arXiv:2305.01993v1 [cs.DS] 3 May 2023

确定性计算平面框架中的高秩路径*

Fedor V. Fomin† Petr A. Golovach† Tuukka Korhonen† Giannos Stamoulis‡

摘要

框架由一个无向图 G 和一个拟阵 M 组成，拟阵的元素与 G的顶点相对应。最近，Fomin 等人 [SODA 2023] 和 Eiben 等人 [ArXiV2023] 提出了用于计算框架中秩为 k 的路径的参数化算法。更准确地说，对于 G中的顶点 s 和 t ，以及一个整数 k，他们给出了以 k 为参数的 FPT 算法，用于判断 G 中是否存在一条（s，t）-路径，其顶点集包含 M 中秩为 k的元素子集。这些算法基于用于多项式恒等式检验的 Schwartz-Zippel 引理，因此属于随机化算法；由此，该问题是否存在确定性 FPT 算法仍未解决。

我们提出了首个确定性 FPT 算法，可解决底层图 G 为平面的框架中的这一问题。尽管我们算法的运行时间比近期随机化算法更长，但它适用于更一般的拟阵类。特别是，这是首个适用于拟阵 M在有理数域上表示这一情形的 FPT 算法。

我们的主要技术贡献是将经典的无关顶点技术以非平凡的方式适配到框架中，从而将给定实例规约为具有有界树宽的实例。这使我们能够运用代表集工具箱，设计一种动态规划过程，在有界树宽实例上高效地解决该问题。

*本研究的成果得到了挪威研究委员会通过 BWCA 项目（资助编号：314528）提供的经费支持。Giannos Stamoulis 感谢 ANR 项目 ESIGMA（ANR-17-CE23- 0010）以及法德合作 ANR/DFG 项目 UTMA（ANR-20-CE92-0027）的支持。

†卑尔根大学信息学系，挪威。
‡法国蒙彼利埃大学 LIRMM，法国国家科学研究中心。

1 引言

框架是一对 (G, M)，其中 G 是一个图，而 $M = (V(G), \mathcal{I})$ 是定义在 G顶点集上的拟阵。这个术语出现在 Lov´asz [40], 最近的专著中，他将框架定义为带有一组标记其顶点的 $\mathbb{R}^d$ 向量的图。框架在文献中有许多不同的名称。例如，在 Lov´asz [39] 关于线性拟阵代表族的开创性著作中，它们被称为预几何图；在 Lov´asz 和 Plummer [41]的书中，它们被称为拟阵图。在框架中计算最大匹配的问题，与拟阵交系统、拟阵奇偶问题和多拟阵匹配问题密切相关（综述见 [41] ）。更广泛地说，在框架中寻找秩较大的特定子图的问题，属于在组合约束下进行次模函数优化这一广泛的问题类别 [8, 9, 44, 16]。

Fomin 等人在 [17] 中提出了以下 Maximum Rank (s, t)-Path 问题。在此问题中，给定一个框架 (G, M)、G的两个顶点 s和 t，以及一个整数 k，我们要在 G 中寻找一条 (s, t)-路径，使得 M 的秩函数计算结果至少为 k。我们称这样的路径的秩至少为 k。

Max Rank (s, t)-Path

输入: 一个框架 (G, M)、G的顶点 s和 t，以及一个整数 $k \geq 0$。
任务: 判断 G 是否包含一条秩至少为 k的 (s, t)-路径。

Max Rank (s, t)-Path 涵盖了无向图中有关路径和圈的若干基础且研究充分的问题。

最长路径。当然，当 M 是均匀拟阵时，当且仅当路径包含至少 k 个顶点时，其秩至少为 k。在这种情况下，我们面对的是经典的 Longest Path 问题：给定图 G 和整数 k，任务是判定 G 是否包含一条至少有 k 个顶点的路径 [2]。

T-圈。在这个问题中，我们给定一个终端集合 T，任务是判断是否存在一条经过所有终端 [6, 26, 49]的圈。 T-圈是 Max Rank (s, t)-Path 的特殊情况。考虑以下线性拟阵。对于 G 中不属于 T 的每个顶点，我们赋予一个 $|T|$ 维向量，其所有分量均为零。对于 T 中的顶点，我们赋予构成 $\mathbb{R}^{|T|}$ 的标准正交基的向量。那么，当且仅当对于某个 $\{s, t\} \in E(G)$，(G, M) 存在一条秩为 $|T|$ 的 (s, t)-路径时， G 才存在一条经过所有终端的圈。

最大彩色路径。在 Maximum Colored (s, t)-Path 问题中，给定一个彩色图 G、G中的两个顶点 s和 t，以及一个整数 k。任务是判断 G 是否存在一条 (s, t)-路径，其中至少包含 k 种不同颜色 [7, 17] （另见 [10, 11]）。 Maximum Colored(s, t)-Path 是 Max Rank (s, t)-Path 的特殊情形，其中拟阵 M是一个分割拟阵。具体而言，在这个拟阵中，底集 $V(G)$被划分为若干类 L_1、……、L_t，若对于每个标签 $i \in \{1, \ldots, t\}$，集合 I都满足 $|I \cap L_i| \leq 1$，则该集合是独立的。这样一来，秩至少为 k的 G路径，就是一条包含来自 L_1、……、L_t中至少 k个不同（颜色）类的顶点的路径。

最大秩(s, t)-路径的随机化固定参数可解算法。 直到最近，人们才弄清楚 Maximum Rank (s, t)-Path 的参数化复杂度。文献 [17] 首次给出了 Maximum Rank (s, t)-Path 的固定参数可解算法。该算法的运行时间为 $2^{\mathcal{O}(k^2 \log(q+k))} n^{\mathcal{O}(1)}$，适用于拟阵由阶为 q 的有限域表示的框架。此外，Eiben、Koana 和 Wahlstr¨om [15], 采用不同技术，为同一问题获得了一个固定参数可解算法

该算法的运行时间为 $2^k n^{\mathcal{O}(1)}$，适用于拟阵可在特征为 2 的域上表示的框架。这两种算法采用了两种不同的代数方法。 [17] 的算法扩展了基于单项式消去的著名代数技巧，该技巧由 Bj¨orklund、Husfeldt 和 Taslaman [6] 用于求解 T-Cycle 问题；而 [15] 的算法则利用了（受约束）多线性检测 [36, 37, 4, 5]与行列式筛法 [15]相结合的工具箱。这两种算法都涉及多项式恒等式检验，并使用 Schwartz-Zippel 引理，因此都是随机化算法。事实上，正如 [15] 的作者所言，由于这两种算法都关键性地依赖 Schwartz-Zippel 引理，“去随机化似乎不可行”，这适用于 [17] 和 [15] 针对 Maximum Rank $(s,\ t)$-Path 的算法。因此，接下来的挑战是为该问题获得去随机化的固定参数可解算法。

我们的结果。我们的主要结果为平面图和可在有限域或有理数域上表示的拟阵的框架，确立了首个确定性FPT算法，用于 MaximumRank $(s,\ t)$-Path 。

定理 1。存在一种确定性算法，给定框架(G, M)，其中 G 是一个平面图 G，且 M是以有限域或 $\mathbb{Q}$ 上的矩阵表示的拟阵，两个顶点$s, t \in V(G)$ 以及一个整数 k，该算法可在 $2^{2^{\mathcal{O}(k}{}_{\log k)}} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内，要么返回一条 G中秩至少为 k的(s, t)-路径，要么判定 G 不存在这样的(s, t)-路径。

请注意， [17]和 [15] 的随机化固定参数可解算法适用于可在有限域或特征为二的域上表示的拟阵。除作为首个用于定理 1的确定性算法外， Maximum Rank (s, t)-Path，它也是首个适用于其拟阵不能在有限域或特征为二的域上表示、但可在 $\mathbb{Q}$上表示的框架的FPT算法。

我们的方法。为了设计定理 1中的确定性 FPT 算法，我们采用了不同于 [17] 和 [15]的证明策略。我们的方法基于“双赢”论证，即著名的无关顶点技术（由 Robertson 和 Seymour 提出） [46]。该技术的一般方案如下：如果图满足某些组合性质，就可以找出图中的一个顶点，并将其判定为无关，也就是说，删除该顶点后得到的实例与原问题等价。因此，删除该顶点后，我们可以在这个（等价的）约化实例上继续迭代。无法再应用这一约化规则时，得到的约化实例既与原实例等价，也更加“简单”。因此，只需论证如何在这个等价的约化实例上高效地求解问题。这是参数化算法设计中的一种标准技术——例如，参见 [18, 25, 29, 43, 34, 24,30, 21, 26, 28, 31, 27, 20, 3, 48, 23]（另见 [12, 第 7 节。8]）。应用无关顶点技术时，衡量实例复杂度的标准指标是树宽。具体而言，该策略如下：只要实例的树宽足够大，就检测并删除无关顶点；如果树宽较小，则利用动态规划在这个等价实例上求解问题。

我们对无关顶点技术的应用受到 Kawarabayashi [26] 针对 T-cycle 的算法的启发，并扩展了其方法。在典型的无关顶点论证中，我们必须证明，每个解都可以“避开”一个将被判定为无关的顶点。例如，在 Robertson 和 Seymour [46] 针对 Disjoint Paths 问题的经典应用中，应当论证（如果图具有较大的树宽），任意一组连接某些特定终端的不相交路径都可以“重新布线以避开”顶点 v，并应将该顶点判定为无关顶点。在我们的情形中，我们旨在框架中寻找一条具有较大秩的(s, t)-路径，这种重新布线应当保证

大秩得以保留。一般而言，要处理框架上的此类问题，应采用新的论证方法，调整这一技术，使其能够考虑拟阵的结构。我们针对 Maximum Rank (s,t)-Path 所采用的解决方法，是在图中一个“具有充分隔离性”的区域内构造此类重新布线论证，使拟阵的独立集 M 以同质的方式出现。输入图的平面性使我们能够利用墙的网格状结构找到这样的区域。第 1.1 节概述了这一方法。这种将无关顶点技术应用于框架的方法具有创新性，并展示了组合结构与代数性质之间有趣的相互作用，这种相互作用本身也可能具有独立的研究价值。

有界树宽图上的动态规划相当标准（例如参见 [13]），只有一个细节需要说明。为了编码一个部分解，我们保留部分解访问过的、构成拟阵 M 独立集的顶点信息。然而，在 k 中，大小至多为 M 的独立集数量可能达到 n^k量级。因此，对部分解进行朴素编码会导致计算复杂度急剧膨胀。为避免这种情况，我们只存储代表集（参见 [19, 38]），而不存储所有可能的独立集。代表集的随机 [19] 构造和确定性 [38] 构造都需要 M的线性表示。这就是定理 1针对线性拟阵表述的原因。我们指出，在定理 1的证明中，只有有界树宽图上的动态规划子程序需要 M的表示。一个有趣的开放问题是：如果输入拟阵由其独立性预言机给出，那么当参数为 Maximum Rank (s,t)-Path 及树宽时，是否为固定参数可解 k？

1.1 定理 1 证明概述定理 1

我们的总体思路如下。我们证明，如果输入图 G 的树宽为$2^{\mathcal{O}(k \log k)}$，那么 Maximum Rank (s,t)-Path 可以通过动态规划算法在固定参数可解时间内求解。否则，如果树宽足够大，我们给出一种算法，它要么找到一条秩至少为 k 的 (s,t)-路径，要么识别出一个无关的顶点 v，也就是说，删除该顶点后得到的问题实例与原问题等价。在后一种情况下，我们删除 v，并在缩减后的实例上重复这一过程。

如果输入图的树宽较大，即其数量级为 $2^{\Omega(k \log k)}$，我们利用 Robertson 和 Seymour 针对平面图提出的网格小图定理 [47]，该定理断言，平面图要么包含一个作为其小图的 $(w \times w)$-网格，要么其树宽为 $\mathcal{O}(w)$。更准确地说，给定 G的一个平面嵌入，我们可以找到一个平面 h-墙，其大小为 $h = 2^{\Omega(k \log k)}$，使其成为一个拓扑小图；或者等价地，找到 的一个平面子图，该子图是这种墙的一个细分。为了阐述我们的论证，我们需要介绍一些概念，这里将借助图示进行非正式说明。特别地，h-墙的一个示例，其中 $h = 7$ 为 图1所示。

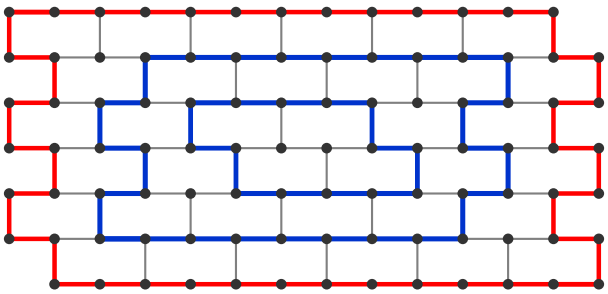


图1：一个 7-墙及其各层。

注意，一个 h-墙包含 $\lfloor h/2 \rfloor$ 个嵌套圈，称为层，如图1中红色和蓝色所示。构成墙边界的层称为墙的周界，在图中以红色表示。我们将层和周界的概念扩展到细分的 h-墙，即通过将 h-墙的某些边替换为路径而得到的图。给定 G中的一个平面细分h-墙 W，我们将 G 中由周界上的顶点以及周界内部面内的顶点所诱导的子图称为 W 的罗盘，并记为compass(W)。注意，如果有必要，我们可以通过切换到一个更小的子墙，假设 G 中细分 h-墙 W 的罗盘不包含终端顶点 s和 t 。此外，我们可以假设compass(W)是一个2-连通图，因为任何(s,t)-路径都只能包含compass(W)中包含 W 的双连通分量的顶点。我们还可以假设 G 有两条不相交路径，将 s和t 分别连接到 W周界上的两个不同顶点；否则，compass(W)中位于周界之外的任何顶点都显然是无关的。

注意，对于 W 的任意非平凡子墙 W'，compass(W') 也是 2-连通的。因此，对于 W' 周界上的任意两个不同顶点 x 和 y，以及任意 $z \in V$(compass(W'))，compass(W') 都有内部不相交的 (x,z)-路径和 (y,z)-路径。特别地，给定 compass(W') 中相对于 M 独立的一组顶点$S \subseteq V$，我们可以用不相交路径将任意 $z \in S$ 与 x 和y 连接起来。这个观察对我们至关重要。

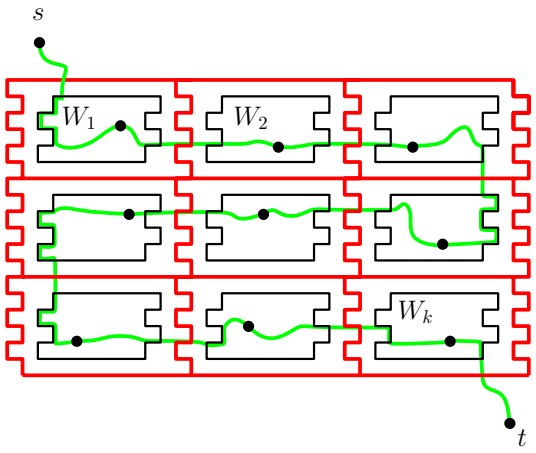


图 2：大秩墙中的一条 (s,t)-路径。

假设在 W 中有 k 个子墙 W_1、……、W_k，它们由 W 中的路径隔开，如图 2 所示，并且对于 $i \in \{1,\ldots,k\}$，秩 r(compass(W_i)) $\geq k$。那么我们可以分别在 compass(W_1)、……、compass(W_k) 中选择顶点 v_1、……、v_k，使得 $\{v_1,\ldots,v_k\}$ 是 M 的一个独立集。根据我们的观察，我们便能在 G 中构造一条 (s,t)-路径，使其经过 v_1、……、v_k，如图中绿色所示。假设情况并非如此。那么，通过向墙内缩放，我们可以假设 r(compass(W)) $< k$。此外，通过递归缩放，我们可以找到 W 的一个子墙 W'，它具有以下结构性质（见图3）。

- 存在一个由 $k+1$ 子墙 W_0，W_1，…… W_k 组成的打包，它们在 W' 中由路径隔开 W'，如图3中红色所示，并满足 r（罗盘（W_i））$= r$（罗盘（W'））-1，对于 $i \in \{1,\ldots,k\}$。
- 由 W_0，W_1，……，W_k 组成的打包被 $\mathcal{O}(k^2)$ 层 W'“隔离”层所环绕，这些层以蓝色标出。

我们声称，W_0 的顶点无关紧要。

为说明这一点，考虑一条（s，t）-路径 P，其秩至少为 k，且位于 G 中。我们证明，若 P 经过 W_0 的一个顶点，则可以按照图3 中绿色所示的方式重新布线这条路径，以避开 W_0。

考虑一个秩为 k 的独立集 $X \subseteq V(P)$，并令 u_1、……、u_ℓ 为 X 中未被 V(罗盘(W'))在 M 中张成的顶点。那么 u_1、……、u_ℓ 位于 W' 之外。我们证明，在 W' 的内部绝缘层上存在两个不同的顶点 x 和 y，以及一条（s，x）-路径 P_1 和一条（y，t）-路径 P_2，使得：(i) x 和 y 分别是这两条路径在内部绝缘层上的唯一顶点；(ii) u_1、……、$u_\ell \in V(P_1) \cup V(V_2)$。证明 $\mathcal{O}(k^2)$层绝缘层足以进行重新布线并非易事。具体而言，我们借鉴了 [26] 中的思路以及Kleinberg的结构性结果 [32]。此外，我们证明，可以分别在 W_1、……、W_k 中选取顶点 v_1、……、v_k，使得 $r(\{v_1, \ldots, v_k\}) = r$(罗盘($W'$))。接着，我们在 W' 的内部部分构造一条（x，y）-路径 Q，使得：(i) Q 与 P_1 和 P_2 内部不相交；(ii) Q 经过 v_1、……、v_k；(iii) Q 避开 W_0。因此，$P' = P_1 Q P_2$ 是一条经过 u_1、……、u_ℓ 以及 v_1、……、v_k 的（s，t）-路径。因此 $r(P') \geq r(X) \geq k$。由于 Q 避开 W_0，P' 也具有相同的性质。

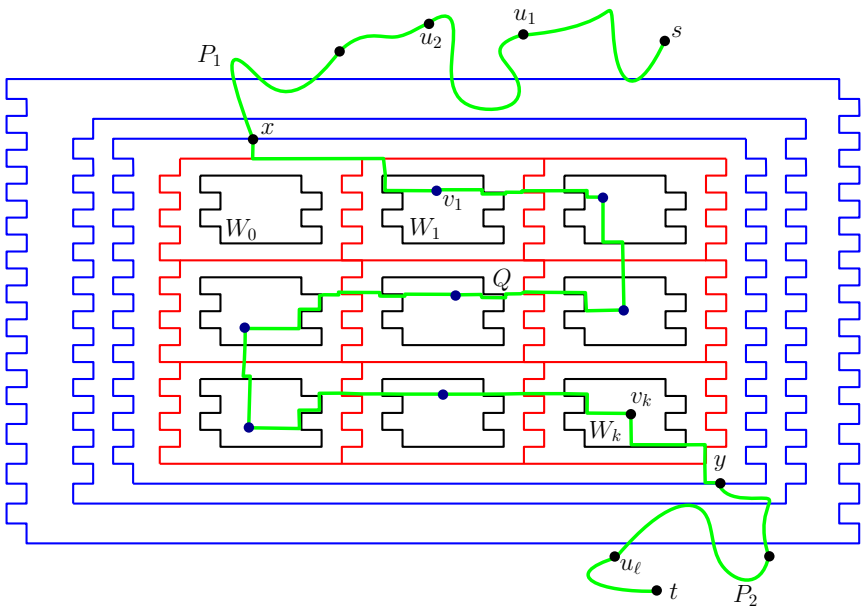


图3：对一条 (s,t)-路径重新布线。

最后，我们指出，Kawarabayashi 的算法 [26] 适用于 T-CYCLE 一般图。定理 1 的陈述仅限于平面图，且需要平面性来确保重新布线不会降低一条 (s,t)-路径的秩。很有可能，只需增加一些技术细节，我们的方法就能推广到底层图具有有界亏格、乃至更一般的无特定小图类的框架。然而，对于一般图，能否实现不降低秩的重新布线仍很不明朗。这仍是将无关顶点技术从底层图为平面图的框架推广到一般图框架时面临的主要障碍。

论文结构。 在第 2 节中，我们介绍一些基本定义和预备结果。在第 3 节中，我们展示如何利用无关顶点技术将问题归约到有界树宽的实例；而在第 4 节 中，我们介绍用于求解有界树宽实例中该问题的动态规划算法。最后，我们在第 5 节 提出一些悬而未决的问题和可能的未来研究方向。

2 预备知识

本节介绍基本记号，并陈述一些辅助结果。在第 2.1 节中，我们介绍参数化复杂性和图的一些基本定义；而在第 2.2 节中，我们给出有关墙和树宽的一些必要定义与结果。本节最后在第 2.3 节中介绍拟阵的一些有用概念以及框架的定义。

2.1 基本定义

我们用 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 表示正整数集，用 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 表示非负整数集。此外，给定整数 p, q 满足 $p < q$，我们用 $[p, q]$ 表示集合 $\{p, p+1, \ldots, q\}$；若 $p \geq 1$，则用 $[p]$ 表示集合 $\{1, \ldots, p\}$。

参数化复杂性。 关于该领域的介绍，请参阅 Cygan 等人所著的书籍。 [12] 在此，我们仅简要介绍陈述本文结果所需的最重要概念。参数化问题 是一种语言 $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$，其中 Σ^* 是有限字母表上的字符串集合Σ。参数化问题的输入是一个二元组 (x, k)，其中 x 是 Σ 上的字符串， $k \in \mathbb{N}$是一个 参数。如果一个参数化问题可以在时间 固定参数可解 (或 FPT) $f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)}$内求解，其中 f 是某个可计算函数，则称其为固定参数可解问题。FPT 复杂性类包含所有固定参数可解的参数化问题。

<escape>**图**。 我们使用标准的图论术语，对于缺失的概念，请参阅 Diestel [14] 的教科书。我们仅考虑有限图，并且除非明确说明其他情况，否则所考虑的图均假定为无向图。对于图 G， V（G）和 E（G）分别用于表示其顶点集和边集。全文中我们使用 $|G| = |V$（G）$|$。对于图 G 及其顶点子集 $X \subseteq V$（G），我们用 $G[X]$ 表示由 X 在 G 中诱导的子图。对于顶点 v，我们用 N_G（v）表示 v 的（开）邻域，即在 G 中与 v 相邻的顶点集合。对于 $X \subseteq V$（G）， N_G（X）$= \left(\bigcup_{v \in X} N_G(v)\right) \setminus X$。顶点$v$ 的度为 d_G（v）$= |N_G$（v）$|$。</escape>

图中的一条长度为 ℓ 的游走 W 是顶点序列 v_1、v_2、……、v_ℓ，其中对于所有 $1 \leq i < \ell$ 均有 $v_i v_{i+1} \in E(G)$。顶点 v_1 和 v_ℓ 是 W 的端点，顶点 v_2、……、$v_{\ell-1}$ 是 W 的内部顶点。路径是不重复经过任何顶点的游走。对于端点为 s 和 t 的路径 P，我们称 P 是一条 (s, t)-路径。圈是具有附加性质 $v_\ell v_1 \in E(G)$ 且 $\ell \geq 3$ 的路径。

2.2 墙与树宽

墙。设 $k, r \in \mathbb{N}$. $(k \times r)$-网格是这样一个图：其顶点集为 $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, r\}$，且当且仅当 $|i - i'| + |j - j'| = 1$. 时，两个顶点 (i, j) 和 (i', j') 相邻。对于某个奇整数 $r \geq 3$，基本 r-墙是从一个 $(2r \times r)$-网格得到的图，其中顶点 (x, y) $\in \{1, \ldots, 2r\} \times \{1, \ldots, r\}$，删除“竖直”边 $\{(x, y)$、$(x, y+1)\}$（其中 $x + y$ 为奇数），然后再删除所有度为一的顶点。注意，作为 $r \geq 3$，一个基本 r-墙是一个平面图，并且它在平面上具有唯一的（除拓扑同构外）嵌入，使得其所有有限面都恰好与六条边相邻。基本 r-墙的周界是围绕其无限面的圈。

一个 r-墙是指由一个基本 r-墙 W 经过细分边得到的任意图 W。我们将细分操作后添加的顶点称为细分顶点，而将其余顶点（即 W的顶点）称为分支顶点。 W的周界，记作

perim(W) 是 W 的圈，其非细分顶点是 W 周界上的顶点。 W 的 细分边 是 W 的一条路径，其端点是 W 的两个分支顶点，内部顶点则是 W 的细分顶点。如果 $v \in V(\text{perim}(W))$，且 v 在 W 中的度为三，我们也称顶点 v 是 W 周界的 内钉。

图 W 是一个墙，当且仅当它是某个奇数 $r \geq 3$ 的 r-墙；我们将 r 称为 W的高度 。给定图 G，G 的墙 是 G 的一个子图，且该子图是一个墙。我们要求，对于每个 r- 墙，数 r 始终为奇数。设 W 是图 G 的一个墙，且 K' 是 $G \setminus V(\text{perim}(W))$ 的连通分支，其中包含 $W \setminus V(\text{perim}(W))$。我们使用 inn($W$) 表示图 K'。 W的罗盘 记作 compass(W)，是图 $G[V(\text{inn}(W)) \cup V(\text{perim}(W))]$。

奇数整数 $r \geq 3$ 下 r-墙 W 的层递归定义如下。 W 的第一层是其周界。对于 $i = 2, \ldots, (r-1)/2$， W 的第 i 层是从 W 中移除其周界及所有出现的度为 1 的顶点后得到的墙 W' 的第 $(i-1)$ 层。注意，每个 $(2k+1)$-墙都有 k 层。对于每个 $i = 1, \ldots, (r-1)/2$，我们用 L_i 表示 W 的第 i 层。此外，对于 $i = 2, \ldots, (r-1)/2$，我们用 $W^{(i)}$ 表示从 W 中移除层 $L_1, \ldots, L_i$ 及所有出现的度为 1 的顶点后得到的墙，并令 $W^{(1)} := W$。注意，对于每个 $i = 1, \ldots, (r-1)/2$，周界($W^{(i)}$) $= L_i$。示例见图1。

树宽。图 G 的树分解是一个二元组 $(T, \mathcal{X})$，其中 T 是一棵树，且 $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in V(T)\}$ 是 $V(G)$ 的一个子集族，使得

- $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(G)$，
- 对于 G 的每条边 e，都存在一个 $t \in V(T)$，使得 X_t 同时包含 e 的两个端点，并且
- 对于每个 $v \in V(G)$， T由 $\{t \in V(T) \mid v \in X_t\}$ 诱导的子图是连通的。

$(T, \mathcal{X})$ 的宽度 等于 $\max\left\{|X_t| - 1 \mid t \in V(T)\right\}$，而 G 的树宽 是 G.的所有树分解中的最小宽度。

以下结果来自 [22, 引理 4。2] 指出，给定一个 $q \in \mathbb{N}$ 和一个具有树宽大于 G 的图 $9q$，我们可以找到一个宽度为 q 的墙，其大小为 G。

命题 1. 存在一种算法，以平面图 G 和 $q \in \mathbb{N}$ 为输入，并在 $2^{q^{\mathcal{O}(1)}} \cdot |G|$ 时间内输出一个 G 的 q-墙 W，或输出一个宽度至多为 $9q$的 G 的树分解。

2.3 框架

我们回顾与框架相关的定义。

拟阵。 关于拟阵理论的介绍，请参阅 Oxley 的教科书 [45] .

定义 1. 一对 $M = (V, \mathcal{I})$，其中 V是一个底集， $\mathcal{I}$ 是 V的子集族，称为 M的独立集，若满足以下条件，则称其为拟阵，这些条件称为独立性公理:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$，

(I2) 如果 $X \subseteq Y$ 且 $Y \in \mathcal{I}$，那么 $X \in \mathcal{I}$，

(I3) 如果 X、$Y \in \mathcal{I}$ 和 $|X| < |Y|$，那么存在 $v \in Y \setminus X$，使得 $X \cup \{v\} \in \mathcal{I}$.

$\mathcal{I}$ 的包含极大集合称为基。我们分别用 $V(M)$ 和 $\mathcal{I}(M)$ 表示 M 的底集和独立集族。

令 $M=(V,\mathcal{I})$ 为一个拟阵。我们用 2^V 表示 V 的所有子集组成的集合。一个函数r: $2^V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，满足对每个 $X \subseteq V$，

$$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X \text{ and } Y \in \mathcal{I}\}$$

称为 M 的秩函数。M 的秩记为 $r(M)$，即为 $r(V)$；等价地，M 的秩是 M 的任意一个基的大小。

拟阵的表示。设 $M=(V,\mathcal{I})$ 为一个拟阵，且 $\mathbb{F}$ 为一个域。若存在 f 与 V 之间的双射对应关系，使得对于任意 $X \subseteq V$，$X \in \mathcal{I}$ 当且仅当列 $f(X)$ 的集合由 $\mathbb{F}^r$的线性独立向量组成，则 $r \times n$-矩阵A 是 M 在 $\mathbb{F}$ 上的一个表示。等价地，A 是 M 的一个表示，当且仅当 M 同构于 A 的列拟阵，也就是其底集为该矩阵的列集，且列集合的独立性定义为线性独立性。如果 M 具有这样的表示，则称 M 可在 $\mathbb{F}$ 上表示，也称 M 是一个线性（或 $\mathbb{F}$-线性）拟阵。对于表示 M [42] 的矩阵，我们可以假设行数 $r=r(M)$。

每当我们考虑一个线性拟阵时，均假设其表示已给出，且其大小为 M，即表示矩阵的比特长度。请注意，给定一个拟阵的表示，判断一个集合是否独立需要进行多项式数量的域运算。特别是，如果所考虑的域是有限域或有理数域，我们可以在关于 $\|M\|$ 的多项式时间内验证独立性。在问题输入中编码拟阵的另一种标准方式是使用独立性预言机。这种预言机在接收到一个底集的子集后，会在单位时间内正确返回是或否，以判断该集合是否独立。因此，一个拟阵可以通过其底集和独立性预言机来完整描述。

框架。框架是一个二元组 (G, M)，其中 $M=(V,\mathcal{I})$ 是一个拟阵，其底集是 G 的顶点集合，即 $V(M)=V(G)$。框架 (s, t) 中的 (P路径 G, M) 在存在一个集合 $X \subseteq V(P)$ 且 $X \in \mathcal{I}$ 和 $|X|=k$ 时，具有至少 k 秩。

3 重新布线路径与圈

在本节中，我们的目标是证明定理 1，现重述如下。

定理 1. 存在一种确定性算法，给定一个框架 (G, M)，其中 G 是一个平面图 G，且 M表示为有限域或 $\mathbb{Q}$上的矩阵，两个顶点 $s,t \in V(G)$ 以及一个整数 k，该算法可在 $2^{2^{\mathcal{O}(k}{}_{\log k)}} \cdot (|G|+\|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内，返回一个由 G构成的、秩至少为 k的(s,t)-路径，或判定 G 不存在这样的(s,t)-路径。

定理 定理 1 中的算法由两部分组成。第一部分中，我们使用无关顶点技术，设计一种算法：只要输入图的树宽足够大，就从中删除顶点。为此，在第 3.1 节 中，我们证明一个组合结果（引理 2），据此可以论证：给定一个平面图、其中的一堵墙以及一个位于墙外的顶点集 S，如果存在一条路径 P 包含 S 且深入墙内足够远，那么我们可以找到另一条路径 P' 包含 S（其端点与 P相同）并避开墙的某个“中心区域”。接着，在 第 3.2 节中，我们给出一种算法（引理 3）：给定一个平面

树宽“足够大”（以 k为函数）的图，该算法能在 $2^{2^{\mathcal{O}(k \log k)}} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$时间内，输出一条秩至少为 k 的路径或一个无关顶点。最后，在 第 4 节中，我们给出动态规划算法，用于解决有界树宽图上的问题。

3.1 路径与环的重新布线

在本小节中，我们旨在证明主要的组合结果（引理 2），该结果使我们能够找到一条（s， t）-路径，它包含给定的集合 S，并避开给定墙的某个内部部分。在陈述 引理 2之前，我们先证明以下结果（引理 1），这将成为证明 引理 2的重要工具。引理 1的证明受到 [26,引理 1]的启发。

引理 1。 设 G 是一个平面图，设 $k \in \mathbb{N}$，设 W 是一个高度至少为 $2k+3$的墙。此外，设 $E = \{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\}$ 是 G的一组 $k+2$ 条边，其中，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$， $e_i = \{v_i, u_i\}$，$e_{k+1} = \{v_{k+1}, s\}$， $e_{k+2} = \{v_{k+2}, t\}$，并设 X 为集合 $\{v_{k+1}, v_{k+2}\} \cup \bigcup_{i \in \{1,\ldots,k\}} \{v_i, u_i\}$。若每个 $v \in X$ 都是周界(W)的内钉，则 G 中存在一条(s,t)-路径，它包含边 e_1、……、 e_{k+2}，且它与罗盘$(W^{(k+1)})$ 的交集是一条周界$(W_{(k+1)})$-路径，其端点是 W的分支顶点。

证明。 设 H为一个图，其顶点集为 $\{s,t\} \cup X$，边集为 $\{e_1, \ldots, e_{k+2}\}$。注意到 H 是由 $k+2$ 条边组成的不交并。

我们将对 k使用归纳法证明该命题。若 $k = 0$，则 $|X| = 2$, H 恰有两条边，分别为 $e_1 = \{v_1, s\}$ 和 $e_2 = \{v_2, t\}$。通过一条位于 perim(W) 中的 (v_1, v_2)-路径连接 s 和 t，我们便得到了所声称的 (s,t)-路径。

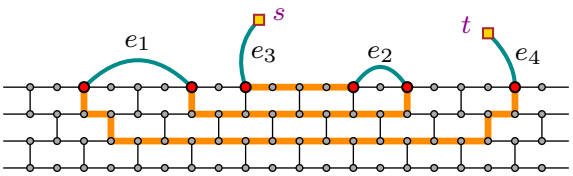


图 4: 引理 1 的证明示意图，其中 $k = 2$。在此示例中，边 e_1、……、 e_4以蓝色显示，顶点集 X 以红色显示。墙内高亮的橙色路径对应于证明中用于构造所声称的（s， t）-路径的路径。

假设 $k \geq 1$。取一个顶点 $x \in X$，令 e_x 为 H 中与 x关联的边，并令 $x' \in V(H)$ 为 e_x的另一个端点。此外，令 y 为 $X \setminus \{x'\}$ 的一个顶点，使得在 perim(W) 中存在一条 (x,y)-路径 $Q_{x,y}$，且 $Q_{x,y}$的内部顶点均不属于 X；再令 e_y 为 H 中与 y关联的边。根据 y 的选取（即 $y \in X \setminus \{x\}$），有 $e_x \neq e_y$。我们将 E' 设为如下边集：将 $E(Q_{x,y}) \cup \{e_x, e_y\}$ 中的边收缩为一条边，记为 e'_x；并且对每个 $v \in X \setminus \{x,y\}$，将 E(inn(W)) 中与 v关联的（唯一）边收缩。注意，$|E'| = k+1$，且墙 $W^{(2)}$ 的高度至少为 $2k+1$，因此我们可以应用归纳假设，找到所述的 (s,t)-路径。图 4 展示了所得到的 (s,t)-路径。至此，引理得证。 □

现在我们可以证明以下内容。

引理 2。存在一个函数 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得若 $k, z \in \mathbb{N}$, G 是一个平面图， $s,t \in V(G)$,S 是 $V(G)$ 中一个大小至多为 k 的子集， W 是 G 的一面墙，至少有 $h(k)$ 层，且其罗盘与 $S \cup \{s,t\}$ 不相交，并且 P是 G 的一条 (s,t)-路径，使得 $S \subseteq V(P)$ 且 P与 V(inn$(W(h(k))))$ 相交，那么存在 G 的一条 (s,t)-路径 $\tilde{P}$，使得 $S \subseteq V(\tilde{P})$，且它与

罗盘$(W_{(h(k))})$是 周界$(W_{(h(k))})$的一条路径，其端点是 W 的分支顶点。此外，$h(k) = \mathcal{O}(k^2)$。

证明。我们令 $h(k) := 2k \cdot (k+2) + 2k + 1$。设 W 是至少有 $h(k)$ 层的墙。对于 $i \in \{1, \ldots, k+2\}$，我们用 C_i 表示 W 的第 $L_{2k\cdot(i-1)+1}$ 层。直观地说，我们取 C_1 为 W 的第一层；对于每个 $i \in \{2, \ldots, k+2\}$，取 C_i 为 C_{i-1}之后连续的第 $2k$ 层。此外，我们用 D_i 表示罗盘$(W_{2k\cdot(i-1)+1})$的顶点集。请注意， C_i 是 $W_{2k\cdot(i-1)+1}$的周界。对于每个 $i \in [k+2]$，我们考虑 G 的路径集合 $\mathcal{F}_i$：这些路径是 P 的子路径，仅在端点处与 D_i 相交，并且存在一个满射，将每个顶点 $u \in S \cup \{s,t\}$ 映射到 $\mathcal{F}_i$ 中包含 u 的路径。直观地说，对于每个 $u \in S \cup \{s,t\}$，我们考虑 P 中包含 u 且仅在端点处与 D_i 相交的极大子路径，并将这些极大路径组成的集合定义为 $\mathcal{F}_i$（示例见图5）。

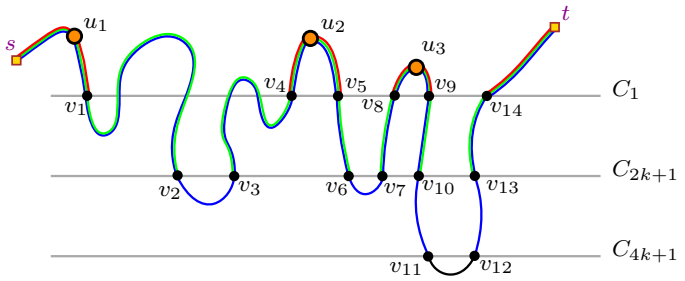


图5：一个包含独立集 $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ 的 (s,t)-路径 P 示例。在此示例中， $\mathcal{F}_1$ 是由四条红色路径组成的集合（其端点分别为 (s, v_1)、(v_4, v_5)、(v_8, v_9) 和 (v_{14}, t)）， $\mathcal{F}_2$ 是由四条绿色路径组成的集合（其端点分别为 (s, v_2)、(v_3, v_6)、(v_7, v_{10}) 和 (v_{13}, t)），而 $\mathcal{F}_3$ 是由两条蓝色路径组成的集合（即 (s, v_{11})-路径和 (v_{12}, t)-路径）。

注意到 $|\mathcal{F}_1| \le k+2$（因为 $|S \cup \{s,t\}| \le k+2$），且 $|\mathcal{F}_{k+2}| \ge 2$（因为 $V(P) \cap V($内部$(W(h(k))))$ $\neq \emptyset$，因此 P与每条 C_i至少相交两次， $i \in [k+2]$）。对于每个 $i \in \{1, \ldots, k+2\}$，我们假设 $\mathcal{F}_i = \{F_{i,1}, \ldots, F_{i,|\mathcal{F}_i|}\}$，其中次序由沿 P从 s到 t遍历给出。对于每个 $i \in \{1, \ldots, k+2\}$，令 $\mathcal{Q}_i = \{Q_{i,1}, \ldots, Q_{i,|\mathcal{F}_i|-1}\}$，其中对于每个 $j \in [|\mathcal{F}_i| - 1]$， Q_{ij}是 P 的最小子路径，它同时与 $V(F_{i,\ j})$ 和 $V(F_{i,\ j+1})$ 相交。注意，对于每个$i \in \{1, \ldots, k+2\}$， P是路径F_i、1、Q_i、1、F_i、2、.....、$Q_{i,\ |\mathcal{F}_i|-1}$、$F_{i,\ |\mathcal{F}_i|}$的拼接。在图5中，$\mathcal{Q}_1 = \{Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}\}$，其中$Q_1$、1是（$v_1$，$v_4$）-子路径，$Q_1$、2是（$v_5$，$v_8$）-子路径，而$Q_1$、3是 P的（v_9，v_{14}）-子路径； $\mathcal{Q}_2 = \{Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}\}$，其中$Q_2$、1是（$v_2$，$v_3$）-子路径，$Q_2$、2是（$v_6$，$v_7$）-子路径，而$Q_2$、3是 P的（v_{10}，v_{13}）-子路径；并且 $\mathcal{Q}_3$ 由 P的（v_{11}，v_{12}）-子路径Q_3、1构成。

很容易看出，对于每个 $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, $|\mathcal{F}_{i+1}|$，它都等于 $|\mathcal{F}_i|$ 减去 $\mathcal{Q}_i$ 中不与 C_{i+1} 相交的路径数，因此， $|\mathcal{F}_i| \le |\mathcal{F}_{i+1}|$。因此，鉴于 $|\mathcal{F}_1| \le k+2$，$|\mathcal{F}_{k+2}| \ge 2$，并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, $|\mathcal{F}_i| \le |\mathcal{F}_{i+1}|$，都存在一个 $i_0 \in \{1, \ldots, k+1\}$，使得$|\mathcal{F}_{i_0}| = |\mathcal{F}_{i_0+1}|$（如果这样的 i_0 有多个，我们就选取最小的一个）。这意味着 $\mathcal{Q}_{i_0}$ 中的每条路径都与 C_{i_0+1} 相交。

对于每个 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$，我们用 v_F和 u_F表示 F的端点。我们定义图 G'，它由 G通过移除每条 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$的内部顶点（即顶点集 $\bigcup_{F \in \mathcal{F}_{i_0}} (V(F) \setminus \{v_F, u_F\})$）并为每个 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$添加边 $\{v_F, u_F\}$得到。注意， G'也是平面图，且包含 D_{i_0}作为子图。此外，注意，对于每个 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$， $\{v_F, u_F\} \in V(C_{j_0}) \cup \{s,t\}$。在图5中， $|\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2|$，因此 G'是将每条三色路径替换为一条边后得到的。

在证明的其余部分，我们将论证，在 G $'$，存在一条包含所有边的（s，t）-路径

$\{v_F, u_F\}$、 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$，以及它与 V(罗盘($W^{(h(k))}$))的交集，是 W 的细分边的顶点集，该细分边位于 perim($W^{(h(k))}$) 中。掌握了这样一条路径后，我们可以将每条边 $\{v_F, u_F\}$、 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$ 替换为相应的路径 F，从而得到引理陈述中所声称的路径 P。

我们将 C C_{j_0} （即层 $L_{2k\cdot(i_0-1+1)}$）记作 C'，将层 $L_{2k\cdot i_0}$记作 $C_{i_0+1} = L_{2k\cdot i_0+1}$。为便于理解，回想一下 C'，因此 W 是“先于”C_{i_0+1}的层。由于 $\mathcal{Q}_{i_0}$ 中的每条路径都与 C_{i_0+1}相交，因此 $\mathcal{Q}_{i_0}$ 中的每条路径至少与 C' 相交两次。因此，若设 $Y := V(C) \cap \bigcup_{F\in\mathcal{F}_{i_0}} \{v_F, u_F\}$，并设 $\ell := |Y|$，则 $\ell \le 2k$，且存在 ℓ 条从 Y 到 C' 的不相交路径（例如，见图 6 左侧）。

回想一下，perim($W^{(2k\cdot i_0)}$) $= C'$。我们令 B为 W中位于 $V(C')$ 且在 $W^{(2k\cdot i_0)}$ 中度为三的分支顶点集合。此外，我们令 $\mathcal{K}$为图 $G' \setminus V$（inn($W^{(2k\cdot i_0)}$)）。现在我们说明，在 $\mathcal{K}$中也存在从 Y 到 B 的 ℓ 条不相交路径。

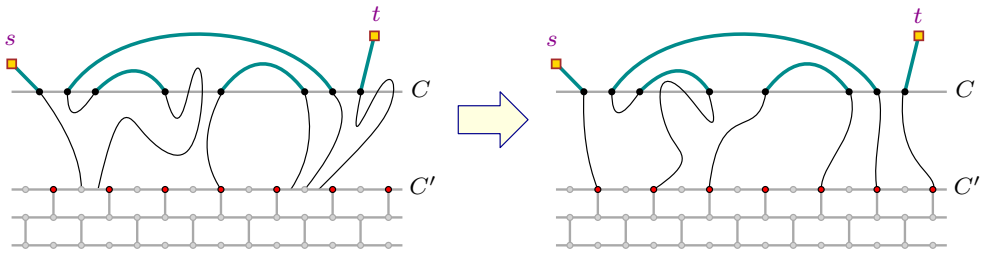


图 6：断言 3.1 的陈述的可视化。在两幅图中，边 $\{v_F, u_F\}$ 以蓝色表示，黑色顶点对应集合 Y，红色顶点对应集合 B。左图展示 $|Y|$ 从 Y 到 C'的不相交路径，而右图展示 $|Y|$ 从 Y 到 B的不相交路径。

断言 3.1。存在一个集合 $X \subseteq B$、一个双射 $\rho: Y \to X$，以及一个集合 $\mathcal{P} = \{P_v \mid v \in Y\}$，其中包含两两不相交的路径，使得对于每个 $v \in Y$， P_v 都是 $\mathcal{K}$ 中的一个（v、$\rho(v)$-路径。

断言 3.1 的证明。 反设存在一个集合 $S \subseteq V(\mathcal{K})$，其大小至多为 $\ell - 1$，使得在 $\mathcal{K} \setminus S$中不存在从 Y到 B的路径。

由于存在从 Y到 $V(C')$ 的 ℓ 条不相交路径，因此 $\mathcal{K} \setminus S$的一个连通分量 A 同时包含来自 Y 和 $V(C')$ 的顶点。由于 $Y \subseteq V(C)$， A 同时包含来自$V(C)$ 和 $V(C')$ 的顶点。此外，由于 $C' = L_{2k\cdot i_0}$，其中 $i_0 \in \{1, \dots, k+2\}$和 W至少有 $h(k)$ 层，且 $h(k) > 2k \cdot (k+2) + 2k$，因此存在至少 $2k$ 条从 $V(C)$ 到 B的顶点不相交路径。结合 $|S| < \ell$ 和 $\ell \le 2k$ 这一事实可知，$\mathcal{K} \setminus S$ 的一个连通分量 A' 同时包含来自 $V(C)$ 和 B的顶点。

由于 A和 A'都包含 C和 C'中的顶点，因此分别存在路径 P、P'，它们分别位于 A和 A'中，且都与 $V(C)$ 和 $V(C')$ 相交。由于$C = L_{2k\cdot(i_0-1)+1}$ 和 $C' = L_{2k\cdot i_0}$，可知存在 $2k$ 层与 $V(P)$ 和 $V(P')$ 都相交，从而在 $\mathcal{K}$中得到连接 $V(P)$ 与 $V(P')$ 的 $2k$ 条不相交路径。由于 $S < \ell$ 和 $\ell \le 2k$，上述连接 $V(P)$ 与 $V(P')$ 的不相交路径中，有些应当在 $\mathcal{K} \setminus S$中保持完整，这意味着 $A = A'$。然而，鉴于 A包含来自 Y的顶点，且 A' 包含来自 B的顶点，我们得出 S 不会分离Y 和 B，这与初始假设矛盾。因此，存在从 Y到 B的 ℓ 条不相交路径。我们令 X 为这些路径在 B中的端点，这就证明了该结论。 □

根据断言 3.1，令 $X \subseteq B$，令一个双射 $\rho: Y \to X$，并令一个集合 $\mathcal{P} = \{P_v \mid v \in Y\}$，其中的路径两两不相交，且对每个 $v \in Y$， P_v 是v， $\rho(v)$-路径，且位于 $\mathcal{K}$中。

现在，对于每个 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$，我们考虑通过边 $\{v_F, u_F\}$ 连接路径 P_{v_F} 和 P_{u_F} 后得到的路径 P_F（若 s、$t \in \{v_F, u_F\}$，我们只需在 $\mathcal{P}$ 中相应的路径上添加边 $\{v_F, u_F\}$ 将其延长）。令 G'' 为将 G' 中的每个 P_F 、 $F \in \mathcal{F}_{i_0}$ 收缩为边 e_{P_F} 后得到的图，并令 $E = \{e_{P_F} \mid F \in \mathcal{F}_{i_0}\}$。那么，注意到 G'' 包含 $W^{(2k \cdot i_0)}$ 作为子图，且由于 $h(k) = 2k \cdot (k+2) + 2k + 1$，墙 $W^{(2k \cdot i_0)}$ 至少有 $k+1$ 层，因此其高度至少为 $2k+3$。因此，根据引理 1， G'' 包含一条 (s,t)-路径，该路径包含 E 中的所有边，且它与罗盘$(W^{(2k \cdot i_0 + k + 1)})$ 的交集是 perim$(W^{(2k \cdot i_0 + k + 1)})$ 的一条路径，其端点是 W 的分支顶点。

因此，利用 G'' 中的这条（s,t）-路径，我们可以找到一条（s,t）-路径 $P^\star$，它位于 G 中，包含 S，并且它与罗盘$(W^{(2k \cdot i_0 + k + 1)})$ 的交集是一条周界$(W^{(2k \cdot i_0 + k + 1)})$ 路径，其端点（记为 x 和 y）是 W 的分支顶点。最后，令罗盘 $(W^{(2k \cdot i_0 + k + 1)})$ 中的一条（ x, y ）路径为 $R_{x,y}$，其与罗盘 $(W(h(k)))$ 的交集是一条周界$(W(h(k)))$ 路径，其端点是 W 的分支顶点。证明最后指出，（$P^\star \setminus V($罗盘$(W^{(2k \cdot i_0 + k + 1)}))) \cup R_{x,y}$ 正是引理陈述中所称的（s,t）-路径。 □

我们强调，虽然 引理 2 处理的是“重新布线”一条（s， t）-路径的情形，但我们可以采用相同的论证，对一条包含固定集合 S 且远离某个墙的内部部分的圈进行“重新布线”。

3.2 小树宽的等价实例

在本小节中，我们证明存在一种算法，它接收一个框架 (G, M)，其中G 是一个树宽“足够大”的平面图，以及两个顶点 s， $t \in V(G)$，并输出以下二者之一：一份报告，说明 G 包含一条秩至少为 k 的 (s, t)- 路径；或一个可以安全移除的无关顶点。在框架中，要移除一个顶点，必须将该顶点从 G 中移除，并限制拟阵。

拟阵的限制。设 $M = (V, \mathcal{I})$ 是一个拟阵，且 $S \subseteq V$。我们将 M 到 S 的限制记为 $M|S$，它是定义在集合 S 上的拟阵，其独立集是 $\mathcal{I}$ 中包含于 S 的集合。给定一个 $v \in V$，我们用 $M \setminus v$ 表示拟阵 $M|(V \setminus \{v\})$。

本小节的目标是证明以下结论。

引理 3. 存在一个函数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及一种算法：给定一个整数 $k \in \mathbb{N}$、一个框架 (G, M)，其中 M是一个可在时间 $\|M\|^{\mathcal{O}(1)}$内验证独立性的拟阵，且 G 是一个树宽至少为 $g(k)$的平面图，以及两个顶点 $s, t \in V(G)$，该算法可在时间$2^{2^{\mathcal{O}(k \log k)}} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$内输出，

- 要么报告 G 包含一条秩至少为 k 的(s,t)-路径，要么
- 一个顶点 $v \in V(G)$，使得(G, M, k, s, t) 和$(G \setminus v, M \setminus v, k, s, t)$ 是 Maximum Rank (s,t)-Path的等价实例。

此外， $g(k) = 2^{\mathcal{O}(k \log k)}$。

请注意，如果 M 是在有限域或 $\mathbb{Q}$上表示的，我们可以在关于 $\|M\|$的多项式时间内验证其独立性。为了证明 引理 3，我们还需要一些额外的定义和结果。

墙的打包。设 G 是一个平面图，且 W 是 G 的一面墙。设 z、q 是两个非负奇数，且 $r \in \mathbb{N}$。如果存在一个子墙的集合 $\mathcal{W} = \{W_0, W_1, \ldots, W_r\}$，其中 W_0 是 W 的一面高度为 j 的子墙（对于某个奇数 $j \geq 2z$），并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，W_i 是 W_0 的一面高度至少为 q 的子墙，使得 $V(W_i)$ 是 $V(W(z+1)\ 0\ )$ 的子集，并且对于每个 i、$j \in \{1, \ldots, r\}$，其中 $i \neq j$、V(罗盘(W_i')) 以及 V(罗盘(W_j')) 两两不相交，则称 W 允许一个 (z, r, q)-墙打包。我们称 $\mathcal{W}$ 为 W 的一个 (z, r, q)-墙打包（图3展示了墙 W 的打包示意图）。

观察 1。给定奇整数 z、$q \in \mathbb{N}$、一个 $r \in \mathbb{N}$ 和一个平面图 G，每个高度至少为 $z + \lceil\sqrt{r}\rceil \cdot (q+1)$ 的 G的墙 W 都容许一个（z、r、q）-打包。

设 W 是一个平面图的墙。我们用 $\rho(W)$ 表示 $r(V($罗盘($W))$).

引理 *4*。存在一个函数 $f\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$，以及一个算法：给定整数 k、z、r、$q \in \mathbb{N}$（其中 z、q 为奇数）、一个框架 (G, M)（其中 G 是平面的，M 是一个拟阵，并且我们可以在时间 $\|M\|^{\mathcal{O}(1)}$ 内验证独立性），以及一个高度至少为 $f(k, z, r, q)$ 的 G的墙 W，满足 $\rho(W) \leq k$，该算法能在 $k \cdot r \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内输出一个 (z, r, q)-打包 $\mathcal{W} = \{W_0, W_1, \ldots, W_r\}$，其中 W 满足：对于每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，$\rho(W_i) = \rho(W_0)$。此外，$f(k, z, r, q) = \mathcal{O}(r^{k/2} \cdot z \cdot q)$。

证明。我们定义函数 $f\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $z, r, q \in \mathbb{N}$, $f(1, z, r, q) = z + \lceil\sqrt{r}\rceil \cdot (q+1)$；而对于 $k > 1$，我们令 $f(k, z, r, q) = z + \lceil\sqrt{r}\rceil \cdot (f(k-1, z, r, q) + 1)$。注意，由于 r, q 是奇数，对于每个 $k, z \in \mathbb{N}$，$f(k, z, r, q)$ 都是奇数。

我们通过对 k 进行归纳来证明该引理。显然，若 $k = 1$，则该引理显然成立，因为根据 观察 1，存在一个 (z, r, q)-打包 $\mathcal{W}$，其属于 W；并且，由于对于每个 $W' \in \mathcal{W}$罗盘(W' 都是 罗盘(W 的子图，因此我们有 $\rho(W') \leq \rho(W)$，从而 $\rho(W') = 1$。

现在假设 $k > 1$，且该引理对小于 k 的值成立。我们令 $w = f(k-1, z, r, q)$。由于 W 的高度至少为 $z + \lceil\sqrt{r}\rceil \cdot (w+1)$，观察 1 表明 W 存在一个 (z, r, w)-打包 $\mathcal{W} = \{W_0, W_1, \ldots, W_r\}$。根据定义，对于每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，$V($罗盘($W_i))$ 是 $V($罗盘($W_0))$ 的子集，因此对于每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，有 $\rho(W_i) \leq \rho(W_0)$。我们对每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 计算 $\rho(W_0)$ 和 $\rho(W_i)$。这可以在 $r \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内完成。如果存在一个 $i \in \{1, \ldots, r\}$ 使得 $\rho(W_i) < \rho(W_0)$，那么根据应用于 W_i 的归纳假设，存在一个 W_i 的 (z, r, q)-打包 $\mathcal{W}_i$，使得 $\mathcal{W}'$ 中的所有墙具有相同的秩。注意到 $\mathcal{W}_i$ 也是 W 的 (z, r, q)-打包，且 $f(k, z, r, q) = \mathcal{O}(r^{k/2} \cdot z \cdot q)$，即可得出该引理。 □

现在我们可以证明引理 3。

引理 *3*的证明。我们令

$$b = h(k), \qquad x = k+1, \qquad z = (k+1) \cdot b,$$
$$q = f(k-1, z, x, 3), \qquad r = 1 + \lceil\sqrt{k}\rceil \cdot (q+1), \qquad g(k) = 36(r+1).$$

我们首先假设 G 是 2-连通的。如果 G 不连通，那么我们将问题拆分为若干子问题，每个子问题对应于 G 的一个 2-连通分量 B；如果 B 的顶点被 G 的割点 v 与 s 或 t 分隔开，那么我们分别考虑令 v 为 s 或 t 的问题。

由于 G 的树宽至少为 $g(k) = 36(r+1)$，根据命题 1，存在一个 G 的 $(4r+1)$-墙。接着，我们考虑一个 G 的 r-墙 W，使得 s、$t \notin$ 是罗盘（W），并且有一个 W 的（1，k，q）-打包 $\mathcal{W} = \{W_0, W_1, \ldots, W_k\}$。这个（1，$k$，$q$）-打包的存在，是因为 $r = 1 + \lceil\sqrt{k}\rceil \cdot (q+1)$，并且依据观察 1，我们可以在 $\mathcal{O}(n)$ 的时间内找到它。对于每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，我们设

$K_i := V$（罗盘（W_i））。然后，对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，计算 K_i 的秩。这可以在 $k \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内完成

若每个 K_i 的秩至少为 k，那么注意到存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，使得 $r(S) = k$，且对每个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，都有 $|S \cap K_i| = 1$。为得到一条 (s,t)-路径 P，满足 $S \subseteq V(P)$，我们按如下步骤进行：首先，从 W_0 的周界选取两条不相交路径 P_s, P_t，分别连接到 s 和 t（它们存在，因为 G 是 2-连通的）。令 D 为 W_0 的周界，并令 s' 和 t' 分别为 P_s 和 P_t 在 D中的端点。此外，令 L_2 为 W_0的第二层。注意，由于墙的罗盘是一个连通图，还存在一条位于 G 中的路径 P，其端点（记作 x, y）位于 L_2中，且 P的任何内部顶点都不是 L_2的顶点，并且 $S \subseteq V(P)$。最后，注意到在由 D 和 L_2 围成的闭圆盘中，存在两条不相交路径 $P_{s'x}, P_{t'y}$，分别连接 s' 与 x、t'与 y；并且 $P := P_s \cup P_{s'x} \cup P \cup P_{t'y} \cup P_t$ 是一条 (s,t)-路径，满足 $S \subseteq V(P)$（见图 2）。

现在假设存在一个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得 K_i 的秩至多为 $k-1$。由于相应的墙 W_i 的高度至少为 $q = f(k-1, z, x, 3)$，根据引理 4，我们可以找到 W_i 的一个 $(z, x, 3)$-打包 $\mathcal{W}' = \{W'_0, W'_1, \ldots, W'_x\}$，使得对于每个 $j \in \{1, \ldots, x\}$, $\rho(W'_j) = \rho(W'_0)$。我们将 W'_1 的一个中心顶点设为 v。

现在我们证明，(G, M, k, s, t) 和 $(G \setminus v, M \setminus v, k, s, t)$ 是 MaximumRank (s,t)-Path 的等价实例。我们证明，若 (G, M, k, s, t) 是一个是实例，则 $(G \setminus v, M \setminus v, k, s, t)$ 也是一个是实例，因为反向蕴含显然成立。若 (G, M, k, s, t) 是一个是实例，则存在一个顶点集 $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V(G)$ 和 G 中的一条 (s,t)-路径 P，使得 $r(S) = k$且$S \subseteq V(P)$。由于 $z = (k+1) \cdot b$，可知存在一个 $i \in \{1, \ldots, k+1\}$，使得顶点集 $V(\text{compass}(W'((i-1)\cdot b+1)) \setminus V(\text{inn}(W'(i\cdot b))))$ 与 S 不相交；我们将其记为 D_i。令 S 中包含于 $\text{compass}(W'(i\cdot b))$ 的顶点为 S_{in}，并令 S_{out} 为集合 $S \setminus S_{\text{in}}$。我们将证明存在一个集合 $S' \in \mathcal{I}(M \setminus v)$ 和一条路径 P'，使得 $|S_{\text{out}} \cup S'| \geq k$, $S_{\text{out}} \cup S' \subseteq V(P')$ 且 $V(P') \subseteq V(G \setminus v)$。

我们假设 $v \in V(P)$，否则令 $S' := S_{\text{in}}$和 $P' := P$，引理即得。根据引理 2，存在一条路径 $\tilde{P}$，使得 $S_{\text{out}} \subseteq V(\tilde{P})$ 且 $V(\tilde{P}) \cap V(\text{罗盘}(W'_{(i\cdot b)\,0}))$ 是一条路径 $\hat{}P$ 的顶点集，该路径的 W'_0 位于周界$(W'_{(i\cdot b)\,0})$ 中，且其端点是 $W'^{0}_{(i\cdot b)}$ 的分支顶点。$\hat{}$ 令 $v_{\hat{}P}$ 和 $u_{\hat{}P}$ 为 P 的端点。

对于每个 $j \in \{1, \ldots, x\}$，由于 $\rho(W'_j) = \rho(W'_0)$，且 S_{in} 是 M 的独立集，并且是罗盘(W_0) 的子集，因此存在一个独立集 S_j，使得 $|S_j| = |S_{\text{in}}|$。令 $S' = \{y_2, \ldots, y_x\}$，其中 y_j 是 $S_j, j \in \{1, \ldots, x\}$ 中的一个顶点。注意，S' 是 M 的一个大小为 $x-1$ 的独立集。由于 $x = k+1$，我们有 $|S'| = k$，因此 $|S_{\text{out}} \cup S'| \geq k$。此外请注意，对于每个 u_1，$u_2 \in L_z$ 中存在一条 (u_1, u_2)-路径 $P^\star$，该路径位于 $W(z) \setminus (V(L_z) \setminus \{u_1, u_2\})$ 中，包含 S' 且避开 v。容易看出，在罗盘$(W'(i\cdot b)\,0)$ 中存在两条不相交路径 Q_1，Q_2，分别将 $\{v_{\hat{}P}, u_{\hat{}P}\}$ 与 $\{u_1, u_2\}$ 相连，并且可以选取这两条路径，使其与 P 和 $P^\star$ 内部不相交。因此，若 $\tilde{P}'' \cup Q_1 \cup Q_2 \cup P^\star$ 是从 $\tilde{P}'$ 中删除 $\hat{}P$ 的所有内部顶点后得到的图，则 $\tilde{P}'' \cup Q_1 \cup Q_2 \cup P^\star$ 是所要求的 (s,t)-路径，包含 $S' \cup S_{\text{out}}$ 且避开 v（见图3）。 □

4 D小树宽实例的动态规划

在本节中，我们旨在描述一种动态规划算法，用于求解 Maximum Rank(s,t)-Path 框架(G, M)，其中 G的树宽至多为 q，且 M是一个线性拟阵。

引理 5. 设 $\mathbb{F}$是一个有限域或 $\mathbb{Q}$。存在一种算法，给定一个框架 (G, M)，其中 M是一个 $\mathbb{F}$-线性拟阵，G是一个图，两个非负整数 k和 q（其中 $k \leq q$），以及 G的一个宽度为 q的树分解，可在 $2^{q^{\mathcal{O}(1)}} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内输出一份报告，说明

G 是否包含一条秩至少为 k 的 (s,t)-路径。

本节安排如下。在第 4.1 节中，我们定义优良树分解（即用于执行动态规划的组合结构）以及代表集；代表集用于高效地编码动态规划表中的部分解。在第 4.2 节中，我们定义问题的部分解。接着，在第 4.3 节中，我们给出引理 5 中的动态规划算法，并在第 4.4 节 中证明其正确性。最后，我们给出定理 1 （第 4.5 节）的证明。

4.1 优良树分解与代表集

我们先从优良树分解的定义开始本小节。

优良树分解。设 G 是一个图。若 G 的树分解 $\mathcal{T}=(T,\ \mathcal{X})$ 满足以下条件，则称其为 G 的优良树分解：T 以某个叶节点 r 为根，且

- 对于任意叶节点 $l \in V(T)$，$X_l=\emptyset$（我们称其为 $\mathcal{T}$ 的叶节点，但不包括 X_r，我们称 X_r 为根节点），
- 每个 $t \in V(T)$至多有两个子节点，
- 如果 t 有两个子节点 t_1 和 t_2，那么 $X_t=X_{t_1}=X_{t_2}$ 和 X_t 称为合并节点，
- 如果 t 有一个子节点 t'，那么
  - either $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$ for some $v \in V(G)$ (we call X_t an *insert node*),
  - or $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$ for some $v \in V(G)$ (we call X_t a *forget node*).

众所周知，任何 G 都可以在线性时间内转换为宽度不变的优良树分解 [33]。我们用 G_t 表示由顶点集 $\bigcup_{t'} X_{t'}$所诱导的图，其中 t' 遍历 t的所有后代，包括 t。

在本文余下部分，给定 Maximum Rank (s,t)-Path 的一个实例 (G,M,k,s,t)以及 G的一个优良树分解 $(T,\mathcal{X})$，我们将考虑从 $(T,\mathcal{X})$ 得到的树分解 $(T,\mathcal{X}')$，该分解是在 $\mathcal{X}$中的每个包中添加顶点 s和 t后得到的。因此，叶节点和根节点都将等于集合 $\{s,t\}$。

令 $(G,\ M)$ 为一个框架，令 $(T,\ \mathcal{X})$ 为 G 的树分解。对于每个 $t \in V(T)$ 以及每个 $i \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathcal{S}_t^{(i)}$ 定义为所有满足以下条件的集合 $S \subseteq V(G_t) \setminus X_t$ 的集合：它们是 M 的独立集，且大小为 i。

代表集。我们的算法采用了 Fomin 等人 [19] 和 Lokshtanov 等人 [38] 得出的结果。

定义 2（q-代表集）。设 $M=$（V、$\mathcal{I}$）为一个拟阵，并设 $\mathcal{S}$ 为 V 的子集族，其中集合大小为 $\widehat{\ }$。对于正整数 q，如果满足以下条件，则称子族 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$ 的 q-代表子族：对于大小至多为 q 的每个集合 $Y \subseteq V$，如果存在一个与 Y 不相交且满足 $X \cup Y \in \mathcal{I}$ 的集合 $X \in \mathcal{S}$，那么就存在一个与 Y 不相交且满足 $X \cup Y \in \mathcal{I}$ 的集合 $X \in \mathcal{S}$。

我们用 $\widehat{\mathcal{S}} \subseteq^q_{rep} \mathcal{S}$ 表示 $\widehat{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ 是 S的 q-代表。对我们而言，关键在于可以高效地计算线性拟阵的代表族。为陈述这些结果，我们称集合族 $\mathcal{S}$ 为整数 $p \geq 0$ 的 p-族，如果对于每个 $S \in \mathcal{S}$，都有 $|S|=p$。

定理 2（[19, 定理 3.8]）。设 $M=(V,\mathcal{I})$ 是一个线性拟阵，且 $\mathcal{S}=\{S_1,\ldots,S_t\}$ 是由独立集构成的 p- 族。那么，存在一个大小至多为 $\binom{p+q}{p}$ 的 $\widehat{\mathcal{S}}\subseteq^q_{rep}\mathcal{S}$。此外，给定 M 在域 $\mathbb{F}$ 上的一个表示 A，存在一个随机化算法，可在 $\mathbb{F}$上用 $\mathcal{O}(\binom{p+q}{p}tp^\omega+t\binom{p+q}{q}^{\omega-1})+\|A\|^{\mathcal{O}(1)}$ 次运算计算出大小至多为 $\binom{p+q}{p}$ 的 $\widehat{\mathcal{S}}\subseteq^q_{rep}\mathcal{S}$，其中 ω 是矩阵乘法的指数。[1]

请注意，定理中的算法2 是随机化的。这是因为该算法的步骤之一是构造一个 k-截断[2]，其属于 M，用于 $k=p+q$。对于线性拟阵，可以通过算法构造 k-截断，但对于一般的线性拟阵，目前已知的只有随机化算法 [42]。在 [38], 中，Lokshtanov 等人针对表示在任意域上的线性拟阵给出了一种确定性算法，其中的域运算可以高效完成。特别地，这包括任意有限域和有理数域。由此，他们得到了以下定理。

定理 3 ([38, 定理 1.3])**.** 设 $M=(V,\mathcal{I})$ 是秩为 r 的线性拟阵，并且 $\mathcal{S}=\{S_1,\ldots,S_t\}$ 是独立集的 p-族。设 A 是一个在域 $\mathbb{F}$ 上表示 M 的 $r\times|V|$-矩阵，且 ω 是矩阵乘法的指数。那么存在确定性算法，可按如下方式计算 $\widehat{\mathcal{S}}\subseteq^q_{rep}\mathcal{S}$：

- 一个大小至多为 $\binom{p+q}{p}$ 的族，位于 $\mathcal{O}(\binom{p+q}{p}^2tp^3r^2+t\binom{p+q}{q}^\omega rp)+(r+|V|)^{\mathcal{O}(1)}$ 次对$\mathbb{F}$进行的操作中。
- 一个大小至多为 $rp\binom{p+q}{p}$ 的族，位于 $\mathcal{O}(\binom{p+q}{p}tp^3r^2+t\binom{p+q}{q}^{\omega-1}(rp)^{\omega-1})+(r+|V|)^{\mathcal{O}(1)}$ 次对$\mathbb{F}$进行的操-作中。

4.2 部分解

我们首先定义半匹配的概念，它直观地编码了路径的一部分。

半匹配。设 X 为一个集合。设 H 为一个图，其顶点集为 X，每个顶点的度至多为二，且该图无环。$\mathcal{M}$ 由H 的边和孤立顶点构成的集合称为 X的半匹配 。给定集合 X的一个半匹配 $\mathcal{M}$，我们用 $U(\mathcal{M})$表示X。注意，$|\{\mathcal{M}\mid\mathcal{M}\text{是 }X\}|=2^{\mathcal{O}(|X|\log|X|)}$的一个半匹配。我们用 $\mathcal{M}_1^{(v)}$ 表示集合 $\{\{v\}\}\cap\mathcal{M}$，用 $\mathcal{M}_2^{(v)}$ 表示集合 $\{\{u,v\}\mid\{u,v\}\in\mathcal{M}\}$，并用 $\mathcal{M}^{(v)}$ 表示集合 $\mathcal{M}_1^{(v)}\cup\mathcal{M}_2^{(v)}$。注意到 $|\mathcal{M}_2^{(v)}|\leq 2$。

给定集合 X 和 $v\in X$的半匹配 $\mathcal{M}$，我们用 $\mathsf{rem}(\mathcal{M},v)$ 表示半匹配$\mathcal{M}'=(\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}^{(v)})\cup\{\{u\}\mid\{u,v\}\in\mathcal{M}^{(v)}\text{和 }u\notin U(\mathcal{M}\setminus\mathcal{M}^{(v)})\}$。此外，给定集合 Y使得$X\subsetneq Y$，以及 $u\in Y\setminus X$，我们用 $\mathsf{add}(\mathcal{M},u)$ 表示 $X\cup\{u\}$的所有半匹配 $\mathcal{M}'$的集合，其中 $\mathcal{M}=\mathsf{rem}(\mathcal{M}',v)$。

线性森林。如果图 F 是一个最大度为二的无环图，我们就称其为线性森林。设 G 为一个图，F 为 G 的一个线性森林子图。给定集合 $X\subseteq V(G)$，我们将 $\mathsf{sig}_{G,\ X}(F)$ 定义为由以下元素组成的集合：(i) $X\cap V(F)$ 中在 F 中度为零的所有顶点；以及 (ii) $X\cap V(F)$ 中满足以下条件之一的顶点对 $\{u,v\}$：$\{u,v\}\in E(F)$

[1]当前最佳值为 $\omega\approx 2.3728596$ [1]。[2]如果对于每个 $X\subseteq V$，$X\in\mathcal{I}'$ 当且仅当 $X\in\mathcal{I}$且$|X|\leq k$，则拟阵 $M'=(V,\mathcal{I}')$ 是 $M=(V,\mathcal{I})$ 的 k-*truncation*。

或者 F 中存在一条 $(u,\ v)$-路径，且它与 X 的交集仅为其端点。注意，$\mathrm{sig}_{G,\ X}(F)$ 是 $X \cap V(F)$ 的一个半匹配。

现在，我们可以定义什么才算是我们问题的部分解。

部分解。设 G 是一个图，令 s、$t \in V(G)$，并设 $\mathcal{T} = (T, \mathcal{X})$ 是 G 的一个良好树分解。给定一个 $t \in V(T)$，我们将 t 处的一个部分解定义为四元组 $(X, \mathcal{M}, i, S)$，其中 $\{s,t\} \subseteq X \subseteq X_t$、$\mathcal{M}$ 是 X、$i \in \{1,\ldots,k\}$ 的一个半匹配，并且 $S \in \mathcal{S}_t^{(i)}$，使得存在一个线性森林 $F \subseteq G_t$，其中 $X = V(F) \cap X_t$，$\mathcal{M} = \mathrm{sig}_{G_t, X_t}(F)$，且 $S \subseteq V(F)$。请记住，$S \subseteq V(G_t \setminus X_t)$，因此 $S \subseteq V(F \setminus X_t)$。我们还称线性森林 F 是 $(X, \mathcal{M}, i, S)$ 在 t 处为部分解的证明。我们用 $\mathcal{B}_t$ 表示 t 处所有部分解构成的集合。

我们很容易观察到以下结论。

观察 2。设 (G, M) 为一个框架，且 $k \in \mathbb{N}$。那么 G 包含一条秩至少为 k 的 (s,t)-路径，当且仅当存在一个集合 $S \in \mathcal{S}_r^{(k)}$，使得 $(\{s,t\}, \{\{s,t\}\}, k, S) \in \mathcal{B}_r$。

4.3 动态规划算法

现在，我们已经准备好描述引理 5 中的动态规划算法。对于每个 $t \in V$（T），我们的目标是构造一个由部分解组成的集合 $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{B}_t$，并使其规模保持“较小”，因为我们无法承担存储所有大小为 i 的独立集的开销，因此也无法存储 $\mathcal{B}_t$ 中的所有部分解。为此，我们将使用代表集，而不是存储所有可能的独立集，并利用定理 3。因此，对于每个 $X \subseteq X_t$、X 的每个半匹配 $\mathcal{M}$，以及每个 $i \in \{1,\ldots,k\}$，我们只保留一个由独立集 $\widehat{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}_t^{(i)}$ 构成的“代表”集合，使得对于每个 $S \in \mathcal{S}_t^{(i)}$，$\widehat{\ }$（$X$、$\mathcal{M}$、$i$、$S$）$\in \mathcal{B}_t$，当且仅当存在一个 $S' \in \mathcal{S}$，使得（X、$\mathcal{M}$、i、S'）$\in \mathcal{F}_t$。给定一个由拟阵 M 的独立集组成的 p-族 $\widehat{\ }\mathcal{S}$，我们使用 $\mathrm{Rep}(\mathcal{S})$ 表示由定理 3 给出的、关于 $\mathcal{S}$ 的 k-代表子族 $\mathcal{S}$。

叶节点 t。此处，如 $X_t = \{s,t\}$，图 $G_t \setminus X_t$ 为空，因此我们令 $\mathcal{F}_t = \{(\{s,t\},\ \{\{s,t\}\},\ 0,\ \emptyset)\}$.

插入节点 t，**其子节点为** t'。我们知道 $X_t \supseteq X_{t'}$ 和 $|X_t| = |X_{t'}| + 1$。令 v 为 $X_t \setminus X_{t'}$ 中的顶点。对于每个包含 s 和 t 的 $X \subseteq X_t$、X 的每个半匹配以及每个 $i \in \{0,\ldots,k\}$，我们设定

$$\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i] = \begin{cases} \{S \mid (X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{F}_{t'}\}, & \text{if } v \notin X, \\ \{S \mid (X \setminus \{v\}, \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v), i, S) \in \mathcal{F}_{t'}\}, & \text{if } v \in X \text{ and } \mathcal{M}_2^{(v)} \subseteq E(G_t), \\ \emptyset, & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

我们将 $\mathcal{F}_t = \{(X, \mathcal{M}, i, S) \mid S \in \mathsf{Rep}(\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i])\}$ 设为集合。

遗忘节点 t，**其子节点为** t'。我们知道 $X_t \subseteq X_{t'}$ 和 $|X_t| = |X_{t'}| - 1$。令 v 为 $X_{t'} \setminus X_t$中的顶点。对于每个包含 s 和 t的 $X \subseteq X_t$、X 的每个半匹配 $\mathcal{M}$ 以及每个$i \in \{0,\ldots,k\}$，我们令

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i] = {} & \{S \mid (X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{F}_{t'}\} \\ & \cup \left\{S \mid \exists \mathcal{M}' \in \mathsf{add}(\mathcal{M}, v) : (X \cup \{v\}, \mathcal{M}', i, S) \in \mathcal{F}_{t'}\right\} \\ & \cup \left\{S \cup \{v\} \mid \exists \mathcal{M}' \in \mathsf{add}(\mathcal{M}, v) : (X \cup \{v\}, \mathcal{M}', i-1, S) \in \mathcal{F}_{t'} \ \&\ S \cup \{v\} \in \mathcal{I}(M)\right\} \end{aligned}$$

我们将 $\mathcal{F}_t = \{(X,\ \mathcal{M},\ i,\ S) \mid S \in \mathsf{Rep}(\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i])\}$。

合并节点 t 及其子节点 t_1 和 t_2。 我们知道 $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$。给定集合 X 的一个半匹配$\mathcal{M}$，我们用 $\xi(\mathcal{M})$ 表示所有满足 $\mathcal{M}_1$，$\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}$、$\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 的有序对 $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ 组成的集合。对于每个包含 s 和 t 的 $X \subseteq X_t$、X 的每个半匹配$\mathcal{M}$ 以及每个 $i \in \{0, \ldots, k\}$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i] = \{S_1 \cup S_2 \quad | \quad & \exists (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \in \xi(\mathcal{M})\ \exists i_1, i_2 \in \{0, \ldots, k\} : i_1 + i_2 = i \text{ and,} \\ & \text{if } X_i = U(\mathcal{M}_i), i \in \{1, 2\}, \text{ then } S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}(M), \\ & (X_1, \mathcal{M}_1, i_1, S_1) \in \mathcal{F}_{t_1} \text{ and } (X_2, \mathcal{M}_2, i_2, S_2) \in \mathcal{F}_{t_2}\}\end{aligned}$$

我们令 $\mathcal{F}_t = \{(X, \mathcal{M}, i, S) \mid S \in \mathsf{Rep}(\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i])\}$。

我们的动态规划算法以自底向上方式计算每个 $\mathcal{F}_t$ $t \in V(T)$，并检查是否存在一个大小为 k 的集合 $S \in 2^{V(G)} \cap \mathcal{I}(M)$，使得 $(\{s, t\}, \{\{s, t\}\}, k, S) \in \mathcal{F}_r$。如果存在，则输出报告，说明存在一条秩至少为 k 的 G 的 (s, t)-路径；否则输出报告，说明不存在这样的路径。

4.4 动态规划算法的正确性证明

为了证明 第 第 4.3 节 中所述算法的正确性，我们首先证明以下 .

引理 6。 对于每个 $t \in V(T)$，$\mathcal{F}_t \subseteq \{(X, \mathcal{M}, i, S) \mid S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]\} \subseteq \mathcal{B}_t$ 和 $|\mathcal{F}_t| = 2^{q^{\mathcal{O}(1)}}$。

证明。 我们通过沿分解树进行自底向上的归纳来证明该引理。设 $t \in V(T)$。根据节点 X_t的类型，我们区分不同的情况。

情况 *1*： X_t 是一个叶节点。

在这种情况下，该引理的陈述显然成立。

在以下情况下（即当 X_t 是插入节点、遗忘节点或合并节点时），我们将证明 $\{(X, \mathcal{M}, i, S) \mid S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]\} \subseteq \mathcal{B}_t$，因为根据 定理 3，$\mathcal{F}_t \subseteq \{(X, \mathcal{M}, i, S) \mid S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]\}$ 且 $|\mathcal{F}_t| = 2^{q^{\mathcal{O}(1)}}$。

情况 *2*： X_t 是一个插入节点。

令 t' 为 t 的子节点。令 $(X, \mathcal{M}, i, S)$ 满足 $S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]$。如果 $v \notin X$，则 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{F}_{t'}$。根据归纳假设，存在一个线性森林 F'，它可以证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_{t'}$。由于 $v \notin X$ 且 $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$，因此 F' 也是 G_t 中的一个线性森林，其中 $X = V(F') \cap X_t$ 且 $\mathcal{M} = \mathsf{sig}_{G_t, X_t}(F')$。因此，$F'$ 可以证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_t$。如果 $v \in X$ 且 $\mathcal{M}_2^{(v)} \subseteq E(G_t)$，那么 $(X \setminus \{v\}, \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v), i, S) \in \mathcal{F}_{t'}$，因此，根据归纳假设，$(X \setminus \{v\}, \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v), i, S) \in \mathcal{B}_{t'}$。这意味着存在一个线性森林 F'，可以证明 $(X \setminus \{v\}, \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v), i, S) \in \mathcal{B}_{t'}$。由于 $\mathsf{sig}_{G_{t'}, X_{t'}}(F') = \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v)$，$\mathcal{M}$ 是 X 的一个半匹配，且 $\mathcal{M}_2^{(v)} \subseteq E(G_t)$，因此 $F \cup \{v, \mathcal{M}_2^{(v)}\}$ 是一个线性森林，我们将其记为 F'。注意，F' 可以证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_t$。

情况 *3*： X_t 是一个遗忘节点。

令 t'为 t的子节点，并令 $(X, \mathcal{M}, i, S)$，使得 $S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]$。注意，如果 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{F}_{t'}$，则存在一个线性森林 F'，可证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_{t'}$；而且，$v \notin X_t$（因此 $v \notin X$）这一事实意味着 F'也可证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_t$。如果存在一个 $\mathcal{M}' \in \mathsf{add}(\mathcal{M}, v)$，使得 $(X \cup \{v\}, \mathcal{M}', i, S) \in \mathcal{F}_{t'}$，则存在一个线性森林 F'，可证明 $(X \cup \{v\}, \mathcal{M}', i, S) \in \mathcal{B}_{t'}$。在这种情况下，$V(F') \cap X_t = X$，且 $\mathsf{sig}_{G_t, X_t}(F') = \mathcal{M}$。因此，$F'$

可证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_t$。最后，如果 $S = S' \cup \{v\}$，且存在一个 $\mathcal{M}' \in \mathsf{add}(\mathcal{M}, v)$，使得 $(X \cup \{v\}, \mathcal{M}', i-1, S') \in \mathcal{F}_{t'}$并且 $S' \cup \{v\} \in \mathcal{I}(M)$，则存在一个线性森林 F'，可证明 $(X \cup \{v\}, \mathcal{M}', i-1, S') \in \mathcal{B}_{t'}$。同一个线性森林 F'可证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_t$。

情况 *4*： X_t 是一个合并节点。

令 t_1和 t_2为 t的两个子节点，并令 $(X, \mathcal{M}, i, S)$ 满足 $S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]$。根据定义，存在一对 $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \in \xi(\mathcal{M})$ 以及两个整数 $i_1, i_2 \in \{0, \ldots, k\}$，使得 $i_1 + i_2 = i$；并且，若 $X_i = U(\mathcal{M}_i)$ $i \in \{1, 2\}$，则 $(X_1, \mathcal{M}_1, i_1, S_1) \in \mathcal{F}_{t_1}$，$(X_2, \mathcal{M}_2, i_2, S_2) \in \mathcal{F}_{t_2}$，且 $S = S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}(M)$。根据归纳假设，存在一个线性森林 $F_1 \subseteq G_{t_1}$，可证明 $(X_1, \mathcal{M}_1, i_1, S_1) \in \mathcal{B}_{t_1}$；还存在一个线性森林 $F_2 \subseteq G_{t_2}$，可证明 $(X_2, \mathcal{M}_2, i_2, S_2) \in \mathcal{B}_{t_2}$。由于 $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$ 且 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$，因此 $F_1 \cup F_2$是 G_t的一个线性森林，满足 $\mathsf{sig}_{G_t, X_t}(F_1 \cup F_2) = \mathcal{M}$。由此可得， $F_1 \cup F_2$可证明 $(X, \mathcal{M}, i, S) \in \mathcal{B}_t$。 □

现在我们证明下面的引理，它说明了我们的动态规划算法的正确性。

引理 *7.* 设 P 是 G 的一条 *(s, t)*-路径，并设 S 是 $V(P)$ 的一个子集，且是 M 的一个大小至少为 k 的独立集。对于每个 $t \in V(T)$，如果 F_t 是图 $P \cap G_t$, $S_t = S \cap V(G_t \setminus X_t)$, $|S_t| = i$, *and* $X = V(P) \cap X_t$，且 $\mathcal{M} = \mathsf{sig}_{G_t, X_t}(F_t)$，那么对于每个 $S' \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]$，如果 F' 证明了 $(X, \mathcal{M}, i, S') \in \mathcal{B}_t$，则 $F' \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 *(s, t)*- 路径，且包含集合 $S' \cup (S \setminus S_t)$。

证明。我们通过沿分解树自底向上的归纳来证明该引理。设 P 是 G 的一条 (s, t)- 路径，并设 S 是 $V(P)$ 的一个子集，且是 M 的一个大小至少为 k 的独立集。此外，设 $t \in V(T)$。令 F_t 为图 $P \cap G_t$, $S_t = S \cap V(G_t \setminus X_t)$, $|S_t| = i$, and $X = V(P) \cap X_t$，且$\mathcal{M} = \mathsf{sig}_{G_t, X_t}(F_t)$。

情况 *1*： X_t 是一个叶节点。

在这种情况下，引理显然成立。

情况 *2*： X_t 是一个插入节点。

设 t' 是 t 的子节点。根据归纳假设，若 $F_{t'}$ 是图 $P \cap G_{t'}$， $S_{t'} = S \cap V(G_{t'} \setminus X_{t'})$， $|S_{t'}| = i$, $X' = V(P) \cap X_{t'}$，且 $\mathcal{M}' = \mathsf{sig}_{G_{t'}, X_{t'}}(F_{t'})$，那么对于满足条件 $(X', \mathcal{M}', i, S'') \in \mathcal{B}_{t'}$ 的 $S'' \in \mathcal{S}_{t'}[X', \mathcal{M}', i]$，若 F'' 能证明 $(X', \mathcal{M}', i, S'') \in \mathcal{B}_{t'}$，则 $F'' \cup (P \setminus V(F_{t'}))$ 是 G 的一条 (s, t)-路径，且包含集合 $S'' \cup (S \setminus S_{t'})$。我们将证明，对于每个 $S' \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]$，若 F' 能证明 $(X, \mathcal{M}, i, S') \in \mathcal{B}_t$，则 $F' \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 (s, t)-路径，且包含集合$S' \cup (S \setminus S_t)$。

如果 $v \notin X$，那么事实 $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$ 意味着 $F_t = F_{t'}$、 $S_t = S_{t'}$、 $X = X'$ 和 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$。因此，由于在这种情况下 $\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i] = \{S \mid （X、 \mathcal{M}、 i、 S） \in \mathcal{F}_{t'}\}$，所以有 （X、 $\mathcal{M}$、 i、 S′） $\in \mathcal{F}_{t'}$。此外，根据引理 6， $\mathcal{F}_{t'} \subseteq \{$（X、 $\mathcal{M}$、 i、 S） $\mid S \in \mathcal{S}_{t'}[X, \mathcal{M}, i]\} \subseteq \mathcal{B}_{t'}$。因此，如果 F' 证明（X、 $\mathcal{M}$、 i、 S′） $\in \mathcal{B}_{t'}$，那么 $F' \cup$（$P \setminus V$（$F_{t'}$））是 G 中的一条（s、 t）-路径，且包含集合 $S' \cup$（$S \setminus S_{t'}$）。注意， F' 也证明（X、 $\mathcal{M}$、 i、 S′） $\in \mathcal{B}_t$，并且由于 $F_t = F_{t'}$ 和 $S_t = S_{t'}$，我们有 $F' \cup$（$P \setminus V$（F_t））$= F' \cup$（$P \setminus V$（$F_{t'}$））， 且 $S' \cup$（$S \setminus S_t$）$= S' \cup$（$S \setminus S_{t'}$）。因此， $F' \cup$（$P \setminus V$（F_t））是 G 中的一条（s、 t）-路径，且包含集合 $S' \cup$（$S \setminus S_t$）。

若 $v \in X$ 且 $\mathcal{M}_2^{(v)} \subseteq E(G_t)$，则注意到 $F_{t'} = F_t \setminus \{v\}$, $S_t = S_{t'}$（因为 $S_t = S \cap V(G_t \setminus X_t) = S \cap V($ $G_{t'} \setminus X_{t'})$）， $X' = X \setminus \{v\}$，且 $\mathcal{M}' = \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v)$。因此，由于 $\mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i] = \{S \mid (X \setminus \{v\}, \mathsf{rem}(\mathcal{M}, v)\ i,$ $S) \in \mathcal{F}_{t'}\}$，且 $S' \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]$，我们有 $(X', \mathcal{M}', i, S') \in \mathcal{F}_{t'}$。此外，根据引理 6， $\mathcal{F}_{t'} \subseteq \{(X, \mathcal{M}, i, S)$ $\mid S \in \mathcal{S}_{t'}[X, \mathcal{M}, i]\} \subseteq \mathcal{B}_{t'}$。因此，若 F''证明 $(X', \mathcal{M}', i, S') \in \mathcal{B}_{t'}$，则 $F'' \cup (P \setminus V(F_{t'}))$ 是 G的一条 (s, t)-路径，其中包含集合 $S' \cup (S \setminus S_{t'})$。令 $F' = F'' \cup (\{v\}, \mathcal{M}_2^{(v)})$。注意到 F'是一个线性森林，这可由以下事实得出： F_t且

F''是线性森林，$F_{t'} = F_t \setminus \{v\}$，$\mathrm{sig}_{G_{t'},X_{t'}}(F_{t'}) = \mathrm{sig}_{G_{t'},X_{t'}}(F'')$，且 $\mathcal{M}_2^{(v)} \subseteq E(G_t)$。因此，$F'$证明 $(X,\mathcal{M},i,S'') \in \mathcal{B}_t$。此外，我们有 $F' \cup (P \setminus V(F_t)) = F'' \cup (P \setminus V(F_{t'}))$，且 $S'' \cup (S \setminus S_t) = S'' \cup (S \setminus S_{t'})$。于是，$F' \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，其中包含集合$S'' \cup (S \setminus S_t)$。为结束情况 2，注意若 $v \in X$ 且 $E(G_t) \setminus \mathcal{M}_2^{(v)} \neq \emptyset$, $\mathcal{S}_t[X,\mathcal{M},i] = \emptyset$。情况 3：$X_t$ 是一个遗忘节点。

令 t' 为 t 的子节点，并令 v 为 $X_{t'} \setminus X_t$ 中的顶点。根据归纳假设，如果 $F_{t'}$ 是图 $P \cap G_{t'}$、$S_{t'} = S \cap V(G_{t'} \setminus X_{t'})$、$|S_{t'}| = i$、$X' = V(P) \cap X_{t'}$，且 $\mathcal{M}' = \mathrm{sig}_{G_{t'},X_{t'}}(F_{t'})$，那么如果 $S'' \in \mathcal{S}_{t'}[X',\mathcal{M}',i]$ 和 F'' 证明了 $(X',\mathcal{M}',i,S'') \in \mathcal{B}_{t'}$，则 $F'' \cup (P \setminus V(F_{t'}))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，其中包含集合 $S'' \cup (S \setminus S_{t'})$。令 $S' \in \mathcal{S}_t[X,\mathcal{M},i]$。

如果 $(X,\mathcal{M},i,S') \in \mathcal{F}_{t'}$，那么根据引理 6，$(X,\mathcal{M},i,S') \in \mathcal{B}_{t'}$，因此存在一个线性森林 $F'' \subseteq G_{t'}$，证明 $(X,\mathcal{M},i,S') \in \mathcal{B}_{t'}$。注意，由于 $V(F'') \cap X_{t'} = X$，我们有 F'' 也是 G_t 中的一个线性森林，证明 $(X,\mathcal{M},i,S') \in \mathcal{B}_t$。因此，由于 $F'' \cup (P \setminus V(F_{t'})) = F'' \cup (P \setminus V(F_t))$ 且 $S'' \cup (S \setminus S_t) = S'' \cup (S \setminus S_{t'})$，我们有 $F'' \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，且包含集合 $S' \cup (S \setminus S_t)$。

如果存在一个 $\mathcal{M}' \in \mathsf{add}(\mathcal{M},v)$，使得 $(X \cup \{v\},\mathcal{M}',i,S') \in \mathcal{F}_{t'}$，那么根据引理 6，$(X \cup \{v\},\mathcal{M}',i,S') \in \mathcal{B}_{t'}$，因此存在一个线性森林 $F'' \subseteq G_{t'}$，用于证明 $(X \cup \{v\},\mathcal{M}',i,S') \in \mathcal{B}_{t'}$。注意，由于 $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$，我们有 $V(F'') \cap X_t$，且 $\mathrm{sig}_{G_t,X_t}(F'') = \mathcal{M}$。因此，$F''$证明了 $(X,\mathcal{M},i,S') \in \mathcal{B}_t$。此外，由于 $F'' \cup (P \setminus V(F_{t'})) = F'' \cup (P \setminus V(F_t))$ 且 $S'' \cup (S \setminus S_t) = S'' \cup (S \setminus S_{t'})$，我们有 $F'' \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，其中包含集合 $S' \cup (S \setminus S_t)$。

如果 $S' = S'' \cup \{v\}$，并且存在一个 $\mathcal{M}' \in \mathsf{add}(\mathcal{M},v)$，使得 $(X \cup \{v\},\mathcal{M}',i-1,S'') \in \mathcal{F}_{t'}$ 且 $S' \in \mathcal{I}(M)$，那么根据引理 6，$(X \cup \{v\},\mathcal{M}',i-1,S'') \in \mathcal{B}_{t'}$，因此存在一个线性森林$F'' \subseteq G_{t'}$，证明 $(X \cup \{v\},\mathcal{M}',i-1,S'') \in \mathcal{B}_{t'}$。事实 $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$ 意味着$S' \subseteq V(G_t \setminus X_t)$、$V(F'') \cap X_t$，且 $\mathrm{sig}_{G_t,X_t}(F'') = \mathcal{M}$。因此，$F''$证明了 $(X,\mathcal{M},i,S') \in \mathcal{B}_t$。此外，由于 $F'' \cup (P \setminus V(F_{t'})) = F'' \cup (P \setminus V(F_t))$，且 $S'' \cup (S \setminus S_t) = S'' \cup (S \setminus S_{t'})$，我们有 $F'' \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，其中包含集合 $S' \cup (S \setminus S_t)$。至此，情形 3 得证。

情形 *4*：X_t 是一个合并节点。

设 t_1、t_2 是 t 的两个子节点，并假设对 t_1、t_2，归纳假设均成立。请记住，$X_{t_1} = X_{t_2} = X_t$。此外，设 $S' \in \mathcal{S}_t[X,\mathcal{M},i]$。根据定义，$S' = S_1 \cup S_2$，使得存在一对 $(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) \in \xi(\mathcal{M})$，以及两个整数 i_1、$i_2 \in \{0,\ldots,k\}$，满足 $i_1 + i_2 = i$；并且，若 $X_i = U(\mathcal{M}_i)$ $i \in \{1,2\}$，则 $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}(M)$，$(X_1,\mathcal{M}_1,i_1,S_1) \in \mathcal{F}_{t_1}$，且 $(X_2,\mathcal{M}_2,i_2,S_2) \in \mathcal{F}_{t_2}$。根据引理 6，$(X_1,\mathcal{M}_1,i_1,S_1) \in \mathcal{B}_{t_1}$，且 $(X_2,\mathcal{M}_2,i_2,S_2) \in \mathcal{B}_{t_2}$，因此存在两个线性森林 $F_1 \subseteq G_{t_1}$ 和 $F_2 \subseteq G_{t_2}$，使得对每个 $i \in \{1,2\}$，F_i 可证明 $(X_i,\mathcal{M}_i,i_i,S_i) \in \mathcal{B}_{t_i}$。此外，根据归纳假设，$F_i \cup (P \setminus V(F_{t_i}))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，且包含集合$S_i \cup (S \setminus S_{t_i})$。事实 $(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) \in \xi(\mathcal{M})$ 表明，$F_1 \cup F_2$ 是 G_t 的一个线性森林，使得 $V(F_1 \cup F_2) \cap X_t = X$，且 $\mathrm{sig}_{G_t,X_t}(F_1 \cup F_2) = \mathcal{M}$。此外，由于 $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{I}(M)$ 且$i_1 + i_2 = i$，我们得到 $F_1 \cup F_2$ 可证明 $(X,\mathcal{M},i,S_1 \cup S_2) \in \mathcal{B}_t$。另外，对每个$i \in \{1,2\}$，$F_i \cup (P \setminus V(F_{t_i}))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，且包含集合 $S_i \cup (S \setminus S_{t_i})$；这一事实表明，$F_1 \cup F_2 \cup (P \setminus V(F_t))$ 是 G 的一条 (s,t)-路径，且包含集合 $S_1 \cup S_2 \cup (S \setminus V(S_t))$。情形 4 的证明至此完成。

□

我们通过证明引理 5来结束本小节。

引理 *5* 的证明引理 *5*。我们首先注意到，可以在时间 q内，将给定的宽度为 T 的 χ树分解转换为宽度为 q的优良树分解 $\mathcal{O}(q^2 \cdot n)$。此外，$|V(T)| = q^{\mathcal{O}(1)} \cdot n$。然后，

对于每个 $t \in V(T)$，我们以自底向上的方式计算集合 $\mathcal{F}_t$。根据引理 6，$|\mathcal{F}_t| = 2^{q^{\mathcal{O}(1)}}$ 和每个 $\mathcal{F}_t$ 都可以在时间 $2^{q^{\mathcal{O}(1)}} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$ 内计算，从而得到所声称的总运行时间。如果存在集合 $S \subseteq V(G)$ 使得 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, k, S\} \in \mathcal{F}_r$，那么我们输出一份报告，说明 G 包含一条秩至少为 k 的 (s,t)-路径；否则，我们报告不存在这样的路径于 G 中。算法的正确性由观察 2、引理 7 以及以下事实得出：根据定理 3，对于每个 $t \in V(T)$，$\mathcal{F}_t$ 是一个 k-代表族，且 $\mathcal{F}_t \subseteq \{(X, \mathcal{M}, i, S) \mid S \in \mathcal{S}_t[X, \mathcal{M}, i]\}$。

□

4.5 定理的证明定理 1

在定理 1的证明中，我们将使用 Korhonen 的树宽单指数时间 2-近似算法 [35]。

命题 2. 存在一种算法，对于给定的图 G 和一个整数 $k \in \mathbb{N}$，能够在时间 $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot |G|$内输出以下二者之一：$G$ 的一个宽度至多为 $2k+1$ 的树分解，或者一份报告，说明 G 的树宽大于 k。

证明定理 *1*。设 (G, M) 是一个框架，其中 G 是一个平面图，M 是一个拟阵，由其在有限域或有理数域上的表示给出，并且令 $k \in \mathbb{N}$。我们设$q = g(k)$，其中 g 是引理 3的函数。请注意，$g(k) = 2^{\mathcal{O}(k \text{ 对数 } k)}$。我们描述一种算法 $\mathcal{A}$，该算法求解 Maximum Rank (s, t)-Path。

我们的算法 $\mathcal{A}$首先调用命题 2 的算法来处理 G和 q，该算法运行时间为 $2^q \cdot n = 2^{2^{\mathcal{O}(k}\log k)} \cdot n$，并输出以下两者之一：宽度至多为 $2q$ 的 G 的树分解，或报告 G 的树宽大于 q。在第一种可能的输出中，我们使用引理 5 的算法，该算法运行时间为 $2^{q^{\mathcal{O}(1)}} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)} = 2^{2^{\mathcal{O}(k}\log k)} \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}$，并求解Maximum Rank (s,t)-Path。在第二种可能的输出中（即 G 的树宽至少为q），我们应用引理 3 的算法，并在时间 $2^{2^{\mathcal{O}(k}\log k) \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}}$ 内，要么报告 Maximum Rank (s,t)-Path 的肯定答案，要么找到一个顶点 $v \in V(G)$，使得 (G, M, k, s, t) 和 $(G \setminus v, M \setminus v, k, s, t)$ 是 Maximum Rank (s,t)-Path 的等价实例。如果后者发生，我们递归地对框架 $(G \setminus v, M \setminus v)$ 运行 $\mathcal{A}$。注意，$\mathcal{A}$ 的总体运行时间为 $2^{2^{\mathcal{O}(k}\log k) \cdot (|G| + \|M\|)^{\mathcal{O}(1)}}$。

□

5 结论

本文为框架 (G, M) 上的 Maximum Rank (s, t)-Path 提供了一种确定性 FPT算法，其中 G 是一个平面图，M 表示在有限域或有理数域上。最后，我们讨论一些有待研究的方向。

由于 [17] 关于 Maximum Rank (s, t)-Path 的算法运行时间为 $2^{\mathcal{O}(k^2 \log(k+q))} n^{\mathcal{O}(1)}$，一个自然的问题是，能否消除算法运行时间对参数 k 的双指数依赖。该算法见 定理 1。主要瓶颈在于：对于不包含无关顶点的图，其树宽的界仍然较大。具体而言，我们检测无关顶点的方法需要在图的一个给定墙中递归缩放，以寻找一个由$k+1$个 k-墙组成的打包，这些墙的罗盘具有特定的秩。为了进行这种缩放，需要初始墙的高度至少为 $k^{\mathcal{O}(k)}$。目前尚不清楚，能否避开这一论证，并在初始墙的高度关于 k 呈线性（甚至多项式）增长时检测无关顶点。

如引言中所述，[17] 的方法为更一般的问题 Maximum Rank (S, T)-Linkage提供了一种随机化算法。本文着重研究 $|S| = |T| = 1$ 这一特殊情形，并且可以探讨我们的方法能否用于解决如下更一般的问题：检测具有平面图和拟阵的框架中大秩的 (S, T)-联结

这些框架由有限域上的表示给出。我们的结果似乎并不能轻易推广到这种一般情形，因此我们将其留作一个开放的研究方向。

另一个自然的问题是，我们的方法能否推广，从而为具有更一般图类的框架得到确定性 FPT 算法。尽管将无关顶点技术论证的适用范围扩展到排除某个图作为子式的图类似乎是可行的，但这样的证明会非常复杂。对于一般图框架，目前尚不清楚能否实现不降低秩的重新布线，从而使无关顶点论证得以成立。

此外，沿着 [17], 一个有趣的开放问题是，能否为 Maximum Rank (s,t)-Path 获得确定性 FPT 算法，其中框架所含的拟阵无法在小阶有限域或有理数域上表示。例如，均匀拟阵以及更一般的横截拟阵都可以在有限域上表示，但表示所用的域必须足够大。虽然 [17] 的方法也能为横截拟阵框架提供随机化的FPT 算法，但我们的动态规划子程序依赖于高效计算代表集，这需要输入拟阵的线性表示。我们强调，这是证明定理 1 时唯一需要拟阵线性表示的地方。另一个有趣的开放问题是，当输入拟阵由其独立性预言机给出时， Maximum Rank (s,t)-Path 是否在以 k 和树宽为参数时属于 FPT。

参考文献

[1] J. Alman and V. V. Williams，改进的激光方法与更快的矩阵乘法，载于《2021年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2021，虚拟会议，2021年1月10日至13日，D. Marx 编，SIAM，2021年，第522–539页。16

[2] N. Alon, R. Yuster, and U. Zwick, 颜色编码，ACM 期刊，42卷（1995年），第 844–856 页。1[3] J. Baste, I. Sau, and D. M. Thilikos, 在有界树宽图上寻找连通图子式的复杂性二分：椅子图和旗帜图划定了边界，载于第 31卷届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA），2020年，第 951–970 页。2[4] A. Björklund, 无向哈密顿性的行列式求和，SIAM 计算期刊，43（2014年），第 280–299 页。2[5] A. Björklund, T. Husfeldt, P. Kaski, and M. Koivisto, 针对参数化路径和打包的窄筛法，计算机系统科学期刊，87（2017年），第 119–139 页。2[6] A. Björklund, T. Husfeldt, and N. Taslaman, 经过指定元素的最短圈，载于第二十三届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA 2012），日本京都，2012年1月17日至19日，Y. Rabani 编，SIAM，2012年，第 1747–1753 页。1, 2[7] H. Broersma, X. Li, G. J. Woeginger, and S. Zhang, 彩色图中的路径和圈。《澳大拉西亚组合学杂志》，31卷（2005年），第 299–312 页。1[8] G. Călinescu, C. Chekuri, M. Pál, and J. Vondrák, 在拟阵约束下最大化单调次模函数，SIAM 计算期刊，40 （ 2011 年），第 1740–1766 页。1

[9] C. Chekuri and M. Pál, 有向图游走的递归贪心算法，载于《第46届 IEEE 计算机科学基础年会》（FOCS），IEEE 计算机学会，2005年，页码 245–253。 1[10] J. Cohen, G. F. Italiano, Y. Manoussakis, N. K. Thang, and H. P. Pham, 顶点着色图中的热带路径，《组合优化杂志》，42卷（2021年），页码 476–498。 1[11] B. Couëtoux, E. Nakache, and Y. Vaxès, 最大标记路径问题，《Algorithmica》，78卷（2017年），页码 298–318。 1[12] M. Cygan, F. V. Fomin, Ł. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk, and S. Saurabh, 参数化算法，Springer，2015年。 2, 6[13] M. Cygan, F. V. Fomin, L. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk,M. Pilipczuk, and S. Saurabh, 参数化算法，Springer，2015年。 3[14] R. Diestel, 图论，第4版，数学研究生教材第173卷，Springer，2012年。 6[15] E. Eiben, T. Koana, and M. Wahlström, 行列式筛法，CoRR，abs/2304.02091（2023年）。 1, 2[16] F. V. Fomin, P. A. Golovach, T. Korhonen, D. Lokshtanov, and G. Stamoulis, 单调子模代价下的最短环，载于《2023年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2023，佛罗伦萨，意大利，2023年1月22日至25日，N. Bansal 和 V. Nagarajan 编，SIAM，2023年，页码 2214–2227。 1[17] F. V. Fomin, P. A. Golovach, T. Korhonen, K. Simonov, and G. Stamoulis, 最大彩色路径及其推广的固定参数可解性，载于《2023年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2023，佛罗伦萨，意大利，2023年1月22日至25日，N. Bansal 和 V. Nagarajan 编，SIAM，2023年，页码 3700–3712。 1, 2, 21, 22[18] F. V. Fomin, P. A. Golovach, and D. M. Thilikos, 平面化修改问题是固定参数可解的，载于《第36届理论计算机科学国际研讨会》（STACS）论文集，信息学莱布尼茨国际论文集（LIPIcs）第126卷，德国达格施图尔，2019年，Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik，页码 28:1–28:17。 2[19] F. V. Fomin, D. Lokshtanov, F. Panolan, and S. Saurabh, 代表族的高效计算及其在参数化算法和精确算法中的应用，《ACM 期刊》，63卷（2016年），页码 29:1–29:60。 3, 15, 16[20] F. V. Fomin, D. Lokshtanov, F. Panolan, S. Saurabh, and M. Zehavi, 命中拓扑小图是固定参数可解的，载于《第52届 ACM SIGACT 计算理论年会》（STOC）论文集，ACM，2020年，页码 1317–1326。 2[21] F. V. Fomin, D. Lokshtanov, S. Saurabh, and D. M. Thilikos, H-小图图上（连通）支配集的线性核，载于《第23届 ACM-SIAM 离散算法年会》（SODA）论文集，2012年，页码 82–93。 2[22] P. A. Golovach, M. Kaminski, S. Maniatis, and D. M. Thilikos, 图可环性的参数化复杂性，《SIAM 离散数学杂志》，31卷（2017年），页码 511–541。 7

[23] P. A. Golovach, G. Stamoulis, and D. M. Thilikos, 在子式封闭图类中对带有不相交路径谓词的一阶逻辑进行模型检测，载于《2023年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集》，SODA 2023，意大利佛罗伦萨，2023年1月22日至25日，N. Bansal 和 V. Nagarajan 编，SIAM，2023年，第 3684–3699 页。 2[24] M. Grohe, K. Kawarabayashi, D. Marx, and P. Wollan, 寻找拓扑子图是固定参数可解的，载于第 43 届 ACM 计算理论研讨会论文集（ STOC ），ACM，2011年，第 479–488 页。 2[25] B. M. P. Jansen, J. J. H. de Kroon, and M. Włodarczyk, 以消除距离及更小量为参数的顶点删除，载于第 53 届 ACM 计算理论年度研讨会论文集（STOC），2021年，第 1757–1769 页。 2[26] K. Kawarabayashi, 寻找经过指定元素的圈的改进算法，载于第 13 届国际整数规划与组合优化会议（IPCO），计算机科学讲义第 5035 卷，Springer，2008年，第 374–384 页。 1, 2, 5, 9[27] K. Kawarabayashi, 允许少量错误顶点的线性时间平面性判定，载于第 50 届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集（FOCS），2009年，第 639–648 页。 2[28] K. Kawarabayashi, S. Kreutzer, and B. Mohar, 三维空间中的无链接平坦嵌入与纽结问题，载于 2010 年计算几何年度研讨会论文集（SoCG），ACM，2010年，第 97–106 页。 2
[29] K. Kawarabayashi, B. Mohar, and B. A. Reed, 将图嵌入任意曲面的更简单线性时间算法，以及有界树宽图的亏格，载于第 49 届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集（FOCS），2008年，第 771–780 页。 2[30] K. Kawarabayashi and B. A. Reed, 哈德维格猜想是可判定的，载于第 41 届 ACM 计算理论年度研讨会论文集（STOC），2009年，第 445–454 页。 2
[31] , 奇圈打包，载于第 42 届 ACM 计算理论研讨会论文集（STOC），2010年，第 695–704 页。 2[32] J. M. Kleinberg, 不可拆分流与半不相交路径问题的判定算法，载于第三十届 ACM 计算理论年度研讨会论文集（STOC），ACM，1998年，第 530–539 页。 5[33] T. Kloks, 树宽、计算与近似，计算机科学讲义第 842 卷，Springer，1994年。 15
[34] Y. Kobayashi and K. Kawarabayashi, 在平面图和有界亏格图中寻找诱导圈的算法，载于第 20 届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会论文集（SODA），ACM-SIAM，2009年，第 1146–1155 页。 2[35] T. Korhonen, 树宽的单指数时间 2-近似算法，载于第 62 届 IEEE 计算机科学基础年度研讨会，FOCS 2021，美国科罗拉多州丹佛，2022年2月7日至10日，IEEE，2021年，第 184–192 页。 21[36] I. Koutis, 路径与打包问题的更快代数算法，载于第 35 届国际自动机、语言与程序设计研讨会论文集——第一卷，ICALP '08，德国柏林，2008年，Springer-Verlag，第 575–586 页。 2

[37] I. Koutis and R. Williams，用于加速算法的代数指纹，《ACM通讯》，59卷（2015年），第98–105页。2[38] D. Lokshtanov， P. Misra， F. Panolan， and S. Saurabh，线性拟阵的确定性截断，《ACM算法汇刊》，14卷（2018年），第14:1–14:20页。3，15，16
[39] L. Lovász，拟阵与几何图中的平坦，载于《组合学综述》（第六届英国组合学会议论文集，皇家霍洛威学院，埃格姆，1977年），1977年，第45–86页。1[40] L. Lovász，图与几何，美国数学学会讨论会出版物第65卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2019年。1
[41] L. Lovász and M. D. Plummer，匹配理论，北荷兰数学研究丛书第121卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹；北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1986年。《离散数学年刊》第29卷。1
[42] D. Marx，拟阵优化问题的参数化视角，《理论计算机科学》，410卷（2009年），第4471–4479页。8，16[43] D. Marx and I. Schlotter，通过顶点删除获得平面图，Algorithmica，62卷（2012年），第807–822页。2[44] G. L. Nemhauser， L. A. Wolsey， and M. L. Fisher，最大化次模集合函数的近似分析——I，《数学规划》，14卷（1978年），第265–294页。1[45] J. Oxley，拟阵理论，牛津数学研究生教材第21卷，牛津大学出版社，牛津，第二版，2011年。7[46] N. Robertson and P. D. Seymour，图子式 XIII：不相交路径问题，《组合理论杂志》B辑，63卷（1995年），第65–110页。2[47] N. Robertson， P. D. Seymour， and R. Thomas，快速排除平面图，《组合理论杂志》B辑，62卷（1994年），第323–348页。3[48] I. Sau， G. Stamoulis， and D. M. Thilikos， k-顶点子式封闭图类的顶点。II. 参数化算法，《ACM算法汇刊》，18卷（2022年）。2[49] M. Wahlström，滥用Tutte矩阵： K-集合-圈问题的代数实例压缩，载于第三十届国际计算机科学理论方面研讨会（STACS 2013），2013年2月27日至3月2日，德国基尔，N. Portier和T. Wilke编，第20卷 LIPIcs，达格施图尔信息学莱布尼茨中心，2013年，第341–352页。1