arXiv:2305.01990v1 [math.GR] 3 May 2023

一族奇异群 C*-代数

玛丽亚·格拉西莫娃和尼古拉·莫诺

摘要。我们证明，不含非阿贝尔自由子群的一大类群满足非可和性的以下强化性质：它们各自都拥有大量不可约表示，这些表示定义了异类 C*-代数。该构造是显式的。

1. 引言

1.A. 群 C*-代数。 令 Γ 为任意群；在本文中，我们考虑不带拓扑的群。两个 C*-代数以典范方式与 Γ相联系：**最大 C*-代数** $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma)$ 和**约化 C*-代数** $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$。此外，存在一个典范满态射 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma) \,!\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$，当且仅当 Γ是可和群时，它是一个同构。

按照 [KS12], [KLQ13], [KLQ16], [Wie16] 和 [RW16], 的说法，若一个 C*-代数A严格位于 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ 之间，则称其为异类 C*-代数。也就是说，若 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma) \,!\, \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ 可分解为两个满态射

$$\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma) \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$$

且这两个满态射都不是同构。因此，异类 C*-代数的存在是对 Γ非可和性的一种细化。

本文旨在描述一种明确的情形： Γ 存在不可数多个不同的异类 C*-代数。此外，这些代数由 Γ的具体不可约表示定义。具体而言，我们考虑与 Γ的不可数多个适当子群相关联的准正则表示代数。

特别地，我们对群 Γ的本原对偶 $\mathrm{Prim}(\Gamma)$ 中一个庞大集合给出了明确而简单的参数化，揭示了这一对偶中层层递进的非可和性。此外，在我们的情形中，已知 Γ是 C*-简单的；按定义，这意味着 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ 是简单的，即 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma)$ 与 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ 之间的区间是一个极大区间。

尤其值得关注的是，我们的群 Γ 不含非阿贝尔自由子群。首先，由于奇异代数构成了对非可和性的一种细化，冯·诺依曼–戴问题自然促使我们去寻找这样的例子。其次，一些早期的奇异代数构造（[BG13], [Oka14]）恰恰是基于非阿贝尔自由群及其子群的解析性质，即基于所谓的 L^p-表示（另见 [dLS21]）。

在 [BKLS96] 和 [Bek99]中已经可以找到截然不同的例子；由于它们分别基于不可解李群及其格，因此也包含非阿贝尔自由子群。在[BK20]中可以找到另一种截然不同的方法，该方法关于准正则 C*-代数具有显著性质。最后， [EQ99，注 2.2] 给出了一个完全一般的观察：只要 Γ 是一个非可和的非 Kazhdan 群，表示 $\lambda_\Gamma \oplus \mathbf{1}$ （它远非不可约）就生成一个奇异 C*-代数 A。事实上，按构造， A映射到 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$。由于 1 不弱包含于 λ_Γ （根据非可和性，即 Hulanicki–Reiter 判据），这个投影不是同构。 $A \cong \mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma)$蕴含 Kazhdan 性质这一事实，就是所谓的“Kazhdan 投影”判据，见 [Val84，引理 3.1]。

1.B. 一族群。设 $S \subsetneq \mathbf{N}$ 为任意一组素数，并用 $\mathbf{Z}[1/S]$ 表示 S-整数环。按照 [Mon13、Mon23]，，我们考虑由实直线 R 上所有分段 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[1/S])$ 同胚构成的群 Γ_S。更准确地说， Γ_S 由所有满足以下条件的同胚 g 构成：实直线 R 可以被划分为有限个区间，并且在每个区间上， g都与某个射影变换 $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$一致，其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[1/S])$。

我们回顾一下， Γ_S 是一个“自由群自由群”；按照 [Mon13]，$\Gamma_S = H(\mathbf{Z}[1/S])$的记号，除了 $S = \varnothing$ 其中 [Mon13] 中选定的断点条件定义了一个更小的群，见 [Mon23，第2]节。

固定 S 后，任意子集 $T \subseteq S$ 都给出一个子群 $\Gamma_T < \Gamma_S$。从 S 无限开始，这是 Γ_S 的子群的一个不可数族。这个偏序集，即所有子集 $T \subseteq S$ 的集合，将通过映射 $T \mapsto$ 参数化本原对偶 $\mathrm{Prim}(\Gamma_S)$ 中我们所关注的区域！$\mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$ 将 T 取为与 Γ_T 相关的 Γ_S 的准正则表示 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 所生成的 C*-代数。换言之，$\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 是由平凡 Γ_T 表示诱导出的 Γ_S-表示。

定理。 对于任意非空的素数集合 $T \subsetneq S$ ，我们都有一个奇异代数

$$\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S) \xrightarrow{\not\cong} \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}) \xrightarrow{\not\cong} \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma_S)$$

其中 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 不可约，且 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma_S)$ 是单的。

此外，给定 S，相应的商 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$ 随 T 的变化两两不同构。

由于$\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S)$ 的（非退化）表示与酉 Γ_S-表示之间存在对应关系 [Dix96, §13]，，上述关于群 C*-代数的所有论述都可以改写为关于各种 Γ_S-表示的弱包含与弱不等价性的论述。例如，最后一条论述意味着，各种 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 两两弱不等价。

反过来说，定理中唯一以 Γ_S-表示的形式表述的部分是不可约性，这使我们能够将$\curvearrowleft\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 视为酉对偶 Γ_S中的点。用 C* 代数的语言来说，这相当于说，定义 $C^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$ 的 $C^*_{\max}(\Gamma_S)$ 的理想是一个本原理想。

总之，我们已将整个子集$T \subseteq S$ 的集合忠实地嵌入 Γ_S 的本原对偶 $\mathrm{Prim}(\Gamma_S)$ 中，并且当然也嵌入单位$\widehat{}$对偶 Γ_S 中，因为 $\mathrm{Prim}(\Gamma_S)$ 可以视为$\curvearrowleft\Gamma_S$的 Kolmogorov T_0-商。此外，$\mathrm{Prim}(\Gamma_S)$ 的这一区域完全由 Γ_S的奇异群 C*-代数组成。

2. 定理的证明

我们首先记录分段射影群的一个一般性质；类似的事实已经在 [Mon 13], [BLR18] 和 [BBRT21]中被观察到。给定任意环 $A < \mathbf{R}$，我们将 H_c 称为 紧支撑分段$\mathbf{SL}_2(A)$ R上的同胚中的子群，并将 H_c' 称为H_c的导出子群。

引理。对于任意 $h_0 \in \mathbf{SL}_2(A)$ 以及任意紧区间 $I \subsetneq \mathbf{R}$，若 $\infty \notin h_0 I$，则存在 $h \in H_c'$ 使得 h 与 h_0 在 I 上一致。

证明。我们首先断言，存在 $h_1 \in H_c$，使其在 I 上与 h_0 重合。记$I = [u, v]$; 我们将在 $[v, +\infty)$ 上构造 h_1，使得 $h_1 v = h_0 v$，然后可以在 $(-\infty, u]$ 上应用同样的论证来完成该断言。如果 h_0 固定 v，我们可以继续取恒等映射。如果 $h_0 v > v$，我们可以选取足够接近 v 的 $x \in (v, h_0 v)$，使得 $h_0 x \in (h_0 v, +\infty)$。我们可以选择一个双曲元素$q \in \mathrm{SL}_2(A)$，其排斥/吸引不动点 ξ_-, ξ_+ 分别位于 (v, x) 和 $(h_0 x, +\infty)$ 内。事实上，对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$，不动点对在 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 中已经稠密。将 q 替换为其自身的一个正整数次幂后，$qx > h_0 x$。另一方面，由于 $q\xi_- = \xi_- < h_0 v < h_0 \xi_-$，根据连续性，存在某个 $t \in (\xi_-, x)$，使得 $qt = h_0 t$。现在我们可以定义 h_1：在$[v, t]$上取 h_0，在 $[t, \xi_+]$ 上取 q，并在 $[\xi_+, +\infty)$ 上取恒等映射。

$h_0 v < v$ 的情形是类似的：选取足够接近的 $x > v$，使得 $h_0 x \in (h_0 v, v)$，并选择 q，使得 $\xi_- \in (v, x)$ 且 $\xi_+ \in (-\infty, h_0 v)$。将 q 替换为适当的幂后，我们有 $qv < h_0 v$，但另一方面 $q\xi_- = \xi_- > v > h_0 x > h_0 \xi_-$。因此存在 $t \in (v, \xi_-)$，使得 $qt = h_0 t$，并定义 h_1：在 $[v, t]$上令其为 h_0，在 $[t, \xi_-]$ 上令其为 q，并在 $[\xi_-, +\infty$ 上令其为恒等映射。断言得证。

现在令 J 为一个包含 I 及 h_1 的支集的紧区间。我们可以选取一个满足 $b_1^{-1} J \cap J = \varnothing$ 的元素 $b_1 \in H_c$；例如，通过再次应用第一个断言即可证明其存在，这次取 J 以及一个平移 $b_0 \in \mathrm{SL}_2(A)$，使其将 J 的左端点平移至超过其右端点的位置。于是 $b_1 h_1^{-1} b_1^{-1}$ 在 I 上恒等于平凡元，因此 H_c' 中的交换子 $h = h_1 b_1 h_1^{-1} b_1^{-1}$ 具有所需的性质。□

2.A. **不可约性**。众所周知，表示 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 不可约，当且仅当 Γ_T 在 Γ_S 中自交换。通常而言。

归因于 Mackey，因为这可由 [Mac51]中的定理 6′ 推出；我们注意到，Godement 已在 [God48]的附录 A 第 80 页中证明了这一点。

因此，给定任意一个不属于 Γ_T 的元素 $g \in \Gamma_S$，我们需要证明 $\Gamma_T^g \cap \Gamma_T$ 在 Γ_T 和其共轭子群 Γ_T^g 中都不是有限指标的。

为此，只需找到一个没有真有限指标子群的子群 $\Lambda < \Gamma_T$，例如一个无限单性子群，使得 Λ^g 不属于 Γ_T。现在我们来证明第二导出子群 $\Lambda = (\Gamma_T)''$ 具有所需的性质。

的单性以及恒等式 $HA'' = HA_c'$ 对任意环 $A < \mathbf{R}$ 均成立，见 [BLR18]。事实上，对于 $\mathbf{R}$ 上所有“局部移动”同胚群，这些结论都更一般地成立，见 [BBRT21，§4]。在我们的情形中，$\Gamma_T = H(A)$ 其中 $A = \mathbf{Z}[1/T]$。

由于 $g \notin \Gamma_T$，存在一个区间 J，在该区间上，g 可表示为 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[1/S])$ 中的一个矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，且至少有一个系数不属于 A。也就是说，某个系数包含某个 $p \in S \smallsetminus T$ 的负次幂。

首先，假设该系数为 a 或 b。任取 $q \in T$，并选取足够大的 $n \in \mathbf{N}$，使得矩阵 $h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q^{-n} & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $h_0 I \subseteq \mathrm{Int}(gJ)$，其中某个紧区间为 $I \subseteq gJ$。这是可能的，因为当 $n \to +\infty$ 时，h_0 收敛于单位元。应用引理，我们得到 $h \in \Lambda$，其在I上由 h_0 给出。共轭 $g^{-1}hg$ 在 $g^{-1}I \subseteq J$ 上由如下形式的矩阵给出

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q^{-n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -b^2 q^{-n} \\ a^2 q^{-n} & * \end{pmatrix}.$$

因此，在这种情况下，p 的负次幂仍然存在，所以 $g^{-1}hg$ 不属于 Γ_T。

如果系数是 c 或 d，那么我们用类似的方法论证，其中使用 $h_0 = \begin{pmatrix} 1 & q^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；这次，共轭的 $g^{-1}h_g$ 涉及一个矩阵 $\begin{pmatrix} * & d^2 q^{-n} \\ -c^2 q^{-n} & * \end{pmatrix}$，因此同样不属于 Γ_T。这就完成了不可约性的证明。

2.B. **非约束性**。设 $\Lambda < \Gamma$ 是群 Γ的一个子群。按照 [HZ93]，，回顾一下，Λ 称为**非受限**的 Γ，是指其在 Γ 的子群 Chabauty 空间中的共轭 Γ 轨道 Λ 的闭包包含平凡子群。明确地说，这仅意味着对任意一个$E \subseteq \Gamma$ 不含单位元的有限子集，都存在 $\gamma \in \Gamma$，使得共轭子群$\gamma\Lambda\gamma^{-1}$ 与 E不相交。

这一概念与我们所讨论情形的相关性在于，它意味着准正则表示 $\lambda_{\Gamma/\Lambda}$ 弱包含正则表示λ_Γ。事实上，这可由 Fell 的诱导映射连续性推出，见 [Fel64]中的定理 4.2。

给定 $T \subsetneq S$，现在我们将证明 Γ_T 在 Γ_S 中是非受限的。等价地，我们在 Γ_S 中构造一个序列（g_n），使得对于每个非平凡的

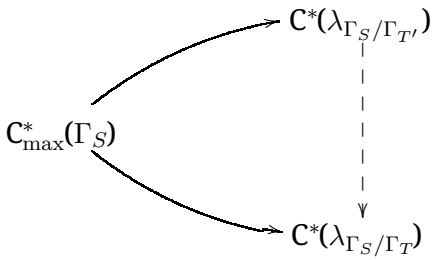
$h \in \Gamma_S$，共轭元 $g_n^{-1} h g_n$ 对所有足够大的 n（取决于 h）都在 Γ_T 之外。

为此，令 $p \in S \smallsetminus T$，并用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/S])$ 的元素 $\begin{pmatrix} p^n & p^{-2n} \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix}$ 定义 g_n。注意，g_n 固定 ∞，因此定义了 Γ_S 的一个元素。现在考虑任意非平凡的 $h \in \Gamma_S$。存在某个区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，在该区间上，h 由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/S])$ 的一个元素 $h_I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 表示，且该元素不等于 $\pm\mathrm{Id}$。在 $g_n^{-1} I$ 上，共轭元 $g_n^{-1} h g_n$ 由 h_I 的共轭元表示，其右上角计算结果为

$$bp^{-2n} + (a-d)p^{-3n} - cp^{-4n}.$$

如果这个数对于任意大的 n 都属于 $\mathbb{Z}[1/T]$，那么三个系数 b、$a-d$ 和 c 必须为零，因为 p^{-n} 的指数各不相同。结合行列式条件 $ad - bc = 1$，这意味着 $a^2 = 1$，因而 $h_I = \pm\mathrm{Id}$，这与我们的假设矛盾。

2.C. 不等价性。 现在我们来证明，当 T、$T' \subseteq S$ 是两个不同的子集时，商 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$ 和 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_{T'}})$ 不同构。不失一般性，我们可以假设 $T \not\subseteq T'$，并将验证以下更精确的陈述：不存在使下图交换的垂直态射。



根据 Γ_S 的表示与 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S)$ 的表示之间的对应关系，这等价于陈述 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 不弱包含于 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_{T'}}$。

反设这个弱包含成立。特别地，$(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})|_{\Gamma_T}$ 在 Γ_T 上的限制弱包含于 $(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_{T'}})|_{\Gamma_T}$ 在 $|_{\Gamma_T}$ 上的限制。但 $(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})|_{\Gamma_T}$ 包含平凡的 Γ_T-表示。因此，这个平凡表示弱包含于 $(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_{T'}})|_{\Gamma_T}$。这等价于说，$\Gamma_{T'}$ 相对于 Γ_S 是 Γ_T 的余可和子群，见 [Mon23]。然而，[Mon23] 中已证明这种相对余可和性并不成立，事实上，即使相对于更大的群 $H(\mathbb{Q})$ 也不成立。

2.D. 证毕。 表示 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 定义了 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S)$ 的一个商 $\mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$。典范映射 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S) \twoheadrightarrow \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma_S)$ 可因子分解为

$$\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S) \longrightarrow \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}) \longrightarrow \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma_S) = \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S})$$

等价于 λ_{Γ_S} 被弱包含于 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$，这一点已在第 2.B节中得到证明。

要使 C*($\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$) 成为外来 C*-代数，我们需要确认上述两个态射都不是同构。

如果第一个态射是同构，那么 $\mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$ 就存在一个到标量代数的满态射 $\mathbf{C}$，因为 $\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma_S)$ 存在这样的态射。这意味着平凡表示弱包含于 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$，当且仅当 Γ_T 在 Γ_S中余可和；参见 [Eym72，第 3 条，第 §2]节。然而， [Mon23] 证明了 Γ_T 在 Γ_S中并非余可和。

第二个态射是同构，当且仅当 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 弱包含于 λ_{Γ_S}。后者成立，当且仅当 Γ_T 是可和群，参见 命题 4.2.1AD03]。 （该文献还要求满足另一个条件，而在当前的离散群情形下，这一条件显然成立。）因此，利用 [Mon13], 中确立的非可和性，我们得出结论：$\mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T})$ 确实是外来 C*-代数。

事实是 $\lambda_{\Gamma_S/\Gamma_T}$ 不可约，这一点已在第 2.A 节中证明，而 $\mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma_S)$的单性已由 [LBMB18]证明。最后，不等价性已在第 2.C节中证明。 □

3. 评论

如果我们只想要一个没有非阿贝尔自由子群的群 Γ，但允许某些奇异群 C*-代数，那么还可以从拟与子群相关的正则表示可以构造如下。当然，这些简单的例子不会具有更强的定理中列出的性质，特别是表示将会成为来自不可约情形，因此它们并未描述对偶中的任何内容 o Γ的本原对偶。

基于第 2 节中所阐述的原因，我们将得到一个奇异代数

$$\mathrm{C}^*_{\max}(\Gamma) \xrightarrow{\not\simeq} \mathrm{C}^*(\lambda_{\Gamma/\Lambda}) \xrightarrow{\not\simeq} \mathrm{C}^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$$

前提是以下三个条件均得到满足：

(i) Λ 不具有可和性；(ii) Λ 在 Γ中是非受限的；(iii) Λ 在 Γ 中不具有余可和性。

从任意一个没有非阿贝尔自由子群的非可和群 Λ 开始。考虑“灯笼人”限制 wreath 积

$$\Gamma = \Lambda \wr Z = \left(\bigoplus_{z\in Z} \Lambda_z\right) \rtimes Z$$

其中， Z 是任意一个不含非阿贝尔自由子群的无限群；例如 $Z = \mathbf{Z}$ 或 $Z = \Lambda$。这里， Λ_z 表示对每个 $z \in Z$ 都取一个 Λ 的副本。注意， Γ 仍然不含非阿贝尔自由子群。将 Λ 视为 Γ 的一个子群，例如令 $\Lambda = \Lambda_e$位于坐标 $e \in Z$ 处。

条件（i）由构造可得。对于（ii），设 $(z_n)_{n\geq 1}$ 是 Z 中的任意一个序列，该序列离开任意有限子集，并将其视为 Γ中的序列。那么 Λ^{z_n} 在 Chabauty 空间中收敛到平凡子群，因为 $\Lambda^{z_n} = \Lambda_{z_n^{-1}}$，而 $\bigoplus_{z\in Z} \Lambda_z$ 中的任意给定元素在 Z中的支撑都是有限的。

条件（iii）在 Z 非 amenable 时显然成立，因为如果 Λ 在 Γ 中是共可和的，那么正规子群 $\bigoplus_{z\in Z} \Lambda_z$ 也将是共可和的，这等价于商 Z 是可和的。

然而，只要 Z 非平凡，条件 (iii) 确实在更一般的情形下成立，例如 $Z =$Z。实际上，反设 μ 是 Γ/Λ 上的一个 Γ-不变均值。考虑一个坐标为$\gamma = ((\lambda_z)_{z\in Z}, x)$的一般元素 $\gamma \in \Gamma$ 。给定 $y \in Z$，点 $\gamma\Lambda \in \Gamma/\Lambda$ 在 Λ_y 中的稳定子群是$\Lambda_y \cap \gamma\Lambda_e\gamma^{-1}$。另一方面，$\gamma\Lambda_e\gamma^{-1} = \Lambda_x$，因此只要 $x \neq y$，该稳定子群就是平凡的。总之，Λ_y 对 Γ/Λ 的作用下，除点 $\gamma\Lambda$ 的轨道外，所有轨道都是正则轨道，其中 $\gamma = ((\lambda_z)_{z\in Z}, y)$。由于 μ 是 Λ_y-不变的，且 $\Lambda_y \cong \Lambda$ 非 amenable，μ 支持在正则 Λ_y-轨道并集的补集上。也就是说，μ 支持在形如 $(*, y)\Lambda$ 的轨道并集上。对任意$y' \neq y$应用同样的论证（这样的 $y' \neq y$ 存在，因为 Z 非平凡），便会导出矛盾。

我们注意到，当 $Z =$Z时，这种非余可容性与 $\bigoplus_{n\geq 0} \Lambda_z$ 在 $\Lambda \wr$ Z中的余可容性形成对比，参见 [MP03]。

作为我们的最后一条评论，我们确实会考虑拓扑群，以指出在李群这一熟悉背景下，拟正则代数的另一个奇异来源（当然，这些群将具有非阿贝尔自由子群）。

令 G 为一个中心平凡、非紧致、连通且秩至少为二的简单李群。令 $\Lambda < G$ 为任意一个非虚拟可解且非扎里斯基稠密的离散子群。那么我们声称 C*($\lambda_{G/\Lambda}$) 是奇异的。

当 $\Lambda < H < G$ 包含于适当的连通李子群 $H < G$ 中且不是虚可解群时，上述假设均得到满足。例如，给定任意 $2 \leq n < m$，我们可以考虑 $\Lambda =$ SL$_n$(Z) 和 $G =$SL$_m$(R)。这里，H 由 SL$_n$(R) 见证。

在这个例子中，$\mathrm{C}^*(\lambda_{\mathbf{SL}_m(\mathbf{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})})$ 是I 型群 $\mathbf{SL}_m(\mathbf{R})$的一个奇异代数。离散群不会出现这种情况，因为根据 Thoma 定理 [Tho68]，离散的 I 型群必然是可和的。

关于奇异性的论证依然遵循相同思路，但需要调整以适用于局部紧群。Λ 非可和，这一点可由 Tits 替代定理得出 [Tit72]。根据 Shalom 的一项结果，由 Zariski 非稠密性可知，该群不是余可和的 [Sha99，推论 1。7]。最后，Fraczyk–Gelander 证明了其具有非约束性 [FG23，定理 1。5] 假设 Λ 不是一个格；在我们的情形中，根据 Borel 稠密性定理，由 Zariski 非稠密性可得这一点 [Bor60]。与该定理相反，这些表示同样远非不可约。

致谢。我们感谢 Mehrdad Kalantar 和 Tim de Laat 对奇异代数背景所提出的意见。

在这项研究期间，M.G. 得到了德国研究联合会（DFG）资助——项目编号 427320536——特别研究领域 1442 的支持，并获得德国卓越战略下卓越集群 2044（编号 390685587）“明斯特数学：动力学–几何–结构”的资助。

参考文献

[AD03] Claire Anantharaman-Delaroche, 《可和性的谱刻画》, 《以色列数学杂志》 137（2003）, 1–33。[BBRT21] Joaquín Brum、Nicolás Matte Bon、Cristóbal Rivas 和 Michele Triestino, 《作用于直线上的局部移动群与 $\mathbb{R}$ 焦点作用》, 2021, 预印本, arXiv 2104.14678v1。[Bek99] Mohammed El Bachir Bekka, 《关于算术群的完整 C^*代数与同余子群问题》, 《数学论坛》11（1999）, 第6期, 705–715。[BG13] Nathanial Patrick Brown 和 Erik Paul Guentner, 《离散群的新 C*完备化及相关空间》, 《伦敦数学会通报》45, 第6期, 1181, 2013, 1193（）, 第 – 期。[BK20] Mohammed El Bachir Bekka 和 Mehrdad Kalantar, 《离散群的拟正则表征及相关的 C^*代数》, 《美国数学会汇刊》373（2020）, 第3期, 2105–2133。[BKLS96] Mohammed El Bachir Bekka、Eberhard Kaniuth、Anthony To-Ming Lau 和 Günter Schlichting, 《关于与局部紧群相关的 C^*代数》, 《美国数学会会刊》124（1996）, 第10期, 3151–3158。[BLR 18] José Burillo、Yash Lodha 和 Lawrence David Reeves, 《分段射影同胚群中的交换子》, 《数学进展》332（2018）, 34–56。[Bor60] Armand Borel, 《不含紧分支的半单群的某些子群的稠密性》, 《数学年刊》（第2辑）72（1960）, 179–188。[Dix96] Jacques Dixmier, 《正定型函数及群论》, 《Gauthier-Villars 大经典》, Éditions Jacques Gabay, 巴黎, 1996, 再版自第二版（1969）。 C^*dLS[Tim de Laat 和 Timo Siebenand, 《实秩一单李群的奇异群21] 代数》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）71 第5期, 2117, 2021, 2136（）, 第 – 期。 C^*EQ[Siegfried Echterhoff 和 John Currie Quigg, 《离散群在99] 代数上的诱导余作用》, 《加拿大数学杂志》51（1999）, 第4期, 745–770。MR 1701340 C^*Eym[Pierre Eymard, 《不变平均与酉表示》, Springer-Verlag, 柏林, 1972, 《数学讲义》第300卷。72] Fel[James Michael Gardner Fell, 《群的弱包含与诱导表示。II》, 《美国数学会汇刊》110（1964）, 424–447。64] FG[Mikolaj Fraczyk 和 Tsachik Gelander, 《无限体积与无限单射半径》, 《数学年刊》（第2辑）197（2023）, 第1期, 389–421。23] God[Roger Godement, 《正定型函数与群论》, 《美国数学会汇刊》63（1948）, 1–84。48] HZ[Brian Hartley 和 Aleksandr Efimovich Zalesski93] 1, 《关于单周期线性群——稠密子群、置换表示与诱导模》, 《以色列数学杂志》82（1993）, 第1–3期, 299–327。ˇKLQ[Steven Paul Kaliszewski、Magnus Brostrup Landstad 和 John Currie Quigg, 《非交换对偶性中的奇异群13] 代数》, 《纽约数学杂志》19（ C^*）, –。MR KLQ 奇异余作用, 《爱丁堡数学会会刊》（第2辑）59（2016）, 第2期, 411–434。

2013 689 711 3141810 KS[David Kyed 和 Piotr Mikołaj Sołtan, 《(

[16] ,

T)性质与奇异量子群范数》, 《非交换几何杂志》6（2012）, 第4期, 773–800。

[LBMB18] Adrien Le Boudec 和 Nicolás Matte Bon，《同胚群的子群动力学与 C^*-单性》，《高等师范学校科学年鉴》（第4辑）51（2018），第3期，557–602页。[Mac51] George Whitelaw Mackey，《群的诱导表示》，《美国数学杂志》73（1951），576–592页。[Mon13] 尼古拉·莫诺，《分段射影同胚群》，《美国国家科学院院刊》110（2013），第12期，4524–4527页。[Mon23] ———，《关于直线上的分段射影群的一些评论》，预印本，https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.00796，2023。[MP03] Nicolas Monod 和 Sorin Popa，《群与冯·诺依曼代数的余可容性》，《加拿大皇家学会数学报告》25（2003），第3期，82–87页。[Oka14] Rui Okayasu，《与 ℓ_p相关联的自由群 C^*-代数》，《国际数学杂志》25（2014），第7期，1450065，12页。[RW16] Zhong-Jin Ruan 和 Matthew Wiersma，《关于奇异群 C*-代数》，《泛函分析杂志》271（2016），第2期，437–453页。[Sha99] Yehuda Shalom，《代数作用的不变测度、Zariski 稠密子群与 Kazhdan 性质 (T)》，《美国数学会汇刊》351（1999），第8期，3387–3412页。[Tho68] Elmar Thoma，《离散 I 型群的一种刻画》，《数学发明》6（1968），190–196页。[Tit72] Jacques Tits，《线性群中的自由子群》，《代数杂志》20（1972），250–270页。[Val84] Alain Valette，《极小投影、可积表示与 (T)性质》，《数学档案》（巴塞尔）43（1984），第5期，397–406页。[Wie16] Matthew Wiersma，《奇异群 C^*-代数的构造》，《伊利诺伊数学杂志》60（2016），第3–4期，655–667页。

M.G.：明斯特大学数学研究所，Einsteinstraße 62, 48149 明斯特，德国电子邮箱地址：mari9gerasimova@mail.ru

N.M.：洛桑联邦理工学院（EPFL），CH–1015 洛桑，瑞士电子邮箱地址：nicolas.monod@epfl.ch