathscr{O}) \subset \mathrm{V}^0_\eta(\mathscr{O})$，我们推得，对所有 $\gamma \in (1-\tilde{\gamma}_D; 1)$，$(\varphi_n)$ 在 $\mathrm{V}^1_\gamma(\mathscr{O})$ 中有界。根据引理 3.1，这意味着我们可以从 (φ_n) 中提取一个子序列，使得对所有 $\gamma \in (-\tilde{\gamma}_D; 0)$，$(\nabla\varphi_n)$ 在 $\mathrm{V}^0_\gamma(\mathscr{O})$ 中收敛。另一方面，由于 $\mathrm{H}^1(\mathscr{O}) = \mathrm{V}^1_0(\mathscr{O})$，引理 3.1 也保证我们可以从 $(\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{reg}})$ 中提取一个子序列，使得对所有 $\gamma > 0$，$(\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{reg}})$ 在 $\mathrm{V}^0_{\gamma-1}(\mathscr{O})$ 中收敛。将这两个结果与分解 (76) 结合起来，我们推得可以从 $(\boldsymbol{v}_n)$ 中提取一个子序列，该子序列对所有 $\gamma \in (0; \tilde{\gamma}_D)$ 都在 $\mathrm{V}^0_{-\gamma}(\mathscr{O})$ 中收敛。

利用（$\boldsymbol{w}_n$）、（$\boldsymbol{v}_n$）中的结果可得（75）中第一项的证明。第二项的证明遵循相同的步骤。

□

我们接下来研究空间 $\mathbf{X}_N(\varepsilon)$、$\mathbf{X}_T(\mu)$。

命题 8.8。 假设 *1-2* 成立。

- 固定 $\gamma \in (0; \tilde{\beta}_D)$ 其中 $\tilde{\beta}_D = \min(\beta_D, \gamma_D, 1)$。空间 $\mathbf{X}_N(\varepsilon)$ 紧嵌入于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 中。此外，存在一个与 $\boldsymbol{u}$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_N(\varepsilon).$$

- 固定 $\gamma \in (0; \tilde{\beta}_N)$ 其中 $\tilde{\beta}_N = \min(\beta_N, \gamma_N, 1)$。空间 $\mathbf{X}_T(\mu)$ 紧嵌入于 $\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。此外，存在一个与 $\boldsymbol{u}$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_T(\mu).$$

证明。令 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{X}_N(\varepsilon)$。利用命题 8.1 的第 $iii)$ 项，引入 $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{X}_T(1)$，使得 $\boldsymbol{u} = \nabla\varphi +$ 旋度 $\boldsymbol{\psi}$。注意到旋度 $\boldsymbol{\psi}$ 属于 $\mathrm{X}_N(1)$，并应用命题 8.7，可推出对于 $\gamma \in (0; \tilde{\beta}_D)$，旋度 $\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。此外，我们有

$$\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi})\|_\Omega = C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega. \tag{77}$$

通过观察到 $\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = -\mathrm{div}(\varepsilon$**旋度** $\boldsymbol{\psi}) \in (\mathring{\mathrm{V}}^1_\gamma(\Omega))^*$ 对所有 $\gamma \in (0; \tilde{\beta}_D)$，由命题 3.7 和 (19) 可推出 $\varphi \in \mathring{\mathrm{V}}^1_{-\gamma}(\Omega)$，并满足估计

$$\|\nabla\varphi\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{V}^0_{-\gamma}(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_\Omega. \tag{78}$$

这表明 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$。结合 (77) 和 (78)，我们得到所需的估计。现在来证明紧性结果。考虑 $(\boldsymbol{u}_n)_n$，它是 $\mathrm{X}_N(\varepsilon)$ 中元素构成的一个有界序列。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有分解 $\boldsymbol{u}_n = \nabla\varphi_n +$旋度 $\boldsymbol{\psi}_n$，其中 $\varphi_n \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 且 $\boldsymbol{\psi}_n \in \mathrm{X}_T(1)$。根据命题 8.7，我们推得，取一个子列后（仍以 n 为指标），(旋度 $\boldsymbol{\psi}_n)_n$ 对所有 $\gamma \in (0; \tilde{\beta}_D)$ 都在 $\mathrm{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 中收敛。估计 (78) 表明 $(\nabla\varphi_n)_n$ 是 $\mathrm{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 中的柯西序列，因此它在 $\mathrm{V}^0_{-\gamma}(\Omega)$ 中收敛。第一项的证明至此结束。第二项可用类似方法证明。

□

命题 8.9. 固定 $\gamma \in [0; 1/2)$。空间 $\mathbf{Z}^\gamma_N$ 和 $\mathbf{Z}^\gamma_T$ 紧嵌入于 $\mathbf{V}^0_{-\eta}(\Omega)$，对所有 $\eta < 1/2$均成立。此外，存在一个常数 $C > 0$，它与 $\boldsymbol{u}$ 无关，使得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_{-\eta}(\Omega)} \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^0_\gamma(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{Z}^\gamma_N \cup \mathbf{Z}^\gamma_T.$$

证明。 设 $(\boldsymbol{u}_n)_n$ 是 $\mathbf{Z}_N^\gamma$中的一个有界元素序列。对于 $n \in \mathbb{N}$，记

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{w}_n \qquad \text{with} \quad \boldsymbol{v}_n := \zeta \boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{w}_n := (1-\zeta)\boldsymbol{u}_n, \tag{79}$$

其中 $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ 是一个截断函数，满足 $\zeta(r) = 1$ for $r \le \rho/4$ and $\zeta(r) = 0$ for $r \ge \rho/2$。我们分别研究 $(\boldsymbol{v}_n)$ 和 $(\boldsymbol{w}_n)$ 的行为。

⋆ 我们先处理 $(\boldsymbol{w}_n)$。与 (75) 中一样，利用 $\boldsymbol{w}_n$ 的支集不与原点相交这一点，可知序列 $(\boldsymbol{w}_n)$、(旋度 $\boldsymbol{w}_n$) 和 (散度 $\boldsymbol{w}_n$) 在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中有界。此外，由于在 $\partial\Omega$ 上还有 $\boldsymbol{w}_n \times \nu = 0$，由 [59] 可知，我们可以从 $(\boldsymbol{u}_n)$ 中提取一个子序列，使得 $(\boldsymbol{w}_n)$ 在 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 中收敛。此外，再次利用 $\boldsymbol{w}_n$ 在 $\Omega \cap B(O, \rho/4)$ 中消失这一点，可知对于所有 $\eta \in \mathbb{R}$，$(\boldsymbol{w}_n)$ 在 $\mathrm{V}_\eta^0(\Omega)$ 中收敛。

⋆ 现在我们处理 $(\boldsymbol{v}_n)$。命题 $i)$ 的第 8.1 项保证，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，存在唯一的 $\boldsymbol{\psi}_n \in \mathbf{X}_T(\mathbf{1})$，使得 $\boldsymbol{u}_n =$ **旋度** $\boldsymbol{\psi}_n$。于是我们得到 **旋度** (**旋度** $\boldsymbol{\psi}_n$) = **旋度** $\boldsymbol{u}_n$ 在 $\Omega\backslash\{O\}$，因此

$$-\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\psi}_n = \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_n \in \mathbf{V}_\gamma^0(\Omega) \tag{80}$$

因为我们有散度 $\boldsymbol{\psi}_n = 0$ 在 Ω 中$\backslash\{O\}$。所需结果将由问题（80）的正则化性质推出，下面对此进行描述。

令 $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ 为式（16）中出现的截断函数，使得 $\chi(r) = 1$ 对于 $r \le \rho/2$，且$\chi(r) = 0$ 对于 $r \ge \rho$。注意，在 ζ的支集上，我们有 $\chi \equiv 1$ 函数 $\boldsymbol{\Phi}_n := \chi\boldsymbol{\psi}_n$满足

$$\left|\begin{array}{rcll} -\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Phi}_n & = & \boldsymbol{f}_n := \chi\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{\psi}_n\Delta\chi - 2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi}_n\nabla\chi & \text{in } \mathscr{O} \\ \boldsymbol{\Phi}_n \cdot \nu & = & 0 & \text{on } \partial\mathscr{O} \\ \mathbf{curl}\,(\boldsymbol{\Phi}_n) \times \nu & = & (\nabla\chi \times \boldsymbol{\psi}_n) \times \nu + \chi\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}_n \times \nu = 0 & \text{on } \partial\mathscr{O}. \end{array}\right. \tag{81}$$

为了得到上面的第三行，我们特别利用了在 $\partial\mathscr{O}$ 上，$\boldsymbol{\psi}_n$ 和 $\nabla\chi$ 都是切向的这一事实。利用方程（80）中的局部化函数，可以证明存在以下关系：$\boldsymbol{\psi}_n \in \mathbf{H}^1(\mathscr{O}\backslash B(O, \rho/2)$，并满足如下估计：

$$\|\boldsymbol{\psi}_n\|_{\mathbf{H}^1(\mathscr{O}\backslash\overline{B(O,\rho/2)})} \le C\,(\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_n\|_\Omega).$$

此处及下文，$C > 0$ 是一个常数，可能在不同的行中取值不同，但始终独立于 n。由此，我们推知，(81) 中的 $\boldsymbol{f}_n$ （81）是$\mathbf{V}_\eta^0$（$\mathscr{O}$）中的一个元素，对所有$\eta \in$ （1/2; 3/2）均成立（因为在这种情况下，$\mathbf{V}_\gamma^0$（$\mathscr{O}$）连续嵌入于$\mathbf{V}_\eta^0$（$\mathscr{O}$）），并且我们有

$$\|\boldsymbol{f}_n\|_{\mathbf{V}_\eta^0(\mathscr{O})} \le C\,(\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_n\|_\Omega).$$

On t另一方面，根据 Birman-Solomyak 分解（74），对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 e

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{reg}} + \nabla\varphi_n$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{reg}} \in \mathbf{H}_T(\mathscr{O})$，并且 $\varphi_n \in S_N$ 使得 $\nabla\varphi_n \in \mathbf{Y}_T(\mathscr{O})$（当 $\mathscr{O}$ 是凸的时，只需取 $\varphi_n \equiv 0$ 即可）。由此得到估计

$$\|\nabla\varphi_n\|_\mathscr{O} + \|\Delta\varphi_n\|_\mathscr{O} \le C\,(\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}_n\|_\mathscr{O} + \|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\Phi}_n\|_\mathscr{O}) \le C\,\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}_n\|_\Omega = C\,\|\boldsymbol{u}_n\|_\Omega.$$

利用 S_N 是有限维的，并且由一些拉普拉斯算子属于$\mathscr{C}^\infty(\mathscr{O}\backslash\{O\}$)的函数张成，我们推得 $\boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{reg}}$解决了该问题

$$\left|\begin{array}{rcll} -\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{reg}} & = & \tilde{\boldsymbol{f}}_n := \boldsymbol{f}_n + \nabla(\Delta\varphi_n) & \text{in } \mathscr{O} \\ \boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{reg}} \cdot \nu & = & 0 & \text{on } \partial\mathscr{O} \\ \mathbf{curl}\,(\boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{reg}}) \times \nu & = & 0 & \text{on } \partial\mathscr{O} \end{array}\right. \tag{82}$$

˜其中 $\boldsymbol{f}_n$ 满足对所有 $\eta \in$ （1/2; 3/2），

$$\|\tilde{\boldsymbol{f}}_n\|_{\mathbf{V}_\eta^0(\mathscr{O})} \le C\,(\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_n\|_\Omega).$$

由定理 8.11可推知 $\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{reg}}$属于 $\mathbf{V}_\eta^2(\mathscr{O})$，对所有 $\eta \in (1/2;\ 3/2)$ 均成立，并满足估计

$$\|\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{reg}}\|_{\mathbf{V}_\eta^2(\mathscr{O})} \le C\,(\|\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}_n\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_n\|_{\Omega)}).$$

因此，**旋度** $\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{reg}}$ 在 $\mathbf{V}_\eta^1(\mathscr{O})$ 中有界。由于成立的是

$$\boldsymbol{v}_n = \zeta\boldsymbol{u}_n = \zeta\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}_n = \zeta\mathbf{curl}\,\mathbf{\Phi}_n = \zeta\mathbf{curl}\,\mathbf{\Phi}_n^{\mathrm{reg}}$$

因为 $\chi = 1$ 在 ζ的支集上，我们推得 $(\boldsymbol{v}_n)$ 在 $\mathbf{V}_\eta^1(\Omega)$ 中有界。由引理 3.1，这意味着我们可以抽取一个子序列，使得 $(\boldsymbol{v}_n)$ 在 $\mathbf{V}_{\eta-1+\delta}^0(\Omega)$ 中收敛，对所有 $\delta > 0$。

最后，将分解（$\boldsymbol{v}_n$）和（$\boldsymbol{w}_n$）中的结果汇总到分解（79）中，即可得到空间 $\mathbf{Z}_N^\gamma$的结论。通过对上述步骤作显而易见的修改，即可得到 $\mathbf{Z}_T^\gamma$ 的证明。 □

8.5 稠密性结果

对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，设置

$$\mathbf{H}_N^{-\gamma,\gamma}(\mathbf{curl}\,) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_{-\gamma}^0(\Omega)\,|\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_\gamma^0(\Omega),\ \boldsymbol{u}\times\nu = 0 \text{ on } \partial\Omega\backslash\{O\}\} \tag{83}$$

命题 8.10. 空间 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega|\{O\})$ 在 $\mathbf{H}_N^{-\gamma\,\gamma}$,(**旋度**) 中稠密，其中 $\gamma \in [0;1/2)$。

证明。设 $\zeta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ 为命题 8.9 的证明中出现的截断函数，使得$\zeta(r) = 1$ 对 $r \le \rho/4$ 成立，且 $\zeta(r) = 0$ 对 $r \ge \rho/2$成立。取某个属于 $\mathrm{H}_N^{-\gamma\,\gamma}$ (curl) 的 $\boldsymbol{u}$ 。注意到 $(1-\zeta)\boldsymbol{u}$ 属于 H_N(curl), 并且在 O 的一个邻域内为零。因此，按经典方法，它可以用 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})$ 中的元素序列逼近。现在我们来关注对 $\zeta\boldsymbol{u}$ 的逼近。由于 $\zeta\boldsymbol{u} \in \mathrm{V}_{-\gamma}^0(\Omega)$，根据命题 8.9，我们有如下分解

$$\zeta\boldsymbol{u} = \nabla\varphi + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}$$

其中 $\varphi \in \mathring{\mathrm{V}}_{-\gamma}^1(\Omega)$，且 $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_T(1)$，使得 **旋度** $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{V}_{-\gamma}^0(\Omega)$。利用 $\zeta\chi = \zeta$，得到

$$\zeta\boldsymbol{u} = \chi\nabla\varphi + \chi\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}. \tag{84}$$

命题 8.9 的证明保证 χ**旋度** $\boldsymbol{\psi}$ 属于

$$\mathbf{H}_N^\gamma(\mathscr{O}) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_\gamma^1(\mathscr{O})\,|\,\boldsymbol{u}\times\nu = 0 \text{ on } \partial\mathscr{O}\backslash\{O\}\}. \tag{85}$$

由于 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})$ 在 $\mathring{\mathrm{V}}_{-\gamma}^1(\Omega)$ 中稠密，因此我们可以找到一个由 $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega\backslash\{O\})$ 中的元素构成的序列 (φ_n)，该序列在 $\mathring{\mathrm{V}}_{-\gamma}^1(\Omega)$ 中收敛于 φ。于是我们得到

$$\begin{aligned} & \|\chi\nabla\varphi - \chi\nabla\varphi_n\|_{\mathbf{V}_{-\gamma}^0(\mathscr{O})} + \|\mathbf{curl}\,(\chi\nabla\varphi) - \mathbf{curl}\,(\chi\nabla\varphi_n)\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\mathscr{O})} \\ = \ & \|\chi\nabla(\varphi-\varphi_n)\|_{\mathbf{V}_{-\gamma}^0(\mathscr{O})} + \|\nabla\chi\times\nabla(\varphi-\varphi_n)\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\mathscr{O})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

另一方面，利用 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{O}\backslash\{O\})$ 在 $\mathbf{H}_N^\gamma(\mathscr{O})$ 中稠密，我们可以找到一个由 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{O}\backslash\{O\})$ 中的元素组成的序列 $(\boldsymbol{\phi}_n)$，它收敛于 **旋度** $\boldsymbol{\psi}$，收敛于 $\mathbf{H}_N^\gamma(\mathscr{O})$ 中。这使我们可以写出

$$\|\chi\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}_n\|_{\mathbf{V}_{-\gamma}^0(\mathscr{O})} + \|\mathbf{curl}\,(\chi\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi}) - \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}_n\|_{\mathbf{V}_\gamma^0(\mathscr{O})} \le C\,\|\chi\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi}_n\|_{\mathbf{V}_\gamma^1(\mathscr{O})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

上文我们用到了，对于 $\gamma \in [0;1/2)$，有 $\gamma - 1 < -\gamma$，这保证了连续嵌入 $\mathbf{V}_\gamma^1(\mathscr{O}) \subset \mathbf{V}_{\gamma-1}^0(\mathscr{O})$ $\subset \mathbf{V}_{-\gamma}^0(\mathscr{O})$。由（84）可知，$(\chi\nabla\varphi_n + \boldsymbol{\phi}_n)$ 是 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathscr{O}\backslash\{O\})$ 中的一个元素序列，并且在 $\mathbf{H}_N^{-\gamma\,\gamma}$,(**旋度**) 中收敛于 $\zeta\boldsymbol{u}$。证明至此结束。

□

8.6 锥形尖点区域中的齐次麦克斯韦算子

本段将介绍关于具有锥形尖点的区域中的麦克斯韦算子的正则性结果。我们在 $\mathscr{O} = \Omega \cap B(O,\ \rho)$ 中讨论，并考虑以下问题

$$\left|\begin{array}{rcll} \mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}) - \nabla \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &=& \boldsymbol{f} & \text{in } \mathscr{O} \\ \boldsymbol{u} \times \nu &=& 0 & \text{on } \partial\mathscr{O} \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &=& 0 & \text{on } \partial\mathscr{O} \end{array}\right. \tag{86}$$

$$\left|\begin{array}{rcll} \mathbf{curl}\,(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{u}) - \nabla \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} &=& \boldsymbol{f} & \text{in } \mathscr{O} \\ \boldsymbol{u} \cdot \nu &=& 0 & \text{on } \partial\mathscr{O} \\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \times \nu &=& 0 & \text{on } \partial\mathscr{O}. \end{array}\right. \tag{87}$$

其中，对所有 $\gamma > 1/2$，$\boldsymbol{f} \in \mathbf{V}^0_\gamma(\mathscr{O})$。定义双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$，使得

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\mathscr{O}} \mathbf{curl}\,\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{v} + \mathrm{div}(\boldsymbol{u})\mathrm{div}(\boldsymbol{v})\,dx$$

并引入以下问题

$$\left|\begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N(\mathscr{O}) \text{ such that} \\ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_N(\mathscr{O}), \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \text{Find } \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_T(\mathscr{O}) \text{ such that} \\ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_T(\mathscr{O}). \end{array}\right. \tag{88}$$

注意，若 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1(\mathscr{O}) = \mathbf{V}^1_0(\mathscr{O})$，则 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}^0_{-1}(\mathscr{O})$，这保证了上述问题右端分别在 $\mathbf{H}_N(\mathscr{O})$、$\mathbf{H}_T(\mathscr{O})$ 上定义线性泛函。另一方面，已知（见 [17]）$a(\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{H}_N(\mathscr{O})$ 和 $\mathbf{H}_T(\mathscr{O})$ 中均为强制的。因此，问题 (88) 存在唯一解，分别满足 (86)、(87)。下一个定理给出了这些解的加权正则性结果。

定理 8.11。

- 方程（86）在 $\mathbf{H}_N(\mathscr{O})$ 中的唯一解属于 $\mathbf{V}^2_\gamma(\mathscr{O})$ 对所有 $\gamma > 1/2$。
- 方程（87）在 $\mathbf{H}_T(\mathscr{O})$ 中的唯一解属于 $\mathbf{V}^2_\gamma(\mathscr{O})$ 对所有 $\gamma > 1/2$均成立。

此外，对于每个解，对所有 $\gamma \in (1/2; 3/2)$，均有如下估计，

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{V}^2_\gamma(\mathscr{O})} \le C\,\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{V}^0_\gamma(\mathscr{O})}$$

其中 $C > 0$ 与 $\boldsymbol{f}$ 无关。

证明。 我们仅给出证明第一项的策略，第二项可用类似的方法得到。对于 $\gamma \in \mathbb{R}$，定义连续算子 $\mathcal{A}^\gamma_N : \mathbf{H}^\gamma_N(\mathscr{O}) \to (\mathbf{H}^{-\gamma}_N(\mathscr{O}))^*$ 使得

$$\langle \mathcal{A}^\gamma_N \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^\gamma_N(\mathscr{O}),\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{-\gamma}_N(\mathscr{O}).$$

此处 $\mathbf{H}^{\pm\gamma}_N(\mathscr{O})$ 表示出现在（85）中的空间，并且满足

$$\mathbf{H}^{\pm\gamma}_N(\mathscr{O}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^1_{\pm\gamma}(\mathscr{O}) \,|\, \boldsymbol{u} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\mathscr{O}\backslash\{O\}\}$$

注意到，对于 $\gamma \le 0$，我们有 $\mathbf{H}^\gamma_N(\mathscr{O}) \subset \mathbf{H}^0_N(\mathscr{O}) = \mathbf{H}_N(\mathscr{O})$。如 [20], 中所述，该系统是椭圆的。因此，我们可以应用 Kondratiev方法 [33]对其进行研究。记 $\mathscr{L}_E(\cdot)$ 为对（86）应用 Mellin变换后得到的符号。问题的椭圆性使我们能够证明，$\mathscr{L}_E(\cdot)$ 的谱是离散的。此外，利用 curl curl $\boldsymbol{u} - \nabla$ div $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u}$ 并调整 [35],，可以证明 $\mathscr{L}_E(\cdot)$ 在能量带（ [36]中称为）$\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda \in (-1; 0)\}$ 内没有特征值。注意到，这一结果也在 [20, §4.f]末尾有所提及。因此， [34] 中给出的一般理论保证，对于所有$\gamma \in (-1/2; 1/2)$，$\mathcal{A}^\gamma_N$ 是指标为零的 Fredholm。此外，我们知道，ker $\mathcal{A}^\gamma_N$ 与$\gamma \in (-1/2; 1/2)$ 无关。由于 $\mathcal{A}^0_N$ 是单射的（因为我们有 $\mathbf{H}^0_N(\mathscr{O}) = \mathbf{H}_N(\mathscr{O})$），我们推知 $\mathcal{A}^\gamma_N$ 是一个

对所有情况都是同构 $\gamma \in (-1/2;\ 1/2)$。这确保了 $\mathbf{H}_N(\mathscr{O})$ 中的解属于 $\mathbf{V}^1_\gamma(\mathscr{O})$ 对所有 $\gamma \in (-1/2;\ 1/2)$。此外，由于 $\partial\varpi$ 是光滑的，Kondratiev理论 [33] 保证 $\boldsymbol{\Delta}$ 是从.....出发的同构

$$\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^2_\gamma(\mathscr{O}) \,|\, \boldsymbol{u} \times \nu = 0 \text{ on } \partial\mathscr{O}\backslash\{O\},\, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ on } \partial\mathscr{O}\backslash\{O\}\}$$

对于所有 $\gamma \in (1/2;\ 3/2)$，属于 $\mathbf{V}^0_\gamma(\mathscr{O})$。因此，对于所有 $\gamma \in (1/2; 3/2)$，$\mathbf{H}_N(\mathscr{O})$ 中的解也属于 $\mathbf{V}^2_\gamma(\mathscr{O})$。证明至此结束。 □

参考文献

[1] C. Amrouche、C. Bernardi、M. Dauge 和 V. Girault。非光滑三维区域中的矢量势。《数学方法与应用科学》，21(9):823–864，1998。[2] J. Behrndt 和 D. Krejcirik。一种矩形上的不定拉普拉斯算子。《数学分析杂志》，134(2):501–522，2018。[3] M. Sh. Birman 和 M. Z. Solomyak。任意区域中麦克斯韦算子的 L^2理论。《俄罗斯数学调查》，42:75–96，1987。[4] M. Sh. Birman 和 M. Z. Solomyak。含有屏障区域中电磁场电场分量的主要奇异性。《圣彼得堡数学杂志》，5(1):125–140，1994。[5] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、C. Carvalho、L. Chesnel 和 P. Ciarlet Jr. 完美匹配层在角点处的应用：变号系数散射问题。《计算物理学杂志》，322:224–247，2016。[6] A.-S. Bonnet-Ben Dhia 和 L. Chesnel。内部传输特征值问题的强振荡奇异性。《逆问题》，29:104004，2013。[7] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、L. Chesnel 和 P. Ciarlet Jr. 电介质与超材料之间标量界面问题的 T强制性。《数学建模与数值分析》，46(06):1363–1387，2012。[8] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、L. Chesnel 和 P. Ciarlet Jr. 变号系数麦克斯韦问题的 T强制性。《偏微分方程通讯》，39(06):1007–1031，2014。[9] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、L. Chesnel 和 X. Claeys。电介质与超材料之间非光滑界面的辐射条件。《数学模型与应用科学方法》，23(9):1629–1662，2013。[10] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、L. Chesnel 和 M. Rihani。等离激元锥形尖端处存在超奇异性的麦克斯韦方程组。《纯粹与应用数学杂志》，161:70–110，2022。[11] A.-S. Bonnet-Ben Dhia、C. Hazard 和 F. Monteghetti。具有角点的平面亚波长粒子复等离激元共振的复数缩放方法。《计算物理学杂志》，440:110433，2021。[12] E. Bonnetier、C. Dapogny、F. Triki 和 H. Zhang。蝴蝶结天线的等离激元共振。《计算数学进展》，35(1):85–116，2019。[13] E. Bonnetier 和 H. Zhang。通过 Weyl序列刻画二维区域角点处诺伊曼–Poincar´e算子的本质谱。《伊比利亚数学评论》，35(3):925–948，2019。[14] A. Buffa、M. Costabel 和 M. Dauge。多面体中拉普拉斯算子和麦克斯韦算子的各向异性正则性结果。《数学报告》，336(7):565–570，2003。[15] R. Bunoiu、L. Chesnel、K. Ramdani 和 M. Rihani。麦克斯韦方程组及相关变号系数标量问题的均匀化。《图卢兹数学科学学院年刊》，30(5):1075–1119，2021。[16] C. Cacciapuoti、K. Pankrashkin 和 A. Posilicano。自伴不定拉普拉斯算子。《数学分析杂志》，139(1):155–177，2019。[17]M. Costabel。麦克斯韦方程组的强制双线性型。《数学分析与应用》，157(2):527–541，1991。[18] M. Costabel、E. Darrigrand 和 H. Sakly。体积分算子的本质谱。

算子在均匀物体电磁散射中的应用。巴黎科学院数学报告，350(3-4):193–197，2012。[19] M. Costabel、E. Darrigrand 和 H. Sakly。二维电磁散射的体积分方程。《计算数学及其应用》，70(8):2087–2101，2015。[20] M. Costabel 和 M. Dauge。多面体区域中电磁场的奇异性。《数学分析与应用》，151:221–276，2000。[21] M. Costabel 和 M. Dauge。多面体区域中麦克斯韦方程组的加权正则化。《数值数学》，93(2):239–277，2002。[22] M. Costabel 和 E. Stephan。透射问题的直接边界积分方程法。《数学分析与应用》，106(2):367–413，1985。[23] M. Dauge、S. Nicaise、M. Bourlard 和 J. M.-S. Lubuma。锥点区域上椭圆边值问题的奇异性系数。I：狄利克雷问题的一般结果。RAIRO 数值分析，24(1):27–52，1990。[24] M. Dauge、S. Nicaise、M. Bourlard 和 J. M.-S. Lubuma。锥点区域上椭圆边值问题的奇异性系数。II：若干特殊算子。RAIRO 数值分析，24(3):343–367，1990。[25] M. Dauge 和 B. Texier。多边形中的非强制透射问题。技术报告 97-27，雷恩第一大学，IRMAR，Beaulieu 校区，35042 雷恩 Cedex，法国，1997。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00562329v1。[26] M. de Le´on-Contreras 和 K.-M. Perfekt。多面体的准静态等离激元问题。《数学年刊》，387:1533–1577，2023。[27] B. Despr´es、L.-M. Imbert-G´erard 和 R. Weder。平板几何中麦克斯韦方程组的混合共振。《纯粹与应用数学杂志》，101(5):623–659，2014。[28] C. Hazard 和 S. Paolantoni。含负折射率材料的多边形腔体的谱分析。《亨利·勒贝格年刊》，3:1161–1193，2020。[29] J. Helsing 和 A. Karlsson。带角点平面区域中的亥姆霍兹透射问题。《计算物理学杂志》，371:315–332，2018。[30] J. Helsing、A. Karlsson 和 A. Ros´en。一般介电常数下麦克斯韦透射问题积分方程的比较。《计算数学进展》，47(5):1–32，2021。[31] J. Helsing 和 K.-M. Perfekt。具有旋转对称锥点的区域上调和层势算子的谱。《纯粹与应用数学杂志》，118:235–287，2018。[32] H. Kettunen、L. Chesnel、H. Hakula、H. Wall´en 和 A. Sihvola。圆锥和楔形体上的表面等离激元共振。载于《2014年第八届微波与光学先进电磁材料国际会议》，第163–165页。IEEE，2014。[33] V.A. Kondratiev。带锥点或角点区域中椭圆方程的边值问题。《莫斯科数学会汇刊》，16:227–313，1967。[34] V.A. Kozlov、V.G. Maz’ya 和 J. Rossmann。具有点奇异性的区域中的椭圆边值问题，数学调查与专著第52卷。美国数学会，普罗维登斯，1997。[35] V.A. Kozlov、V.G. Maz’ya 和 J. Rossmann。自由表面黏性流体流体动力学问题解的锥形奇异性。《斯堪的纳维亚数学杂志》，第103–141页，1998。[36] V.A. Kozlov、V.G. Maz’ya 和 J. Rossmann。与椭圆方程解的角点奇异性相关的谱问题，数学调查与专著第85卷。美国数学会，普罗维登斯，2001。[37] W. Li、K.-M. Perfekt 和 S.P. Shipman。三维诺伊曼–庞加莱算子有无穷多个嵌入特征值。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，54(1):343–362，2022。[38] W. Li 和 S.P. Shipman。诺伊曼–庞加莱算子的嵌入特征值。《积分方程与应用》，31(4):505–534，2019。[39] V.G. Maz’ya、S.A. Nazarov 和 B.A. Plamenevskii。奇异摄动区域中椭圆边值问题的渐近理论，第1卷。Birkh¨auser，巴塞尔，2000。译自1991年德文原版。[40] P. Monk。麦克斯韦方程组的有限元方法。牛津大学出版社，2003。

[41] S.A. Nazarov. 自伴椭圆边值问题的多项式性质及其属性的代数描述。《俄罗斯数学评论》，54(5):947–1014，1999.[42] S.A. Nazarov. 圆柱形及准圆柱形区域中边值问题谱的性质。载于《数学中的索伯列夫空间 II》，第261–309页。Springer，2009.[43] S.A. Nazarov. 弹性波导中的曼德尔施塔姆能量辐射条件与乌莫夫–坡印廷矢量。《数学科学杂志》，195(5):676–729，2013.[44] S.A. Nazarov. 弹性周期波导中的乌莫夫–曼德尔施塔姆辐射条件。《数学文集》，205(7):953，2014.[45] S.A. Nazarov. 连续谱截止点附近声波散射的异常现象（综述）。《声学物理学》，66(5):477–494，2020.[46] S.A. Nazarov and B.A. Plamenevskii. 带分片光滑边界区域中的椭圆问题，《数学论述》第13卷。De Gruyter，德国柏林，1994.[47] H.-M. Nguyen. 变号系数亥姆霍兹方程的极限吸收原理与适定性。《纯粹与应用数学杂志》，106(2):342–374，2016.[48] H.-M. Nguyen and S. Sil. 具有各向异性变号系数的时谐麦克斯韦方程组的极限吸收原理与适定性。《数学物理通讯》，379(1):145–176，2020.[49]A. Nicolopoulos, M. Campos-Pinto, and B. Despr´es. 冷等离子体中共振麦克斯韦方程组的稳定表述。《计算与应用数学杂志》，362:185–204，2019.[50] P. Ola. 关于透射问题的评述。《数学分析与应用》，196:639–658，1995.[51] K. Pankrashkin. 符号不定拉普拉斯算子的自伴实现。《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》，64(2-3):345–372，2019.[52] J.B. Pendry. 负折射造就完美透镜。《物理评论快报》，85(18):3966–3969，2000.[53] K.-M. Perfekt. 角点的等离激元特征值问题：本质谱中的极限吸收原理与绝对连续性。《纯粹与应用数学杂志》，145:130–162，2021.[54] K.-M. Perfekt and M. Putinar. 带角点区域上诺伊曼–庞加莱算子的本质谱。《理性力学与分析档案》，223(2):1019–1033，2017.[55] B.A. Plamenevskii and A.S. Poretskii. 具有多个圆柱形端部的波导中的麦克斯韦系统。《圣彼得堡数学杂志》，25(1):63–104，2014.[56] B.A. Plamenevskii and A.S. Poretskii. 具有多个通向无穷远的圆柱形出口及非均匀各向异性填充介质的波导中的麦克斯韦系统。《圣彼得堡数学杂志》，29(2):289–314，2018.[57] M. Rihani. 超材料中的麦克斯韦方程组。博士论文，巴黎综合理工学院，2022。 https://theses.hal.science/tel-03670420v1/document.[58] V.G. Veselago. 同时具有负值的物质的电动力学 ε和 μ。《苏联物理学进展》，10:509–514，1968.[59] C. Weber. 麦克斯韦方程组的局部紧性定理。《数学方法与应用科学》，2:12–25，1980。