超现实子结构

VINCENT BAGAYOKO JORIS VAN DER HOEVEN 数学与统计系 法国国家科学研究中心，LIX 康斯坦茨大学 巴黎综合理工学院校区 D-78457 康斯坦茨 奥诺雷·德斯蒂安·多尔夫街1号 德国 艾伦·图灵大楼，CS35003 91120 帕莱索，法国

5月 3，2023

摘要

超现实数的康威域 No 同时具有一种自然的全序，以及另一种称为“简单性关系”的偏序。将 No 视为关于这两种序关系的双重有序结构时，No 到自身的一个同构副本称为超现实子结构。事实证明，No 的许多自然子类实际上都属于这一类型。本文研究了若干产生超现实子结构的构造，并对重要例子进行了更详细的分析。

1 引言

1.1 超现实数

超现实数类 超现实数类 **超现实数类** 的 超现实数 由 Conway 发现，并由 Conway 在 其 著名的 专著《On-Numbers and *Games* 中进行了研究 [14]。Conway的原始定义有些不够正式，大致如下：

> “如果 L 和 R 是任意两个（超现实）数的集合，并且 L 中没有任何元素是 $\geqslant$ R 中的任何元素，那么就存在一个（超现实）数 $\{L\,|R\}$。所有（超现实）数都以这种方式构造。”

超现实数的神奇之处在于，许多传统上针对整数和实数的运算，都可以用非常简单的方式定义在超现实数上。然而，超现实数类 No 在这些运算下呈现出意想不到的丰富代数结构。例如，两个超现实数 $\mathrm{x} = \{\mathrm{x}_L \,|\, \mathrm{x}_R\}$ 和 $\mathrm{y} = \{\mathrm{y}_L \,|\, \mathrm{y}_R\}$ 的和递归地定义为

$$x+y \;=\; \{x_L+y, x+y_L \,|\, x_R+y, x+y_R\}. \tag{1.1}$$

在下文第 3 节中，我们将回顾减法和乘法的类似定义。尽管基本算术运算可以用如此“轻松”的方式定义，Conway 证明了 No 实际上构成一个包含 $\mathbb{R}$ 的实闭域。严格来说，这里需要稍加谨慎，因为超现实数 No 构成一个真类。特别是，它包含所有序数 $\alpha = \{\alpha_L \,|\, \emptyset\}$。关于如何处理这类集合论问题，请参见附录 B。

一种严谨引入超现实数 x 的便捷方法，是将其视为“符号序列” $\mathrm{x} = (\mathrm{x}[\beta])_{\beta<\alpha} \in \{-1,+1\}^{\alpha}$，其索引由序数 $\beta < \alpha$ $\alpha = \mathrm{l}(\mathrm{x})$ 的元素给出，该序数称为 x 的长度：详情见下文第 2.1 节。每个序数 α

本身都表示为 $\alpha=(\alpha[\beta])_{\beta<\alpha}$，其中对所有 $\beta<\alpha$都有 $\alpha[\beta]=1$。数 $1/2$由长度为 2 的符号序列 $+1,-1$ 表示。No 上的序关系 $\leqslant$对应于符号序列上的字典序；比较长度不同的两个超现实数时，需忽略末尾补零的影响。符号序列表示法还引出了简单性这一重要概念：给定 $x, y \in$No，若 x 的符号序列是 y 的符号序列的截断，则称 x 比 y 简单，记作 $x \sqsubseteq y$。此前的一些文献中，简单性关系记为 $\leq_s$ [11, 30, 3]。

符号序列表示法由 Gon- shor 在其著作 [24] 中提出并进行了系统研究。正如我们将在第 3 节看到的，它还使得将序数算术自然地推广到超现实数成为可能。为避免混淆，我们将始终用记号 $\alpha \dot{+} \beta$ 和 $\alpha \dot{\times} \beta$ 表示序数和与序数积，用 $\dot{\alpha}^{\beta}$ 表示序数乘方。例如，在超现实数类中，我们有 $\omega \dot{+} 1=\omega+1=1+\omega \neq 1 \dot{+} \omega=\omega$。给定一个序数 α，定义由所有长度 $l(x)<\alpha$ 的超现实数 x 组成的集合 $\mathrm{No}(\alpha)$ 也是很自然的。事实证明，$\mathrm{No}(\alpha)$ 是超现实数类 No 的实闭子域，当且仅当 α 是一个 ε-数，即 $\dot{\omega}^{\alpha}=\alpha$ [15, 命题 4.7 和推论 4.9]。

1.2 指数运算、导子、和超级级数

大量工作致力于将基础微积分扩展到超现实数，并根据符号序列研究各种运算。在其著作 [24],中，Gonshor 展示了如何将实指数函数扩展到超现实数类 No。这一指数函数实际上具有与通常指数函数相同的一阶性质：类 No 作为指数域与 $\mathbb{R}$ 初等等价。事实上，作为配备受限解析函数 [15, 的实指数有序域，它们甚至也是初等等价的1]定理 2. $\in \mathbb{R}$[[。这里我们回顾一下，受限实解析函数是原点处的幂级数 f]] x [–，它在某个小的闭球]r, r > 0上收敛，其中 r （。然后可以证明，f) x –的定义可扩展到满足⩽r ⩽x 的超现实数 x。

另一个重要问题是，能否在超现实数上定义一个自然的导子 ∂，且它并非平凡的，即 $\partial \omega=1$。Berarducci 和 Mantova 首次构造了这样一个导子 [11], ，并借鉴了 van der Hoeven 及其学生 Schmeling 先前的工作 [38]。文献 [3] 证明，这种“意大利式”导子 ∂_{BM} 具有与指数函数“同样良好的性质”：也就是说，作为一个 H域，超现实数类 No 与超幂级数域初等等价。这里，超幂级数是形式幂级数的一种推广。它们构成一个有序指数域 $\mathbb{T}$ ，并带有一个导子。H域这一概念既概括了该域的代数性质 $\mathbb{T}$ ，也概括了所谓 Hardy 域的代数性质。更多详情请参阅 [1]。

关于指数函数和超现实数类 No 上的意大利导子 ∂_{BM} 的上述结果，依赖于超现实数的另一种表示方式：将其表示为具有实数系数和单项式 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Mo}$ 的广义幂级数 $x=\sum_{\mathfrak{m} \in \mathbf{Mo}} x_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$ 比任何其他具有与 $\mathfrak{m}$相同赋值的 $0<x \in$No 都简单：详见第 2.3 节。事实上，实数集 ω^{-1} 上的普通幂级数和洛朗级数可以视为 ω中的函数，因此它们自带自然的导子。更一般地，No 上的指数函数使我们能够将 ω 中的任意超幂级数解释为超现实数，从而也使我们能够以自然的方式对这类超现实数求导。

遗憾的是，并非所有超现实数都是 ω中的超幂级数。例如，超现实数 $\{\omega, e^{\omega}, e^{e^{\omega}}, \ldots \mid \emptyset\}$大于 ω中的任何超幂级数。为了能够将所有超现实数解释为 ω中的函数，还缺少两个要素：一方面，我们需要引入指数函数的序数“迭代算子” E_{α}，其增长速度快于有限次迭代。例如，有 $E_{\omega}(\omega) = \{\omega, e^{\omega}, e^{e^{\omega}}, \ldots \mid \emptyset\}$。另一方面，我们需要能够表示所谓的嵌套超幂级数，例如

$$\sqrt{\omega} + e^{\sqrt{\log \omega} + e^{\sqrt{\log\log \omega} + e^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}. \tag{1.2}$$

在 [29, 2], 中，有人猜想，只要以适当的方式考虑上述观察，任意超现实数都可以表示为 ω中的广义“超级级数”。关于“级数方面”的早期进展，请参见 [26, 38, 29, 16]。在一系列预印本 [8, 7, 5, 6], 中，我们最近成功证明了这一猜想。这项工作颇具技术性，且关键依赖于本文中较易理解的结果。

导子 ∂_{BM} 无法与 No 上的复合法则兼容 [12, 定理 8.4]。更具体地说， [2] 中指出，意大利导子不满足$\partial_{BM}(E_{\omega}(x)) = (\partial_{BM} x)E'_{\omega}(x)$ 对所有 x 都成立。归根结底，将超现实数表示为在 ω 处取值的超级级数的能力，应当能导出 No 上彼此兼容的导子和复合的定义。

1.3 超现实数子结构

在构造 No 与某个适当的超级级数类之间同构的项目中，我们经常会遇到 No 的子类 $\mathbf{S}$, 这些子类自然地由 No 参数化。例如，Conway 的广义序数乘方 $x \in \mathrm{No} \longmapsto \acute{\omega} x \in \mathrm{Mo}$ 是双射，这使得单项式类 Mo 自然地由 No 参数化（见定理 5.2 和 5.11）。类似地，诸如 (1.2) 这样的嵌套表达式并不产生单个超现实数，而是产生一个超现实数类 Ne，该类自然地由 No 参数化（见定理 8.8）。另一个例子是 $\mathrm{La} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(\exp \circ \overset{n x}{\ldots} \circ \exp)(m) : m \in \mathrm{Mo}\ m > \mathbb{R}\}$，即对数原子超现实数类；它在构造 No 上的导子时起着关键作用 [11, 第 5 节.2]。

在这三个例子中，这些参数化最终不仅仅是双射：它们实际上同时保序 $\leqslant$ 并保持简单性关系 $\sqsubseteq$。由此，我们将 No 的超现实子结构定义为其自身内部的$(\mathrm{No}\ \leqslant \sqsubseteq)$ 的一个同构副本。在许多方面，Mo、Ne 和 La 等超现实子结构的行为都与超现实数本身 No 类似。在我们的研究项目中，我们已开始利用这一性质来定义和研究 No 上的新函数，例如超对数和嵌套超幂级数。

本文的主要目标是为了自身的价值而发展超现实子结构的基础理论，并将其作为研究超现实数的新工具。我们希望传达这样的观点：超现实子结构既是 No 的非常一般的子类，又具有很强的刚性；关于 No 丰富结构的若干问题（Gonshor [24], Lemire [31, 32, 33], Ehrlich [19, 18, 20],Kuhlmann–Matusinski [30], Berarducci–Mantova [11], 以及 Aschenbrenner–van den Dries–van der Hoeven [3]的研究对此尤有强调）都与超现实子结构密切相关。即便对于 $\mathrm{No}^{>} = \{x \in \mathrm{No} : x > 0\}$这类非常基本的 No 的子类，当它们构成超现实子结构时，我们认为也值得关注。

因此，我们论文的很大一部分（即第 4、5 和 6 节）致力于介绍基础但至关重要的结果。其中一些一般性事实（或其变体）早已为人所知，并在不同背景下被重新发现 [34, 19]。然而，它们在这些研究中主要作为辅助工具出现。本文旨在以自成一体且有条理的方式，涵盖最值得关注的事实。在阐述过程中，我们指出了哪些性质是超现实子结构普遍共有的，哪些则为特定结构所独有。我们还纳入了范围广泛的例子。这项工作最终体现在最后两节（第 7 和 8 节）中：我们在其中介绍了启发本文的例子；对于我们的计划——构造 No 与超级级数类之间的同构——这些例子也至关重要。在附录 A 中，我们还为最具代表性的超现实子结构编制了一份简明图谱。

1.4 总结 我们的贡献

我们简要概述一下本文的结构。第 2 节回顾超现实数的三种主要表示法。第 3 节回顾超现实数上基本算术运算的定义。我们还将展示如何把序数和 $\dot{+}$ 以及序数积 $\dot{\times}$扩展到超现实数类。

在第 4 节中，我们将超现实子结构（这是我们的主要研究对象）引入为 $(\mathrm{No}\leqslant$内部与其同构的副本。任意超现实子结构 $\mathbf{S}$ 都带有一个定义同构 $\Xi_{\mathbf{S}}\colon(\mathrm{No}\leqslant,\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)$，该同构是唯一的，我们将其视为 $\mathbf{S}$ 中元素由 No 参数化的方式。定义同构 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 和 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 可以复合，形成一个新超现实结构 $\mathbf{U}=\mathbf{S}\prec\mathbf{T}$ 的定义同构 $\Xi_{\mathbf{U}}=\Xi_{\mathbf{S}}\circ\Xi_{\mathbf{T}}$，我们称之为 $\mathbf{T}$ 在 $\mathbf{S}$ 内部的嵌套。更一般地，我们常在研究超现实子结构及其参数化之间切换。第 4.1 节的一个推论是对 [34, 19, 20] 中概念与论证的重新表述；见注 4.8。

在第 5 节中，我们研究给定超现实子结构 $\mathbf{S}$ 的定义同构 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 的不动点是否存在。更准确地说，我们给出了关于 $\mathbf{S}$ 的条件，在这些条件下，此类不动点构成的类 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$ 本身也是一个超现实子结构。在某些情况下，确定类 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$ 使我们能够比较两个超现实子结构的定义同构。为此，我们研究在 $(\mathbf{S},\sqsubseteq)$ 中对 $(\mathrm{No}\ \sqsubseteq)$ 的非空、集合大小的链的上确界封闭的超现实子结构 $\mathbf{S}$。这样的超现实子结构 $\mathbf{S}$ 称为 No-闭，并具有以下性质：

- 推论 5.14：对于一个 No-闭超现实子结构 S，类 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$ 是一个超现实子结构，并且它与 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Xi_{\mathbf{S}}n$(超现实数类)重合，其中 $\Xi_{\mathbf{S}}n$ 表示 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 与自身的 n 重复合。类似的结果最初由 Lurie [34,定理 8.2]证明；参见注 5.15。

- 命题 5.18：对于一个 No-闭超现实子结构 S，存在一个超现实子结构的递减序列 $(\mathbf{S}^{\prec\alpha})_{\alpha\in\mathrm{On}}$，使得对于序数 α、β，我们有 a) $\mathbf{S}^{\prec0}=$超现实数类 和 $\mathbf{S}^{\prec1}=\mathbf{S}$，b) $\mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{+}\beta)}=\mathbf{S}^{\prec\alpha}\prec\mathbf{S}^{\prec\beta}$，c) $\mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\beta)}=(\mathbf{S}^{\prec\alpha})^{\prec\beta}$，d) $\mathbf{S}^{\prec\alpha}=\bigcap_{\gamma<\alpha}\mathbf{S}^{\prec\gamma}$如果 $0<\alpha$是极限序数，

事实上，任何良序的 No-闭超现实子结构序列都可以类似地“嵌套”，因此 No-闭超现实子结构可视为一种丰富语言中的词，同时体现超现实子结构的不动点、交错嵌套和交集等概念。一个直接的应用是 Lemire [32] 定理的一种新证明；见注5.17。

在第 6 节中，我们研究子类 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，其元素是超现实子结构 $\mathbf{S}$ 的凸分划 $\mathbf{\Pi}$ 中各成员的最简代表。在关于 $\mathbf{\Pi}$ 的一个集合论条件下，我们证明该类构成 $\mathbf{S}$ 的一个超现实子结构（定理 6.7），其参数化具有简短的递归定义。Lurie [34] 最初证明了该定理的一个较弱版本；参见注6.8。一个尤为重要的特例是凸分划由群作用诱导的情形（见第 6.3 节）。我们还引入了超现实子结构 $\mathbf{S}$ 的尖锐凸分割 $\mathbf{\Pi}$ 这一概念，它使 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 在 $\mathbf{S}$ 中闭合（定理 6.14）。

最后的第 7 和 8 节讨论将我们的结果应用于一些重要的超现实子结构例子。这些包括纯无穷超现实数构成的结构 $\mathrm{No}_{>}$（[24],）、单项式构成的结构 Mo（[14],）、对数原子数组成的结构 La（[11],）、由 κ-数构成的结构 $\mathbf{K}$（[30],），以及各种嵌套单项式结构，包括 Ne。第 8 节中关于嵌套单项式的结果，类似于 Lemire 关于连分指数表达式 [33]，的工作，只是将序数乘方替换为通常的乘方。附录 A 简要概述了本文中涉及的超现实子结构。

1.5 记号

我们将一律使用粗体表示可能不是集合的类，例如超现实数类。给定偏序类 $(\mathbf{X}, <_{\mathbf{X}})$ 及其子类 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$，若对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$ 都有 $a <_{\mathbf{X}} b$，我们记作 $\mathbf{A} <_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$。特别地，当 $\mathbf{A} = \emptyset$ 或 $\mathbf{B} = \emptyset$ 时，这一关系成立。对于 $\mathbf{X}$ 中的元素 x_1、…、x_n、y_1、…、y_n，我们分别记 x_1、…、$x_m <_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A} <_{\mathbf{X}} y_1$、…、$y_n$，而不写作 $\{x_1$、…、$x_m\} <_{\mathbf{X}} \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A} <_{\mathbf{X}} \{y_1$、…、$y_n\}$。给定 $\mathbf{X}$ 的多个（两个以上）子类 $\mathbf{A}_1$、…、$\mathbf{A}_n$，当对所有 $i<j$ 都有 $\mathbf{A}_i <_{\mathbf{X}} \mathbf{A}_j$ 时，我们也记作 $\mathbf{A}_1 <_{\mathbf{X}} \cdots <_{\mathbf{X}} \mathbf{A}_n$。

若 $x \in \mathbf{X}$，我们用 $\mathbf{X}^{>x}$ 表示由满足 $y > x$ 的元素 $y \in \mathbf{X}$ 构成的类。在特殊情形下，若 $(\mathbf{X}, e, \cdot, <_{\mathbf{X}})$ 是有序幺半群，我们便简记为 $\mathbf{X}^{>} = \mathbf{X}^{>e}$ 和 $\mathbf{X}^{<} = \mathbf{X}^{<e}$。

我们对非严格偏序采用类似的记号 $\leqslant_{\mathbf{X}}$。

2 超现实数的不同表示

超现实数主要有三种表示方式：符号序列、广义戴德金割，以及以 $\mathbb{R}$ 为底的广义幂级数。本节将简要回顾其表示原理，并介绍每种表示方式的具体优点。更多详情请参阅 [14, 24, 19, 18, 35]。

2.1 超现实数作为符号序列

符号序列表示法最适合用于严谨地发展超现实数的基础理论。该表示法由 Gonshor [24, 第 3]页提出，我们实际上将用它来正式定义超现实数如下：

定义 *2.1.* 超现实数是一个映射 $x{:}\,l(x)\longrightarrow\{-1,1\};\alpha\longmapsto x[\alpha]$，其中 $l(x)\in On$ 是一个序数。我们称 $l(x)$ 为 x 的长度，并称映射 $x{:}\,l(x)\longrightarrow\{-1,1\}$ 为 x 的符号序列。我们用 No 表示超现实数类。

由此定义可知，No 是一个真类。给定一个超现实数 $\mathrm{x}\in\mathrm{No}$，我们可以将其符号序列用零扩展为一个映射 $\mathrm{On}\longrightarrow\{-1,0,1\}$，并仍将此扩展记作 x。换言之，对于所有 $\alpha\geqslant\mathrm{l}(\mathrm{x})$，我们令 $\mathrm{x}[\alpha]=0$。给定 $\mathrm{x}\in\mathrm{No}$ 和 $\alpha\in\mathrm{On}$，我们还将其限制 $\mathrm{y}=\mathrm{x}\restriction\alpha\in\mathrm{No}$ 引入为映射 x 在 α 上补零后的限制：对于 $\beta<\alpha$，令 $\mathrm{y}[\beta]=\mathrm{x}[\beta]$；对于 $\beta\geqslant\alpha$，令 $\mathrm{y}[\beta]=0$。

No 上的第一个主要关系是其序关系 $\leqslant$。我们将其定义为从 On 到 $\{-1,0,1\}$ 的所有映射集合上的字典序的限制。更确切地说，给定两个不同的元素 $\mathrm{x}、\mathrm{y}\in\mathrm{No}$，存在最小的序数 α，使得 $\mathrm{x}[\alpha]\neq\mathrm{y}[\alpha]$。于是我们定义：当且仅当 $\mathrm{x}[\alpha]<\mathrm{y}[\alpha]$ 时，$\mathrm{x}<\mathrm{y}$。

No 上的第二个主要关系是简单性关系 $\sqsubseteq$：给定数 $\mathrm{x}、\mathrm{y}\in\mathrm{No}$，如果 x 比 y 简单，就记作 $\mathrm{x}\sqsubseteq\mathrm{y}$，当且仅当 $\mathrm{x}=\mathrm{y}\restriction\mathrm{l}(\mathrm{x})$。我们用 $\mathrm{x}_{\sqsubset}=\{\mathrm{a}\in\mathrm{No}:\mathrm{a}\sqsubset\mathrm{x}\}$表示严格比 x 简单的超现实数集合。偏序类$(\mathrm{No},\sqsubseteq)$是良基的，而 $(\mathrm{x}_{\sqsubset},\sqsubseteq)$ 是良序的，其序型为 $\mathrm{ot}(\mathrm{x}_{\sqsubset},\sqsubseteq)=\mathrm{l}(\mathrm{x})$。

No 的每个线性有序（因而也是良序）子集 X 都有上确界 $\mathrm{s}=\sup_{\sqsubseteq}\mathrm{X}$，且 s 属于 $(\mathrm{No},\sqsubseteq)$：对于任意 $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ 和 $\alpha<\mathrm{l}(\mathrm{x})$，都有 $\mathrm{s}[\alpha]=\mathrm{x}[\alpha]$；对于任意满足$\alpha\geqslant\mathrm{l}(\mathrm{x})$ 对所有 $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ 都成立的 $\alpha\in\mathrm{On}$，都有 $\mathrm{s}[\alpha]=0$。我们只考虑 $(\mathrm{No},\sqsubseteq)$ 中的上确界，绝不考虑 $(\mathrm{No},\leqslant)$ 中的上确界。等于 $\sup_{\sqsubseteq}\mathrm{x}_{\sqsubset}$ 的数 x 称为极限数；其他数称为后继数。极限数恰好是长度为极限序数的数。

2.2 割中的最简元素：超现实数

若 L、R 是满足 $\mathrm{L}<\mathrm{R}$ 的超现实数集合，则存在一个最简超现实数，记作 $\{\mathrm{L}|\mathrm{R}\}$，它满足 $\mathrm{L}<\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}<\mathrm{R}$ [24, 定理 2.1]。我们称 $\{\}$ 为康威括号。注意，$\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}$ 在强意义上是满足该条件的最简数：对于所有 $\mathrm{x}\in$超现实数类，若 $\mathrm{L}<\mathrm{x}<\mathrm{R}$，则有 $\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}\sqsubseteq\mathrm{x}$。反向推论 $\forall\mathrm{x}\in$超现实数类 $\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}\sqsubseteq\mathrm{x}\Longrightarrow\mathrm{L}<\mathrm{x}<\mathrm{R}$ 则未必成立：见下文注 4.21。

现在考虑另外两个超现实数集合 L′、R′，且满足 $\mathrm{L}'<\mathrm{R}'$。若 L 在 L′ 中没有严格上界，且 R 在 R′中没有严格下界，则称 (L、R) 相对于 (L′、R′)共尾。若 (L、R) 与 (L′、R′) 彼此共尾，则称它们互相共尾；此时可得 $\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}=\{\mathrm{L}'|\mathrm{R}'\}$。这些定义自然推广到满足 $\mathbf{L}<\mathbf{R}$ 的类对 $(\mathbf{L},\mathbf{R})$。不过请注意，对于这样的类，$\{\mathbf{L}|\mathbf{R}\}$不一定有定义。事实上，可能不存在满足 $\mathrm{L}<\mathrm{x}<\mathrm{R}$ 的数 x（例如，当 $\mathrm{L}=$超现实数类且 $\mathrm{R}=\emptyset$时）。

我们将满足 $\mathrm{L}<\mathrm{R}$ 的集合对 (L, R) 称为 $\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}$ 的割表示。这类表示并非唯一；特别地，我们可以用任意一对互相共尾的集合 (L′,R′)替换 (L, R)。对于每个超现实数 x，我们记作

$$\begin{aligned}x_L &= \{a\in\mathbf{No}:a<x,a\sqsubseteq x\}\\ x_R &= \{a\in\mathbf{No}:a>x,a\sqsubseteq x\},\end{aligned}$$

它们是由超现实数组成的集合。我们称 x_L 和 x_R为 x 的左选项和右选项集合。根据 [24, 定理 2，8], 可得 $\mathrm{x}=\{\mathrm{x}_L\mid\mathrm{x}_R\}$，而有序对 $(\mathrm{x}_L,\mathrm{x}_R)$ 则称为 x 的典范表示。

这个恒等式 $x = \{x_L \mid x_R\}$ 正是 Conway 将超现实数定义为由较简单且先前定义的超现实数组成的集合 $L < R$ 所确定的“割”中最简单的数这一做法背后的基本直觉。当然，这是一种高度递归的表示，隐含地依赖超限归纳法。

Conway 的割表示很有吸引力，因为它允许通过对 $(\mathrm{No}, \sqsubseteq)$ 或其幂进行良基归纳法来递归定义函数。例如，存在唯一的二元函数 f，使得对于所有 x、$y \in \mathrm{No}$，我们有

$$f(x,y) = \{f(x_L,y), f(x,y_L) \mid f(x_R,y), f(x,y_R)\}. \tag{2.1}$$

在这里，我们将 $f(x_L, y), f(x, y_L)$ 理解为集合 $\{f(x', y) : x' \in x_L\} \cup \{f(x, y') : y' \in y_L\}$，而 $f(x_R, y), f(x, y_R)$ 也类似。这个递归定义是合理的，因为集合 $x_L \times \{y\}, \{x\} \times y_L, x_R \times \{y\}$ 和 $\{x\} \times y_R$ 中的元素，按照 $(\mathrm{No}, \sqsubseteq) \times (\mathrm{No}, \sqsubseteq)$ 上的乘积序，都严格比 (x, y) 简单。这个精确的等式实际上就是 Conway 用来定义 No 上加法 $+ = f$ 的等式。我们将在下文第 3 节回顾其他几种算术运算的类似定义。

2.3 超现实 数 作为 良基-的级数

设 C 为一个域，$\mathfrak{M}$ 为一个关于序关系 $\preccurlyeq$ 的全序乘法群。若子集 $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}$ 关于 $\preccurlyeq$ 的反序关系是良序的（即 $\mathfrak{M}$ 中不存在无限链 $\mathfrak{m}_1 \prec \mathfrak{m}_2 \prec \cdots$），则称其为良基的。定义在 $\mathfrak{M}$ 上且系数取自 C 的良基级数是一个映射 $f : \mathfrak{M} \longrightarrow C$，其支撑集 $\operatorname{supp} f := \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M} : f(\mathfrak{m}) \neq 0\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的一个良基子集。这种级数通常写作 $f = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} f_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$，其中 $f_{\mathfrak{m}} = f(\mathfrak{m})$，所有此类级数构成的集合记为 $C[[\mathfrak{M}]]$。C 和 $\mathfrak{M}$ 中的元素分别称为系数和单项式。我们称 $\mathfrak{M}$ 为单项式群。任意非零元素 $f \in C[[\mathfrak{M}]]$ 的支撑集在 $\preccurlyeq$ 下都有一个最大元素，称为 f 的主导单项式，记作 $\mathfrak{d}_f$。

Hahn 证明了 C [25] 在自然求和和通常的柯西卷积乘法下构成一个域$[[\mathfrak{M}]]$

$$f + g := \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} (f_{\mathfrak{m}} + g_{\mathfrak{m}})\mathfrak{m}, \qquad fg := \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{\mathfrak{v}\mathfrak{w} = \mathfrak{m}} f_{\mathfrak{v}} g_{\mathfrak{w}} \right) \mathfrak{m}.$$

在 $C[[\mathfrak{M}]]$ 中，也有无穷和的自然概念：若 I 是一个集合，且 $(f_i)_{i \in I}$ 是 $C[[\mathfrak{M}]]$ 中由良基级数组成的族，那么如果 $\bigcup_{i \in I} \operatorname{supp} f_i$ 是良基的，并且对每个 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$，$\{i \in I : f_{i,\mathfrak{m}} \neq 0\}$ 都是有限集，我们就称该族可求和。在这种情况下，我们将该族的和 $f = \sum_{i \in I} f_i \in C[[\mathfrak{M}]]$ 定义为

$$f := \sum_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{i \in I} f_{i,\mathfrak{m}} \right) \mathfrak{m}.$$

考虑第二个单项式群 $\mathfrak{N}$ 以及一个映射 $\varphi : C[[\mathfrak{M}]] \longrightarrow C[[\mathfrak{N}]]$。我们称 φ 为强线性的，如果它是 C-线性的，并且对于 $C[[\mathfrak{M}]]$ 中每个可求和族 $(f_i)_{i \in I}$，族 $(\varphi(f_i))_{i \in I}$ 在 $C[[\mathfrak{N}]]_\lambda$ 中也是可求和的，且满足 $\varphi(\sum_{i \in I} f_i) = \sum_{i \in I} \varphi(f_i)$。根据 [28, 命题 10]，，为了证明一个线性映射 φ 是强线性的，只需证明上述条件对单项式的标量倍数所构成的族成立。因此，φ 是强线性的，当且仅当对于所有 $f \in C[[\mathfrak{M}]]$，族 $(f_{\mathfrak{m}} \varphi(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp} f}$ 都是可求和的，且满足

$$\varphi(f) = \sum_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp} f} f_{\mathfrak{m}} \varphi(\mathfrak{m}).$$

由于任意 \(f ∈C[[𝔪]]\) 的支集都是良基的，因此在 \(≼ \) 的反向 Order 下，\(supp f \) 的序型 \(ot(f)=ot(supp f) \) 是一个序数。现在考虑一个 \(ε \)- 数 \(λ \)。回顾一下，这意味着 \(ω̇^λ=λ \)，其中 \(ω̇^λ \) 表示 Cantor 的 \(λ \) 阶 \(ω \) 序数幂。已知（见推论 6.4），级数 \(f ∈C[[𝔪]] \) 中满足 \(ot(f)<λ \) 的元素构成 \(C[[𝔪]]_λ \) 的一个子域，而 \(C[[𝔪]] \) 是 \(C \) 的子域。

超现实数类 No 上的序关系诱导出 No 上的自然赋值 v，其剩余域为 $\mathbb{R}$。非零超现实数 x 的阿基米德类是由所有与 x 具有相同赋值的 $y \in No$ 组成的类 A_x。康托尔的一项发现是，$A_x \cap No^{>}$ 具有一个最简元素，我们将其记为 $\mathfrak{d}_x$。令 $Mo := \{\mathfrak{d}_x : x \in No^{\neq}\}$ 表示我们可用这种方式得到的所有 $\mathfrak{d}_x$组成的类。康托尔还构造了一个保序双射$\dot{\omega}: No \longrightarrow Mo; x \longmapsto \dot{\omega}x$，它扩展了康托尔的序数乘方。

通过这一 $\dot{\omega}$-映射以及所谓的 Conway 标准形式 [14, Chapter 5], ，可以发现，域 No 自然同构于一个良基级数域$\mathbb{R}[[Mo]]_{\mathbf{On}}$，其中 Mo 成为单项式群。对于这种级数表示，任意数 $x \in No$ 都具有一个集合大小的支撑集 $\operatorname{supp} x$。x 的 Conway 标准形式与其级数表达式 $x = \sum_{m \in \mathbf{Mo}} x_m m$一致。对于 x、$y \in No$，有时我们写作 $x \dotplus y$，而不是 $x + y$，以表明我们有 $\operatorname{supp} y \prec \operatorname{supp} x$，因此，作为级数，x 是 $x + y$ 的一个截断。

3 算术 在超现实 数

在本文后续中，我们 所说的“数”，始终指“超现实数”。

3.1 超现实算术

我们已经解释了 Conway 的割表示对于在超现实数类上递归定义函数的用途，并以加法（2.1）为例进行了说明。事实上，可以用类似的方式定义所有基本的环运算：

$$0 = \{\mid\} \tag{3.1}$$
$$1 = \{0 \mid\} \tag{3.2}$$
$$-x = \{-x_R \mid -x_L\} \tag{3.3}$$
$$x+y = \{x_L+y, x+y_L \mid x_R+y, x+y_R\} \tag{3.4}$$
$$xy = \{x'y+xy'-x'y', x''y+xy''-x''y'' \mid x'y+xy''-x'y'', x''y+xy'-x''y'\}$$
$$(x' \in x_L, x'' \in x_R, y' \in y_L, y'' \in y_R). \tag{3.5}$$

Conway 的一项重大发现是，超现实数类 No 在这些运算和序关系 $\leqslant$下实际上构成一个实闭域。作为一个有序域，它自然包含二进有理数（即长度有限的数）和实数（即长度为 $l(x) \leqslant \omega$ 且符号序列末尾不以无限多个连续相同符号结束的数）。

序数的类**On** 也序数自然地嵌入到 (**超现实数类** $\leqslant$) 中，方法是将序数 α 对应于长度为常值序列 α，其中 $\alpha[\beta]=1$ 对所有 $\beta<\alpha$。 因此，在**超现实数类**中，诸如

$$\pi\ \sqrt{\omega_1} - {}^{2}/_{\omega},\ \frac{\omega^{3/4}+1}{1-\omega^2}, \ldots$$

这些表达式是有意义的，并且适用于各种计算和比较。有关超现实数类上的域运算的更多详细信息，请参见 [14,第 1]章。有关符号序列框架下这些运算的更多详细信息，以及割与符号序列之间对应关系的更多信息，请参见 [24, 第 1、2 和 3]章。

借鉴 Kruskal 的思路，Gonshor 也在超现实数类 No 上定义了一个指数函数，记作 exp [24, Page 145]。这个函数扩展了 $\mathbb{R}$ 上的通常指数函数。事实上，结果表明，作为一个有序指数域，No 是 $\mathbb{R}$ 的初等扩张 [15, Corollary 5.5]。换言之，通常的指数函数及其在 No 上的扩展版本，在 $\mathbb{R}$上满足相同的一阶性质。

为了用递归方程定义 $\exp x$（其中 $x \in$No），需要找到一个恰当的刻画，描述由 $\exp x$ 在由 x、$x^{\sqsubset}$ 和 $\exp x^{\sqsubset}$ 生成的域中形成的割。在指数域中，这类割所满足的自然不等式涉及截断的泰勒级数展开。给定 $n \in \mathbb{N}$ 和一个 $\in$No，令

$$[a]_n = \sum_{k \leqslant n} \frac{a^k}{k!}.$$

若 $x \in$ **超现实数类 No** 且 $x' \in x_L$ 满足 使得 $\exp(x')$ 已经 定义 好了，那么 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们 应当有

$$\exp(x) = \exp(x')\exp(x - x') > \exp(x')\,[x - x']_n$$

并且人们预期这类不等式能够给出对的尖锐近似 $\exp x$。沿着这一思路，Gonshor定义了

$$\exp x = \left\{ 0,\ [x - x']_{\mathbb{N}} \exp x',\ [x - x'']_{2\mathbb{N}+1} \exp x'' \;\middle|\; \frac{\exp x''}{[x - x'']_{2\mathbb{N}+1}},\ \frac{\exp x'}{[x' - x]_{\mathbb{N}}} \right\} \quad (x' \in x_L,\ x'' \in x_R). \tag{3.6}$$

exp在超现实数类 No$^{>}$上的倒数记作 log。这也自然引出了乘方运算：给定 $x \in$超现实数类 No$^{>}$和 $y \in$超现实数类 No，我们定义 $x^y = \exp(y \log(x))$。给定 $r \in \mathbb{R}$，有 $\dot{\omega}^r = \omega^r$，但对于更一般的元素 $x \in$超现实数类 No，不一定有 $\dot{\omega}^x = \omega^x$。（更多细节见 [9]。）

3.2 扩展序数 算术

我们用 On$^{>}$ 和 $\mathrm{On}_{\lim}$ 分别表示非零序数类和极限序数类。序数类配备了两套不同的运算：康托尔的（非交换）序数算术和 Hessenberg 的（交换）算术。对于序数 α, β，我们分别用 $\alpha \dotplus \beta, \alpha \dot{\times} \beta$ 和 $\dot{\alpha}^{\beta}$表示它们的序数和、积和指数运算。它们的 Hessenberg 和与积，分别与将其视为超现实数时的和与积一致（定理 4.5 和 4.6]）；因此，我们用 $\alpha + \beta$ 和 $\alpha\beta$表示它们。我们假设读者熟悉序数算术中的基本计算。本节定义超现实数上的运算，以扩展序数算术。

对于数 x、y，我们令 $x + y$ 表示一个数，称为 x 与 y 的拼接和，其符号序列是将 y 的符号序列连接在 x 的符号序列末尾所得。因此，$x + y$ 是一个长度为 $l(x + y) = l(x) \dotplus l(y)$ 的数，它满足

$$\begin{aligned} (x + y)[\alpha] &= x[\alpha] && (\alpha < \ell(x)) \\ (x + y)[\ell(x) \dotplus \beta] &= y[\beta] && (\beta < \ell(y)) \end{aligned}$$

容易验证，这扩展了序数和的定义。此外，拼接和满足结合律，并且当 $\mathrm{x} \in$超现实数类、$\mathrm{y} \in$超现实数类且 y 是极限数时，满足 $\sup_{\sqsubseteq}(\mathrm{x} \dotplus \mathrm{y}_{\sqsubset}) = \mathrm{x} \dotplus \mathrm{y}$。

我们令$x \dot\times y$表示长度为数 $\mathrm{l}(x) \dot\times l(y)$，称为拼接积 x 与y，其符号序列由以下方式定义：

$$(x \dot\times y)[\ell(x) \dot\times \alpha \dotplus \beta] \;=\; y[\alpha]\, x[\beta] \qquad\qquad (\alpha < \ell(y), \beta < \ell(x)).$$

这里我们将 $\mathrm{y}[\alpha]\,\mathrm{x}[\beta]$ 视为 $\{-1,+1\}$ 中的一种乘积。非正式地说，给定 $\mathrm{x} \in$超现实数类和 $\alpha \in$序数，数 $\mathrm{x} \dot\times \alpha$ 是将 x 与自身进行 α 次右拼接所得，而$\alpha \dot\times \mathrm{x}$ 则是将 x 的每个符号重复 α 次后得到的数。注意，$\dot\times$扩展了康托尔序数积。

$\dotplus$ 和 $\dot\times$这两种运算将在下文中用于构造简单而有趣的超现实子结构例子。本节余下部分将介绍这些运算的基本性质。初读时可以略过证明，但为求完整起见，我们仍将其列出；此外，我们在文献中未能找到这些证明。关于序数积到博弈类（其确实包含超现实数类 No）的一种不同扩展，请参阅 [14, 第一部分]。

引理 3.1. 对于 $x, y, z \in$**超现实数类**, 我们 有

a) $x \dot\times (y \dot\times z) = (x \dot\times y) \dot\times z$. *b)* $x \dot\times 1 = x$ 且 $x \dot\times (-1) = -x$. *c)* $x \dot\times (y \dotplus z) = (x \dot\times y) \dotplus (x \dot\times z)$. *d)* $x \dot\times y = \sup_{\sqsubseteq}(x \dot\times y_{\sqsubset})$ 如果 y 是极限序数。

证明。a) $\mathrm{x} \dot\times (\mathrm{y} \dot\times \mathrm{z})$ 和 $(\mathrm{x} \dot\times \mathrm{y}) \dot\times \mathrm{z}$ 的长度均为 $\mathrm{l}(\mathrm{x}) \dot\times \mathrm{l}(\mathrm{y}) \dot\times \mathrm{l}(\mathrm{z})$。令 $\alpha < \mathrm{l}(\mathrm{y} \dot\times \mathrm{z})$ 和$\delta < \mathrm{l}(\mathrm{x})$。写作 $\alpha = \mathrm{l}(\mathrm{y}) \dot\times \beta \dotplus \gamma$，其中 $\beta < \mathrm{l}(\mathrm{z})$ 且 $\gamma < \mathrm{l}(\mathrm{y})$。那么

$$\begin{aligned}
(x \dot\times (y \dot\times z))[\ell(x) \dot\times \alpha \dotplus \delta] \;&=\; (y \dot\times z)\,[\alpha]\, x[\delta] \\
&=\; z[\beta]\, y[\gamma]\, x[\delta] \\
&=\; z[\beta]\, (x \dot\times y)[\ell(x) \dot\times \gamma \dotplus \delta] \\
&=\; ((x \dot\times y) \dot\times z)[\ell(x) \dot\times \ell(y) \dot\times \beta \dotplus \ell(x) \dot\times \gamma \dotplus \delta] \\
&=\; ((x \dot\times y) \dot\times z)[\ell(x) \dot\times \alpha \dotplus \delta].
\end{aligned}$$

b) 数 $\mathrm{x} \dot\times 1$ 和 $\mathrm{x} \dot\times (-1)$ 的长度为 $\mathrm{l}(\mathrm{x}) \dot\times 1 = \mathrm{l}(\mathrm{x})$。对于 $\beta < \mathrm{l}(\mathrm{x})$，我们有$(\mathrm{x} \dot\times 1)[\beta] = 1[0]\,\mathrm{x}[\beta] = \mathrm{x}[\beta]$ 和 $(\mathrm{x} \dot\times (-1))[\beta] = (-1)[0]\,\mathrm{x}[\beta] = -\mathrm{x}[\beta]$。

c) 该数$x \dot\times (y \dotplus z)$ 的长度为 长度

$$\begin{aligned}
\ell(x) \dot\times \ell(y \dotplus z) \;&=\; \ell(x) \dot\times (\ell(y) \dotplus \ell(z)) \\
&=\; \ell(x) \dot\times \ell(y) \dotplus \ell(x) \dot\times \ell(z) \\
&=\; \ell(x \dot\times y) \dotplus \ell(x \dot\times z) \\
&=\; \ell((x \dot\times y) \dotplus (x \dot\times z)).
\end{aligned}$$

设 $\beta < l(x)$ 和 $\alpha < l(y \dotplus z)$。 如果 $\alpha < l(y)$， 那么

$$\begin{aligned}
(x \dot\times (y \dotplus z))(\ell(x) \dot\times \alpha \dotplus \beta) \;&=\; (y \dotplus z)[\alpha]\, x[\beta] \\
&=\; y[\alpha]\, x[\beta] \\
&=\; (x \dot\times y)[\ell(x) \dot\times \alpha \dotplus \beta] \\
&=\; ((x \dot\times y) \dotplus (x \dot\times z))[\ell(x) \dot\times \alpha \dotplus \beta].
\end{aligned}$$

否则， 存在 $\eta<l(z)$ 使得 $\alpha=l(y)\dot{+}\eta$ 并且 那么

$$\begin{aligned} x\dot{\times}(y\dot{+}z)[\ell(x)\dot{\times}\alpha\dot{+}\beta] &= (y\dot{+}z)[\alpha]\,x[\beta] \\ &= z[\eta]\,x[\beta] \\ &= (x\dot{\times}z)[\ell(x)\dot{\times}\eta\dot{+}\beta] \\ &= ((x\dot{\times}y)\dot{+}(x\dot{\times}z))[\ell(x)\dot{\times}\alpha\dot{+}\beta]. \end{aligned}$$

d) 前述等式特别表明，$x\dot{\times}y_{\sqsubset}$ 按简约性线性有序，这意味着上确界 $\sup_{\sqsubseteq}(x\dot{\times}y_{\sqsubset})$ 在 $(\mathrm{No}\ \sqsubseteq)$中良定义。设 y 是极限序数。若 $y=0$，则有 $x\dot{\times}y=0=\sup_{\sqsubseteq}x\dot{\times}0_{\sqsubset}$。设 $y\neq0$。注意，我们有 $l(y)=\sup_{\sqsubseteq}l(y_{\sqsubset})$，因此

$$\ell(x\dot{\times}y)=\ell(x)\dot{\times}\sup_{\sqsubseteq}\ell(y_{\sqsubset})=\sup_{\sqsubseteq}(\ell(x)\dot{\times}\ell(y_{\sqsubset}))=\sup_{\sqsubseteq}\ell(x\dot{\times}y_{\sqsubset}).$$

Let $\beta<l(x)$ 且 $\alpha<l(y)$。由于y是一个极限序数数，存在一个$u\in y_{\sqsubset}$使得满足 $\alpha<l(u)$。该 n

$$(x\dot{\times}y)[\ell(x)\dot{\times}\alpha\dot{+}\beta]=y[\alpha]\,x[\beta]=u[\alpha]\,x[\beta]=(x\dot{\times}u)[\ell(x)\dot{\times}\alpha\dot{+}\beta]. \qquad \square$$

注记3.2。前述引理可以被视为一种替代的定义连接积的方法。另一种方法是通过以下方程

$$\forall x>0,\forall y,\ x\dot{\times}y\ =\ \{x\dot{\times}y_L\dot{+}x_L,x\dot{\times}y_R\dot{+}(-x_R)\,|\,x\dot{\times}y_L\dot{+}x_R,x\dot{\times}y_R\dot{+}(-x_L)\}. \tag{3.7}$$

同样，连接和也满足以下方程 [18, 命题 2]:

$$\forall x,\forall y,\ x\dot{+}y\ =\ \{x_L,x\dot{+}y_L\,|\,x\dot{+}y_R,x_R\}. \tag{3.8}$$

请注意，这两个方程并不在定义4.29下文的意义上一致。

命题 3.3. 设 $x,y,z\in$**超现实数类**.

a) 若 $x\neq0$，则 $y\sqsubseteq z$ 当且仅当 $x\dot{\times}y\sqsubseteq x\dot{\times}z$。

b) 若 $0<x$，则 $y<z$ 当且仅当 $x\dot{\times}y<x\dot{\times}z$。

证明. *a)* 若 $y\sqsubseteq z$,则 对于 一个 $\in$**超现实数类** 满足 $z=y\dot{+}a$,引理 3.1(c) 推出 这一点

$$x\dot{\times}y\sqsubseteq(x\dot{\times}y)\dot{+}(x\dot{\times}a)=x\dot{\times}z.$$

反过来，若 $x\dot{\times}y\sqsubseteq x\dot{\times}z$，则由于 $x\neq0$，我们可以计算，对于 $\alpha<l(y)$，其符号为 $y[\alpha]\,x[0]=(x\dot{\times}y)[l(x)\dot{\times}\alpha]=(x\dot{\times}z)[l(x)\dot{\times}\alpha]=z[\alpha]\,x[0]$。由此可得 $y[\alpha]=z[\alpha]$，因此 $y\sqsubseteq z$。

b) 若 $y<z$，则取 y 和 z 的最大公共初始段 u，可得$(x\dot{\times}u)\sqsubseteq(x\dot{\times}y),(x\dot{\times}z)$，且 $l(x\dot{\times}u)=l(x)\dot{\times}l(u)$。因此 $(x\dot{\times}y)[l(x)\dot{\times}l(u)]=y[l(u)]\,x[0]=y[l(u)]$ 严格小于 $z[l(u)]=z[l(u)]\,x[0]=(x\dot{\times}z)[l(x)\dot{\times}l(u)]$，这意味着 $x\dot{\times}y<x\dot{\times}z$。由于该序 $\leqslant$是线性的，这足以证明结论。$\square$

4 超现实子结构

4.1 超现实 子结构 及其 参数化

设 X 是 No 的一个子类，设 $\mathcal{R}=(\leqslant_i)_{i\in I}$ 是 No 上的一族序关系。那么，如果对于每个 $\leqslant_i$（其中 $i\in I$），函数 $f:X\longrightarrow\mathrm{No}$ 都是递增的，我们就称 f 为 $\mathcal{R}$-递增函数。如果 f 还是单射，则称其为严格 $\mathcal{R}$-递增。如果对于所有 $x,y\in X$ 以及 $i\in I$，都有 $x\leqslant_i y\iff f(x)\leqslant_i f(y)$，那么我们称 f 是 $(X\ (\leqslant_i)_{i\in I})$ 到 $(\mathrm{No}\ (\leqslant_i)_{i\in I})$ 的一个 $\mathcal{R}$-嵌入。若 f 是一个 $(\leqslant,\sqsubseteq)$-嵌入，我们就简单地称 f 为嵌入。

定义4.1。 超现实**子结构**是从超现实数类到其自身的一个嵌入的**像**。

例 4.2. 给定一个 ∈超现实数类，映射 $x \longmapsto a \dotplus x$ 是一个从 (超现实数类 $\leqslant, \sqsubseteq$) 到其自身的嵌入。如果 $a > 0$，那么根据命题 3.3，映射 $x \longmapsto a \dot{\times} x$ 也是如此。因此：

- 对于一个∈**超现实数类**，映射 $x \longmapsto a \dotplus x$ 给出了一个超现实子结构 $a \dotplus$**超现实数类**中由数组成的、其符号序列以 的符号序列开头的符号序列，即 。
- 对于 $0 <$ 一个 ∈超现实数类，映射 $x \longmapsto a \dot{\times} x$ 诱导出超现实子结构 $a \dot{\times}$超现实数类，其中的数的符号序列是由 a 和 $-a$ 的符号序列（可能为空或超限）拼接而成的。

例 4.3。设 φ是一个从超现实数类到其自身的嵌入，其像为 **S**。那么映射$\psi: x \longmapsto -\varphi(-x)$ 定义了另一个从超现实数类到其自身的嵌入，其像为 $-\mathbf{S} = \{-x : x \in \mathbf{S}\}$。换言之，如果 **S** 是一个超现实子结构，那么 $-\mathbf{S}$也是。

我们声称任何严格 $(\leqslant, \sqsubseteq)$-递增映射$f:$ **超现实数类** $\longrightarrow$ **超现实数类**都是自动的一个嵌入。 我们首先需要一个引理。

引理 *4.4.* 如果 x、y、z 是满足 $x \sqsubseteq y$ 且 $x \not\sqsubseteq z$ 的实数集中的数，那么 $x < z$ 当且仅当 $y < z$，并且 $z < x$ 当且仅当 $z < y$。

证明。由于 $x \not\sqsubseteq z$，我们有 $x < z$ 当且仅当存在 $\eta_x < l(x)$，使得 $x\restriction \eta_x = z\restriction \eta_x$ 且 $x[\eta_x] < z[\eta_x]$。现在 $x \sqsubseteq y$，因此 $y \not\sqsubseteq z$，同样，$y < z$ 成立当且仅当存在 $\eta_y < l(y)$，使得 $y\restriction \eta_y = z\restriction \eta_y$ 且 $y[\eta_y] < z[\eta_y]$。注意到，$y\restriction \eta_y = z\restriction \eta_y$ 和 $y \sqsupseteq x \not\sqsubseteq z$ 蕴含 $\eta_y < l(x)$。在这两种情况下，由于 $x \sqsubseteq y$，我们有 $x[\eta_x] = y[\eta_x]$ 且 $x[\eta_y] = y[\eta_y]$。因此，η_x 的存在意味着 $\eta_y = \eta_x$ 的存在，反之亦然。另一个等价关系可由对称性得到。□

引理 4.5. 设 **X** 是一个凸子类，属于 (**超现实数类** $\leqslant$)。 则每个严格 $(\leqslant, \sqsubseteq)$-递增函数 $\varphi:$ **X** $\longrightarrow$ **超现实数类**都是一个嵌入 $(\mathbf{X}, \leqslant, \sqsubseteq) \longrightarrow$ (**超现实数类** $\leqslant$, $\sqsubseteq$)。

证明。由于 (超现实数类 $\leqslant$) 是一个线性序，函数 φ 自动就是 $\leqslant$的嵌入，因此我们只需证明它是 $\sqsubseteq$的嵌入。反设存在 **X**中的元素 $x < y$，使得 $x \not\sqsubseteq y$ 且 $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$。令 z 为 x 和 y 的 $\sqsubseteq$-极大公共初始段。我们有 $x < z \leqslant y$，因此 $z \in \mathbf{X}$。由于 φ是严格 $(\leqslant, \sqsubseteq)$递增的，我们有 $\varphi(x) < \varphi(z) \leqslant \varphi(y)$ 以及 $\varphi(x) \not\sqsubseteq \varphi(z)$，结合假设 $\varphi(x) \sqsubseteq \varphi(y)$，这与前一个引理矛盾。因此 $\varphi(x) \not\sqsubseteq \varphi(y)$，证明完毕。□

由于超现实子结构 **S** 是超现实数类到其自身的同构副本，它应该会在 **S**上诱导出一个自然的康威括号 $\{\}_{\mathbf{S}}$。这实际上引出了超现实子结构的一个等价定义。让我们对此进行更深入的探讨。

令 **S** 为 No 的任意子类。若 **S** 具有一个最简元素，并称该元素为其根，记为 $\mathbf{S}^{\bullet}$，则称 **S** 是有根的。给定 **S**的子类 $\mathbf{L} < \mathbf{R}$，令$(\mathbf{L}|\mathbf{R})_{\mathbf{S}}$表示满足 $\mathbf{L} < x < \mathbf{R}$的元素 $x \in \mathbf{S}$所组成的类。若 $(\mathbf{L}|\mathbf{R})_{\mathbf{S}}$是有根的，则令 $\{\mathbf{L}|\mathbf{R}\}_{\mathbf{S}}$表示其根。若 $L = \mathbf{L}$和 $R = \mathbf{R}$是集合，则称 $(L|R)_{\mathbf{S}}$为 **S**中由 L 和 R 定义的割。若对于 **S**的任意子集 $L < R$，类 $(L|R)_{\mathbf{S}}$都是有根的，则称 **S**具有诱导康威括号。

命题 4.6。 设 **S**具有 一个 诱导 康威 括号。 则 映射 $\Xi_{\mathbf{S}}:\mathbf{No}\longrightarrow\mathbf{S}$由 定义为

$$\forall x\in\mathbf{No},\Xi_{\mathbf{S}}\,x=\{\Xi_{\mathbf{S}}\,x_L\,|\,\Xi_{\mathbf{S}}\,x_R\}_{\mathbf{S}}$$

是一个同构 $(\textbf{超现实数类}\ \leqslant,\ \sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)$。

证明。我们首先说明 $\Xi_{\mathbf{S}}$是良定义的。设 $x\in$超现实数类，且 $\Xi_{\mathbf{S}}$在 $x_{\sqsubset}$上良定义并严格递增 $\leqslant$, 其值属于 **S**。我们有 $\Xi_{\mathbf{S}}x_L<\Xi_{\mathbf{S}}x_R$，其中这些集合属于 **S**，因此 $\Xi_{\mathbf{S}}x$ 是 $(\Xi_{\mathbf{S}}x_L|\Xi_{\mathbf{S}}x_R)_{\mathbf{S}}$ 的良定义元素，并且 $\Xi_{\mathbf{S}}$在 $\{x\}\cup x_L\cup x_R$上严格递增 $\leqslant$。由归纳法， $\Xi_{\mathbf{S}}$是一个从超现实数类 No 到 $\longrightarrow\mathbf{S}$的严格递增映射。设 $y\in$超现实数类，且 $x\sqsubseteq y$，因此 $x_L<y<x_R$。根据定义，数 $\Xi_{\mathbf{S}}x$ 是 $\in\mathbf{S}$ 中满足 $\Xi_{\mathbf{S}}x_L<u<\Xi_{\mathbf{S}}x_R$ 的最简元素。由于 $\Xi_{\mathbf{S}}y\in\mathbf{S}$ 且 $\Xi_{\mathbf{S}}x_L<\Xi_{\mathbf{S}}y<\Xi_{\mathbf{S}}y_L$, 可知 $\Xi_{\mathbf{S}}x\sqsubseteq\Xi_{\mathbf{S}}y$。由引理 4.5 可得， $\Xi_{\mathbf{S}}$是超现实数类 No $\leqslant,\sqsubseteq)$ 到其自身的一个嵌入。

现在我们通过对 $y\in\mathbf{S}$ for $\sqsubseteq$归纳，证明 $\mathbf{S}=\Xi_{\mathbf{S}}$超现实数类。设 $y\in\mathbf{S}$ 满足 $y_{\sqsubset}\cap\mathbf{S}$ 是 $\Xi_{\mathbf{S}}$超现实数类的子集。令 $\Xi_{\mathbf{S}}L'=L=y_L\cap\mathbf{S}$ 和 $R=y_R\cap\mathbf{S}=\Xi_{\mathbf{S}}R'$，其中由于 $\Xi_{\mathbf{S}}$是严格递增的，因而是单射，所以集合 L'、 R' 唯一确定，并且满足 $L'<R'$。由于 **S** 具有诱导康威括号，割 $(L\,|R)_{\mathbf{S}}$ 有根且包含 y，因此 $\{L\,|R\}_{\mathbf{S}}\sqsubseteq y$。由于 $\{L\,|R\}_{\mathbf{S}}\notin L\cup R$，我们必有 $y=\{L\,|R\}_{\mathbf{S}}=\Xi_{\mathbf{S}}\{L'|R'\}$。由归纳法可得 $\mathbf{S}=\Xi_{\mathbf{S}}$超现实数类。□

命题 4.7. 设 **S** 是 一个 子类 的 **超现实数类**。 那么 **S** 是 一个 超现实 子结构 当且仅当 它具有诱导康威括号 。

证明。假设 **S** 具有诱导康威括号。根据前一个命题，**S**是严格 $(\leqslant,\sqsubseteq)$递增函数 $\Xi_{\mathbf{S}}$:超现实数类 $\longrightarrow$超现实数类的值域，因此 **S**是一个超现实子结构。反过来，考虑一个将超现实数类嵌入自身、像为 **S**的嵌入 φ。令 L<实数集为 **S**的子集，并定义 $(L'、R')=(\varphi^{-1}(L)、\varphi^{-1}(R))$。函数 φ是严格$\leqslant$递增的，因此 $L'<R'$，我们可以考虑数 $x=\{L'|R'\}$。现在令 $y\in(L|R)_{\mathbf{S}}$。我们有 $\varphi^{-1}(y)\in(L'|R')$，所以 $x\sqsubseteq\varphi^{-1}(y)$。由于 φ是 $\sqsubseteq$递增的，这意味着 $\varphi(x)\sqsubseteq y$，从而证明 $\varphi(x)=\{L|R\}_{\mathbf{S}}$，因此 **S**具有诱导康威括号。□

备注 4.8. 更一般地，可以舍弃 存在性 Conway括号，并考虑子类**X** 的**超现实数类**，其满足 以下条件：

在。 对于所有子集L，实数集 的**X**满足$L<R$，该类 $(L\,|R)_{\mathbf{X}}$是要么空的，要么有根的 .

子类 $X\subseteq$No 满足 IN，当且仅当存在一个（唯一的） $\sqsubseteq$-初始子类 $\mathbf{I}_{\mathbf{S}}$of No，以及一个（唯一的）同构 $(\mathbf{I}_{\mathbf{S}},\leqslant,\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)$。下文第 6 节中描述的类 Smpπ 就是这种情形。有关这类更一般子类的更多细节，请参见 [19]。

本文重点研究超现实子结构。命题 4.7 和命题 4.13 中给出的刻画均为已知结果。第二个结果最初由 Lurie [34, 定理 8.3], 针对更一般类型的序数序列证明，而这两个结果均由 Ehrlich [19, 定理 1 和 4]证明。

命题 4.9. 设 **S** 是 一个 超现实数子结构。 函数 函数 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 是 唯一的 满射 严格递增 $(\leqslant,\sqsubseteq)$-递增 函数 **超现实数类** $\longrightarrow\mathbf{S}$。

证明。设 φ是一个严格 $(\leqslant,\sqsubseteq)$-递增函数 $\mathrm{No}\longrightarrow \mathrm{S}$，其像为 $\mathbf{S}$。根据引理 4.5，它是一个嵌入。给定 $\mathrm{x}\in$超现实数类，使得 φ和 $\Xi_{\mathbf{S}}$在 $\mathrm{x}_{\sqsubset}$上重合， $\mathbf{S}$中的数 $\varphi(\mathrm{x})$和 $\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{x}$ 都是 $(\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{x}_L\,|\,\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{x}$ 中的最简元素，因此相等。由归纳法可得 $\varphi=\Xi_{\mathbf{S}}$。□

引理 4.10. 设 $\mathbf{S}$是一个超现实子结构。对于 $x\in$**超现实数类**，有 $l(x)\leqslant l(\Xi_{\mathbf{S}}x)$。

证明。根据命题 4.6，映射 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 实现了从 $(\mathrm{x}_{\sqsubset},\sqsubseteq)$ 到 $((\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{x})_{\sqsubset},\sqsubseteq)$的一个嵌入，因此前者的序型 $\mathrm{l}(\mathrm{x})$ 小于后者的序型，即 $\mathrm{l}(\Xi_{\mathbf{S}}\mathrm{x})$。 □

给定一个超现实子结构 $\mathbf{S}$，我们称 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 为 $\mathbf{S}$的参数化定义超现实同构。上述唯一性性质至关重要；尤其是，它使我们能够通过超现实子结构的定义超现实同构来构造超现实子结构，反之亦然。

4.2 割表示

设 $\mathbf{S}$ 为超现实子结构。给定元素 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$以及 $\mathbf{S}$ 的子集 L、R，且 $\mathrm{L}<\mathrm{R}$，我们称 (L,R) 是 x 在 $\mathbf{S}$ 中的割表示，当且仅当 $\mathrm{x}=\{\mathrm{L}\mid\mathrm{R}\}_{\mathbf{S}}$。我们将表示中的 L 和 R 的元素称为左选项和右选项。对于 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$，我们记为

$$(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}}):=(x_L\cap\mathbf{S},x_R\cap\mathbf{S})$$

and 称这一对为规范表示的x 在 $\mathbf{S}$。我们还将$x_{\sqsubset}^{\mathbf{S}}$ 表示为集合$x_{\sqsubset}\cap$ $\mathbf{S}$.

$\sqsubseteq$的终子结构是指，对于 $\sqsubseteq$ 而言， $\mathbf{S}$ 的一个有根终段 $\mathbf{T}$ $\mathbf{S}$ （因而必然是一个子结构）。容易看出，当且仅当 $\mathbf{T}$是有根的，且 $\mathbf{T}$是由满足 $\mathbf{T}^{\bullet}\sqsubseteq\mathrm{x}$的元素$\mathrm{x}\in\mathbf{S}$组成的类 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{T}^{\bullet}}$时，情况才是如此。

命题 4.11. 设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构且设 $(L$，实数集$)$ 和 $(L'$，实数集$')$ 是割表示于 $\mathbf{S}$ 中。对于 $x\in\mathbf{S}$，我们有。

a) $\{L\mid R\}_{\mathbf{S}}\leqslant\{L'\mid R'\}_{\mathbf{S}}$当且仅当 $\{L\mid R\}_{\mathbf{S}}<R'$且 $L<\{L'\mid R'\}_{\mathbf{S}}$.*b)* $(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})$ 是 $\mathbf{S}$ 中 x 的一个割表示，且相对于该割表示，x 在 $\mathbf{S}$ 中的任何其他割表示都是共尾的。 *c)* $\mathbf{S}^{\sqsupseteq x}=(x_L^{\mathbf{S}}\mid x_R^{\mathbf{S}})_{\mathbf{S}}$.

证明。根据 [24,定理 2.5 和 2.9]，当 $\mathbf{S}=$超现实数类时，a) 和 b) 中的断言成立。由命题 4.6，函数 $\Xi_{\mathbf{S}}$是 (超现实数类 $\leqslant$， $\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)$的一个同构，并满足关系 $\forall\mathrm{a}\in$超现实数类 $(\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{a}_L$， $\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{a}_R)=((\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{a})_L^{\mathbf{S}}$， $(\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathrm{a})_R^{\mathbf{S}})$，因此 a) 和 b) 一般情形下也成立。我们有$\mathbf{S}^{\sqsupseteq x}\supseteq(\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}|\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}})_{\mathbf{S}}$，因为 $\mathrm{x}=(\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}|\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}})_{\mathbf{S}}^{\bullet}$。反过来，对于 $\mathrm{y}\in\mathbf{S}^{\sqsupseteq x}$和 $\mathrm{x}'\in\mathrm{x}_{\sqsubset}^{\mathbf{S}}$，有 $\mathrm{x}'\sqsubset\mathrm{y}$ 且 $\mathrm{y}[\mathrm{l}(\mathrm{x}')]=\mathrm{x}[\mathrm{l}(\mathrm{x}')]\in\{-1,1\}$，因此 $\mathrm{y}-\mathrm{x}'$和 $\mathrm{x}-\mathrm{x}'$具有相同的符号。由此可得 $\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}<\mathrm{y}<\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}}$，这就完成了 c) 的证明。□

4.3 嵌套

设 $\mathbf{S}$、 $\mathbf{T}$ 是两个超现实子结构。则存在唯一的 $(\leqslant,\sqsubseteq)$-同构 $\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}:=\Xi_{\mathbf{T}}\,\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\colon\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$，我们称之为 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{T}$ 之间的超现实同构。复合$\Xi_{\mathbf{S}}\circ\Xi_{\mathbf{T}}$也是一个嵌入，因此其像 $\mathbf{S}\prec\mathbf{T}:=\Xi_{\mathbf{S}}\,\mathbf{T}$ 仍是一个超现实子结构，我们称之为 $\mathbf{T}$ 嵌入 $\mathbf{S}$ 中所得的嵌套。若存在超现实子结构 $\mathbf{U}$ 使得 $\mathbf{S}=\mathbf{T}\prec\mathbf{U}$（分别为 $\mathbf{S}=\mathbf{U}\prec\mathbf{T}$），则称 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{S}$ 的左因子（分别为右因子）。

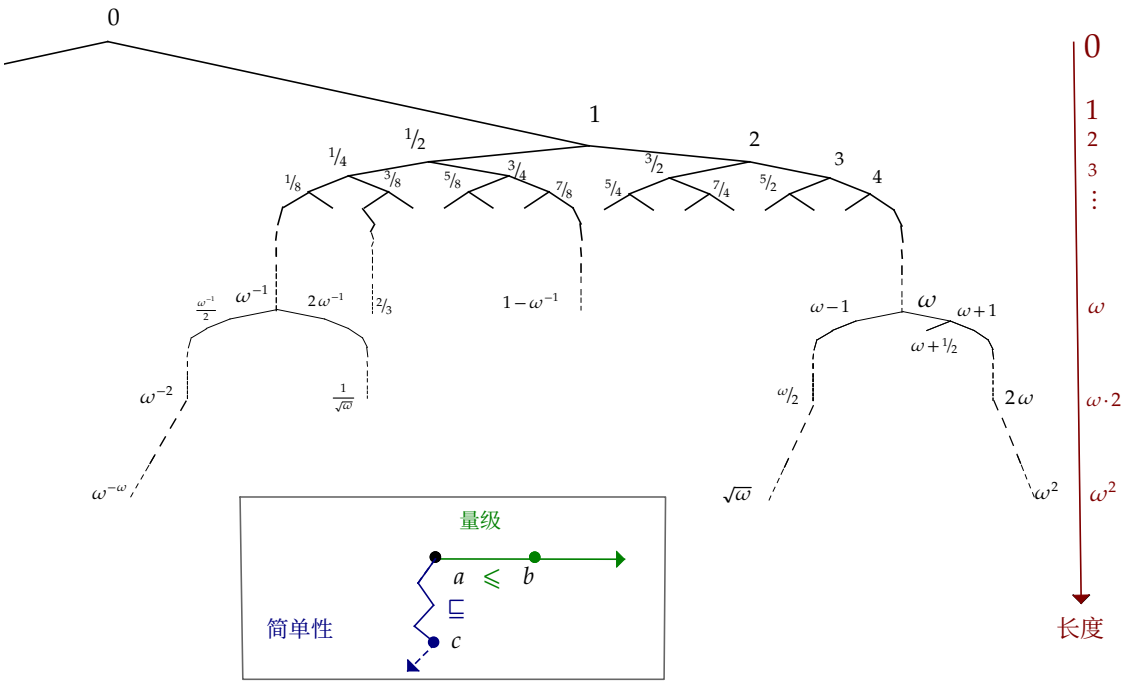

图 4.1. 正超现实数类构成的树。为便于说明，仅展示了长度为 ω^2 的少数几个数。负数可通过关于 y 轴的对称变换得到。

根据函数复合的结合律，超现实子结构的嵌套也满足结合律。右因子由另外两个子结构唯一确定。更确切地说，由于 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 是单射，关系 $\mathbf{S}=\mathbf{T}\prec\mathbf{U}=\Xi_{\mathbf{T}}\mathbf{U}$ 可推出 $\mathbf{U}=\Xi_{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{S})$。左因子则不然：

$$(1\dot{+}\mathbf{No})\dot{+}(\omega\dot{+}\mathbf{No})=\mathbf{No}\prec(\omega\dot{+}\mathbf{No})=\omega\dot{+}\mathbf{No}.$$

命题 4.12. 如果 $\mathbf{S}$，$\mathbf{T}$ 是超现实子结构，那么 $\mathbf{T}$ 是一个左因子的 $\mathbf{S}$ 当且仅当 当且仅当 $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{T}$。

证明。若 $\mathbf{S}=\mathbf{T}\prec\mathbf{U}$，则 $\mathbf{S}=\Xi_{\mathbf{T}}\mathbf{S}\subseteq\mathbf{T}$。假设 $\mathbf{S}\subseteq\mathbf{T}$，并令 $\mathbf{U}=\Xi_{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{S})$。我们有 $\mathbf{U}=(\Xi_{\mathbf{T}}^{-1}\restriction\mathbf{S})\,\Xi_{\mathbf{S}}$ No，其中 $\Xi_{\mathbf{T}}^{-1}\restriction\mathbf{S}$ 和 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 分别是嵌入 $(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{No}\leqslant\sqsubseteq)$ 以及 $(\mathbf{No}\leqslant\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)$，因此 $(\Xi_{\mathbf{T}}^{-1}\restriction\mathbf{S})\,\Xi_{\mathbf{S}}$ 是嵌入 $(\mathbf{No}\leqslant\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{No}\leqslant\sqsubseteq)$。因此，$\mathbf{U}$ 是一个超现实子结构，且满足 $\Xi_{\mathbf{T}}\mathbf{U}=\mathbf{S}$，这意味着 $\mathbf{T}\prec\mathbf{U}=\mathbf{S}$。□

4.4 超现实数类 子结构作为树

通过对超现实数类 **超现实数类** $\approx\{-1,1\}^{<\mathbf{On}}$，这个类的超现实数可以自然地被表示为一个完整的二叉树，其深度均匀**超现实数类**，如图中所示于图 4。1。

对于每个序数 α，我们将 $\mathrm{No}(\alpha)$ 记为 No 中深度为 $<\alpha$ 的节点所构成的子树，即满足 $\mathrm{l}(\mathrm{x})<\alpha$ 的数 x 的集合。该集合可以表示为在深度 α 处裁剪图形后得到的子树。为了从树论角度刻画超现实子结构，我们需要研究 $\sqsubseteq$ 的链：给定一个子类 $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{No}$，$\sqsubseteq$中的 $\mathbf{X}$ -链是 $(\mathbf{X},\sqsubseteq)$ 的一个线性有序（因而也是良序）子集 C。如果 $(\mathbf{X},\sqsubseteq)$ 中的一个 $\sqsubseteq$-链 C 在 $(\mathbf{X},\sqsubseteq)$ 中存在上确界，则将其记为 $\sup_{\mathrm{x},\sqsubseteq}\mathrm{C}$。注意，空集在 $(\mathrm{X}\sqsubseteq)$ 中存在上确界，当且仅当 X 有一个根；在这种情况下，$\sup_{\mathrm{x},\sqsubseteq}\emptyset=\mathrm{X}^{\bullet}$。如果对于每个属于 X 且满足 $\sqsupseteq$ y 的 z，均有 $\mathrm{y}\in\mathrm{X}$、$\mathrm{x}\in\mathrm{X}$ 且 $\mathrm{y}<\mathrm{x}$，则称 y 是 x 的左后继。右后继的定义类似。

命题 4.13. 设 $\mathbf{S}$是 一个 类 的 超现实 数。 那么 以下 各项 断言 彼此 等价:

<escape>*a*） $\mathbf{S}$ 是一个超现实数子结构。*b*）的每个元素在 $\mathbf{S}$ 都有一个左和一个右后继元在 $\mathbf{S}$ 中，并且每个 $\sqsubseteq$-链在 $\mathbf{S}$都有一个上确界在 $(\mathbf{S},\sqsubseteq)$中。</escape>

证明。设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。在超现实数类中，任意元素 x 显然都有一个左后继 $\{x_L|x\}$ 和一个右后继 $\{x\,|x_R\}$，且每个 $\sqsubseteq$-链显然都有一个上确界。由于这些性质在同构 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 下保持不变，我们推出 b)。

现在假设 b) 成立。我们通过归纳定义一个同构$\Xi\colon (\mathrm{No}\ \sqsubseteq,\leqslant)\longrightarrow(\mathbf{S},\sqsubseteq,\leqslant)$来推导出 a)。将 b) 应用于空链，我们注意到， $\emptyset$ 在 $(\mathbf{S},\sqsubseteq)$ 中的上确界是 $\sqsubseteq$的 $\mathbf{S}$的最小元。因此，$\mathbf{S}$是有根的，我们可以定义 $\Xi 0=\mathbf{S}^{\bullet}$。设$0<\alpha$为一个序数，使得 Ξ 已定义，并且在 $\mathrm{No}(\alpha)$上严格递增 $(\leqslant,\sqsubseteq)$。我们区分两种情况:

- 若 α 是极限序数，则取一个长度为 α的超现实数 x。因此，x 是一个极限数，并且 $\Xi x_{\sqsubset}$ 是 $\mathbf{S}$中的一个 $\sqsubseteq$-链。我们定义 $\Xi x=\sup_{x,\sqsubseteq}\Xi x_{\sqsubset}$。
- 现在假设 α 是后继序数，取一个长度为 α的数 x，并将 $x=u\dotplus\sigma$记作 $\sigma\in\{-1,1\}$。令 u_{-1}和 $u1$ 分别为 Ξu 的左后继和右后继。然后定义 $\Xi x=u_{\sigma}$。

在这两种情形下，这都定义了 Ξ在**超现实数类**$(\alpha+1)$ 上的，且扩张显然是严格递增 $\sqsubseteq$-递增且严格 $\leqslant$-递增于每个集合$x_{\sqsubset}:=\{x\}\cup x_{\sqsubset}$，当$x\in$**超现实数类**$(\alpha+1)$。

还需证明 Ξ 在超现实数类 $\mathrm{No}(\alpha+1)$上严格 $\leqslant$递增。给定 $\mathrm{No}(\alpha+1)$中的一个 $<b$，令 $c\in\mathrm{No}(\alpha)$ 为它们的 $\sqsubseteq$ 最大公共初始段。我们有以下两种情况：$a<c<\Xi b$，因此 $\leqslant$；或者 $a<\Xi c\leqslant\Xi b$，因此 $<$。所以 Ξ 在超现实数类 $\mathrm{No}(\alpha+1)$上严格$\leqslant$递增。

根据归纳法，函数 Ξ 已定义，并且在 $\mathrm{No}=\bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}}\mathrm{No}(\alpha)$ 上递增。注意， $(S\sqsubseteq)$ 是良基的，因为 $(\mathrm{No}\sqsubseteq)$ 是良基的，且 $S\subseteq\mathrm{No}$。对 $y\in\mathbf{S}$ 进行归纳， 下面证明 y 属于 Ξ 的值域。若 y 是某个元素 $v\in\mathbf{S}$ 的左后继或右后继，则由归纳假设可知存在某个 $u\in\mathrm{No}$，使得 $v=\Xi u$，因此可得 $y=\Xi(u\dotplus 1)$。否则，$y=\sup_{\sqsubseteq}y^{\mathbf{S}}_{\sqsubset}=\Xi\sup_{\sqsubseteq}C$，其中 $C=\{x\in\mathrm{No}:\Xi x\sqsubset y\}$。由此可知， Ξ 是一个同构。□

例 4.14。考虑由 $\Xi_{\mathbf{Inc}}0:=1,\Xi_{\mathbf{Inc}}(u\dotplus\sigma)=(\Xi_{\mathbf{Inc}}u)\dotplus\sigma\dotplus 1$ 定义的类 Inc，其中对所有 $u\in\mathrm{No}$ 都成立；并且对每个在 $(\mathrm{No}\sqsubseteq)$ 中没有最大元的非空$\sqsubseteq$-链 C，都有 $\sigma\in\{-1,1\}$ and $\Xi_{\mathbf{Inc}}\sup_{\sqsubseteq}C=(\sup_{\sqsubseteq}\Xi_{\mathbf{Inc}}C)\dotplus 1$。容易验证，对每个超现实数 x，都有 $l(\Xi_{\mathbf{Inc}}x)>l(x)$。

例 4.15。设 $\mathbf{S}=$超现实数类$^{\geqslant}\setminus\{1\}$。则 $(\mathbf{S},\sqsubseteq)$ 同构于 (超现实数类 $\sqsubseteq$)，但 $\mathbf{S}$ 不是超现实结构。换言之，条件 b) 不能替换为较弱的条件：$(\mathbf{S},\sqsubseteq)$ 与 (超现实数类 $\sqsubseteq$) 同构。

特征 b) 使我们在构造超现实子结构时拥有一定的自由度：我们只需提供一种机制，用于确定已构造元素的左后继和右后继，以及已构造分支（即 $\sqsubseteq$-链）的最小上界。直观地说，这相当于一种在表示超现实数类 No 的二叉树内部将 $\mathbf{S}$“绘制”为一棵完整二叉树的方法：参见图 4.2。

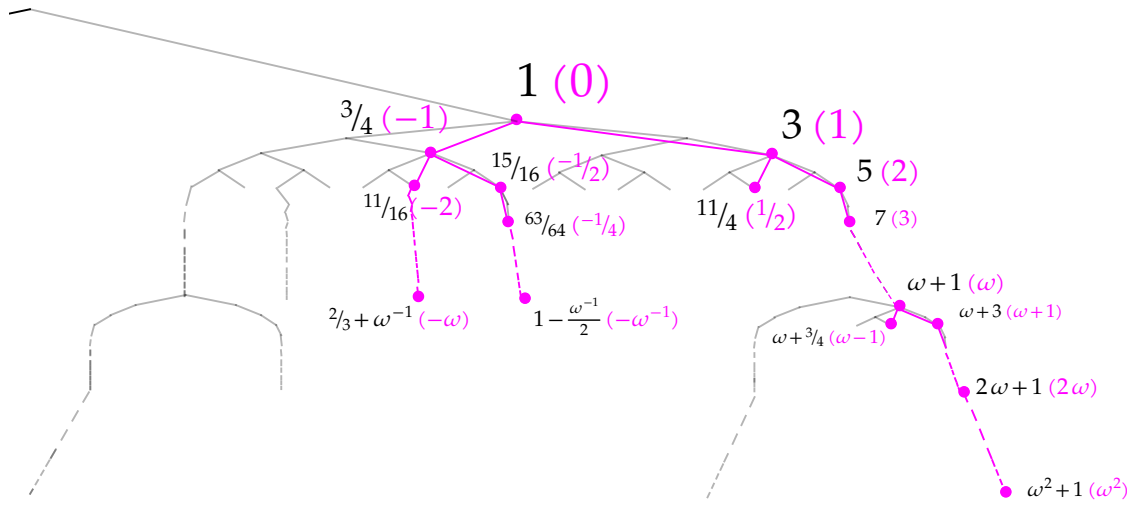

图 4.2。例 4.14 中超现实子结构 Inc（紫色）在超现实数类 No（灰色）中的（子）树表示。标签的形式为 $\Xi_{\mathbf{Inc}}\,x$ (x)。例如 $\Xi_{\mathbf{Inc}}(-2)=11/16$。

4.5 凸子类

<escape>如果 $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{Y}$是超现实数类的**超现实数类**，回顾一下， $\mathbf{X}$在凸于 $\mathbf{Y}$如果
</escape>

$$\forall x,z\in\mathbf{X},\forall y\in\mathbf{Y},(x\leqslant y\leqslant z\Longrightarrow y\in\mathbf{X}),$$

并且 $\mathbf{X}$ 在 $\sqsubseteq$-凸于 $\mathbf{Y}$当且仅当

$$\forall x,z\in\mathbf{X},\forall y\in\mathbf{Y},(x\sqsubseteq y\sqsubseteq z\Longrightarrow y\in\mathbf{X}).$$

我们简单地说，若 $\mathbf{X}$ 在 No 中是凸的（分别地， $\sqsubseteq$-凸），则称 $\mathbf{X}$ 是凸的（分别地， $\sqsubseteq$-凸）。我们用 $\mathrm{Hull}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ 表示 $\mathbf{X}$ 在 $\mathbf{Y}$ 中的凸包，也就是说，对于每个数 y，$y\in\mathrm{Hull}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ 当且仅当 $y\in\mathbf{Y}$，并且 $\mathbf{X}$ 中存在元素 x、z，使得 $x\leqslant y\leqslant z$。$\mathbf{X}$ 在 $\mathbf{Y}$ 中的凸包是包含 $\mathbf{X}$ 的 $\mathbf{Y}$ 的最小凸子类。

引理4.16。假设*S*是一个超现实子结构。那么，每个非-空的凸子类都 S是有根的。

证明。根据命题 4.6 和 4.7，只需对 $\mathbf{S}=$超现实数类 No 证明此引理。设 $\mathbf{C}$是 No 的一个非空凸子类。反设 $u、v\in\mathbf{C}$ 是两个最简元素，且 $u<v$。令 α 为满足 $u[\alpha]<v[\alpha]$的最小序数。由于 $u\not\sqsubseteq v$ 且 $v\not\sqsubseteq u$，我们必有 $u[\alpha]=-1$ 且 $v[\alpha]=1$。现在考虑符号序列为 $u\restriction\alpha=v\restriction\alpha$的数 w。于是 $u<w<v$，因此 $w\in\mathbf{C}$；但同时 $w\sqsubseteq u$，矛盾。□

引理 4.17. 如果 $\mathbf{C}$ 是 *No* 的一个非-空 终段，其中 **No**，那么 $\mathbf{C}^{\bullet}$ 是 在 其中最小的 序数，属于 $\mathbf{C}$。

证明。给定 $x\in\mathbf{C}$，我们有 $x\leqslant l(x)\in\mathbf{C}$，所以 C 包含一个序数。令 ι 表示 $\mathbf{C}$中的最小序数。给定另一个序数 $\eta<\iota$，根据 ι的极小性，我们有 $\eta\notin\mathbf{C}$。由于 C 是 No 的一个终段，因此 $\eta<\mathbf{C}$。对于任何 $x\in\mathbf{C}$，我们推得 x 位于割 $(\iota_L\mid\emptyset)$ 中，由此 $\iota=\{\iota_L\mid\emptyset\}\sqsubseteq x$。这表明 $\iota=\mathbf{C}^{\bullet}$。□

命题 4.18. 设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。

a) $\mathbf{C}$ 的凸子类是超现实子结构，当且仅当它没有共尾子集或共初子集。*b)* 对于 $\mathbf{S}$的子集 $L<R$，割 $(L\mid R)_{\mathbf{S}}$ 是一个超现实子结构。*c)* 如果 $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{S}$ 是超现实子结构，那么 $Hull_{\mathbf{S}}(\mathbf{T})$ 是超现实子结构。*d)* 如果 $\mathbf{T}$ 是超现实子结构，$(L|R)_{\mathbf{S}}$ 是 $\mathbf{S}$ 中的一个割，并且 $f:\mathbf{T}\longrightarrow\mathbf{S}$ 严格单调且满射，那么 $f^{-1}((L\mid R)_{\mathbf{S}})$ 是一个超现实子结构。*e)* 任意集合大小的、在 $\mathbf{S}$ 中为凸的超现实子结构递减族的交集都是一个超现实子结构。

证明. *a*) 假设 $\mathbf{C}$ 没有共尾或共初子集，并且令 $L<R$ 为子集，取自 $\mathbf{C}$。

- 如果 L 和 R 都是空的，那么对于任意 c，$<R$ 中任意 $c\in\mathbf{C}$。注意，由于 $\emptyset$ 并非在中共尾 $\mathbf{C}$。
- 如果 $\mathrm{L}=\emptyset$ 且 $\mathrm{R}\neq\emptyset$，那么存在一个 $\mathrm{x}\in\mathbf{C}$，使得 $\mathrm{x}<\mathrm{R}$，因为 R 在 $\mathbf{C}$ 中不是共初。令 $\mathrm{y}=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{R}\}_{\mathbf{S}}$，且 $\mathrm{r}\in\mathrm{R}$。于是 $\mathrm{x}<\mathrm{y}<\mathrm{r}$，因此 $\mathrm{y}\in\mathbf{C}$，并且 $\mathrm{y}\in(\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{C}}$。
- 类似地，如果 $L\neq\emptyset$ 和 实数集 $=\emptyset$，那么 $\{L\mid y\}_{\mathbf{S}}\in(L\mid\text{实数集})_{\mathbf{C}}$ 对于 某个 $y>L$ 中的 $\mathbf{C}$。
- 如果 $L\neq\emptyset$ 且 实数集 $\neq\emptyset$，那么 $\{L\mid R\}_{\mathbf{S}}\in\mathbf{C}$，根据 凸性。

在上述每一种情形中，我们都证明了 $(\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{C}}$ 是 $\mathbf{S}$ 的一个非空凸子类。根据引理 4.16，它是有根的。根据命题 4.7，可得 $\mathbf{C}$ 是一个超现实子结构。反过来，如果 $\mathbf{C}$ 是一个超现实子结构，那么给定 $\mathbf{C}$ 的一个子集 X，我们有

$$\mathbf{C}\ni\{\emptyset\mid X\}_{\mathbf{C}}<X<\{X\mid\emptyset\}_{\mathbf{C}}\in\mathbf{C},$$

因此 X 既 不 共尾 也不 共初 于 $\mathbf{C}$。

b) 这是前一点的直接推论：割 $(\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{S}}$ 按定义是 $\mathbf{S}$ 的凸子类；给定 $(\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{S}}$ 的一个子集 X，有

$$(L\mid R)_{\mathbf{S}}\ni\{L\mid X\}_{\mathbf{S}}<X<\{X\mid R\}_{\mathbf{S}}\in(L\mid R)_{\mathbf{S}}.$$

根据 命题 4.7，可 推出 $(L\mid R)_{\mathbf{S}}$ 是一个超现实 子结构。

c) 由于 $\mathbf{T}$ 是一个超现实 子结构，它没有超现实数类共尾或共初子集。 由此可推出 同样的结论适用于$\mathbf{Hull}_{\mathbf{S}}(\mathbf{T})$，它因此是一个超现实 子结构。

d) 若 $\mathrm{f}^{-1}((\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{S}})=(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{L})\mid\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{R}))_{\mathbf{T}}$ 是递增的，则 $\mathrm{f}^{-1}((\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{S}})=(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{R})\mid\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{L}))_{\mathbf{T}}$ 若 f 是递减的。在这两种情况下，$\mathrm{f}^{-1}((\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{S}})$ 都是 $\mathbf{T}$ 中的一个割，因此根据 c)，它是一个超现实子结构。

e) 设 $(\mathrm{I}<)$ 是一个线性有序集，并且 $(\mathbf{C}_i)_{i\in I}$ 关于 $\subseteq$ 递减。其交集 $\mathbf{C}:=\bigcap_{i\in I}\mathbf{C}_i$ 是凸的。令 X 为 $\mathbf{C}$ 的一个子集。对于 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，有 $\mathrm{X}\subseteq\mathbf{C}_i$，因此 $\mathrm{l}_i<\mathrm{X}<\mathrm{r}_i$，其中 $\mathrm{l}_i=(\emptyset\mid\mathrm{X})^{\bullet}_{\mathbf{C}_i}$，且 $\mathrm{r}_i=(\mathrm{X}\mid\emptyset)^{\bullet}_{\mathbf{C}_i}$。记 $\mathrm{l}=\{\mathrm{l}_i:\mathrm{i}\in\mathrm{I}\mid\mathrm{X}\}_{\mathbf{S}}$，以及 $\mathrm{r}=\{\mathrm{X}\mid\mathrm{r}_i:\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}_{\mathbf{S}}$，则有 $\mathrm{l}<\mathrm{X}<\mathrm{r}$。此外，对于 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，有 $\mathrm{l}_i<\mathrm{l}<\mathrm{r}<\mathrm{r}_i$，所以由凸性可知 l、$\mathrm{r}\in\mathbf{C}_i$。这证明了 l、$\mathrm{r}\in\mathbf{C}$，从而 X 在 $\mathbf{C}$ 中既非共尾，也非共初。因此，根据 a)，$\mathbf{C}$ 是一个超现实子结构。□

例 4.19. 割 $(\mathrm{L}\mid\mathrm{R})_{\mathbf{S}}$，其中 $\mathrm{L}<\mathrm{R}$ 是 $\mathbf{S}$ 的子集，包括 $\sqsubseteq$-终子结构 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{S}$ 的非空开区间，因此它们都是凸超现实子结构。注意，在序拓扑中开且非空的 No 的凸类可能并非超现实子结构。一个反例是有限超现实数的类 $\mathrm{No}^{<}:=\mathrm{Hull}(\mathbb{Z})$，因为它具有共尾子集 $\mathbb{N}$。

例子 4.20. 以下 是 一些 进一步的 例子 和 反例 ， 关于 凸超现实数子结构 ， 它们 是我们 将 考虑的 内容。

- 该类**超现实数类**$^{>}$:= $(\{0\}\,|\,\emptyset)$ 的严格正超现实数是一个凸超现实子结构，并且它实际上是事实上该 $\sqsubseteq$-终子结构**超现实数类**$^{\sqsupseteq 1}$ 的**超现实数类**。
- 同样地， 类**超现实数类**$^{>}$, $^{>}$:= $(\mathbb{N}\,|\,\emptyset)$ = **超现实数类**$^{\sqsupseteq\omega}$ 的正无穷超现实数是一个凸超现实子结构。
- The类 **超现实数类**$^{<}$:=$(\mathbb{R}^{<0}|\mathbb{R}^{>0})$ of无穷小 forms a surreal substructure which can be split as the union of $\{0\}$ and the two $\sqsubseteq$-final substructures **超现实数类**$^{\sqsupseteq -\omega^{-1}}$,**超现实数类**$^{\exists\omega^{-1}}$。
- 尽管每个区间 $(-n-1,\ n+1)$ 对于$n\in\mathbb{N}$ 是一个凸超现实数子结构，它们的递增并集**超现实数类**$^{\leqslant}$ 是不是一个超现实数子结构。

注 4.21. 对于 $\mathbf{S}$ 的子集 $L<R$，割 $(L\,|R)_{\mathbf{S}}$ 可能不是 $\mathbf{S}$ 的 $\sqsubseteq$终子结构。事实上，根据命题4.11(c)，它是 $\mathbf{S}$ 的 $\sqsubseteq$终子结构，当且仅当 $\{L\,|R\}_{\mathbf{S}}$ 在 $\mathbf{S}$ 中的典范表示相对于 (L, R) 共尾，此时我们有 $(L\,|R)_{\mathbf{S}}=\mathbf{S}^{\sqsupseteq\{L|R\}_{\mathbf{S}}}$。

任何凸子类 $\mathbf{C}$of $\mathbf{S}$ 都是 $\mathbf{S}$ 中的一个广义割 $\mathbf{C}=(\mathbf{L}|\mathbf{R})_{\mathbf{S}}$，其中 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{S}$ 中 $\mathbf{C}$ 的严格下界类，而 $\mathbf{R}$ 是其严格上界类。然而，这些类并不总能替换为集合。事实上，类 $\mathbf{C}$ 是一个割 $\mathbf{C}=(L\,|R)_{\mathbf{S}}$，且 $L<R$ 是 $\mathbf{S}$ 的子集，当且仅当能找到与 $(\mathbf{L},\mathbf{R})$ 互相共尾的这类集合。因此，这种存在性归结为 $\mathrm{cof}(\mathbf{L},<),\mathrm{cof}(\mathbf{B},>)\in\mathrm{On}$，因为共尾性在互相共尾下保持不变（关于共尾良序子集的说明，见附录 B 末尾）。

例4.22. 回忆一下， $\omega/2=\omega\dot{+}(-\omega)$。对每个 $\alpha\in\mathrm{On}$，令 $x_\alpha=\omega/2\dot{\times}\alpha$，并考虑类 $\mathbf{C}=\{y\in$超现实数类 $:\forall\alpha\in\mathrm{On},\ y>x_\alpha\}$。那么 $\mathbf{C}$ 是超现实数类 No 的一个凸超现实子结构。事实上，序列 $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{On}}$（其中 $y_\alpha=\omega\dot{+}(\omega/2\dot{\times}(-\alpha))$）严格递减，且在 $\mathbf{C}$ 中共初。这说明 $\mathbf{C}$ 不存在共初子集。作为 No 的一个非空终段，类 $\mathbf{C}$ 也不存在共尾子集。因此，命题 4.18 表明 $\mathbf{C}$ 是一个超现实子结构。我们有 $\mathrm{cof}(\{x_\alpha:\alpha\in\mathrm{On}\},<)=\mathrm{On}$，所以 $\mathbf{C}$ 不是 No 中的割。

4.6 割方程

我们已经指出，康威Conway 括号可以用来优雅地递归地定义函数在**超现实数类**上。现在我们来研究这类定义，进一步探讨并考察它们如何推广到任意超现实数子结构。

定义 *4.23*。设 $\mathbf{S},\mathbf{T}$ 为超现实子结构。设 λ,ρ 为定义在 $\mathbf{S}$ 中割表示上的函数，并且只要 (L, R) 是 $\mathbf{S}$ 中的割表示， $\lambda(L, R),\rho(L, R)$ 就是 $\mathbf{T}$ 的子集。若对所有 $x\in\mathbf{S}$，都有以下关系，则称函数 $F:\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$ 满足割方程 $\{\lambda\,|\rho\}_{\mathbf{T}}$:

$$\begin{aligned}\lambda(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}}) &< \rho(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}}) \quad \textit{and}\\ F(x) &= \{\lambda(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})\,|\,\rho(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}}.\end{aligned}$$

我们 称 割 方程 是 广延的 ， 如果它满足

$$\forall x,y\in \mathbf{S},(x\sqsubseteq y\Longrightarrow(\lambda(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})\subseteq\lambda(y_L^{\mathbf{S}},y_R^{\mathbf{S}})\wedge\rho(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})\subseteq\rho(y_L^{\mathbf{S}},y_R^{\mathbf{S}}))).$$

注记。 我们将在下文的命题证明中看到， 命题4.27指出，广泛的割方程保持简单性。

例 4.24. 一个简单的割方程示例是 (3.3)： $\forall x\in$超现实数类 $-x=\{-x_R\mid -x_L\}$。这里 $S=T=$超现实数类，我们可以取 $\lambda(x_L,\ x_R)=-x_R$和 $\rho(x_L,x_R):=-x_L$。注意，这个割方程是广延的。

取 $S=$超现实数类 和 $T=$超现实数类$^{>}$, $\lambda(x_L,\ x_R)=x_L\cap$超现实数类$^{>}$and $\rho(x_L,\ x_R)=x_R\cap$超现实数类$^{>}$，我们得到函数 F，其中 $F(x)=0$对所有 $x\leqslant 0$成立，且 $F(x)=x$ 对所有 $x>0$成立。

<escape>参见例子4.32 下文以了解更多例子。</escape>

注记 4.25。我们的割方程概念并不限制函数，因为任意函数 $F:\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$ 都有割方程 (λ,ρ)，其中 $\lambda(L,R):=F(\{L\mid R\}_{\mathbf{S}})_L^{\mathbf{T}}$ 且 $\rho(L,R):=F(\{L\mid R\}_{\mathbf{S}})_R^{\mathbf{T}}$。因此，不应将其与 [22] 中的递归定义和 [37] 中的遗传定义混淆。

Exa<escape>例 4.26. 给定 集合 Λ,P的 函数 $\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$,割 方程 的 形式 (λ,ρ) 其中</escape>

$$\begin{aligned}\lambda(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}}) &= \{\xi(l):\xi\in\Lambda,l\in x_L^{\mathbf{S}}\}\\ \rho(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}}) &= \{\psi(r):\psi\in P,r\in x_R^{\mathbf{S}}\}\end{aligned}$$

是 广泛的。 我们 将 写作 $\{\lambda(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})\mid\rho(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}}=\{\Lambda(x_L^{\mathbf{S}})\mid P(x_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}}$ 在 这种 情况下。注意到 它 是 常见的去 考虑 良好-定义的 割 方程 的 如下 形式

$$F(x)=\{\Lambda(x_L^{\mathbf{S}})\mid P(x_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}},$$

其中 F 本身 属于 到 Λ且 P。

命题 *4.27.* 设 $\mathbf{S}$、$\mathbf{T}$ 为超现实子结构。设 $F:\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$ 是严格递增的，并具有广义割方程 $\{\lambda\mid\rho\}_{\mathbf{T}}$。则 $F(\mathbf{S})$ 是一个超现实子结构，并且我们有 $F=\Xi_{F(\mathbf{S})}^{\mathbf{S}}$。

证明。我们断言 F 是 $\sqsubseteq$递增的。确实，设 $x,y\in\mathbf{S}$ 且 $x\sqsubseteq y$。我们有 $x_L^{\mathbf{S}}<y<x_R^{\mathbf{S}}$，因此 $x_L^{\mathbf{S}}\subseteq y_L^{\mathbf{S}}$ 且 $x_R^{\mathbf{S}}\subseteq y_R^{\mathbf{S}}$。由 (λ,ρ) 的广延性，我们可推出 $\lambda(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})\subseteq\lambda(y_L^{\mathbf{S}},\ y_R^{\mathbf{S}})$ 且 $\rho(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})\subseteq\rho(y_L^{\mathbf{S}},\ y_R^{\mathbf{S}})$，从而 $\lambda(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})<F(y)<\rho(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})$。这意味着 $F(x)\sqsubseteq F(y)$。因此 F 严格 $(\leqslant,\sqsubseteq)$递增。所以复合 $F\circ\Xi_{\mathbf{S}}$:超现实数类 $\longrightarrow F(\mathbf{S})$严格 $(\leqslant,\sqsubseteq)$递增。函数 $\Xi_{\mathbf{S}}$:(超现实数类 $\leqslant,\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{S},\leqslant,\sqsubseteq)$ 是命题 4.6 所述的嵌入，因此 F 将 $\mathbf{S}$嵌入到 $\mathbf{T}$中。特别地，$F(\mathbf{S})$ 是一个超现实子结构。根据命题 4.9，我们得出 $F=\Xi_{F(\mathbf{S})}^{\mathbf{S}}$。 □

作为一项应用，我们得到以下熟知的结果（参见 [11, 命题4.22] ）.

命题 4.28. 设 φ 是 一个 数，且 令 **超现实数类**$^{<\operatorname{supp}\varphi}$ 表示 满足 的类 数 x 使得$x<\operatorname{supp}\varphi$。 那么 **超现实数类**$^{<\operatorname{supp}\varphi}$和 $\varphi+$ **超现实数类**$^{<\operatorname{supp}\varphi}$是 超现实子结构 ， 且

$$\forall x\in\mathbf{No},\Xi_{\varphi+\mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}}x=\varphi+\Xi_{\mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}}x.$$

证明。我们有 超现实数类$^{<\operatorname{supp}\varphi}=(-\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi\,|\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi)$。根据命题 4.18(b)，这是一个超现实子结构。回想一下，对于 $\mathrm{x}\in$超现实数类，我们有 $\varphi+\mathrm{x}=\{\varphi_L+\mathrm{x}\ \varphi+\mathrm{x}_L|\varphi+\mathrm{x}_R,\varphi_R+\mathrm{x}\}$。如果 $\mathrm{x}\in$超现实数类$^{<\operatorname{supp}\varphi}$，那么我们有 $\varphi_L+\mathrm{x}<\varphi\dotplus$超现实数类$^{<\operatorname{supp}\varphi}<\varphi_R+\mathrm{x}$，因此我们可以写作

$$\begin{aligned}\varphi\dotplus x &= \{\varphi+x_L|\varphi+x_R\}_{\varphi\dotplus\mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}}\\ &= \left\{\varphi+x_L^{\mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}}|\varphi+x_R^{\mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}}\right\}_{\varphi\dotplus\mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}}.\end{aligned}$$

将其视为关于 x 的割方程，这是一个广义割方程，因此根据命题 4.27，我们可以得出，$\varphi\dotplus$超现实数类$^{<\operatorname{supp}\varphi}$是一个超现实子结构，并且 $\mathrm{x}\longmapsto\varphi+\mathrm{x}$ 实现了同构 $\mathrm{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}\longrightarrow\varphi\dotplus\mathrm{No}^{<\operatorname{supp}\varphi}$。□

定义 4.29. 设 F 是一个函数 $\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$ 具有割方程 (λ,ρ). 我们称 (λ,ρ) **在统一于** $x\in\mathbf{S}$ 如果我们有

$$\begin{aligned}\lambda(L,R) &< \rho(L,R) \quad and\\ F(x) &= \{\lambda(L,R)\,|\,\rho(L,R)\}\end{aligned}$$

每当 (L,R) 是一个割表示，属于 x 在 $\mathbf{S}$。我们称 (λ,ρ) 是一**致的**，如果它在每个点都一致于每个 $x\in\mathbf{S}$。

例子 4.30. 设 $a\in$**超现实数类**。由下述割方程对于该函数 $y\longmapsto a\dot{+}y$:**超现实数类** $\longrightarrow$ $1\dot{+}$**超现实数类** 得出自 (3.8)

$$\forall x\in\mathbf{No}, a\dot{+}y=\{a_L,a\dot{+}y_L|a\dot{+}y_R,a_R\},$$

is 一致。相反，以下的割方程关于 $x\longmapsto x\dot{+}1$ 不是一致 :

$$\forall x\in\mathbf{No}, x\dot{+}1=\{x,x_L|x_R\}.$$

确实，我们有 $0=\{\emptyset\,|\,1\}$ 并且 $0\dot{+}1=1$，但是 $\{0,\emptyset\,|\,1\}=\{0\,|\,1\}=1/2$。

例 4.31. 设 $b\in$**超现实数类**$^{>}$. 根据 (3.7)，该函数 $y\longmapsto b\dot{\times}y$:**超现实数类** $\longrightarrow b\dot{\times}$**超现实数类** 具有以下割方程割方程

$$\forall y\in\mathbf{No}, b\dot{\times}y=\{b\dot{\times}y_L\dot{+}b_L,b\dot{\times}y_R\dot{+}(-b_R)\,|\,b\dot{\times}y_L\dot{+}b_R,b\dot{\times}y_R\dot{+}(-b_L)\},$$

它是一致的。相反，该割方程为$x\longmapsto x\dot{\times}1/2$是不一致的 :

$$\forall x\in\mathbf{No}, x\dot{\times}1/2=\{x_L,x\dot{+}(-x_R)\,|\,x_R,x\dot{+}(-x_L)\}.$$

确实，如果我们要将这个割方程应用于割表示 $(\{1/2\},\emptyset)$ 的1，那么我们将得到 $1/2$ 作为左选项，并且 $1\dot{+}(-1/2)\leqslant 1/2$ 作为右选项，这是不可能的。

例 4.32。超现实数类 No 上常见的一元函数定义大多已有已知的简单割方程，其中许多是统一的，尤其是 H. Gonshor 在 [24] 的著作中。例如，函数 $\mathrm{x}\longmapsto-\mathrm{x}$ 和 $\mathrm{x}\longmapsto\exp\mathrm{x}$ 的经典割方程 (3.3) 和 (3.6) 都是统一的，因此对于 $\mathrm{x}\in\mathrm{No}$，以及 x 在 No 中的任意割表示$(\mathrm{L}_x,\mathrm{R}_x)$，我们有

$$\begin{aligned}-x &= \{-R_x|-L_x\},\text{ and}\\ \exp x &= \left\{0,\ [x-l]_{\mathbb{N}}\exp l,\ [x-r]_{2\mathbb{N}+1}\exp r\ \middle|\ \frac{\exp r}{[x-r]_{2\mathbb{N}+1}},\ \frac{\exp l}{[l-x]_{\mathbb{N}}}\right\}\qquad (l\in L_x,\ r\in R_x).\end{aligned}$$

例4.33。我们还需要将一致割方程的概念扩展到函数 $\mathbf{f}$:超现实数类 $\times$ 超现实数类 $\longrightarrow$ 超现实数类。具体而言，根据 [24, 定理 3.2]，，两个数 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 的经典割方程 (3.4) 是一致的，其含义是：给定超现实数类 No 中 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$ 的割表示 $(\mathrm{L}_x$、$\mathrm{R}_x)$ 和 $(\mathrm{L}_y$、$\mathrm{R}_y)$，我们有

$$x+y=\{L_x+y, x+L_y \mid x+R_y, R_y+y\}. \tag{4.1}$$

类似地，对于乘法，我们有

$$x+y=\{x'y+xy'-x'y', x''y+xy''-x''y'' \mid x'y+xy''-x'y'', x''y+xy'-x''y'\},$$

其中x'，x''，y' 和y'' 分别取值于L_x，实数集$_x$，L_y 和实数集$_y$ 。

一致割方程具有一个有趣的性质：它们可以复合。

引理4.34。设 $\mathbf{S}_0$，$\mathbf{S}_1$，$\mathbf{S}_2$ 是超现实数子结构。设F_1:$\mathbf{S}_0 \longrightarrow \mathbf{S}_1$和$F_2$:$\mathbf{S}_1 \longrightarrow \mathbf{S}_2$是函数，具有一致割方程

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \{\lambda_1 \mid \rho_1\}_{\mathbf{S}_1} \\ F_2 &\equiv \{\lambda_2 \mid \rho_2\}_{\mathbf{S}_2}. \end{aligned}$$

那么 $F_2 \circ F_1$ 满足一致割方程 $(\lambda_{12}, \rho_{12})$，其中对于每个割表示 (L, R) 属于$\mathbf{S}_0$，我们有 $\lambda_{12}(L, R)=\lambda_2(\lambda_1(L, R), \rho_1(L, R))$ 和 $\rho_{12}(L, R)=\rho_2(\lambda_1(L, R), \rho_1(L, R))$。

证明。设$x \in \mathbf{S}_0$，令 $(L$，$R)$ 为一个割表示，属于x 在 $\mathbf{S}_0$中。根据一致性，割方程中F_1 在 x处，我们有

$$F_1(x)=\{\lambda_1(L, R) \mid \rho_1(L, R)\}_{\mathbf{S}_1}.$$

根据一致性 割方程 F_2 在$F_1(x)$，我们有

$$F_2(F_1(x)) = \{\lambda_2(\lambda_1(L, R), \rho_1(L, R)) \mid \rho_2(\lambda_1(L, R), \rho_1(L, R))\},$$

由此得出结果。 □

回顾一下，若对于类 $\mathrm{Y} \subseteq$超现实数类，类 $\mathrm{X} \subseteq$超现实数类是共尾（分别为共初）的，这意味着 Y 中每个元素在 X 中都有一个上界（分别为下界）。如果 $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y}$，那么我们就简单地说 X 在 Y 中是共尾（分别为共初）的。

引理 4.35. 若 $\mathbf{S}$，$\mathbf{T}$ 是超现实数子结构，该割方程 $\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}} x \equiv \{\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}} x_L^{\mathbf{S}} \mid \Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}} x_R^{\mathbf{S}}\}_{\mathbf{T}}$ 是一致的且具有扩张性。

证明。先证明 $\mathbf{S}=$超现实数类 时的一致性。设 $\mathrm{L}<$实数集 是超现实数的集合，且 $\mathrm{x}=\{\mathrm{L} \mid \mathrm{R}\}$。由于 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 严格递增且值域为 $\mathbf{T}$，数 $\mathrm{y}=\{\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{L} \mid \Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{R}\}_{\mathbf{T}}$ 良定义，并且 $\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{L}<\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}<\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{R}$，因此 $\mathrm{y} \sqsubseteq \Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}$。此外，集合 L 在 x_L 中共尾，而 R 在 x_R中共初，所以 $\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}_L<\mathrm{y}<\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}_R$。因此 $\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x} \sqsubseteq \mathrm{y}$ 且 $\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}=\mathrm{y}$，这表明割方程 $\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x} \equiv\{\Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}_L \mid \Xi_{\mathbf{T}} \mathrm{x}_R\}_{\mathbf{T}}$是一致的。

现在考虑一般情形，令 $\Xi_{\mathbf{S}} \mathrm{A}=\mathrm{L}<\mathrm{R}=\Xi_{\mathbf{S}} \mathrm{B}$ 为 $\mathbf{S}$ 的子集。设 $\mathrm{z} :=\{\mathrm{A} \mid \mathrm{B}\}$，且 $\mathrm{x} :=\{\mathrm{L} \mid \mathrm{R}\}_{\mathbf{S}}$，根据 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 的割方程的一致性，我们有 $\mathrm{x}=\Xi_{\mathbf{S}} \mathrm{z}$。此外，

$$\begin{aligned} \{\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}} L \mid \Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}} R\}_{\mathbf{T}} &= \{\Xi_{\mathbf{T}} A \mid \Xi_{\mathbf{T}} B\}_{\mathbf{T}} \\ &= \Xi_{\mathbf{T}} z, \end{aligned}$$

根据 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 的割方程的一致性。因此 $\{\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\mathrm{L}\mid\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\mathrm{R}\}_{\mathbf{T}}=\Xi_{\mathbf{T}}\,\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathrm{x}=\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\mathrm{z}$，这证明了 $\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\equiv\{\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\mathrm{L}\mid\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\mathrm{R}\}_{\mathbf{T}}$ 是一致的。该割方程的形式为 $\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\mathrm{z}=\{\Lambda(\mathrm{z}_L^{\mathbf{S}})\mid\mathrm{P}(\mathrm{z}_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}}$，其中 $\Lambda=\mathrm{P}=\{\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}\}$ 是函数的集合，因此它是广延的。□

上述命题表明，超现实同构满足自然的广义割方程。反之，命题 4.27 表明，广义割方程可以产生超现实同构。作为一个应用，如果我们承认运算

$$\forall x\in\mathbf{No},\ \dot\omega^{x}:=\{0,\mathbb{N}\,\dot\omega^{x_L}\mid 2^{-\mathbb{N}}\,\dot\omega^{x_R}\}$$

是良定义的，那么我们看到它定义了一个超现实同构。这就是单项式类 Mo 的参数化，也就是 Conway 的 ω-映射。这个割方程也是一致的（参见定理 5.2] 的 [24, 推论），例如，我们可以对每个数 x 计算出该数。

$$\begin{aligned}\dot\omega^{\dot\omega^{x}} &= \dot\omega^{\{0,\mathbb{N}\dot\omega^{x_L}\mid 2^{-\mathbb{N}}\dot\omega^{x_R}\}}\\ &= \left\{0,\mathbb{N}\,\dot\omega^{0},\mathbb{N}\,\omega^{\mathbb{N}\dot\omega^{x_L}}\mid 2^{-\mathbb{N}}\,\dot\omega^{2^{-\mathbb{N}}\dot\omega^{x_R}}\right\}\\ &= \left\{\mathbb{N},\omega^{\mathbb{N}\dot\omega^{x_L}}\mid\dot\omega^{2^{-\mathbb{N}}\dot\omega^{x_R}}\right\}.\end{aligned}$$

只要它们存在，这就展示了广义割方程的实用性。然而，许多常见的超现实数函数，例如指数函数，并不具有广义割方程。下一个命题描述了一类更一般的割方程，有时很有用。

命题 *4.36.* 设 $\mathbf{S},\mathbf{T}$ 为超现实子结构。设 Λ 是一个从 $\mathbf{S}$ 到 $\mathbf{T}$ 的子集类的函数，使得对于满足 $x<y$ 的 $\in\mathbf{S}$ 中的 x、y，集合 $\Lambda(y)$ 相对于 $\Lambda(x)$ 是共尾的。对于 $\in\mathbf{S}$ 中的 x，令 $\mathbf{\Lambda}[x]$ 表示 $\mathbf{S}$ 中满足 $\Lambda(x)$ 和 $\Lambda(u)$ 互相共尾的元素 u 所构成的类。设 $\{\lambda\mid\rho\}_{\mathbf{T}}$ 是定义在 $\mathbf{S}$ 上的一个广义割方程。设 $F\colon\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{T}$ 是严格递增的，且具有割方程。

$$\forall x\in\mathbf{S},F(x)=\{\Lambda(x),\lambda(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})\mid\rho(x_L^{\mathbf{S}},x_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}}$$

于是 F 诱导出 一个 嵌入 $(\mathbf{\Lambda}[x],\ \leqslant,\ \sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{T},\leqslant,\sqsubseteq)$ 对 每个 元素 x 属于 $\mathbf{S}$。

证明。设 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$。若 u、$\mathrm{w}\in\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}]$，且 $\mathrm{v}\in\mathbf{S}$ 满足 $\mathrm{u}\leqslant\mathrm{v}\leqslant\mathrm{w}$，则 $\Lambda(\mathrm{v})$ 关于 $\Lambda(\mathrm{u})$ 共尾，因而也关于 $\Lambda(\mathrm{x})$共尾；而 $\Lambda(\mathrm{x})$ 关于 $\Lambda(\mathrm{w})$ 共尾，因而也关于 $\Lambda(\mathrm{v})$共尾，所以 $\mathrm{v}\in\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}]$。因此 $\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}]$ 是 $\mathbf{S}$的非空凸子类。注意，对于 $\mathrm{u}\in\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}],$，我们有

$$F(u)=\{\Lambda(x),\lambda(u_L^{\mathbf{S}},u_R^{\mathbf{S}})\mid\rho(u_L^{\mathbf{S}},u_R^{\mathbf{S}})\}_{\mathbf{T}}.$$

对于 数 u、v属于 $\mathbf{\Lambda}[x]$ 且 $u\sqsubseteq v$，我们 有

$$\Lambda(x)\cup\lambda(u_L^{\mathbf{S}},u_R^{\mathbf{S}})\subseteq\Lambda(x)\cup\lambda(v_L^{\mathbf{S}},v_R^{\mathbf{S}})<F(v)<\rho(v_L^{\mathbf{S}},v_R^{\mathbf{S}})\supseteq\rho(u_L^{\mathbf{S}},u_R^{\mathbf{S}}),$$

这意味着 $\mathrm{F}(\mathrm{u})\sqsubseteq\mathrm{F}(\mathrm{v})$。由于 $\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}]$ 是 $\mathbf{S}$ 的非空凸子类，且 $\Xi_{\mathbf{S}}$: 超现实数类 $\longrightarrow\mathbf{S}$ 是递增且双射的，因此，类 $\mathbf{C}:=\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}])$ 是超现实数类 No 的一个非空凸子类，在该子类上，$\mathrm{F}\circ\Xi_{\mathbf{S}}$ 是严格递增的。根据引理 4.5，函数 $\mathrm{F}\circ\Xi_{\mathbf{S}}$ 诱导出一个嵌入 $(\mathbf{C},\leqslant,\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{T},\leqslant,\sqsubseteq)$，因此 F 诱导出一个嵌入$(\mathbf{\Lambda}[\mathrm{x}],\leqslant,\sqsubseteq)\longrightarrow(\mathbf{T},\leqslant,\sqsubseteq)$。□

例子 4.37. 一个 典型的 例子 是 如下 的 割 方程： [11, 定理 3.8(1)]对于 定义在 无限 单项式 类 上的 指数 **函数** $\exp:=\{\mathfrak{m}\in\mathbf{Mo}:\mathbb{R}<\mathfrak{m}\}$ 的：

$$\forall\mathfrak{m}\in\mathbf{Mo},\exp\mathfrak{m}=\{\mathfrak{m}^{\mathbb{N}},(\exp\mathfrak{m}_L^{\mathbf{Mo}})^{\mathbb{N}}\mid(\exp\mathfrak{m}_R^{\mathbf{Mo}})^{\mathbb{N}}\}.$$

这里 我们 有 $\Lambda(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}^{\mathbb{N}}$ 和 $\mathbf{\Lambda}[\mathfrak{m}]=\left\{\mathfrak{n}\in\mathbf{Mo}^{\succ}:\exists p,\ q\in\mathbb{N},\ \mathfrak{m}^{1/p}\prec\mathfrak{n}\prec\mathfrak{m}^{p}\right\}$。

5 固定点

在引入 ω-映射作为单项式类 Mo 的参数化方式后，Conway 指出，对于任意序数 α，数 $\dot\omega^{\alpha}$ 与康托尔的 ω 的 α 序数幂相同。随后，他继续定义广义 ε-数，即满足 $\dot\omega\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ 的超现实数 $\mathfrak{a}$。事实证明，广义 ε-数类也可以参数化，而且实际上构成一个超现实子结构：参见 Conway 的非正式讨论 [14, 第 34–35] 页，以及 Gonshor 的正式证明 [24, 定理 9.1 和推论 9.2]。Gonshor 还给出了超现实函数的不动点类构成超现实子结构的进一步条件 [24, 定理 9.4]。

本节讨论一个更一般的问题：给定一个超现实子结构 $\mathbf{S}$，如何判断 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 是否存在不动点，甚至是否存在由不动点构成的整个超现实子结构。Lurie [34, 定理 8.2] 在略有不同的背景下证明了一个相关的不动点定理。

5.1 不动点与定义同构的迭代

对于算子 $\Omega:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ 其中 $\mathbf{Y}\subseteq\mathbf{X}$ 是超现实数类的**子类**且 $n\in\mathbb{N}$，为了方便，记 Ω^n 为算子 n 次复合 Ω 与自身的复合。特别地，$\Omega^0=\mathrm{id}_{\mathbf{X}}$。

定义 *5.1*。设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。若一个数 x 满足 $\mathbf{S}x=x$，我们称 x 是 $\Xi_{\mathbf{S}}$-不动的。令 $Fix_{\mathbf{S}}$ 表示 $\mathbf{S}$-不动数构成的类。注意，$Fix_{\mathbf{S}}$ 是 $\mathbf{S}$ 的子类。

若 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{W}$ 是超现实子结构，且满足 $\mathbf{U}=\mathbf{V}\prec\mathbf{W}$，那么对每个数 $\mathfrak{x}$，都有 $\Xi_{\mathbf{U}}\mathfrak{x}\geqslant\Xi_{\mathbf{V}}\mathfrak{x}$ 当且仅当 $\Xi_{\mathbf{W}}\mathfrak{x}\geqslant\mathfrak{x}$，并且 $\Xi_{\mathbf{U}}\mathfrak{x}\sqsupseteq\Xi_{\mathbf{V}}\mathfrak{x}$ 当且仅当 $\Xi_{\mathbf{W}}\mathfrak{x}\sqsupseteq\mathfrak{x}$。特别地，$\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 的参数化恰好在 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{W}}$ 上一致。

命题 5.2。若 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构，则$\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Xi_{\mathbf{S}}^{n}$超现实数类。

证明。设 $\mathbf{S}^{\prec\omega}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Xi_{\mathbf{S}}^{n}$超现实数类。对于 $\mathfrak{n}\in\mathbb{N}$，有 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}=\Xi_{\mathbf{S}}^{n}\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}\subseteq\Xi_{\mathbf{S}}^{n}$超现实数类，因此 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}\subseteq\mathbf{S}^{\prec\omega}$。反设 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$是 $\mathbf{S}^{\prec\omega}$的真子类，并考虑长度最小的 $\mathfrak{x}\in\mathbf{S}^{\prec\omega}\setminus\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$。对于 $\mathfrak{n}\in\mathbb{N}^{>}$，令 $\mathfrak{x}_n\in$超现实数类，其中 $\mathfrak{x}=\Xi_{\mathbf{S}}^{n}\mathfrak{x}_n$。对于所有 $\mathfrak{n}\in\mathbb{N}^{>}$，都有 $\mathfrak{x}_n\in\mathbf{S}^{\prec\omega}$，因此根据最小性假设和引理 4.10，有 $\forall\mathfrak{n}\in\mathbb{N}$，$\mathfrak{l}(\mathfrak{x})=\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_n)$。

回想一下，$\mathfrak{x}$ 不是 $\mathbf{S}$-不动点，因此 $\mathfrak{x}_0\neq\mathfrak{x}_1$。由对称性，不失一般性，我们可以假设 $\mathfrak{x}_0<\mathfrak{x}_1$，这意味着对于所有 $\mathfrak{n}\in\mathbb{N}$，$\mathfrak{x}_n<\mathfrak{x}_{n+1}$。对于 $\mathfrak{n}\in\mathbb{N}$，令 $\mathfrak{u}_n$ 为 $\sqsubseteq$-极大元，属于 $\mathbf{S}$，且满足 $\mathfrak{u}_n\sqsubseteq\mathfrak{x}_n$，$\mathfrak{x}_{n+1}$。此元素定义良好，因为 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构，且 $\mathfrak{x}_n$，$\mathfrak{x}_{n+1}\in\mathbf{S}$。数 $\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathfrak{u}_n$ 在超现实数类中是满足$\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathfrak{u}_n\sqsubseteq\mathfrak{x}_{n+1}$，$\mathfrak{x}_{n+2}$的 $\sqsubseteq$-极大元，因此 $\mathfrak{u}_{n+1}\sqsubseteq\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathfrak{u}_n$，所以 $\Xi_{\mathbf{S}}\mathfrak{u}_{n+1}\sqsubseteq\mathfrak{u}_n$。

由于 $\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_n)=\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_{n+1})$ 且 $\mathfrak{x}_{n+1}\neq\mathfrak{x}_n$，我们有 $\mathfrak{x}_n\not\sqsubseteq\mathfrak{x}_{n+1}$ 且 $\mathfrak{x}_{n+1}\not\sqsubseteq\mathfrak{x}_n$。由此可得 $\mathfrak{u}_n\sqsubset\mathfrak{x}_n$、$\mathfrak{x}_{n+1}$，并且 $\mathfrak{x}_n<\mathfrak{u}_n<\mathfrak{x}_{n+1}$。特别地，我们有 $\mathfrak{x}_{n+1}=\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathfrak{x}_n<\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathfrak{u}_n$，因此 $\mathfrak{u}_n<\Xi_{\mathbf{S}}^{-1}\mathfrak{u}_n$，所以 $\mathfrak{u}_n$不是 $\mathbf{S}$-不动的，并且我们有 $\mathfrak{l}(\mathfrak{u}_n)\lhd\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_n)=\mathfrak{l}(\mathfrak{x})$。

由于对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\Xi_{\mathbf{S}} u_{n+1} \sqsubseteq u_n$，引理 4.10 蕴含 $l(u_0) \geqslant l(u_1) \geqslant \cdots$。后一个递减的序数序列必定是稳定的；设 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足对于所有 $n \geqslant n_0$，都有 $l(u_n) = l(u_{n_0})$。由引理 4.10 可得，对于所有 $n \geqslant n_0$，都有 $\Xi_{\mathbf{S}} u_{n+1} = u_n$，因此 $u_{n_0} \in \mathbf{S}^{\prec\omega} \setminus \mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$。但是 $l(u_{n_0}) < l(x)$，这与 $l(x)$ 的极小性矛盾。这个矛盾完成了证明。□

例子 5.3. 这里有一些例子，其中结构的不动点满足其中 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Xi_{\mathbf{S}}^n$ **超现实数类** 是一个超现实子结构：

- 如果 $\mathbf{S}$ 是 $\sqsubseteq$-终子结构 $a \dot{+}$ 超现实数类 $= $ 超现实数类 $\ni a$，那么对于任意超现实数 x，$\Xi_{\mathbf{S}} x = a \dot{+} x$ 的符号序列由 a 和 x 的符号序列连接而成。因此，$\mathbf{S}$-不动数是指其符号序列以 ω 个 a 的符号序列副本开头的数，即 Fix超现实数类 $\ni a =$ 超现实数类 $\ni a^{\dot\times\omega}$。

- 考虑 $\mathbf{S} = a \dot\times$超现实数类，其中 a 是严格正数。令 $a_0 = 1$ 并令 $a_n = a \dot\times a_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$。我们声称 $\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}} = a_\omega \dot\times$超现实数类，其中 $a_\omega = \sup_{\sqsubseteq}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$。

  事实上，由于 $1 \sqsubseteq a_1$ 和 $a \dot\times \cdot$ 是超现实同构，我们有 $a_n \sqsubseteq a_{n+1}$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，因此 a_ω 是良定义的。我们有 $a \dot\times a_\omega = \sup_{\sqsubseteq} a \dot\times a_{\mathbb{N}} = \sup_{\sqsubseteq} a_{\mathbb{N}+1} = a_\omega$。对于每个满足 $x = a_\omega \dot\times x'$ 且 $x' \in$超现实数类的数 x，我们有 $a \dot\times x = (a \dot\times a_\omega) \dot\times x' = a_\omega \dot\times x' = x$，因此 $a_\omega \dot\times$超现实数类 $\subseteq \mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}$。反之，若 $x \in \mathrm{Fix}_{a\dot\times}$超现实数类，则 $a \dot\times x \sqsubseteq x$，因此 $l(a) \dot\times l(x) \leqslant l(x)$，所以 $l(x)$ 等于 $l(a)^\omega \dot\times \alpha$ 加上某个序数 α。对于 $n \in \mathbb{N}$，$l(a_n) = l(a)^n$，因此 $l(a_\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} l(a_n) = l(a)^\omega$。令 x' 表示长度为 α、在符号序列层面定义的数

  $$\forall \beta < \alpha, x'[\beta] = x[\ell(a)^\omega \dot\times \beta].$$

  我们断言 $x = a_\omega \dot\times x'$。事实上，对于 $\beta < \alpha$ 和 $\gamma < l(a)^\omega$，存在一个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\gamma < l(a)^n$，并且我们有

  $$\begin{aligned}(a_\omega \dot\times x')[\ell(a)^\omega \dot\times \beta \dot+ \gamma] &= x'[\beta]\, a_\omega[\gamma] \\ &= x[\ell(a)^\omega \dot\times \beta]\, a_n[\gamma] \\ &= (a_n \dot\times x)[\ell(a)^n \dot\times (\ell(a)^\omega \dot\times \beta) \dot+ \gamma] \\ &= (a_n \dot\times x)[(\ell(a)^\omega \dot\times \beta) \dot+ \gamma] \\ &= x[\ell(a)^\omega \dot\times \beta \dot+ \gamma].\end{aligned}$$

  因此 $a_\omega \dot\times x' = x$，所以 $\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}} = a_\omega \dot\times$**超现实数类**。

  我们用 No$_>$ 表示超现实子结构 $\mathrm{Fix}_{2\dot\times}\mathrm{No} = \omega \dot\times \mathrm{No}$，它是由符号序列中不含连续异号的超现实数组成的类。$f \in$No$_>$ 中的元素称为纯无穷数，因为它们作为级数 $f = \sum_{\mathfrak{m}\in\mathbf{Mo}} f_{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{m}$ 的支撑 $\operatorname{supp} f$ 只包含无穷大的单项式：参见下文命题 7.4。

- 如本节开头所述，若 $\mathbf{S} = \mathrm{Mo}$ 是单项式类，则 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 是 ω-映射 $x \longmapsto \dot\omega x$，其不动点称为广义 ε-数。对于 $x \in$No，数 $\Xi\mathrm{FixMo}\, x$ 通常记作 εx，而 ε-映射 $x \longmapsto \varepsilon x$ 将 On 中 ε-数的参数化扩展了。详细研究请参见 [24, 第 9] 章。

- 如果 $\mathbf{S} = 1 \dot+ \mathbf{Mo}^<$（其中 $\mathbf{Mo}^< = \mathbf{Mo} \cap$ **超现实数类**$^<$），那么对于 $x \in$ **超现实数类**，我们有

  $$\Xi_{\mathbf{S}}\, x = 1 + \dot\omega^{(-1)\dot+ x}.$$

考虑函数 $\Phi\colon \mathrm{x} \longmapsto 1 + \dot{\omega}^{x-3/2}$: 超现实数类 $\longrightarrow$ 超现实数类。对于所有 $\mathrm{y} \in$ 超现实数类$^{<}$ 以及 $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$，根据 [24, 定理 5.12]，有 $\mathrm{r} + \mathrm{y} = \mathrm{r} \dot{+} \mathrm{y}$。回想一下，$-1/2 = (-1) \dot{+} 1$。因此，对于 $\mathrm{x} \in 1 +$ 超现实数类$^{<}$，我们有

$$x - 3/2 = (x-1) - 1/2 = ((-1) \dot{+} 1) + (x-1) = (-1) \dot{+} (1 \dot{+} (x-1)) = (-1) \dot{+} x.$$

因此，$\Xi_{\mathbf{S}}$ 和 Φ 在 $1 +$ 超现实数类$^{<}$上重合。由于 S 和 Φ 的不动点类都包含在 $1 +$ 超现实数类$^{<}$中，我们推得 $\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}$ 是 Φ的不动点类。

现在，非正式地说，，我们希望将表达式视为以下记号

$$1 \dot{+} \dot{\omega}^{-1/2 \dot{+} \dot{\omega}^{-1/2 \dot{+} \dot{\omega}^{\iddots}}}$$

作为“ Φ的不动点”的记号。然而，这个表达式本质上含糊不清，因为 $\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}$ 实际上包含许多元素。映射 $\Xi_{\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}}$ 可视为一种记号，它利用单个超现实参数 u（满足 $\mathrm{x} = \Xi_{\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}}(\mathrm{u})$），为每个不动点 x 提供一个明确无歧义的表达式。类似地，可以将记号 ε_u 视为消除歧义的一种方式

$$\dot{\omega}^{\dot{\omega}^{\dot{\omega}^{\iddots}}}.$$

- 如果 $\mathbf{S}$ 是区间 $(-\omega, \omega)$，那么我们可以看到，$\Xi_{\mathbf{S}}$ 逐点固定超现实数类$^{\leqslant}$，并将正（分别为负）无限数的符号序列中的初始段 ω（分别为 $-\omega$）替换为 $\omega - 1$（分别为 $1 - \omega$）。由于 $\omega/2 = \omega \dot{+} (-\omega)$，我们推得定义同构 $\Xi_{\mathbf{S}}$ 逐点固定超现实数类$^{\leqslant}$、$^{\sqsupseteq -\omega/2}$和 $^{\sqsupseteq \omega/2}$。可以验证，这个类

$$\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}} \;=\; \mathbf{No}^{\sqsupseteq -\omega/2} \sqcup \mathbf{No}^{\leqslant} \sqcup \mathbf{No}^{\sqsupseteq \omega/2}$$

是一个超现实子结构。

一般而言，类 $\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}$ 未必是超现实子结构。例如，例 4.14 中定义的类 Inc 满足 $\forall \mathrm{x} \in$超现实数类，$\mathrm{l}(\Xi_{\mathbf{Inc}}\mathrm{x}) > \mathrm{l}(\mathrm{x})$，因此没有不动点。这就提出了这样一个问题：寻找关于 $\mathbf{S}$ 的条件，以确保 $\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}$ 是超现实子结构。一个显而易见的初步想法，是研究超现实子结构的递减交何时仍为超现实子结构。

5。2 闭子类

我们引入一个关于环境超现实子结构$\mathbf{S}$ 的闭子类$\mathbf{X} \supseteq \mathbf{X}$。当$\mathbf{X}$是一个**超现实**子结构时，我们通过其定义超现实同构来刻画其闭性。

定义 *5.4*。设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。设 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{S}$的一个子类。若 $\mathbf{X}$是$\mathbf{S}$-闭的，则称其具有该性质：$\mathbf{X}$ 中任意非空 $\sqsubseteq$-链在 $(\mathbf{S}, \sqsubseteq)$ 中的上确界都属于 $\mathbf{X}$。

示例 5.5.

- 这些区间 $(-\omega - 1, \omega + 1)$、$(0, 7)$ 和 $(0, \omega^2 + 1)$ 是**超现实数类**-闭的凸超现实子结构。区间 $(-\omega, \omega)$ 是一个超现实子结构，它并非**超现实数类**-闭的，因为 $\sup_{\sqsubseteq} \mathbb{N} = \omega \notin (-\omega, \omega)$。
- 例 5.3 中引入的结构 No$_>$ 是一个非凸的 No-闭超现实子结构，因为在其符号序列中不含不同的连续符号这一性质，在 No 中取上确界后仍然保持。

- 同样地，该结构 $2\check{\times}\mathbf{No}$ 是**No**-闭。

- 若 $\mathbf{T}$ 是由树构造定义的超现实子结构（见命题 4.13），那么它是 No-闭的，当且仅当对于其中每个非空的 $\sqsubseteq$-链 X，$\mathbf{T}$中的元素$\Xi_{\mathbf{T}}\sup_{\sqsubseteq} X$ 都定义为 $\sup_{\sqsubseteq}\Xi_{\mathbf{T}} X$。特别地，例 4.14 中的超现实子结构 Inc 不是 No-闭的。

- 超现实数类$\bigsqcup_{\alpha\in\mathbf{On}}$**超现实数类**$^{\sqsupseteq\alpha-1}$ 是**超现实数类**-闭的，但有一个真类的 $\sqsubseteq$-极小元素 $\{\alpha-1:\alpha\in\mathbf{On}_{\lim}\}$（尤其是，它没有任何根）。

“闭（closed）”一词暗示存在某种拓扑。事实上，我们有：

命题5.6. 设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。任意交集以及有限并集**S**-闭子类的 **S**都是 **S**-闭的。

证明。显然，$\emptyset$ 和 $\mathbf{S}$ 都是 **S**-闭的。设 $\mathbf{X_I}$ 是 **S**的一个（可能为真类大小的）非空族 $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbf{I}}$ 中所有 **S**-闭子类的交集。设 C 是 $\mathbf{X_I}$中的一个非空$\sqsubseteq$-链。对所有 $i\in\mathbf{I}$，都有 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C\in\mathbf{X}_i$，因此 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C\in\mathbf{X_I}$，且 $\mathbf{X_I}$是 **S**-闭的。

设 $\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2$ 是 **S**-闭子类，且 C 是 $\mathbf{X}_1\cup\mathbf{X}_2$ 中的一个非空 $\sqsubseteq$-链。若 C 有 $\sqsubseteq$-最大元，则 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C=\max C\in\mathbf{X}_1\cup\mathbf{X}_2$。否则，令 $i\in\{1,2\}$，使得 $C\cap\mathbf{X}_i$ 在 C 中是 $\sqsubseteq$-共尾的。于是 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C=\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C\cap\mathbf{X}_i\in\mathbf{X}_i\subseteq\mathbf{X}_1\cup\mathbf{X}_2$，因此 $\mathbf{X}_1\cup\mathbf{X}_2$ 是 **S**-闭的。□

引理 5。7。 若 **S** 是一个超现实子结构且 **T** 是一个 $\sqsubseteq$-终子结构，属于 **S**，则 **T**是 **S**-闭的。

P顶。 类 **T** 是 $\sqsubseteq$-终的**S**，因此非空链的上确界 $\sqsubseteq$-链在**T** 中属于 **T** . □

有时将闭包用投影来刻画会在方面的投影。

命题 *5.8*。设 **S** 是一个超现实子结构。**S** 的有根子类 **X** 是 **S**-闭的，当且仅当 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}$ 的每个元素 x 都有一个位于 **X** 中的 $\sqsubseteq$-极大初始段 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}(x)$。

证明。假设 **X** 是 **S**-闭的。考虑满足 $\mathbf{X}^\bullet\sqsubseteq x$ 的 $x\in\mathbf{S}$。位于 **X** 中的 x 的初始段集合非空，且在 **S** 中对取上确界封闭。因此，x 确实有一个位于 **X** 中的 $\sqsubseteq$-极大初始段 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}(x)$。反过来，假设$\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}$ 在 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}$ 上良定义，并设 C 是 **X**中的一个非空 $\sqsubseteq$-链。若 C 有一个 $\sqsubseteq$-极大元，则 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C=\max_{\sqsubseteq} C\in\mathbf{X}$。否则，$\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}(\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C)\not\sqsubset\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C$，因此 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}(\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C)=\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} C\in\mathbf{X}$。这表明 **X** 是 **S**-闭的。□

定义 *5.9*。如果 $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{S}$ 是有根的且 **S**-闭的，那么我们将 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}$ 定义为函数 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}\twoheadleftarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbf{X}$：它把 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}$ 中的每个元素 x 映射到 x 中位于 **X** 内的 $\sqsubseteq$-极大初始段。根据定义，它是满射、$\sqsubseteq$-递增的，并满足关系 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}\circ\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}=\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}$。我们称其为拓扑投影 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}\longrightarrow\mathbf{X}$。

由于 $\mu^{\mathbf{X}}_{\mathbf{S}}$ 在存在时是 $\sqsubseteq$-递增的，因此它的纤维是 $\sqsubseteq$-凸的，位于 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}$中。

引理 *5.10*。设 $\mathbf{T}\subseteq\mathbf{S}$ 是超现实子结构，且 $\mathbf{X}\subseteq\mathbf{T}$ 有根。若 **X** 是 **T**-闭的，且 **T** 是 **S**-闭的，则 **X** 是 **S**-闭的，并且我们在 $\mathbf{S}_0^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}$ 上有 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}\equiv\mu^{\mathbf{T}}_{\mathbf{X}}\circ\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}$。

证明。令 $x \in \mathbf{S}^{\sqsupseteq \mathbf{X}^\bullet}$。由于 $\mathbf{T}^\bullet \sqsubseteq \mathbf{T} \supseteq \mathbf{X}$，我们有 $\mathbf{T}^\bullet \sqsubseteq \mathbf{X}^\bullet$，因此 $x \in \mathbf{S}^{\sqsupseteq \mathbf{T}^\bullet}$。类 $\mathbf{T}$ 是**S**-闭的，因此 x 有一个极大初始段 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x)$，它属于 **T**。现在 $\mathbf{X}^\bullet$ 是 x 的一个初始段，且属于 $\mathbf{T}$，因此 $\mathbf{X}^\bullet \sqsubseteq \mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x)$。因此，我们可以考虑 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x)$ 的极大初始段 $\mu^{\mathbf{T}}_{\mathbf{X}}(\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x))$，它属于 $\mathbf{X}$。如果 $z \in \mathbf{X}$ 比 x 更简单，那么 $z \sqsubseteq \mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x)$，因为 $z \in \mathbf{T}$。同理，$z \sqsubseteq \mu^{\mathbf{T}}_{\mathbf{X}}(\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x))$，因为 $z \in \mathbf{X}$。这证明了 $\mu^{\mathbf{T}}_{\mathbf{X}}(\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{T}}(x))$ 是 x 中属于 **X** 的极大初始段。□

我们将主要考虑超现实数的子结构在其他子结构中的闭包。在这种情况下，闭包可以被视为一个性质，它属于定义超现实数同构：

引理 *5.11.* 如果 $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S}$ 是超现实子结构，那么 **T** 是 **S**-闭的，当且仅当对于 *No* 中任意非空的 $\sqsubseteq$-链 X，都有 $\Xi_{\mathbf{T}} \sup_{\sqsubseteq} X = \sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{T}} X$。

证明。假设该关系成立。设 Y 是 **T** 中一个非空的 $\sqsubseteq$-链，并考虑集合 $X = \Xi_{\mathbf{T}}^{-1}(Y)$。由于 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 是一个 $\sqsubseteq$- 嵌入，集合 X 是 No 中一个非空的 $\sqsubseteq$- 链，因此 $\Xi_{\mathbf{T}} \sup_{\sqsubseteq} X = \sup_{\mathbf{T},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{T}} X = \sup_{\mathbf{T},\sqsubseteq} Y$（见命题 4.13）。关于 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 的假设给出 $\Xi_{\mathbf{T}} \sup_{\sqsubseteq} X = \sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{T}} X = \sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} Y$，因此 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} Y = \sup_{\mathbf{T},\sqsubseteq} Y \in \mathbf{T}$，且 **T** 是 **S**-闭的。反过来，假设 **T** 是 **S**-闭的。设 $X \subset$No 是一个非空的 $\sqsubseteq$-链。由于 $\Xi_{\mathbf{T}}$ 是 $\sqsubseteq$-递增的，集合 $\Xi_{\mathbf{T}} X$ 是 **T** 中一个非空的 $\sqsubseteq$-链，所以 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{T}} X \in \mathbf{T}$，因此 $\sup_{\mathbf{S},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{T}} X = \sup_{\mathbf{T},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{T}} X = \Xi_{\mathbf{T}} \sup_{\sqsubseteq} X$，这就是所需的等式。□

引理 5.12. 设 $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ 是超现实数子结构。

a) 如果 $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}$，那么 **V** 是 **U**-闭的，当且仅当 $\Xi_{\mathbf{V}}$ 将 *No*-闭子类的 *No* 映射为 **U**-闭子类的 **U**。*b)* 如果 **V** 和 **W** 是 *No*-闭的，那么 $\mathbf{V} \prec \mathbf{W}$ 也是 *No*-闭的。*c)* 如果 **V** 和 $\mathbf{V} \prec \mathbf{W}$ 是 *No*- 闭的，那么 **W** 也是 *No*- 闭的。

证明。a) 假设 **V** 是 **U**-闭的，且 **X** 是 No 的一个闭子类。设 Y 是 $\Xi_{\mathbf{V}} \mathbf{X}$ 中一个非空的 $\sqsubseteq$-链。集合 $\Xi_{\mathbf{V}}^{-1}(Y)$ 是 **X** 中一个非空的 $\sqsubseteq$-链，因此其上确界属于 **X**，并且 $\Xi_{\mathbf{V}} \mathbf{X} \ni \Xi_{\mathbf{V}} \sup_{\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{V}}^{-1} Y = \sup_{\mathbf{U},\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{V}} \Xi_{\mathbf{V}}^{-1}(Y) = \sup_{\mathbf{U},\sqsubseteq} Y$，所以 $\Xi_{\mathbf{V}} \mathbf{X}$ 是 **U**-闭的。反过来，如果 $\Xi_{\mathbf{V}}$ 将超现实数的闭类映射到 **U** 的 **U**-闭子类上，那么特别地，$\mathbf{V} = \Xi_{\mathbf{V}}$No 是 **U**-闭的。

b) 这是一个直接推论，源于*a*)。

c) 假设 $\mathbf{V} \prec \mathbf{W}$ 和 **V** 是 No-闭的。设 X 是 No 中一个非空的 $\sqsubseteq$-链。那么 $\Xi_{\mathbf{V}} \Xi_{\mathbf{W}} \sup_{\sqsubseteq} X = \sup_{\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{V}} \Xi_{\mathbf{W}} X = \Xi_{\mathbf{V}} \sup_{\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{W}} X$，并且由于 $\Xi_{\mathbf{V}}$ 是单射，我们得到 $\Xi_{\mathbf{W}} \sup_{\sqsubseteq} X = \sup_{\sqsubseteq} \Xi_{\mathbf{W}} X$，因此 **W** 是 No-闭的。□

我们现在来到了关于这一主要的兴趣：关于闭包这一概念。

命题 *5.13*。设 $0 < \alpha$ 为极限序数。设 **S** 为超现实子结构，并设 $(\mathbf{S}_\beta)_{\beta<\alpha}$ 为 **S**-闭的 **S** 的超现实子结构递减序列。那么其交集 $\bigcap_{\beta<\alpha} \mathbf{S}_\beta$ 是一个 **S**-闭的超现实子结构。

证明。我们使用命题 4.13 中给出的超现实子结构刻画。根据命题 5.6，类 $\mathbf{S}_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} \mathbf{S}_\beta$ 是 **S**-闭的。特别地，类 $\mathbf{S}_\alpha$ 具有非空 $\sqsubseteq$-链的上确界。我们还有 $\sup_{\sqsubseteq,\mathbf{S}_\alpha} \emptyset = \mathbf{S}_\alpha^\bullet = \sup_{\sqsubseteq,\mathbf{S}} \{\mathbf{S}_\beta^\bullet : \beta < \alpha\}$，它根据每个结构 $\mathbf{S}_\beta$ 的 **S**-闭包而属于 $\mathbf{S}_\alpha$，其中 $\beta < \alpha$，因此空 $\sqsubseteq$-链也有上确界。

现在讨论左后继和右后继的情形。给定 $u \in \mathbf{S}_\alpha$，对于每个序数 $\beta<\alpha$，$u_{\beta,-1}<u$ 和 $u_{\beta,1}>u$ 分别是 u 在 $\mathbf{S}_\beta$ 中的左后继和右后继。对于 $\beta<\gamma<\alpha$，我们有 $u_{\gamma,-1}\in S^\beta$ and $u_{\gamma,-1}<u$，因此根据左后继的定义，$u_{\beta,-1}\sqsubseteq u_{\gamma,-1}$。类似地，我们得到 $u_{\beta,1}\sqsubseteq u_{\gamma,1}$。因此，集合 $\{u_{\beta,-1}:\beta<\alpha\}$ 和 $\{u_{\beta,1}:\beta<\alpha\}$ 是 $\sqsubseteq$-链，其在 $\mathbf{S}$ 中的上确界 u_{-1}, u_1 满足 $u_{-1}<u<u_1$。对于满足 $u<v$ 和 $\beta<\alpha$ 的 $v\in\mathbf{S}_\alpha$，我们有 $u, v\in\mathbf{S}_\beta$，因此 $u_{\beta,1}\sqsubseteq v$，从而 $u_1\sqsubseteq v$。这意味着 u_1 是 u 在 $\mathbf{S}_\alpha$ 中的右后继。同样，u_{-1} 是 u 在 $\mathbf{S}_\alpha$中的左后继。由此我们得出，$\mathbf{S}_\alpha$ 是一个超现实数子结构。□

推论 5.14。若该超现实数子结构 $\mathbf{S}$ 是 **No**-闭，则 $\mathbf{Fix}_\mathbf{S}$ 是一个 **No**-闭超现实子结构。

Pro于。这是引理 5.12、命题 5.13 和命题 5.2 的直接推论。□

注 5.15。推论 5.14 与 [34, 定理 8.2] 类似。Lurie 的结果更为一般，但应用于 No-闭超现实子结构 $\mathbf{S}$ 时，只能得出 $\mathrm{Fix}_\mathbf{S}$ 是一棵“良树”。良树未必是超现实子结构。例如，

$$\mathbf{No}^{\sqsupseteq -2}\sqcup\mathbf{No}^{\sqsupseteq -1/2}\{0\}\sqcup\mathbf{No}^{\sqsupseteq 1/2}\sqcup\mathbf{No}^{\sqsupseteq 2}$$

是一棵良树，但并非超现实子结构，因为 0 有两个右后继和两个左后继。

5.3 超限右-交错嵌套的超现实子结构

由类 **No**-闭超现实子结构在交集下递减交集，我们已经现在可以定义一种概念：超限右 - 交错嵌套的 **No**- 闭超现实子结构。

定理 5.16. 设 α 是一个序数。设 $\mathbf{U}=(\mathbf{U}_\beta)_{\beta<\alpha}$ 是一个序列，由 **超现实数类**-闭的超现实数子结构。我们定义一个序列 $(\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma)_{\beta\leqslant\alpha}$，由 **超现实数类**-闭的超现实数子结构所构成，遵循以下规则：

- $\dashv\!\langle_{\gamma<0}\mathbf{U}_\gamma=$ **超现实数类**。
- $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta+1}\mathbf{U}_\gamma=\left(\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma\right)\prec\mathbf{U}_\beta$ 如果 $\beta<\alpha$,
- $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma=\bigcap_{\beta'<\beta}\dashv\!\langle_{\gamma<\beta'}\mathbf{U}_\gamma$ 若 $0<\beta\leqslant\alpha$ 是极限序数。

那么每个类 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma$ 对于 $\beta\leqslant\alpha$ 都是一个 **超现实数类**-闭的超现实数子结构，并且如果 $\beta\dotplus\delta\leqslant\alpha$，那么我们有

$$\dashv\!\langle_{\gamma<\beta\dotplus\delta}\mathbf{U}_\gamma=\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma\prec\dashv\!\langle_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dotplus\delta}\mathbf{U}_\gamma. \tag{5.1}$$

证明。我们首先需要证明该定义是合理的。我们通过超限归纳法进行证明，同时证明序列 $(\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma)_{\beta\leqslant\alpha}$ 是递减的，并且每一项都是 No-闭超现实子结构。设 $\beta\leqslant\alpha$ 满足这些假设在严格低于 β 的范围内成立。如果 $\beta=\beta'+1$ 是后继序数，那么 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta'}\mathbf{U}_\gamma$ 和 $\mathbf{U}_{\beta'}$ 是 No- 闭超现实子结构，因此 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma:=\left(\dashv\!\langle_{\gamma<\beta'}\mathbf{U}_\gamma\right)\prec\mathbf{U}_{\beta'}$ 是良定义且 No- 闭的（根据引理 5.12）。超现实子结构 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta'}\mathbf{U}_\gamma$ 是 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma$ 的左因子，这意味着 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma\subseteq\dashv\!\langle_{\gamma<\beta'}\mathbf{U}_\gamma$。如果 β 是极限序数，那么定义 $\dashv\!\langle_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma$ 的交集根据命题 5.13 是一个 No-闭超现实子结构，并且 $(\dashv\!\langle_{\gamma<\beta'}\mathbf{U}_\gamma)_{\beta'\leqslant\beta}$ 显然是递减的。

我们通过对 $\beta \dot{+} \delta$ 进行归纳法证明恒等式 (5.1)。设 σ 为一个序数，使得对于任意满足 $\beta \dot{+} \delta < \sigma$ 的序列 $\mathbf{U}$ 和 β, δ，(5.1) 均成立。设 β, δ 满足 $\beta \dot{+} \delta = \sigma$。如果对于某个序数 η，有 $\delta = \eta + 1$，那么

$$\begin{aligned}
\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta\dot{+}\delta} \mathbf{U}_\gamma &= \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta\dot{+}\eta\dot{+}1} \mathbf{U}_\gamma \\
&= \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta\dot{+}\eta} \mathbf{U}_\gamma \prec \mathbf{U}_{\beta\dot{+}\eta} \\
&= \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta} \mathbf{U}_\gamma \prec \bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\eta} \mathbf{U}_\gamma \prec \mathbf{U}_{\beta\dot{+}\eta} \\
&= \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta} \mathbf{U}_\gamma \prec \bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\eta\dot{+}1} \mathbf{U}_\gamma \\
&= \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta} \mathbf{U}_\gamma \prec \bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\delta} \mathbf{U}_\gamma.
\end{aligned}$$

如果 δ 是极限序数，那么我们有

$$\begin{aligned}
\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta\dot{+}\delta} \mathbf{U}_\gamma &= \bigcap_{\eta<\delta} \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta\dot{+}\eta} \mathbf{U}_\gamma \\
&= \bigcap_{\eta<\delta} \left(\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta} \mathbf{U}_\gamma \prec \bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\eta} \mathbf{U}_\gamma \right) \\
&= \bigcap_{\eta<\delta} \Xi_{\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma} \left(\bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\eta} \mathbf{U}_\gamma \right) \\
&= \Xi_{\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma} \left(\bigcap_{\eta<\delta} \bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\eta} \mathbf{U}_\gamma \right) \\
&= \Xi_{\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma} \left(\bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\delta} \mathbf{U}_\gamma \right) \\
&= \bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta} \mathbf{U}_\gamma \prec \bigdoublebarwedge_{\beta\leqslant\gamma<\beta\dot{+}\delta} \mathbf{U}_\gamma.
\end{aligned}$$

(的单射性使 $\Xi_{\bigdoublebarwedge_{\gamma<\beta}\mathbf{U}_\gamma}$ 我们能够将它穿过交集)。 □

例5.17。在 [14, 第34页–35], Conway 非正式地讨论了连续的指数表达式，其形式为

$$x = u_0 \pm \omega^{u_1 \pm \omega^{u_2 \pm \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

他概述了一种证明方法，证明能够以这种方式表示的数类与超现实数类 No 序同构。Conway 的想法后来由 Lemire [31, 32, 33] 严格地加以阐述。他首先在 $\mathrm{u}_0 = \mathrm{u}_1 = \cdots = 0$ 的情况下证明了以下结果：给定 $(\mathrm{z}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$，令 E_z 为满足以下条件的数 x 所成的类：存在一个序列 $(\mathrm{x}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{No}^{\mathbb{N}}$，使得

$$x = z_0 \omega^{z_1 \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{z_i x_i}}}}}$$

对所有 $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$ 均成立。因此， $\mathbf{E}_z$ 与超现实数类 No 序同构。此外，记 $\varphi_z \colon \mathrm{No} \longrightarrow \mathrm{E}_z$ 为该同构，φ_z 具有任意序型 $\alpha \in \mathrm{On}$ 的不动点，而这些不动点构成的类 E_z^α 也与超现实数类 No 序同构。取所有 $\alpha \in \mathrm{On}$ 和 $\mathrm{i} < \omega$ 下的 $\mathrm{U}_{\omega\alpha+i} = \mathrm{z}_i \mathrm{Mo}$，由定理 5.16 可得此结果。于是，对所有 $\alpha \in \mathrm{On}$，$\mathrm{E}_z^\alpha = \bigdoublebarwedge_{\beta<\omega^{1+\alpha}} \mathrm{U}^\beta$。

一个 类似的结果 由 Lemire 证明，适用于Lemire 针对更一般的连续指数函数表达式 [32, 定理 4]。 这一结果更为复杂，并且呈现出与我们关于结果在嵌套的展开中第8 节下文所述的相似之处。

命题 5.18. 设 $\mathbf{S}$ 是一个**No**-闭超现实子结构。 对于每个序数 α，令

$$\mathbf{S}^{\prec\alpha} := \bigcap_{\beta<\alpha}^{\prec} \mathbf{S}.$$

每个 $\mathbf{S}^{\prec\alpha}$ 都是一个**No**-闭超现实子结构，并且对于 α，$\beta\in$**在**，我们有：

$$\mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{+}\beta)} = \mathbf{S}^{\prec\alpha}{}_{\prec}\mathbf{S}^{\prec\beta}. \tag{5.2}$$
$$\mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\beta)} = (\mathbf{S}^{\prec\alpha})^{\prec\beta}. \tag{5.3}$$

证明。这里的大部分内容直接由定理 5.16 得出；我们只需证明恒等式 (5.3)。设 $\pi\in$ On 满足该恒等式对 $\alpha\dot{\times}\beta<\pi$成立。设 α,β为满足 $\alpha\dot{\times}\beta=\pi$的序数。推论 5.14 表明，同样的构造可以应用于结构 $\mathbf{S}^{\prec\alpha}$。若对于 $\eta\in$On，$\beta=\eta+1$，则有

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}^{\prec\alpha})^{\prec\beta} &= (\mathbf{S}^{\prec\alpha})^{\prec\eta}{}_{\prec}\mathbf{S}^{\prec\alpha}\\ &= \mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\eta)}{}_{\prec}\mathbf{S}^{\prec\alpha}\\ &= \mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\eta\dot{+}\alpha)}\\ &= \mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\beta)},\end{aligned}$$

其中我们使用了(5.2) 以及归纳假设。若 β是极限序数，则

$$\begin{aligned}(\mathbf{S}^{\prec\alpha})^{\prec\beta} &= \bigcap_{\eta<\beta}(\mathbf{S}^{\prec\alpha})^{\prec\eta}\\ &= \bigcap_{\eta<\beta}\mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\eta)}\\ &= \bigcap_{\gamma<\alpha\dot{\times}\beta}\mathbf{S}^{\prec\gamma}\\ &= \mathbf{S}^{\prec(\alpha\dot{\times}\beta)}.\end{aligned}$$

□

注意，对于 $n\in\mathbb{N}$，结构 $\mathbf{S}^{\prec n}$是将 $\mathbf{S}$嵌套到自身中的 n 重嵌套，并且有 $\Xi_{\mathbf{S}^{\prec n}}=(\Xi_{\mathbf{S}})^n$。对于 $\alpha\in$On，由命题 5.2 和恒等式 (5.3)，我们有 $\mathbf{S}^{\prec(\omega\dot{\times}\alpha)}=\mathrm{Fix}_{\mathbf{S}}^{\prec\alpha}$。因此，将 $\mathbf{S}$与自身进行超限右嵌套，可以定义 $\Xi_{\mathbf{S}}$的高阶不动点，即为满足 $0<\alpha\in$On 的 $\mathbf{S}^{\prec\dot{\omega}^{\alpha}}$中的元素。正如我们所见，嵌套对构成超现实子结构的递减交具有左分配性。一般而言，它不具有右分配性。例如，若 $\mathbf{S}$ 是 No 的一个真 No-闭超现实子结构，则 $\mathbf{S}^{\prec\omega}{}_{\prec}\mathbf{S}$是 $\mathbf{S}^{\prec\omega}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\mathbf{S}^{\prec n}{}_{\prec}\mathbf{S})$的真子类。

<escape>**示例 5.19**。 我们 将在 第 节 7.2 中看到 超现实数类 类 **超现实数类**$_{>}^{\prec\alpha}$ 与 相同 $\dot{\omega}^{\alpha}\dot{\times}$**超现实数类**。</escape>

例 5.20. 以前在 [14,24, 34] 中研究过 ω-映射的不动点类 $\mathrm{Mo}^{\prec\omega}$； $\mathrm{Mo}^{\prec\omega}$ 中的数称为广义 ε-数。它也出现在指数函数和符号序列长度 [15, 30] 的研究中。类 $\mathrm{Mo}^{\prec\dot{\omega}^{\alpha}}$ 对应于 ω-映射的一个高阶不动点，我们预计它在研究 α 阶超指数函数时，会发挥与 $\mathrm{Mo}^{\prec\omega}$ 类似的作用。

6 凸分划

在本节中， $\mathbf{S}$ 表示一个超现实子结构。

6.1 凸分划

定义 *6.1.* 设 $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{S}$ 的一个凸子类分划。我们称 $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{S}$ 的一个凸分划。对于 $x \in \mathbf{S}$，令 $\mathbf{\Pi}[x]$ 表示 $\mathbf{\Pi}$ 中包含 x 的成员，并回顾该类是有根的（根据引理 *4.16*）。如果 $x \in \mathbf{S}$ 是 $\mathbf{\Pi}$- 简单的，即 $x = \mathbf{\Pi}[x]^\bullet$，则称 x 为 $\mathbf{\Pi}$-*simple*；并令 $Smp_{\mathbf{\Pi}}$ 表示 $\mathbf{S}$ 中 $\mathbf{\Pi}$-简单元素所成的类。对于 $x, y \in \mathbf{S}$，记作：

$$\begin{aligned} x =_{\mathbf{\Pi}} y &\text{ if } \mathbf{\Pi}[x] = \mathbf{\Pi}[y], \\ x <_{\mathbf{\Pi}} y &\text{ if } \mathbf{\Pi}[x] < \mathbf{\Pi}[y], \\ x \leqslant_{\mathbf{\Pi}} y &\text{ if } \mathbf{\Pi}[x] = \mathbf{\Pi}[y] \text{ or } \mathbf{\Pi}[x] < \mathbf{\Pi}[y]. \end{aligned}$$

注记 6.2. 凸 分划 有时 被称为 凝聚 定义4.1].

我们可以通过离散分划 $\mathbf{\Pi}_{\text{disc}}$ 将 $\mathbf{S}$ 得到为 $\text{Smp}_{\mathbf{\Pi}_{\text{disc}}}$，其中对于所有 $\text{x} \in \mathbf{S}$ 都有 $\mathbf{\Pi}_{\text{disc}}[\text{x}] = \{\text{x}\}$。令 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{x}) := \mathbf{\Pi}[\text{x}]^\bullet \in \mathbf{S}$ 对所有 $\text{x} \in \mathbf{S}$ 成立。映射 $\pi_{\mathbf{\Pi}} : \mathbf{S} \longrightarrow \text{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是一个满射的、递增的投影。我们称其为 $\mathbf{\Pi}$-简单投影。

在本小节的其余部分，设 $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{S}$ 的一个凸分划。拟序（或预序）是一种自反且传递的二元关系。下面的引理陈述了将线性序分划为凸子类的一些基本事实。

引理 *6.3.* 关系 $\leqslant_{\mathbf{\Pi}}$ 是一个线性拟序，并且在 $Smp_{\mathbf{\Pi}}$ 上限制为一个线性序。对于 $x, y \in \mathbf{S}$，当且仅当 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(x) \leqslant \pi_{\mathbf{\Pi}}(y)$ 时，$x \leqslant_{\mathbf{\Pi}} y$。

证明。众所周知，分划 $\mathbf{\Pi}$ 对应于 $\mathbf{S}$ 上的等价关系 $=_{\mathbf{\Pi}}$。$<_{\mathbf{\Pi}}$ 的传递性和自反性由 No 的子类上的 $<$ 的传递性和自反性推出。其在 $\text{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 上的限制是线性序，这直接源于 $\text{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 的定义以及上述等价关系，现证明如下。若 $\mathbf{\Pi}$ 只有一个成员，则结论显然成立。否则，令 $\text{x}, \text{y} \in \mathbf{S}$，其中 $\text{x} <_{\mathbf{\Pi}} \text{y}$。我们有 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{x}) \in \mathbf{\Pi}[\text{x}] < \mathbf{\Pi}[\text{y}] \ni \pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{y})$，因此 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{x}) < \pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{y})$。反过来，假设 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{x}) < \pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{y})$。那么 $\mathbf{\Pi}[\text{x}] \neq \mathbf{\Pi}[\text{y}]$，而由于 $\mathbf{\Pi}$ 是一个分划，这意味着 $\mathbf{\Pi}[\text{x}] \cap \mathbf{\Pi}[\text{y}] = \emptyset$。对于 $\text{x}' \in \mathbf{\Pi}[\text{x}],$，在 $\mathbf{\Pi}[\text{y}]$ 中可能不存在元素 z 使得 $\text{z} \leqslant \text{x}$，因为这将推出 $\text{z} \leqslant \text{x} \leqslant \pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{y})$，进而由该类的凸性得到 $\text{x} \in \mathbf{\Pi}[\text{y}]$: 矛盾。因此我们有 $\mathbf{\Pi}[\text{x}] < \mathbf{\Pi}[\text{y}],$，也就是说，$\text{x} <_{\mathbf{\Pi}} \text{y}$。根据 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$ 的定义，关系 $\text{x} =_{\mathbf{\Pi}} \text{y}$ 意味着 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{x}) = \pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{y})$；而 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{x}) = \pi_{\mathbf{\Pi}}(\text{y})$ 意味着 $\mathbf{\Pi}[\text{x}] \cap \mathbf{\Pi}[\text{y}] \neq \emptyset$，所以 $\mathbf{\Pi}[\text{x}] = \mathbf{\Pi}[\text{y}],$，从而 $\text{x} =_{\mathbf{\Pi}} \text{y}$。□

对于任意子类 $\mathbf{X}$ 的 $\mathbf{S}$，我们令 $\mathbf{\Pi}[\mathbf{X}]$ 表示类 $\bigcup_{x \in \mathbf{X}} \mathbf{\Pi}[x]$。

引理6。4 设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$是子类 $\mathbf{S}$。则以下陈述是等价的：

a） $\mathbf{A} < \mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]$。
b） $\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}] < \mathbf{B}$。
c） $\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}] < \mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]$。

证明。若 $\mathbf{A}=\emptyset$ 或 $\mathbf{B}=\emptyset$，则所有不等式都平凡成立。假设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 非空，且设 $a\in\mathbf{A}$ 和 $b\in\mathbf{B}$。反设 $\mathbf{A}<\mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]$，但 $\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}]\not<\mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]$。那么存在 $a'\in\mathbf{\Pi}[a]$ 和 $b'\in\mathbf{\Pi}[b]$，使得 $a<b'\leqslant a'$。由 $\mathbf{\Pi}[a]$,的凸性可得 $b'\in\mathbf{\Pi}[a]$,，从而 $a\in\mathbf{\Pi}[b]$。这一矛盾说明 $\mathbf{A}<\mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]\Longrightarrow\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}]<\mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]$。逆向推论显然成立。等价关系 $\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}]<\mathbf{B}\Longleftrightarrow\mathbf{\Pi}[\mathbf{A}]<\mathbf{\Pi}[\mathbf{B}]$ 基于类似理由成立。□

引理 6.5. 对于 $x\in\mathbf{S}$，以下三个命题等价：

a) x 是 $\mathbf{\Pi}$-简单的。*b)* 存在一个 $\mathbf{S}$ 中 x 的割表示 (L,R)，使得 $\mathbf{\Pi}[L]<x<\mathbf{\Pi}[R]$。*c)* $\mathbf{\Pi}[x_L^{\mathbf{S}}]<x<\mathbf{\Pi}[x_R^{\mathbf{S}}]$。

证明。由于 $(x_L^{\mathbf{S}},\ x_R^{\mathbf{S}})$ 是一个割表示 x 在 $\mathbf{S}$ 中，断言 c） 蕴含 b）。

反过来，若 (L,R) 是 $\mathbf{S}$ 中 x 的割表示，且满足 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{L}]<\mathrm{x}<\mathbf{\Pi}[\mathrm{R}]$,，则由前一个引理可得 $\mathrm{L}<\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]<\mathrm{R}$。根据命题 4.11(b)，割表示$(\mathrm{L},\mathrm{R})$ 相对于 $(\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}},\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}})$ 共尾，因此 $\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}<\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]<\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}}$。于是，再由引理 6.4 可知 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}]<\mathrm{x}<\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}}]$。这说明 b) 蕴含 c)。

现在假设 x 是 $\mathbf{\Pi}$-simple，并证明 c)。对于 $\mathrm{u}\in\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}$，有 $\mathrm{u}\sqsubset\mathrm{x}$，因此 $\mathrm{u}\notin\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]$,，从而 $\mathrm{u}\neq_{\mathbf{\Pi}}\mathrm{x}$。由于 $\mathrm{x}\not<\mathrm{u}$，我们并没有 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]<\mathbf{\Pi}[\mathrm{u}]$，所以引理 6.3 得出$\mathbf{\Pi}[\mathrm{u}]<\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]$,，特别是 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{u}]<\mathrm{x}$。这证明了 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}]<\mathrm{x}$，类似的论证可得 $\mathrm{x}<\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}}]$。

最后假设 c) 成立，并证明 a)。我们有 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]^\bullet\sqsubseteq\mathrm{x}$，因此 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]^\bullet\in\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}\cup\{\mathrm{x}\}\cup\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}}$。现在，类 $\mathbf{\Pi}[\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]^\bullet]=\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]$ 既不严格大于也不严格小于 x，因此我们的假设要求 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]^\bullet=\mathrm{x}$。由此可得，x 是 $\mathbf{\Pi}$-简单的。□

一个Order $\leqslant$在一个集合S上称为稠密的，如果对于任意a，$b\in S$且$a<b$，存在一个$c\in S$且$a<c<b$。

命题 6.6. 假设 $\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是 稠密的。 那么 $\mathbf{\Pi}$是 唯一的 凸 分划 $\mathbf{S}$，使得 $\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$是 类 $\mathbf{\Pi}$-简单 元素 $\mathbf{S}$。

证明。对于一个 $\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，令 $\mathbf{A}_a$表示 $\mathbf{S}$ 中满足不存在 $\mathbf{\Pi}$-简单元素严格位于 a 与 x 之间的元素 x 所构成的类。族 $(\mathbf{A}_b)_{b\in\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$ 的定义只取决于类 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，而不具体取决于 $\mathbf{\Pi}$。对于一个 $\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，我们有 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]\subseteq\mathbf{A}_a$。

反过来，设 $\mathrm{x}\in\mathbf{A}_a$，并反设 x 位于 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$,之外，即 $\mathrm{a}<_{\mathbf{\Pi}}\mathrm{x}$。于是 $\mathrm{a}<_{\mathbf{\Pi}}\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{x})$，且由于 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 稠密，存在一个介于 a 与 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{x})$ 之间的 $\mathbf{\Pi}$-简单元素 b。但 $\mathrm{a}<_{\mathbf{\Pi}}\mathrm{b}<_{\mathbf{\Pi}}\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{x})$ 意味着 $\mathrm{a}<\mathrm{b}<\mathrm{x}$，这与 a 和 x 之间不存在简单元素的假设矛盾。由此可得 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]=\mathbf{A}_a$，这尤其意味着分划 $\mathbf{\Pi}$ 由 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 唯一确定。□

如果 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是稠密的，那么我们称 $\mathbf{\Pi}$ 为 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 的定义分划。请注意，当 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是超现实子结构时，尤其满足这一条件。接下来，我们将考虑一个集合论条件，在该条件下，$\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 总是超现实子结构。

我们称..... $\mathbf{\Pi}$ 是稀薄的，当且仅当每个元素都属于 $\mathbf{\Pi}$ 且有一个共尾和共初子集。例如，超现实数类 No 中的凸分划 $\mathbf{\Pi}$，其中满足

$$\mathbf{\Pi}[x]:=\{y\in\mathbf{No}:\exists n\in\mathbb{N},-n<x-y<n\},$$

是稀薄的。事实上，对于每个 $\in$ 属于超现实数类 No 的 x，类 $\mathbf{\Pi}[x]$ 都有共尾且共初子集 $x+\mathbb{Z}$。关于稀薄凸分划的更多（反）例子，请参见下文例 6.15。若 $\mathbf{\Pi}$ 稀薄，则我们可以选取一个特定族 $(\Pi[x])_{x\in\mathbf{S}}$，使得每个属于 $\in\mathbf{S}$ 的 $\Pi[x]$ 都是 $\mathbf{\Pi}[x]$, 的共尾且共初子集，其中 $\Pi[x]=\Pi[y]\iff x=_{\mathbf{\Pi}} y$。对于 $\mathbf{S}$ 的任意子类 $\mathbf{X}$，我们记作 $\Pi[\mathbf{X}]=\bigcup_{x\in\mathbf{X}}\Pi[x]$。

定理 6.7. 若 $\mathbf{\Pi}$ 是 稀薄，则 $\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是一个 超现实 子结构。 若 $(L,$ 实数集$)$ 是 一个 割表示于$\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，则 有

$$\{L\,|\,R\}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}=\{\Pi[L]\,|\,\Pi[R]\}_{\mathbf{S}}.$$

证明。令 $L<R$ 为 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 的子集。对于 $l\in L$ 和 $r\in R$，由引理 6.3 可得 $\mathbf{\Pi}[l]<\mathbf{\Pi}[r]$。因此，$\Pi[l]<\Pi[r]$ 也成立，这意味着 $x:=\{\Pi[L]\,|\,\Pi[R]\}_{\mathbf{S}}$ 是良定义的。给定 $l\in L$ 且 $l'\in\mathbf{\Pi}[l]$,，存在一个 $l''\in\Pi[l]$，使得 $l''>l'$，因为 $\Pi[l]$ 在 $\mathbf{\Pi}[l]$ 中共尾。因此 $l'\lhd l''<x$，从而 $\mathbf{\Pi}[l]<x$。类似地，对于任意 $r\in R$，也可证明 $x<\mathbf{\Pi}[r]$。由引理 6.5 可知，x 是 $\mathbf{\Pi}$-简单的。令 $y\in(L\,|\,R)_{\mathbf{S}}$ 为 $\mathbf{\Pi}$-简单的。给定 $l\in L$ 和 $r\in R$，l、r 和 y 的 $\mathbf{\Pi}$-简单性意味着 $\mathbf{\Pi}[l]<y<\mathbf{\Pi}[r]$,，尤其是 $\Pi[l]<y<\Pi[r]$。由此可得 $x\sqsubseteq y$，因此 $x=\{L\,|\,R\}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$。由命题 4.7，得出类 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是一个超现实子结构。□

注6.8。上述定理可以视为在不同框架下对 [34, 定理 8.4]的加强。事实上，Lurie 的结果仅限于 $\mathbf{S}=$超现实数类的情形，并且要求额外假设，即

$$\forall a,b,c\in\mathbf{S},((a\sqsubseteq b\sqsubseteq c\wedge\mathbf{\Pi}[a]=\mathbf{\Pi}[c])\Longrightarrow(\mathbf{\Pi}[a]=\mathbf{\Pi}[b]=\mathbf{\Pi}[c])).$$

此条件与以下条件等价：按照 $\mathbf{\Pi}$ 我们的术语，其为尖锐（见下文）；它对以下分划 $\mathbf{\Pi}$ 的**超现实数类**$^{>,\succ}$ 使得：

$$\forall a\in\mathbf{No}^{>,\succ},\mathbf{\Pi}[a]:=\{b\in\mathbf{No}^{>,\succ}:\exists n\in\mathbb{N},\log_n(b)\asymp\log_n(a)\},$$

它是 凸分划 集合$\mathbf{La}$ 对数函数-原子数。事实上，我们有 $\omega\sqsubseteq\omega^{\omega}\sqsubseteq\omega^{\omega^{\omega^{-1}}}$，其中 $\omega^{\omega}=\lambda_1>\mathbf{\Pi}[\lambda_0]=\mathbf{\Pi}[\omega]$，但是

$$\omega^{\omega^{\omega^{-1}}}=\exp\left(\omega^{\frac{2}{\omega}}\right)=\exp_2(2\log_2\omega)\in\mathbf{\Pi}[\omega].$$

尽管如此，$\mathbf{La}$ 是一个超现实数子结构，而且甚至是一个**超现实数类**-闭的子结构。

当 $\mathbf{\Pi}$ 稀薄时，结构 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 还在 $\mathbf{S}$中共尾且共初，因为对于 $x\in\mathbf{S}$，我们有 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}\ni\{\emptyset\,|\,\Pi[x]\}_{\mathbf{S}}\leqslant x\leqslant\{\Pi[x]\,|\,\emptyset\}_{\mathbf{S}}\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$。根据前一个命题，如果 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 的定义分划 $\mathbf{\Pi}$ 是稀薄的，我们就可以说它是稀薄的。如果 $\mathbf{\Pi}$ 不是稀薄的，那么 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$可能不是超现实子结构，但可以证明，存在 No 的唯一一个 $\sqsubseteq$-初始子类 $\mathbf{I}$，以及 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 与 $\mathbf{I}$之间唯一的同构。

例如，我们可以得到由 [14,Chapter 5] 的全显整数构成的环 $\mathrm{Oz}:=\mathrm{No}_{\succ}\Subset\mathbb{Z}$，将其表示为 $\mathrm{Smp}^{\mathbf{\Pi}_{\mathrm{Oz}}}$，其中对于每个数 $z\in\mathrm{Oz}$，我们定义 $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{Oz}}[z]:=[z,z+1)$。这不是一个超现实子结构，因为割 $(0\,|\,1)_{\mathbf{Oz}}$ 是空的。尽管如此，Oz 在 No 中是 $\sqsubseteq$-初始的。注意，不同的分划可能产生相同的类 Oz（例如，分别用 $[0,1/2)$ 和 $[1/2,2)$ 替换 $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{Oz}}[0]$ 和 $\mathbf{\Pi}_{\mathbf{Oz}}[1]$，并保持其他类不变），这与命题 6.6 中稠密划分的情况形成对比。下面例 6.15 中的分划 $\mathbf{\Pi}_2$ 并非稀薄的，但 $\mathrm{Smp}^{\mathbf{\Pi}_2}$ 却是一个超现实子结构。

命题 6.9. 假设 $\mathbf{\Pi}$是 稀薄。 那么 我们 有 如下 一致 割 方程 对于 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$以及 $x \in$**超现实数类**:

$$\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} x = \{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} x_L] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} x_R]\}_{\mathbf{S}}.$$

证明。 该割 方程可由定理 6。7 以及该关系

$$\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} x = \{\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} x_L \mid \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} x_R\}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}.$$

现在转向一致性，考虑数 y 的割表示 (L, R) 。我们有$\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L} <_{\mathbf{\Pi}} \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}$，因此数 $\{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L}] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}]\}_{\mathbf{S}}$ 是良定义的。由于(L, R) 相对于 (y_L共尾，y_R) 和 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$ 严格递增，数$\{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L}] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}]\}_{\mathbf{S}}$ 位于割 $(\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y}_L] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y}_R])_{\mathbf{S}}$中，因此 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y} \sqsubseteq \{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L}] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}]\}_{\mathbf{S}}$。反过来，我们有 $\mathrm{L} < \mathrm{y} < \mathrm{R}$，因此 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L} < \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y} < \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}$。由于 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L} \cup \{\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y}\} \cup \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R} \subseteq \mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，我们有 $\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L}] < \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y} < \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}]$,，由此 $\{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L}] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}]\}_{\mathbf{S}} \sqsubseteq \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y}$。我们得出结论， $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{y} = \{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{L}] \mid \Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{R}]\}_{\mathbf{S}}$。 □

推论 6.10. 如果 $\mathbf{\Pi}$ 是 稀薄 且 $\mathbf{S}$ 是 超现实数类 的最终片段，则 **超现实数类**，那么 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$ 保持 序数。

证明。 如果 μ 是一个 序数， 那么 $(\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mu_L] \mid \emptyset)_{\mathbf{S}}$ 是一个 非-空的 终 段，属于 $\mathbf{S}$，并且因此 属于 **超现实数类**， 所以 根据 引理 4.17， 它的 最简 元素 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mu$ 是 一个 序数。 □

对于实数集 $\mathbf{S}$ 的凸分划 $\mathbf{\Pi}$、$\mathbf{\Pi}'$，如果对每个 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$ 都有 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}] \subseteq \mathbf{\Pi}'[\mathrm{x}]$，我们就记作 $\mathbf{\Pi} \trianglelefteq \mathbf{\Pi}'$，并称 $\mathbf{\Pi}$ 比 $\mathbf{\Pi}'$ 更细。如果 $\mathbf{\Pi} \trianglelefteq \mathbf{\Pi}'$，那么 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}'} \subseteq \mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$。

回顾一下，有向集是一个偏序关系Order $(J \leqslant)$，使得对于所有的j，$j' \in J$，都存在一个$j'' \in J$，满足j、$j' \leqslant j''$。

命题 *6.11.* 设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。设 $(J <)$ 是一个非空有向集。若 $(\mathbf{\Pi}_j)_{j \in J}$ 是 $\trianglelefteq$-递增的 $\mathbf{S}$ 的稀薄凸分划族，则交集 $\bigcap_{j \in J} Smp^{\mathbf{\Pi}_j}$ 是一个超现实子结构，其定义稀薄分划 $\mathbf{\Pi}_J$ 为

$$\forall x \in \mathbf{S}, \quad \mathbf{\Pi}_J[x] = \bigcup_{j \in J} \mathbf{\Pi}_j[x].$$

证明. 给定 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$，类 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}] := \bigcup_{j \in J} \mathbf{\Pi}_j[\mathrm{x}]$ 是 $\mathbf{S}$ 和 $\bigcup_{x \in \mathbf{S}} \mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}] = \mathbf{S}$ 的非空凸子类。设 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{S}$ 满足 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}] \cap \mathbf{\Pi}_J[\mathrm{y}] \neq \emptyset$，并令 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$。由于 J 是有向集，存在 $\mathrm{j} \geqslant \mathrm{i}$ 属于 J，使得 $\mathbf{\Pi}_j[\mathrm{x}] \cap \mathbf{\Pi}_j[\mathrm{y}] \neq \emptyset$，从而 $\mathbf{\Pi}_j[\mathrm{x}] = \mathbf{\Pi}_j[\mathrm{y}]$。特别地， $\mathbf{\Pi}_i[\mathrm{x}] \subseteq \mathbf{\Pi}_J[\mathrm{y}]$ 且 $\mathbf{\Pi}_i[\mathrm{y}] \subseteq \mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}]$。由于这对任意 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$ 都成立，因此可得 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}] = \mathbf{\Pi}_J[\mathrm{y}]$,，所以 $\mathbf{\Pi}_J$ 定义了 $\mathbf{S}$ 的一个凸分划。

对于 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$，我们有 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}^{\mathbf{S}}_L] < \mathrm{x} < \mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}^{\mathbf{S}}_R]$ 当且仅当对于所有 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$， $\mathbf{\Pi}_j[\mathrm{x}^{\mathbf{S}}_L] < \mathrm{x} < \mathbf{\Pi}_j[\mathrm{x}^{\mathbf{S}}_R]$ 成立，因此引理 6.5 蕴含 $\bigcap_{j \in J} \mathrm{Smp}^{\mathbf{\Pi}_j} = \mathrm{Smp}^{\mathbf{\Pi}_J}$。现在，对于 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$，集合 $\bigcup_{j \in J} \Pi_j \mathrm{x}$ 在 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}]$, 中是共尾且共初的，因此 $\mathbf{\Pi}_J$ 是稀薄的。因此，定理 6.7 蕴含类$\bigcap_{j \in J} \mathrm{Smp}^{\mathbf{\Pi}_j}$ 是一个超现实子结构。□

命题 6.12。 假设 $\mathbf{S}$ 是 超现实数类 的末段，且 **超现实数类** 的 $\mathbf{\Pi} \trianglelefteq \mathbf{\Pi}'$ 是 稀薄 凸分划 $\mathbf{S}$。 那么 对于 $\lambda \in \mathbf{On}$， 有 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \lambda \leqslant \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}'}} \lambda$， 并且 特别地 $\lambda \leqslant \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \lambda$。

证明。 我们通过对第一个不等式进行归纳法，关于$\lambda \in \mathbf{On}$。 假设该不等式严格地在以下成立 λ，我们有

$$\begin{aligned} \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \lambda &= \{\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \lambda_L] \mid \emptyset\}_{\mathbf{S}} \\ \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}'}} \lambda &= \{\Pi'[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}'}} \lambda_L] \mid \emptyset\}_{\mathbf{S}}. \end{aligned}$$

对于 $\gamma\in\lambda_L$，我们有 $\Xi_{\mathbf{Smp}_\Pi}\gamma\leqslant\Xi_{\mathbf{Smp}_{\Pi'}}\gamma<\Xi_{\mathbf{Smp}_{\Pi'}}\lambda$，其中 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\Pi'}}\lambda\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}'}\subseteq\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，因此 $\mathbf{\Pi}[\Xi_{\mathbf{Smp}_\Pi}\gamma]<\Xi_{\mathbf{Smp}_{\Pi'}}\lambda$，由此特别有 $\Pi[\Xi_{\mathbf{Smp}_\Pi}\lambda_L]<\Xi_{\mathbf{Smp}_{\Pi'}}\lambda$。根据命题 4.11(a)，我们有 $\Xi_{\mathbf{Smp}_\Pi}\lambda\leqslant\Xi_{\mathbf{Smp}_{\Pi'}}\lambda$，结论由归纳法得出。

当 $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{S}$ 的离散分划时，第二个不等式可由第一个不等式推出；该离散分划是 $\trianglelefteq$-极小的，且满足 $\Xi_{\mathbf{Smp}_\Pi}=\Xi_{\mathbf{S}}$。由于 $\mathbf{S}$ 是超现实数类的一个终段，根据命题 4.17 可得 $\Xi_{\mathbf{S}}0=\min(\mathbf{S}\cap\mathrm{On})\geqslant 0$。此外，对于所有满足 $\lambda>0$ 的 $\lambda\in\mathrm{On}$，我们有 $\Xi_{\mathbf{S}}\lambda=\{\Xi_{\mathbf{S}}\lambda_L\mid\emptyset\}_{\mathbf{S}}=\{\Xi_{\mathbf{S}}\lambda_L\mid\emptyset\}$，由此根据归纳法可得 $\Xi_{\mathbf{S}}\lambda\geqslant\lambda$。 □

6.2 尖锐凸分划

我们已经遇到超现实子结构的两种不同类型的投影。给定超现实子结构 $\mathbf{S}$ 的一个 $\mathbf{S}$-闭有根子类 $\mathbf{X}$，拓扑投影会将每个元素 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}^{\sqsupseteq\mathbf{X}^\bullet}$ 映射到属于 $\mathbf{X}$ 的 x 的 $\sqsubseteq$-极大初始段 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}(\mathrm{x})$。给定超现实子结构 $\mathbf{S}$ 的一个凸分划 $\mathbf{\Pi}$，$\mathbf{\Pi}$-简单投影会将 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$ 映射到属于 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}]$ 的唯一 $\mathbf{\Pi}$-简单元素 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{x})$。自然会想知道这两种投影是否彼此相关。

给定一个超现实子结构 $\mathbf{S}$ 以及一个满足 $\mathbf{S}$-闭且有根的子类 $\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{X}^\bullet=\mathbf{S}^\bullet$，拓扑投影 $\mu:=\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}$ 在 $\mathbf{S}$ 上处处有定义。对于每个 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$，我们定义 $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}[\mathrm{x}]:=\mu^{-1}(\{\mu(\mathrm{x})\})$。显然，$\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$ 将 $\mathbf{S}$ 分划为非空的有根 $\sqsubseteq$-凸子类，而 $\mathbf{X}$ 是根 $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}[\mathrm{x}]^\bullet$ 的类，其中 x 遍历 $\mathbf{S}$。$\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$ 中的成员不一定在 $\mathbf{S}$ 中是 $\leqslant$-凸的。例如，可以证明结构 $\mathbf{S}=\mathrm{Mo}^{>}+\mathrm{No}^{<}$ 是一个 $\mathrm{No}^{>}$、$^{>}$-闭的超现实子结构，且具有 $\mathrm{No}^{>}$、$>_\mathrm{Hull}(\mathbf{S})$，对于该结构，$\mathbf{M}_{\mathbf{S}}[\omega]$ 包含 ω 和 $\omega+1$，但不包含 $\omega+\omega^{-1}$。

反过来，给定 $\mathbf{S}$ 的一个凸分划 $\mathbf{\Pi}$，类 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{S}}$ 可能不是 $\mathbf{S}$-闭的；即使是，也可能出现 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{S}}}$ 与 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$ 不一致的情况。在一些有趣的情形下，投影 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$ 和 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$ 确实重合，并且 $(\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}、\sqsubseteq、\leqslant)$ 还具有其他性质，下面我们将对此进行说明。

定义 *6.13.* 设 $\mathbf{S}$ 是一个超现实子结构。如果每个 $\mathbf{\Pi}$-简单元素 x 在 $\mathbf{S}$ 中的典范表示相对于 $(\mathbf{\Pi}[x_L\cap Smp_{\mathbf{\Pi}}]、\mathbf{\Pi}[x_R\cap Smp_{\mathbf{\Pi}}])$ 共尾，则称 $\mathbf{\Pi}$ 的凸分划 $\mathbf{S}$ 是尖锐的。

假设 $\mathbf{\Pi}$ 是稀薄且尖锐的。那么每个元素 $\mathrm{x}\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 都有割表示 $(\Pi[\mathrm{x}^{\mathbf{Smp}_\Pi}_L]、\Pi[\mathrm{x}^{\mathbf{Smp}_\Pi}_R])$，且它们属于 $\mathbf{S}$。根据命题 4.11(b)，这个割表示与 $(\mathrm{x}^{\mathbf{S}}_L、\mathrm{x}^{\mathbf{S}}_R)$ 互相共尾。由注 4.21 可知，尖锐性等价于：对每个 $\mathrm{x}\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，割 $(\Pi[\mathrm{x}^{\mathbf{Smp}_\Pi}_L]\mid\Pi[\mathrm{x}^{\mathbf{Smp}_\Pi}_R])_{\mathbf{S}}$ 与 $\sqsubseteq$-终子结构 $\mathbf{S}^{\sqsupseteq x}$ of $\mathbf{S}$ 重合。这对应于定义 2.2] 中的 [11, 简单表示。若 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 的定义分划是尖锐的，则称其在 $\mathbf{S}$ 中是尖锐的。

这种 主要意义 在于 尖锐性 体现在 以下这些 等价关系 中:

定理 6.14。 设 $\mathbf{\Pi}$ 是 一个 凸 分划，它是超现实子结构的 $\mathbf{S}$，满足 $\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是一个 超现实子结构。 以下 各个 命题 彼此 等价:

a） $\mathbf{\Pi}$是尖锐。*b*）$\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $\mathbf{S}$-闭的 且 $\pi_{\mathbf{\Pi}}=\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$。*c*） $\pi_{\mathbf{\Pi}}$是 $\sqsubseteq$-递增。

d) $\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $\mathbf{S}$-闭的且 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$是 $\leqslant$-递增的。

证明。假设 $\mathbf{\Pi}$是尖锐的。我们来证明 b）、c）和 d）。注意， $\mathbf{S}^{\bullet}$ 是 $\mathbf{\Pi}$-简单的，因此 $\mathbf{S}^{\bullet}=(\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}})^{\bullet}$。我们知道， $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$若存在则是 $\sqsubseteq$-递增的，并且 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$是 $\leqslant$-递增的，因此只需证明 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$是 $\mathbf{S}$-闭的且 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}=\pi_{\mathbf{\Pi}}$。

设 $\mathrm{a}、\mathrm{b}\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$满足 $\mathrm{a}\sqsubset\mathrm{b}$。我们断言，b 比 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$中的任何元素都更简单。由对称性，不妨设 $\mathrm{a}<\mathrm{b}$。由于 $\mathrm{a}\in\mathrm{b}_L$且 $\mathbf{\Pi}$是尖锐的，集合 $\mathrm{b}^{\mathbf{S}}_L$ 关于 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$是共尾的。反设存在某个 $\mathrm{x}\in\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$使得 $\mathrm{b}\sqsubseteq\mathrm{x}$。取 $\mathrm{y}\in\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$ 满足 $\mathrm{x}<\mathrm{y}$ 且 $\mathrm{y}\sqsubseteq\mathrm{b}$。于是 $\mathrm{y}\sqsubseteq\mathrm{x}$。由引理 6.3，还可得 $\mathrm{b}>\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}],$，从而 $\mathrm{y}<\mathrm{b}$。因此 $\mathrm{x}[\mathrm{l}(\mathrm{y})]=\mathrm{b}[\mathrm{l}(\mathrm{y})]=1$，故 $\mathrm{y}<\mathrm{x}$，矛盾。

由于 $\mathrm{a}=\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]^{\bullet}$，我们的断言意味着，a 是属于 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$的任意 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]=\pi^{-1}_{\mathbf{\Pi}}(\{\mathrm{a}\})$ 元素的极大初始段；也就是说， $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$定义在 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$ 上，并且在此类上与 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$重合。由于各类 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$ 覆盖 $\mathbf{S}$，我们看到 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$定义在 $\mathbf{S}$上，且 $\pi_{\mathbf{\Pi}}=\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$。根据命题 5.8，结构 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$是 $\mathbf{S}$-闭的。

接下来我们证明 a) 是 b) 的推论。反设 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 对 $\mathbf{S}$ 和 $\pi_{\mathbf{\Pi}}=\mu_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$ 是闭的，且 $\mathbf{\Pi}$ 不是尖锐的。考虑存在 $\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，使得 $\mathrm{a}\in\mathrm{b}_L$，但 $\mathrm{b}^{\mathbf{S}}_L$ 在 $\mathbf{\Pi}[\mathrm{a}]$ 中有一个严格上界 a'' 的情形。于是 $\mathrm{b}^{\mathbf{S}}_L<\mathrm{a}''<\mathrm{b}^{\mathbf{S}}_R$，所以 $\mathrm{b}\sqsubseteq\mathrm{a}''$，且 $\mathrm{b}\sqsubseteq\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}(\mathrm{a}'')$。特别地， $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{a}'')=\mathrm{a}\sqsubset\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}(\mathrm{a}'')$，由此 $\pi_{\mathbf{\Pi}}\neq\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$：矛盾。另一种情形类似。

接下来假设 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$是 $\sqsubseteq$-递增。对于 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$和满足 $\mathrm{a}\sqsubseteq\mathrm{x}$ 的 $\mathrm{a}\in\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$，我们有 $\mathrm{a}=\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{a})\sqsubseteq\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{x})$，因此 $\pi_{\mathbf{\Pi}}(\mathrm{x})$ 是 x 的 $\sqsubseteq$-极大 $\mathbf{\Pi}$-简单初始段。这意味着 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$ 是 $\mathbf{S}$-闭的，且具有拓扑投影 $\pi_{\mathbf{\Pi}}$。因此 c) 蕴含 b)。

假设 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$是 $\mathbf{S}$-闭的，且 $\mu_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}\mathrm{S}$ 是 $\leqslant$-递增的。因此， $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}$的每个纤维 $(\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}})^{-1}(\{\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}(\mathrm{x})\})$ 在 $\leqslant$下都是凸的，其中 $\mathrm{x}\in\mathrm{S}$。正如我们在本节引言中所见，可以将 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$理解为 $\mathrm{Smp}_{\mathbf{M}}$；对于 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$，我们有 $\mathbf{M}[\mathrm{x}]=\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}{}^{-1}(\{\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}(\mathrm{x})\})$。由命题 6.6 可知 $\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}=\pi_{\mathbf{M}}=\pi_{\mathbf{\Pi}}$，因此 d) 推出 b)。证明至此结束。□

E例 6.15. 超现实子结构的凸分划 的 一个 超现实数 子结构 可能 或 可能 不 是 尖锐 ：

- 令 $\mathbf{\Pi}_{>}$表示 超现实数类 的分划 ，其中 **超现实数类** 满足 对于 $x\in$**超现实数类**， 有

$$\mathbf{\Pi}_{>}[x]=\mathbf{Hull}(x+\mathbb{Z}).$$

这实际上是超现实数类 $\mathrm{No}_{>}=\omega\dot{\times}\mathrm{No}=(2\dot{\times}\mathrm{No})^{\prec\omega}$ 纯无穷超现实数类的定义分划；该分划是尖锐的，因为对于 $\mathrm{x}\in$超现实数类$_{>}$，有 $\mathrm{x}_L=\mathrm{x}^{\mathbf{No}_{>}}_L+\mathbb{N}$ 且 $\mathrm{x}_R=\mathrm{x}^{\mathbf{No}_{>}}_R-\mathbb{N}$。

- 令 $\mathbf{\Pi}_1$表示超现实数类的分划，**其中**w满足对$x\in$**超现实数类**，我们有

$$\mathbf{\Pi}_1[x]=\mathbf{Hull}\left(x+\mathbb{Z}\,\dot{\omega}^{\omega^{-1}}\right).$$

这是 No 的一个稀薄凸分划，其 $\mathbf{\Pi}_2$-简单元素类包含 $\dot{\omega}^{2^{-\mathbb{N}}}$。然而，数 $\dot{\omega}^{\omega^{-1}}=\sup_{\sqsubseteq}\dot{\omega}^{2^{-\mathbb{N}}}$ 并非 $\mathbf{\Pi}_1$-简单，因为它属于 $\mathbf{\Pi}_1[0]$。因此，$\mathrm{Smp}_{\mathbf{\Pi}_1}$ 并非 No-闭；更遑论 $\mathbf{\Pi}_1$ 是尖锐的。

- 设 $\mathbf{C}$ 表示 类 $\mathbf{Hull}(1/2\dot{\times}$**超现实数类**$)$。 这是 由 命题 4.18得出的一个 超现实 子结构。设 $\mathbf{\Pi}_2$ 表示 在 上的凸分划 ，其中 $\mathbf{C}$ 满足 对于 任意 $\in 1/2\dot{\times}$ **超现实数类**，我们 有

$$\mathbf{\Pi}_2[a]=\mathbf{No}^{\sqsupseteq a\dot{+}(-1/4)}\sqcup\{a\}\sqcup\mathbf{No}^{\sqsupseteq a\dot{+}1/4}\subseteq\mathbf{C}.$$

可以验证，每个 $\mathbf{\Pi}_2[\mathrm{a}]$ 都是 $\mathbf{C}$ 的凸子类，并且对于 $\mathrm{x} \in \mathbf{C}$，有 $\mathbf{\Pi}_2[\mu(\mathrm{x})] = \mu^{-1}(\{\mu(\mathrm{x})\})$，其中 μ 是 $\mathbf{C} \longrightarrow 1/2$ 上超现实数类的拓扑投影。根据定理 6.14，$\mathbf{\Pi}_2$ 是尖锐的，但不是稀薄的。

我们以关于本小节的另外两项尖锐性性质作结。

命题 *6.16.* 设 $(J, <)$ 是一个非空有向集。设 $(\mathbf{\Pi}_j)_{j \in J}$ 是超现实子结构 $\mathbf{S}$ 的一个 $\trianglelefteq$-递增稀薄凸分划族。如果每个满足 $j \in J$ 的 $\mathbf{\Pi}_j$ 都是尖锐的，那么 $\bigcap_{j \in J} Smp^{\mathbf{\Pi}_j}$ 的定义稀薄分划 $\mathbf{\Pi}_J$（定义见命题 *6.11*）是尖锐的。

证明。根据命题 6.11，我们知道 $\mathbf{\Pi}_J$ 是 $\mathbf{S}$ 的一个稀薄凸分划，且具有 Smp $\bigcap_{j \in J}$ $\mathbf{\Pi}_j$ $\in$ $\mathbf{\Pi}_J$ $\in$ $L^{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}_J}}$ $\in \mathbf{\Pi}_J[\,]$, $\in$ $\in \mathbf{\Pi}_j[\,]$ Smp。令 $\mathrm{x} \in$ Smp。对于 $\mathrm{l} < \mathrm{x}$ 和 $\mathrm{a} \in \mathrm{l}$，存在 $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$，使得 $\mathrm{a} < \mathrm{l}$，其中 $\mathrm{x} \in \mathrm{Smp}^{\mathbf{\Pi}_j}$，且 $\mathrm{l} \in \mathrm{x}_L^{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}_j}}$。由于 $\mathbf{\Pi}_j$ 是尖锐的，因此存在一个 $\mathrm{x}' \in \mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}$，使得 $\mathrm{a} \leqslant \mathrm{x}'$，所以 $\mathrm{x}_L^{\mathbf{S}}$ 相对于 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}_L^{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}]$ 是共尾的。同样，$\mathrm{x}_R^{\mathbf{S}}$ 相对于 $\mathbf{\Pi}_J[\mathrm{x}_R^{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}]$ 是共初的，因此 $\mathbf{\Pi}_J$ 是尖锐的。□

命题 6.17. 设 $\mathbf{F}$ 是一个超现实数子结构，它**属于超现实数类**且还是一个终段。给定一个稀薄且尖锐凸分划 $\mathbf{\Pi}$，其中 $\mathbf{F}$，我们有 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}(\text{在}) = \mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}} \cap \text{上}$。

证明。根据推论 6.10，我们已经知道 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}}(\mathrm{On}) \subseteq \mathrm{On}$。设 $\mathrm{a} \in$超现实数类，使得 $\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{a}$ 是一个序数。集合 $(\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{a})_R^{\mathbf{F}}$ 既是空集，又是关于 $\mathbf{\Pi}[\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}} \mathrm{a}_R]$ 共初的，这意味着 $\mathrm{a}_R = \emptyset$，因此 a 是一个序数。□

6.3 群作用

在本小节，我们研究凸分划的一种尤为重要的形成方式：超现实子结构的凸包，即群作用下轨道的凸包。

设 $\mathbf{S}$ 是一个固定的超现实子结构。我们将 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 定义为严格递增双射 $g: \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ 组成的（类大小）群，群运算为函数复合。考虑 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 的任意集合大小的子群 $\mathcal{G}$。那么 $\mathcal{G}$ 自然通过函数应用作用于 $\mathbf{S}$；我们称 $\mathcal{G}$ 为作用于 $\mathbf{S}$ 上的函数群。

定义 6.18。我们定义元素 $\mathbf{x}$ $\mathcal{G}[x]$ 在元素 $x \in \mathbf{S}$ 在群作用下 $\mathcal{G}$ 所得到的光环

$$\mathcal{G}[x] = \{y \in \mathbf{S} : \exists g, h \in \mathcal{G}, (gx \leqslant y \leqslant hx)\} = \mathbf{Hull}_{\mathbf{S}}(\mathcal{G}x).$$

命题 6.19。类 $\mathcal{G}[x]$ 对于 $x \in \mathbf{S}$ 构成一个稀薄凸分划 $\mathbf{S}$。

证明。设 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$。对于任意 $\mathrm{y} \in \mathcal{G}[\mathrm{x}],$，我们有 $\mathcal{G}[\mathrm{y}] = \mathcal{G}[\mathrm{x}]$。事实上，对于某些 g、$\mathrm{h} \in \mathcal{G}$，有 $\mathrm{gx} \leqslant \mathrm{y} \leqslant \mathrm{hx}$。给定 $\mathrm{z} \in \mathcal{G}[\mathrm{y}],$，我们也有 $\mathrm{g}'\mathrm{y} \leqslant \mathrm{z} \leqslant \mathrm{h}'\mathrm{y}$，其中 g'、$\mathrm{h}' \in \mathcal{G}$ $\in \mathcal{G}$，因此 $(\mathrm{g}'\mathrm{g})\,\mathrm{x} \leqslant \mathrm{g}'$ $\mathrm{y} \leqslant \mathrm{z} \leqslant \mathrm{h}'\mathrm{y} \leqslant (\mathrm{h}'\mathrm{h})\,\mathrm{x}$，所以 $\mathrm{z} \in \mathcal{G}[\mathrm{x}]$。我们还有 $\mathrm{h}^{-1}\mathrm{y} \leqslant \mathrm{x} \leqslant \mathrm{g}^{-1}\mathrm{y}$，因此对于任意 $\mathrm{z} \in \mathcal{G}[\mathrm{x}]$，有 $\mathrm{x} \in \mathcal{G}[\mathrm{y}]$ 且 $\mathrm{z} \in \mathcal{G}[\mathrm{y}]$。根据定义，类 $\mathcal{G}[\mathrm{x}]$ 是凸的。对于一个 $\in \mathbf{S}$，我们知道 $\mathcal{G}[\mathrm{a}]$ 包含 a，所以对于 $\in \mathbf{S}$，$\mathcal{G}[\mathrm{a}]$ 构成 $\mathbf{S}$ 的一个凸分划。对于 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$，集合 $\mathcal{G}\mathrm{x}$ 在 $\mathcal{G}[\mathrm{x}],$ 中共尾且共初，因此这个分划是稀薄的。□

我们用 $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}$ 表示命题 6.19 中的分划，并称 $\mathbf{S}$ 中的元素为 $\mathcal{G}$-简单的，当且仅当它是 $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}$-简单的。我们用 $\mathrm{Smp}^{\mathcal{G}}$ 表示 $\mathcal{G}$-简单元素构成的类。命题 6.19 蕴含，引理 6.3、6.5 和 6.4 中的每个性质都适用于 $\mathcal{G}$-简单元素构成的类。我们称 $\pi^{\mathcal{G}} := \pi_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}$ 为 $\mathcal{G}$-简单投影，并用 $<_{\mathcal{G}}$、$=_{\mathcal{G}}$ 和 $\leqslant_{\mathcal{G}}$ 分别代替 $<_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}$、$=_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}$ 和 $\leqslant_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}$。

命题 6.20. Smp$\mathcal{G}$ 是一个超现实数子结构，具有以下一致的割方程，定义在超现实数类中：

$$\forall x \in \mathbf{No}, \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathcal{G}}} x = \left\{ \mathcal{G}\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathcal{G}}} x_L \mid \mathcal{G}\Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathcal{G}}} x_R \right\}_{\mathbf{S}}$$

证明。这是命题 6.19、定理 6.7 和命题 6.9 的直接推论：对每个 x ∈**S**，我们取 $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$[x]$^{\bullet}$) 作为 $\mathcal{G}$[x] 的所需共尾子集和共初子集。□

注 6.21。若 X 是由严格递增双射函数 **S** ⟶ **S** 组成的集合，我们将 ⟨X⟩ 定义为由 X 生成的 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 子群，即包含 X 的最小 $\mathcal{F}_{\mathbf{S}}$ 子群。若相对于 Y，X 逐点共终，我们就称 X 与 Y 逐点共终，并记作 Y ⊴X，当且仅当

$$\forall x \in \mathbf{S}, \forall f \in \langle Y \rangle, \exists g \in \langle X \rangle, (fx \leqslant gx).$$

这种关系具有传递性和自反性。若 Y ⊴X，则 $\mathbf{\Pi}_{\langle X \rangle} \trianglelefteq \mathbf{\Pi}_{\langle Y \rangle}$，因此 $\mathrm{Smp}_{\langle Y \rangle} \subseteq \mathrm{Smp}_{\langle X \rangle}$。若 X ⊴Y 且 Y ⊴X，则称 X 和 Y 相互逐点共终，并记作 X ≶Y。在这种情况下，我们有 $\mathrm{Smp}_{\langle X \rangle} = \mathrm{Smp}_{\langle Y \rangle}$。

现在让我们将命题6.11特化为群-诱导的凸分划。

命题 *6.22*。设 $(J, <)$ 是一个非空有向集。若 $(\mathcal{G}_j)_{j \in J}$ 是作用于 **S** 上的 $\trianglelefteq$-递增函数群族，则由 $(\mathcal{G}_j)_{j \in J}$ 生成的函数群 $\mathcal{G}J = \langle \mathcal{G}_j : j \in J \rangle$ 满足

$$\mathbf{Smp}_{\mathcal{G}_J} = \bigcap_{j \in J} \mathbf{Smp}_{\mathcal{G}_j}.$$

证明。如果 x ∈**S** 是 $\mathcal{G}_J$-简单的，那么对 j ∈J，有 $\mathcal{G}$j $x_L^{\mathbf{S}} \subseteq \mathcal{G}_J x_L^{\mathbf{S}} < x < \mathcal{G}_J x_R^{\mathbf{S}} \supseteq \mathcal{G}$j $x_R^{\mathbf{S}}$，因此 x 是 $\mathcal{G}_J$-简单的。反之，假设对于所有 j ∈J，x ∈**S** 是 $\mathcal{G}$j-简单的。令 g $= g_{j_1} \cdots g_{j_k} \in \mathcal{G}$J，其中对于 1⩽k ⩽n，有 $g_{j_k} \in \mathcal{G}_{j_k}$。由于 (J, <) 是有向集，且 $(\mathcal{G}j)_{j \in J}$ 是 $\trianglelefteq$-递增的，因此存在一个指标 j ∈J，使得 j1,…, $j_n \leqslant$ j，并存在元素 $g_j \in \mathcal{G}$j，使得对所有 u ∈**S**，都有 g_j^{-1}u ⩽g_{j_i}u ⩽g_j u，对所有 i ∈{1,…,n} 均成立，从而 g_j^{-n}u ⩽gu ⩽g_j^nu。由于 x 是 $\mathcal{G}_J$-简单的，有 $g_j^n x_L^{\mathbf{S}} < x < g_j^{-n} x_R^{\mathbf{S}}$。这说明 $gx_L^{\mathbf{S}} < x < gx_R^{\mathbf{S}}$，因此 x 是 $\mathcal{G}_J$-简单的。这证明了 $\bigcap_{j \in J} \mathrm{Smp}^{\mathcal{G}_j} = \mathrm{Smp}^{\mathcal{G}_J}$。□

命题 *6.23.* 设 I 是一个非空集合，且 $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ 是作用于 **S** 上的函数群族，其中每个 $Smp^{\mathcal{G}_i}$ 在 **S** 中都是尖锐的。那么 $\bigcap_{i \in I} Smp^{\mathcal{G}_i} = Smp^{\mathcal{G}_I}$，其中 $\mathcal{G}I = \langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$。

证明。出于与上文相同的理由，我们有 $\bigcap_{i \in I} \mathrm{Smp}_{\mathcal{G}_i} \supseteq \mathrm{Smp}^{\mathcal{G}_I}$。令 x ∈$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Smp}^{\mathcal{G}_i}$。我们用归纳法证明：对 n ∈$\mathbb{N}^{>}$，若 g $= g_{i_1} \cdots g_{i_n} \in \mathcal{G}_I$，则 $gx_L^{\mathbf{S}} < x < gx_R^{\mathbf{S}}$。根据引理 6.5，这将证明 x ∈$\mathrm{Smp}^{\mathcal{G}_I}$。当 n = 1时，断言显然成立。因此，假设 n ⩾2，并将 g 分解为 = g′ g_{i_n}，其中 $g' = g_{i_1} \cdots g_{i_{n-1}}$。对每个 l ∈$x_L^{\mathbf{S}}$，都有 g_{i_n}l ∈$\mathcal{G}_{i_n}$[l]。由于 x 是 $\mathcal{G}$i$_n$-简单的，S mp$^{\mathcal{G}_{i_n}}$的尖锐性意味着存在一个 l′∈$x_L^{\mathbf{S}}$，使得 g_{i_n}l ⩽l′。根据归纳假设，我们有 g′l′ < x，因此 gl < x。类似地可证不等式 x < g$x_R^{\mathbf{S}}$。□

注 6.24。稀薄凸分划与函数群作用这两个概念在以下意义下几乎等价。设 $\mathbf{\Pi}$ 是 $\mathbf{S}$ 的一个稀薄凸分划 $\mathbf{\Pi}$，其所有成员均无极值，并满足附加条件：存在一个正则序数 κ，使得对所有 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$，都有 $\mathrm{cof}(\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}],<),\mathrm{cof}(\mathbf{\Pi}[\mathrm{x}],>) < \kappa$。可以证明，存在一个群 $\mathcal{G}$，它在 $\mathbf{S}$ 上作用且没有全局不动点，并满足 $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}$。反过来也成立：对于任意在 $\mathbf{S}$ 上作用且没有全局不动点的函数群 $\mathcal{G}$，对所有 $\mathrm{x} \in \mathbf{S}$，都有 $\mathrm{cof}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}[\mathrm{x}],<),\mathrm{cof}(\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}[\mathrm{x}],>) < |\mathcal{G}|^{+}$。

7 常见群作用

7.1 已知群作用概述

我们通过更深入地考察几类常见函数群的作用，来结束对超现实子结构的研究。我们有意在介绍这些函数群时不指定具体定义域，这样便可以让它们作用于各种超现实子结构。

平移

给定 $c \in$**超现实数类**，我们定义该平移通过c为如下的映射

$$T_c : x \longmapsto x + c.$$

群 $\mathcal{T} := \{\mathrm{T}_r : \mathrm{r} \in \mathbb{R}\}$ 尤其作用于超现实数类和超现实数类$^{>},_{\succ}$。更一般地，如果 A 是 $(\text{超现实数类}, +)$ 的集合大小的子群，那么 $\mathcal{T}_A := \{\mathrm{T}_a : \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$ 作用于超现实数类和 $(\mathrm{A} \mid \emptyset)$。

在 $\mathcal{T}$ 对 No 的作用下形成的光环称为有限光环 $\mathcal{T}[\mathrm{x}]$，而 $\mathcal{T}$-简单元素对应于纯无穷数。纯无穷数类 No$_{\succ}$ 有时记作 $\mathbb{J}$；参见 [14, 24]。

伸缩变换

给定 $s \in$**No**$^{>}$，我们定义以伸缩变换因子 s，将其定义为映射

$$H_s : x \longmapsto sx.$$

群 $\mathcal{H} := \{\mathrm{H}_r : \mathrm{r} \in \mathbb{R}^{>}\}$ 特别作用于 No、No$^{>}$ 和 No$^{>},_{\succ}$。更一般地，若 M 是 $(\mathrm{No}^{>}, \times)$ 的集合大小的子群，则 $\mathcal{H}_M := \{\mathrm{H}_m : \mathrm{m} \in \mathrm{M}\}$ 作用于 No、No$^{>}$ 和 $(\mathrm{M} \mid \emptyset)$。

在 $\mathcal{H}$ 对 No$^{>}$ 的作用下形成的光环称为阿基米德类 $\mathcal{H}[\mathrm{x}]$，而 $\mathcal{H}$-简单元素称为单项式。单项式类 $\mathrm{Mo} = \dot{\omega}\mathrm{No}$ 由 ω-映射 $\Xi_{\mathbf{Mo}}$ 参数化，并构成一个乘法截面；作为赋值域，No 的赋值群与该截面同构（赋值由序关系诱导）。关系 $<_{\mathcal{H}}, \leqslant_{\mathcal{H}}, =_{\mathcal{H}}$ 对应于 [29, 1] 中的渐近关系 $\prec$、 $\preccurlyeq$ 和 $\asymp$。给定 $\mathrm{x} \in \mathrm{No}^{\neq}$，当将 x 视为以 $\mathbb{R}[[\mathrm{Mo}]]_{\mathbf{On}}$ 为项的广义级数时，投影 $\pi_{\mathcal{H}}(\mathrm{x})$ 与主导单项式 $\mathfrak{d}_x$ 重合。

幂

给定$s \in$**超现实数类**$^{>}$，我们定义其s-次幂映射为

$$P_s : x \longmapsto x^s = \exp(s \log x).$$

这里， exp和 log 分别是第 3.1 节中的指数函数和对数函数。群 $\mathcal{P} := \{\mathrm{P}_r : \mathrm{r} \in \mathbb{R}^{>}\}$ 尤其作用于超现实数类$^{>}$和超现实数类$^{>,>}$。更一般地，若 M 是超现实数类 $(\mathrm{No}^{>}, \times)$的一个集合大小的子群，则群 $\mathcal{P}_{\mathrm{M}} := \{\mathrm{P}_m : \mathrm{m} \in \mathrm{M}\}$ 作用于超现实数类$^{>}$和 $(\mathrm{M} | \emptyset)$。

对于 $\mathcal{P}$在超现实数类$^{>}$上的作用，光环 $\mathcal{P}[\mathrm{x}]^{>}$有时称为乘法类，而$\mathcal{P}$-简单元素称为基本单项式。基本单项式的类 $\mathrm{Smp}_{\mathcal{P}} = \exp(\mathrm{Mo}^{>}) = \dot{\omega}^{\dot{\omega}}\mathrm{No} = \mathrm{Mo}^{<2}$由 ω^{ω}-映射参数化：见命题 2.5]。

指数函数

记作

$$\begin{aligned} \exp_n &:= \exp \circ \overset{n\times}{\dots} \circ \exp \\ \log_n &:= \log \circ \overset{n\times}{\dots} \circ \log \end{aligned}$$

对所有$n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* &:= \langle \exp \rangle \\ \mathcal{E} &:= \langle \exp_n \circ H_r \circ \log_n : r \in \mathbb{R}^{>}, n \in \mathbb{N} \rangle. \end{aligned}$$

和 $\mathcal{E}^*$ 以及 $\mathcal{E}$ 都作用于特别是超现实数类$\mathrm{No}^{>,\ >}$。

对于 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{E}^*$在超现实数类$^{>}$上的作用，光环 $\mathcal{E}[\mathrm{x}]$和 $\mathcal{E}^*[\mathrm{x}]^{>}$有时分别称为层级和对数-指数类。 $\mathcal{E}$-简单元素称为对数原子数，这类数记为 La，由 λ-映射参数化：见[11, 第 5]节。 $\mathcal{E}^*$-简单元素的类记为 **K** ，由 κ-映射参数化：见 [30, 第 3]节。

我们注意到上述每个函数群都按线性序排列。

$$f \leqslant g \iff \exists x_0 \in \mathbf{No}, \forall x > x_0, f(x) \leqslant g(x).$$

除了 $\mathcal{E}$，所有这些群也都是阿贝尔的。这些都是强性质，无需将其强加于第6.3节的材料即可。

7.2 按平移作用

在本小节中，设 A 是 $(\mathrm{No}\ +)$ 的一个固定的集合大小的子群，并设$\Xi_A := \Xi_{\mathbf{Smp}_{\mathcal{J}_A}}$。如果 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{No}^{<}$，那么 $\mathcal{J}_A \trianglelefteq \mathcal{J}$ so $\mathrm{No}_{>} = \mathrm{Smp}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{Smp}^{\mathcal{J}_A}$。如果 $\mathrm{A} \not\subseteq \mathrm{No}^{<}$，那么给定一个 $\in \mathrm{A} \setminus \mathrm{No}^{<}$，集合 $\mathbb{Z}\,\mathrm{a}$ 关于 $\mathbb{R}$ 是共尾的，因此 $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{J}_A$，从而 $\mathrm{Smp}_{\mathcal{J}_A} \subseteq \mathrm{No}_{>}$。

命题7.1。 如果 $\mathcal{J}_A$ 作用于**No**，则 $\Xi_A : (\mathbf{No}\ +,\ \leqslant,\ \sqsubseteq) \longrightarrow (\mathbf{Smp}^{\mathcal{J}_A},\ +,\ \leqslant,\ \sqsubseteq)$ 是一个同构。

证明。我们已经知道 Ξ_A 是一个 $(\leqslant, \sqsubseteq)$同构，因此只需证明它保持和。设 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in$超现实数类，且 Ξ_A保持字典序上严格简单于 (a, b)的元素之和。回想一下，加法具有一致性，即

$$a = \{L_a | R_a\},\ b = \{L_b | R_b\} \implies a + b = \{a + L_b, L_a + b | a + R_b, R_a + b\}$$

将其应用于由割方程给出的命题6.9对于 Ξ_A，我们得到

$$\begin{aligned} \Xi_A a + \Xi_A b &= \{\mathcal{J}_A \Xi_A a_L | \mathcal{J}_A \Xi_A a_R\} + \{\mathcal{J}_A \Xi_A b_L | \mathcal{J}_A \Xi_A b_R\} \\ &= \{\Xi_A a + \mathcal{J}_A \Xi_A b_L, \mathcal{J}_A \Xi_A a_L + \Xi_A b | \Xi_A a + \mathcal{J}_A \Xi_A b_R, \mathcal{J}_A \Xi_A a_R + \Xi_A b\}, \end{aligned}$$

并且根据 割 方程的 一致性，由 割 方程对于 Ξ_A，我们 得到

$$\begin{aligned}\Xi_A(a+b) &= \{\mathcal{J}_A\,\Xi_A(a+b_L), \mathcal{J}_A\,\Xi_A(a_L+b)\,|\,\mathcal{J}_A\,\Xi_A(a+b_R), \mathcal{J}_A\,\Xi_A(a_R+b)\}\\ &= \{\Xi_A\,a+\mathcal{J}_A\,\Xi_A\,b_L, \mathcal{J}_A\,\Xi_A\,a_L+\Xi_A\,b\,|\,\Xi_A\,a+\mathcal{J}_A\,\Xi_A\,b_R, \mathcal{J}_A\,\Xi_A\,a_R+\Xi_A\,b\}.\end{aligned}$$

因此 $\Xi_A(a+b)=\Xi_A a+\Xi_A b$。通过归纳法，这证明了： Ξ_A保持超现实数的和，并且因此，集合$\mathbf{Smp}^{\mathcal{J}_A}$ 是超现实数类的加法子群。**超现实数类**。□

现在让我们专注于 $\mathcal{J}$。对 $\alpha\in\mathrm{On}$ 进行归纳法，很容易看出，对于所有 $\mathrm{x}\in$超现实数类，都有 $\mathrm{No}_>^{\prec\alpha}=\dot\omega^\alpha\dot\times\mathrm{No}$ 和 $\Xi^\alpha_{\mathbf{No}_>}\mathrm{x}=\dot\omega^\alpha\dot\times\mathrm{x}$。特别地，这给出了用符号序列描述 $\mathrm{Fix}^{\mathrm{No}_>}=\dot\omega^\omega\dot\times$超现实数类的方法。

接下来，我们将用 Conway 正规形以及某个作用于超现实数类的群 $\mathcal{G}$ 的 $\mathcal{G}$-简单性来描述 $\mathrm{No}_>^{\prec\alpha}$for $\alpha\in\mathrm{On}$ 的结构。根据 [15, 推论 3.1], , 如果 α 是一个序数，那么集合 $\mathrm{No}(\dot\omega^\alpha)$ 是 $(\mathrm{No}\ +)$ 的子群，而该群通过平移作用于超现实数类上。如果 $\alpha=1$，那么集合 $\{\mathrm{k}\ \dot\omega^\beta:\beta<\alpha、\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\mathrm{No}(\dot\omega^\alpha)$ 互相共尾且互相共初，并且 $\mathrm{No}_>=\mathrm{Smp}^{\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\omega)}}$，因为 $\mathrm{No}(\omega)=\mathbb{R}$。我们断言，这一结论可推广到每个序数。

命题 7.2. 对于 $\alpha\in$**On**，我们 有 **超现实数类**$_>^{\prec\alpha}=\dot\omega^\alpha\dot\times$**超现实数类** $=\mathbf{Smp}^{\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\dot\omega^\alpha)}}$。

证明。我们对 $\alpha\in\mathrm{On}$ 进行归纳法。对于 $\alpha=0$，结论显然成立。我们在例 5.3 中看到，结论对于 $\alpha=1$ 成立。假设 $\alpha=\beta+1$ 是后继序数。那么函数 $\Xi_{\mathbf{No}_>^{\prec\beta}}$ 由命题 7.1 可加，因此 $\Xi_{\mathbf{No}_>^{\prec\beta}}\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\,\Xi_{\mathbf{No}_>^{\prec\beta}}1=\mathbb{Z}\,\dot\omega^\beta$ 与 $\mathrm{No}(\dot\omega^\alpha)$ 互为共尾且互为共初。令 θ 为 $\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\dot\omega^\alpha)}$-简单的。那么 θ 是 $\mathcal{J}\,\mathrm{No}_{(\dot\omega^\beta)}$-简单的，因此由归纳假设，存在某个数 x，使得 $\theta=\Xi_{\mathbf{No}_>^{\prec\beta}}$ $\theta\sqsubseteq\theta+\mathbb{Z}\,\dot\omega^\beta=\mathrm{x}$。由于 $\Xi_{\mathbf{No}_>^{\prec\beta}}(\ +\mathbb{Z})$ $\sqsubseteq\ +\mathbb{Z}$ $\in\mathcal{J}_{\mathbb{Z}}[\ ]$, $\in\mathbb{N}$ $-\ <$ x，我们推得 x x 。现在对于 z x，存在 n，使得 x n z $<$x $+$n。x $<$z 和 x $>$z 不可能同时成立，因此由引理 4.4 的逆否命题可得 x $\sqsubseteq$z。因此 x 是 $\mathcal{J}_{\mathbb{Z}}$-简单的，所以 $\theta\in\mathrm{No}_>^{\prec\beta}\prec\mathrm{No}_>=\mathrm{No}_>^{\prec\alpha}$。反过来，对于 $\theta\in\mathrm{No}_>^{\prec\alpha}$，存在某个 $\mathrm{x}\in\mathrm{No}_>$，使得 $\theta=\Xi_{\mathbf{No}_>^{\prec\beta}}\mathrm{x}$。我们有 $\mathrm{x}\sqsubseteq\mathrm{x}+\mathbb{Z}$，因此 $\theta\sqsubseteq\theta+\mathbb{Z}\dot\omega^\beta$。仿照上面的论证可得 $\theta\sqsubseteq\mathcal{J}\,\mathrm{No}_{(\dot\omega^\alpha)}[\theta]$，从而 $\theta\in\mathrm{Smp}^{\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\dot\omega^\alpha)}}$。这证明了 $\mathrm{Smp}^{\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\dot\omega^\alpha)}}=\mathrm{No}_>^{\prec\alpha}$。

若 α 是一个极限序数，那么命题6。11 给出

$$\begin{aligned}\mathbf{No}_>^{\prec\alpha} &= \bigcap_{\beta<\alpha}\mathbf{No}_>^{\prec\beta}\\ &= \bigcap_{\beta<\alpha}\mathbf{Smp}_{\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\dot\omega^\beta)}}\\ &= \mathbf{Smp}_{\mathcal{J}_{\bigcup_{\beta<\alpha}\mathbf{No}(\dot\omega^\beta)}}\\ &= \mathbf{Smp}_{\mathcal{J}_{\mathbf{No}(\dot\omega^\alpha)}}.\end{aligned}$$

□

命题7。1 和7.2 的推论是：是加法的，对所有 $\alpha\in$**On**。实际上事实上，我们甚至有以下：

命题 7。3。对于 $\alpha\in$**On**，函数 $\Xi^\alpha_{\mathbf{No}_>}:\mathbb{R}[[\mathbf{Mo}]]_{\mathbf{On}}\longrightarrow\mathbb{R}[[\mathbf{Mo}]]_{\mathbf{On}}$**是强线性的，其中超现实数类**$_>^{\prec\alpha}\prec$**Mo** $=$**Mo** $\prec$**超现实数类**$^{\sqsupseteq\alpha}$。

证明。设 $\alpha\in\mathrm{On}^>$且 $\Phi:=\Xi^\alpha_{\mathbf{No}_>}$。我们先证明，对于所有 $\mathrm{r}\in\mathbb{R}$和 $\mathrm{x}\in$超现实数类，都有 $\Phi(\mathrm{r\ x})=\mathrm{r}\ \Phi\mathrm{x}$。根据命题 7.2，函数 Φ 是可加的，因此这对任意二进有理数 r 都成立。特别地，我们有 $\Phi(0)=\omega^\alpha\dot\times 0=0$。设 r 是一个非二进有理数的实数。取 $\mathrm{x}\in$超现实数类，使得对于所有 $\mathrm{y}\in\mathrm{x}_\sqsubset$，都有 $\Phi(\mathrm{r\ y})=\mathrm{r}\ \Phi\mathrm{y}$。众所周知，$\mathrm{r}_\sqsubset$只包含二进有理数。根据命题 7.2 和 (3.5)，我们有

$$\Phi(r\,x) = \{L_1, L_2\,|\,R_1, R_2\}$$

其中

$$\begin{aligned} L_1 &= \Phi(r_L x + r x_L - r_L x_L) + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}), \\ L_2 &= \Phi(r_R x + r x_R - r_R x_R) + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}), \\ R_1 &= \Phi(r_L x + r x_R - r_L x_R) + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}), \text{ and} \\ R_2 &= \Phi(r_R x + r x_L - r_R x_L) + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}). \end{aligned}$$

T该割方程(3.5) 关于实数超现实乘积乘以r 是一致的 [24, 定理3.5], 所以

$$r\,\Phi x = \{A_1, A_2 | B_1, B_2\},$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \{r'\,\Phi x + r\,(\Phi x' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha})) - r'\,(\Phi x' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}))\}, \\ A_2 &= \{r''\,\Phi x + r\,(\Phi x'' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha})) - r''\,(\Phi x'' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}))\}, \\ B_1 &= \{r'\,\Phi x + r\,(\Phi x'' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha})) - r'\,(\Phi x'' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}))\}, \text{ and} \\ B_2 &= \{r''\,\Phi x + r\,(\Phi x' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha})) - r''\,(\Phi x' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}))\}, \end{aligned}$$

其中 r'、r''、x'、x'' 分别取值于 r_L、r_R、x_L、x_R。我们来证明 L_1 和 A_1 互相共尾。其他集合也有类似的关系，因此可得 $\mathrm{r}\ \Phi\mathrm{x} = \Phi(\mathrm{r}\,\mathrm{x})$。由于 Φ 是可加的，对于 $\mathrm{r}' \in \mathrm{r}_L$ 和 $\mathrm{x}' \in \mathrm{x}_L$，我们有

$$\Phi(r'x + rx' - r'x') + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}) = \Phi(r'x) + \Phi(rx') - \Phi(r'x') + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}).$$

现在，根据归纳假设，有 $\Phi(\mathrm{r}\,\mathrm{x}') = \mathrm{r}\ \Phi\mathrm{x}'$ 以及 $\Phi(\mathrm{r}'\mathrm{x}') = \mathrm{r}'\,\Phi\mathrm{x}'$。此外，由于 r' 是二进有理数，我们有 $\Phi(\mathrm{r}'\,\mathrm{x}) = \mathrm{r}'\,\Phi\mathrm{x}$。因此

$$\Phi(r'x + rx' - r'x') + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}) = r'\,\Phi x + r\,\Phi x' - r'\,\Phi x' + \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}).$$

由于 r 非零，我们有 $\{\mathrm{r}',\ \mathrm{r}\}$超现实数类$(\dot{\omega}^{\alpha}) =$超现实数类$(\dot{\omega}^{\alpha})$，因此这个集合与集合 $\mathrm{r}'\,\Phi\,\mathrm{x} + \mathrm{r}\ (\Phi\mathrm{x}' +$超现实数类$(\dot{\omega}^{\alpha})) - \mathrm{r}'\,(\Phi\mathrm{x}' +$超现实数类$(\dot{\omega}^{\alpha}))$互相共尾。因此 Φ 是 $\mathbb{R}$-线性的。

接下来，我们用归纳法证明 $\mathrm{No}_{\succ}^{\prec\alpha} \prec \mathrm{Mo} = \mathrm{Mo} \prec \mathrm{No}^{\sqsupset\alpha}$。设 $\mathrm{x} \in \mathrm{No}$，且$\Phi\Xi_{\mathbf{Mo}}$对于所有 $\mathrm{y} \in \mathrm{x}_{\sqsubset}$，都有 $\mathrm{y} = \Xi_{\mathbf{Mo}}\,\Xi_{\mathbf{No}^{\sqsupset\alpha}}$。设 (L, R) 是 No 中任意一个割表示，其中 L（分别是 R）没有最大元（分别是最小元），因此 ΦL（分别是 ΦR）没有最小元（分别是最大元）。接着注意到，割方程

$$\Phi\,\{L|R\} = \{\overset{\frown}{\jmath}_{\mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha})}\,\Phi L \,|\, \overset{\frown}{\jmath}_{\mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha})}\,\Phi R\}$$

化简为

$$\Phi\,\{L|R\} = \{\Phi L | \Phi R\}.$$

考虑$\mathbf{x}$的割表示 $(\{0\} \cup \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{x^L}, \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{x^R})$ 的 $\dot{\omega}$. 我们可以推出我们有

$$\Phi\,\dot{\omega}^{x} = \{\mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}) + \Phi(0), \Phi(\mathbb{R}^{>})\,\Xi_{\mathbf{Mo}}\,x_L \,|\, \Phi(\mathbb{R}^{>})\,\Xi_{\mathbf{Mo}}\,x_R\}$$

我们已经看到， Φ 是 $\mathbb{R}$-线性的，因此该归纳法假设给出

$$\begin{aligned} \Phi\,\dot{\omega}^{x} &= \{\mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}), \mathbb{R}^{>}\Phi\,\dot{\omega}^{x_L} | \mathbb{R}^{>}\Phi\,\dot{\omega}^{x_R}\} \\ &= \{\mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}), \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{\alpha\dot{+}x_L} | \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{\alpha\dot{+}x_R}\} \\ &= \{\mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{\alpha_L}, \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{\alpha\dot{+}x_L} | \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{\alpha\dot{+}x_R}\} \quad \text{since } \mathbb{R}^{>}\omega^{\alpha_L} \text{ and } \mathbf{No}(\dot{\omega}^{\alpha}) \text{ are mutually cofinal} \\ &= \{\mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{(\alpha\dot{+}x)_L} | \mathbb{R}^{>}\dot{\omega}^{(\alpha\dot{+}x)_R}\} \\ &= \dot{\omega}^{\alpha\dot{+}x}. \end{aligned}$$

我们因此有：

$$\mathbf{No}_{>}^{\prec\alpha} \prec \mathbf{Mo} = \mathbf{Mo} \prec \mathbf{No}^{\sqsupseteq\alpha}.$$

在特别是 Φ 保持单项式。

设 $\mathrm{x} = \sum \mathrm{x}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{m}$ 为一个数，并将其视为 $\mathbb{R}[[\mathrm{Mo}]]_{\mathbf{On}}$中的级数。根据我们之前的论证，数 $\mathrm{y} = \sum \mathrm{x}_{\mathfrak{m}}\, \Phi\mathfrak{m}$ 是良定义的。对于所有 $\mathfrak{n} \in \mathrm{Mo}$，我们记 $\mathrm{x}_{>\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{m}>\mathfrak{n}} \mathrm{x}_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{m}$，且 $\mathrm{y}_{>\Phi\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{m}>\mathfrak{n}} \mathrm{x}_{\mathfrak{m}}\, \Phi\mathfrak{m}$。我们对 $(\operatorname{supp} \mathrm{x} >)$ 的序型 $\mathrm{l}_{\mathbf{Mo}}(\mathrm{x})$进行归纳，证明 $\mathrm{y} = \Phi\mathrm{x}$；这便完成了证明。由 Φ的可加性和 $\mathbb{R}$-线性，$\mathrm{l}_{\mathbf{Mo}}(\mathrm{x}) < \omega$时结论成立。若 $\mathrm{l}_{\mathbf{Mo}}(\mathrm{x})$ 是无限后继序型，则 $\operatorname{supp}\mathrm{x}$ 有一个最小元 $\mathfrak{m}_x$，且 $\mathrm{x} = \mathrm{x}_{>\mathfrak{m}_x} + \mathrm{x}_{\mathfrak{m}_x}\mathfrak{m}_x$，因此

$$\begin{aligned}
\Phi x &= \Phi x_{>\mathfrak{m}_x} + \Phi(x_{\mathfrak{m}_x}\mathfrak{m}_x) \\
&= \left\{ \sum_{\mathfrak{m}>\mathfrak{m}_x} x_{\mathfrak{m}}\, \Phi\mathfrak{m} \right\} + x_{\mathfrak{m}_x}\, \Phi\mathfrak{m}_x \\
&= y.
\end{aligned}$$

假设 现在 $l_{\mathbf{Mo}}(x)$ 是 一个 无限 极限序数。 由于 Φ 是 严格 递增 且 单项式保持， [24, 引理 5.3]得出

$$\begin{aligned}
x &= \{x_{>\mathfrak{n}} + (x_{\mathfrak{n}} - 2^{-\mathbb{N}})\, \mathfrak{n} \,|\, x_{>\mathfrak{n}} + (x_{\mathfrak{n}} + 2^{-\mathbb{N}})\, \mathfrak{n}\}, \\
y &= \{y_{>\Phi\mathfrak{n}} + (x_{\mathfrak{n}} - 2^{-\mathbb{N}})\, \Phi\mathfrak{n} \,|\, y_{>\Phi\mathfrak{n}} + (x_{\mathfrak{n}} + 2^{-\mathbb{N}})\, \Phi\mathfrak{n}\},
\end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{n}$ 的取值范围 遍历 $\operatorname{supp} x$。 注意， 上面表示式中的（分别为左、右）选项 对 x 的表示没有最大元（分别为最小元），所以

$$\Phi x = \{\Phi x_{>\mathfrak{n}} + \Phi((x_{\mathfrak{n}} - 2^{-\mathbb{N}})\, \mathfrak{n}) \,|\, \Phi x_{>\mathfrak{n}} + \Phi((x_{\mathfrak{n}} + 2^{-\mathbb{N}})\, \mathfrak{n})\}.$$

我们的归纳假设推出

$$\begin{aligned}
\Phi x &= \{y_{>\Phi\mathfrak{n}} + (x_{\mathfrak{n}} - 2^{-\mathbb{N}})\, \Phi\mathfrak{n} \,|\, y_{>\Phi\mathfrak{n}} + (x_{\mathfrak{n}} + 2^{-\mathbb{N}})\, \Phi\mathfrak{n}\} \\
&= y.
\end{aligned}$$

这 完成了 该证明。 □

命题 7.4. 对于 $\alpha \in$**在**， 我们 有

$$\mathbf{No}_{>}^{\prec\alpha} = \mathbb{R}[[\dot{\omega}^{\mathbf{No}^{\sqsupseteq\alpha}}]]_{\mathbf{On}}.$$

特别地，超现实数类$_{>}^{\prec\alpha}$ 是 一个 非-幺半 子环， 属于 **超现实数类**， 并且

$$\mathbf{Fix}_{\mathbf{No}_{>}} = \mathbb{R}[[\dot{\omega}^{\mathbf{No}^{>,>}}]]_{\mathbf{On}}.$$

证明。 的强 线性 性与 以及 关系 **超现实数类**$_{>}^{\prec\alpha} \prec \mathbf{Mo} = \mathbf{Mo} \prec$**超现实数类**$^{\sqsupseteq\alpha}$给出

$$\begin{aligned}
\mathbf{No}_{>}^{\prec\alpha} &= \Xi_{\mathbf{No}_{>}^{\prec\alpha}}\, \mathbb{R}[[\mathbf{Mo}]]_{\mathbf{On}} \\
&= \mathbb{R}[[\Xi_{\mathbf{No}_{>}^{\prec\alpha}}\, \mathbf{Mo}]]_{\mathbf{On}} \\
&= \mathbb{R}[[\mathbf{Mo} \prec \mathbf{No}^{\sqsupseteq\alpha}]]_{\mathbf{On}} \\
&= \mathbb{R}[[\dot{\omega}^{\mathbf{No}^{\sqsupseteq\alpha}}]]_{\mathbf{On}}.
\end{aligned}$$

这构成一个（非-幺）子环这一点可由以下事实推出：超现实数类$_{>}^{\sqsupseteq\alpha} = (\alpha_L \,|\, \emptyset)$ 在加法下封闭，因此 $\dot{\omega}^{\text{超现实数类}^{\sqsupseteq\alpha}}$ 在乘法下封闭。□

7.3 作用 于伸缩变换

在本小节中， M 是 (超现实数类$^{>}$的集合大小的子群， $\times$) 而且是 $\mathrm{Smp}^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$的定义同构。我们将区分受限子群和充裕子群。若 M是 1 + 超现实数类$^{<}$的子群，则称其为受限子群；否则称其为充裕子群。若 M是充裕的，那么给定 $\mathfrak{m} \in \mathrm{M} \setminus (1 + \text{超现实数类}^{<})$，最大值 $\mathfrak{a} = \max(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{-1}) > 1$ 满足 $\mathfrak{a} - 1 \geqslant 1$，这意味着 $\mathfrak{a}^{\mathbb{N}}$ 相对于 $\mathbb{R}$是共尾的。因此 $\mathcal{H} \trianglelefteq \mathcal{H}_{\mathrm{M}}$ 在超现实数类$^{>}$上，故 $\mathrm{Smp}_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}} \subseteq \mathrm{Mo}$。若 M 是受限的，则 $\mathcal{H}_{\mathrm{M}} \trianglelefteq \mathcal{H}$，所以 $\mathrm{Mo} \subseteq \mathrm{Smp}^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$。对于 $\alpha \in \mathrm{On}$，充裕乘法子群的自然例子包括 $\alpha \in \mathrm{On}$ 的超现实数类$(\varepsilon_\alpha)^{>}$，而受限乘法子群的自然例子包括 1 + 超现实数类$(\varepsilon_\alpha)^{<}$。

注 7.5. 若 M有界，则 $1/2 \notin 2^{\dot{}}$超现实数类是 $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-简单的，但相对于包含严格小于 1 的元素的 $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}[1]$， $(1/2)_R^{\geqslant} = \{1\}$并非共初。因此， $\mathrm{Smp}^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$ 在超现实数类 No$^{>}$中并不尖锐。标准单项式群 Mo 在 No$^{>}$ 和 No$^{>}$中都是尖锐的，$^{>}$ 由 [11,推论 4.17], 可知，但这一观察并不能推广到超现实数类 No$^{>}$的任意充分大的乘法子群 M。例如，若 $\mathrm{M} = \mathbb{Q}^{>} \dot{\omega}^{\mathbb{Z}\omega^{1/3}}$，则 $\dot{\omega}^{\omega^{1/2}}$是 $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-简单的，且$1 \in (\dot{\omega}^{\omega^{1/2}})_L^{\mathbf{Smp}_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}}$，但数 $\dot{\omega}^{\omega^{1/3}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{M}}[1]$严格大于 $(\dot{\omega}^{\omega^{1/2}})_L^{\mathbf{No}^{>}}$。

命题 *7.6*。假设 M 是充裕的，并且令 $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$ 作用于 *No*$^{>}$。那么，*Smp*$^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$ 的参数化 Ξ_{M} 是 *No*$^{>}$ 与 *Smp*$^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$ 之间的一个同构（。

证明。我们只需证明 Ξ_{M} 是 $(\mathrm{No}\ +) \longrightarrow (\mathrm{Smp}^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}, \times)$ 的态射。考虑单项式 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \mathrm{Mo}$，其割表示为 $(\mathrm{L}_{\mathfrak{m}}, \mathrm{R}_{\mathfrak{m}})$ 和 $(\mathrm{L}_{\mathfrak{n}}, \mathrm{R}_{\mathfrak{n}})$，满足 $\mathbb{R}\,\mathrm{L}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{Hull}(\mathrm{L}_{\mathfrak{m}}), \mathbb{R}\,\mathrm{R}_m \subseteq \mathrm{Hull}(\mathrm{R}_{\mathfrak{m}})$，对 $\mathfrak{n}$ 也同样成立。于是 [11, 命题 4.19] 得出

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = \{L_{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{n} + \mathfrak{m}\,L_{\mathfrak{n}} \mid R_{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{n}, \mathfrak{m}\,R_{\mathfrak{n}}\}.$$

给定 x，$y \in$**超现实数类**，这尤其适用于 割表示 $(\{0\} \cup \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}} x_L$， $\mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}} x_R)$属于 $\Xi_{\mathrm{M}} x$ （并且类似地对于 $\Xi_{\mathrm{M}} y$）因为 M 是充足的。因此我们有

$$\begin{aligned}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y &= \{0, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_L\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y + \Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,y_L \mid \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_R\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y, \Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,y_R\} \\ &= \{0, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_L\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y + \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y_L \mid \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_R\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y_R\}\end{aligned}$$

注意， $\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{x}\ \Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{y} > \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{x}_L\,\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{y}\ \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{x}\ \Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{y}_L$。假设 $\mathrm{x}_L \neq \emptyset$ 且 $\mathrm{y}_L \neq \emptyset$。由于 M充足，存在一个 $\mathrm{c} \in \mathrm{M}$ 使得 $\mathrm{c} \geqslant 2$。对于 $\mathrm{l}_x \in \mathrm{x}_L$、$\mathrm{l}_y \in \mathrm{y}_L$ 以及 m，$\mathrm{m}' \in \mathrm{M}$，我们有 $\mathrm{m}\ \Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{l}_x\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{y} + \mathrm{m}'\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{x}\ \Xi_{\mathrm{M}}\ \mathrm{l}_y \leqslant \max(\mathrm{c}\,\mathrm{m},\ \mathrm{c}\,\mathrm{m}')\max(\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{l}_x\Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{y}\ \Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{x}\ \Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{l}_y)$。这证明了以下关系（根据前文，当 $\mathrm{x}_L = \emptyset$ 或 $\mathrm{y}_L = \emptyset$时，该关系也成立）：

$$\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y = \{0, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_L\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y_L \mid \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_R\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y_R\}.$$

现在设 x、y 为数，满足：对于任意 a、b∈超现实数类，若 $\mathrm{a} \sqsubset \mathrm{x}$、$\mathrm{b} \sqsubset \mathrm{y}$，且 (a、b) ≠ (x、y)，则有 $\Xi_{\mathrm{M}}(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \Xi_{\mathrm{M}}\,\mathrm{a}\ \Xi_{\mathrm{M}}\mathrm{b}$。于是

$$\begin{aligned}\Xi_{\mathrm{M}}(x+y) &= \{0, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}(x_L + y), \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}(x + y_L) \mid \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}(x_R + y), \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}(x + y_R)\} \\ &= \{0, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_L\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y_L \mid \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x_R\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y, \mathrm{M}\Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y_R\} \\ &= \Xi_{\mathrm{M}}\,x\,\Xi_{\mathrm{M}}\,y.\end{aligned}$$

我们 通过 归纳法得出结论。 □

上述证明证明在.....的情况下 M是有界的，因为此时 $\Xi_{\mathrm{M}}\,1 = 2$ 且 $\Xi_{\mathrm{M}}\,2 = 3 \neq 2 \times 2$。

推论 7.7. 若 M 是 丰足的，则 该 $\mathcal{H}_{\mathrm{M}}$-简单 投影 $\pi_{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$ 是 一个 满射 态射(**超现实数类**$^{>}$, $\times$, $\leqslant$) $\longrightarrow$ (**Smp**$^{\mathcal{H}_{\mathrm{M}}}$, $\times$, $\leqslant$)。

证明。我们只需证明 $\pi_{\mathcal{H}_M}$保持乘积。给定 x、y ∈超现实数类$^>$，关系Mx y = x My 意味着 x y $=_{\mathcal{H}_M} \pi_{\mathcal{H}_M}(x)\,\pi_{\mathcal{H}_M}(y)$。命题 7.6 蕴含 $\pi_{\mathcal{H}_M}(x)\,\pi_{\mathcal{H}_M}(y)$是 $\mathcal{H}_M$-简单的，因此 $\pi_{\mathcal{H}_M}$(x y) = $\pi_{\mathcal{H}_M}(x)\,\pi_{\mathcal{H}_M}(y)$。□

命题 *7.8.* 设 $R \supseteq \mathbb{R}$ 是 (*No* +中的真凸子环，×,⩽) 且具有一个共尾子集。令 $\mathbf{M} = (\mathbf{R}^\times)^>$，并记 $\mathfrak{M}_\mathbf{R}$ 为 *Mo* 的凸子群 $M \cap$*Mo*。定义 $\mathfrak{N}_\mathbf{R}$ 为群 $Smp^{\mathcal{H}_M}$。则存在一个典范的有序赋值域强线性同构

$$\mathbf{No} \longrightarrow \mathbb{R}[[\mathfrak{M}_\mathbf{R}]]_{\mathbf{On}}[[\mathfrak{N}_\mathbf{R}]]_{\mathbf{On}}.$$

证明. 根据 [1, Page 713], , 我们只需证明 $\mathfrak{M}_\mathbf{R}$ 是 Mo 的凸子群，且满足$\mathfrak{M}_\mathbf{R} \cap \mathfrak{N}_\mathbf{R} = \{1\}$和 Mo $= \mathfrak{M}_\mathbf{R}\mathfrak{N}_\mathbf{R}$。由于 **R**具有一个共尾子集，群 **M**具有一个充足的共尾且共初子群 M，因此我们可以将前两个结果应用于 **M**。

子群的交集和凸包仍是子群，因此 $\mathfrak{M}_\mathbf{R}$ 是 Mo 的凸子群。我们断言，对于 $\mathfrak{a} \in$ Mo，有 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$，其中 $\mathfrak{n} := \pi_{\mathcal{H}_M}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{N}_\mathbf{R}$且 $\mathfrak{m} := \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}} \in \mathfrak{M}_\mathbf{R}$。事实上，作为单项式的乘积，$\mathfrak{m}$是一个单项式。此外，由推论 7.7 可得

$$\pi_{\mathcal{H}_M}(\mathfrak{m}) = \frac{\pi_{\mathcal{H}_M}(\mathfrak{a})}{\pi_{\mathcal{H}_M}(\mathfrak{n})} = \frac{\pi_{\mathcal{H}_M}(\mathfrak{a})}{\pi_{\mathcal{H}_M}(\mathfrak{a})} = 1$$

由此可得 $\mathfrak{m} \in \mathcal{H}_\mathbf{M}[1]$。这意味着存在 $r \leqslant r' \in (\mathbf{R}^\times)^>$ 满足 $r \leqslant \mathfrak{m} \leqslant r'$。换句话说，我们有 $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_\mathbf{R}$。这就结束了这个证明。□

备注 7.9。现在假设 Hull(M) 在 exp下封闭。在 [10], 中，有人根据 Conway 的 ω-映射提出了 Gonshor 对指数函数的定义的另一种形式。通过将 ω-映射替换为 Ξ_M，可以按照命题 2.12] 将该定义推广。这得到 No 上的另一种指数函数 $\exp_M$，对于该函数，(No +， ×， $\exp_M$) 是 $(\mathbb{R}, +, \times, \exp)$的初等扩张。指数函数 exp 和$\exp_M$ 在 $\mathbb{R}_M := \mathbb{R}[[\mathfrak{M}_\mathbf{R}]]_{\mathbf{On}}$上一致，但在 $\mathbb{R}_M[[\mathfrak{N}_\mathbf{R}]]_{\mathbf{On}}$上， $\exp_M$ 比 exp 增长得更快。若能了解 No 作为在 $\mathbb{R}_M$ 上的广义级数 $(\mathbb{R}_M[[\mathfrak{N}_\mathbf{R}]]_{\mathbf{On}}, +, \times, \exp_M)$ 的指数域时的性质，是否类似于 $(\mathbb{R}[[\mathrm{Mo}]]_{\mathbf{On}}, +, \times, \exp)$ 在 $\mathbb{R}$上的性质，将会很有意思。

7.4 指数群

现在让我们来研究超现实数类上的 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{E}^*$在**超现实数类**$^>$, $^>$。给定$x \in$**超现实数类**，回想一下，通常会按惯例地写作 $\lambda_x := \Xi_\mathcal{E} x$和 $\kappa_x := \Xi_{\mathcal{E}^*} x$。

类 La $:=$ Smp$_\mathcal{E}$ 的参数化 $\lambda = \Xi_\mathcal{E}$ 最早见于 [11]。该文还证明，La 与对数原子超现实数类一致；该类由满足以下条件的数 x ∈超现实数类$^>$,$^>$ 构成：对于所有 n ∈ ℕ，均有 $\log_n$x ∈Mo。这些数对于在超现实数类 No 上定义良好的形式导子至关重要。此项工作最早于 [11], 完成，并以超幂级数背景下的类似结果 [38, 26] 为基础。

κ-数的结构 $\mathbf{K} :=$ Smp$_{\mathcal{E}^*}$ 于 [30], 引入并得到详细研究，它是基本单项式与对数原子数之间的一个中间子类。事实证明，结构 **K** 不够庞大，无法描述所有对数原子数。事实上， [35] 中指出，作为 [3, 命题 2.5] 的推论， $\mathbf{K} =$ La $\prec$超现实数类$^>$。

命题 7.10. [3, 命题 2.5] 对于所有$x \in$**超现实数类**，我们有

$$\exp(\lambda_x) \;=\; \lambda_{x+1}$$

证明。我们依据以下 [11, 定理 3.8(1)] 的一致版本，该版本来自 [3,引理 2.4]: 如果 $\mathfrak{m}=\{\mathrm{L}\,|\mathrm{R}\}$ 是一个单项式，其中 $\mathbb{R}\,\mathrm{L}\subseteq\mathrm{Hull}(\mathrm{L})$ 和 $\mathbb{R}\,\mathrm{R}\subseteq\mathrm{Hull}(\mathrm{R})$，那么

$$\exp(\mathfrak{m})=\{\mathfrak{m}^{\mathbb{N}},\exp(L)\,|\exp(R)\}.$$

实际上，我们在 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{E}<\{\exp\}$ 上**超现实数类**$^{>}$，$^{\succ}$，所以 $\exp(\mathfrak{m})>\mathcal{E}\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{m}^{\mathbb{N}}$，并且

$$\exp(\mathfrak{m})=\{\mathcal{E}\mathfrak{m},\exp(L)\,|\exp(R)\}. \tag{7.1}$$

现在设x是一个超现实数类，满足 $\lambda_{u+1}=\exp(\lambda_u)$ 对所有$u\in x^{\sqsubset}$。那么$x+1=\{x,\ x_L+1\,|\,x_R+1\}$。该一致性的该割方程对于该 λ-映射因此给出

$$\begin{aligned}
\lambda_{x+1} &= \{\mathcal{E}\lambda_x,\mathcal{E}\lambda_{x_L+1}\,|\,\mathcal{E}\lambda_{x_R+1}\}\\
&= \{\mathcal{E}\lambda_x,\mathcal{E}\exp(\lambda_{x_L})\,|\,\mathcal{E}\exp(\lambda_{x_R})\}\\
&= \{\mathcal{E}\lambda_x,\exp\circ\mathcal{E}\lambda_{x_L}\,|\exp\circ\mathcal{E}\lambda_{x_R}\} && (\text{since } \exp\circ\mathcal{E}=\mathcal{E}\circ\exp)\\
&= \exp\lambda_x && (\text{by } (7.1))
\end{aligned}$$

该结果可通过 归纳法得出。 □

推论 7.11. [11] $\mathbf{Smp}_{\mathcal{E}}$ 与.....一致 的是 所有 对数函数-原子的 超现实 数。

证明。 我们 $\log_n\lambda_x=\lambda_{x-n}\in\mathbf{La}$对于 所有 $n\in\mathbb{N}$，由此 $\log_n\mathbf{La}\subseteq\mathbf{La}\subseteq\mathbf{Mo}$。这 表明 每个元素 属于 **La** 都是 对数函数-原子的。

反过来，设 λ是一个对数原子数，并假设 $\lambda\notin\mathrm{La}$。注意，根据我们之前的论证，$\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)$是对数原子的。例如，假设 $\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)<\lambda$。对于 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$，我们有 $\log_n\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)\neq\log_n\lambda$。由于 $\log_n\lambda$和 $\log_n\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)$都是单项式，因此可得$\log_n\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)<\log_n\lambda$。由此我们推得 $(\exp_n\circ\mathcal{H}\circ\log_n)(\pi_{\mathcal{E}}(\lambda))<\lambda$，进而得到 $\mathcal{E}\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)<\lambda$，这与定义关系 $\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)=_{\mathcal{E}}\lambda$矛盾。同样， $\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)>\lambda$也是不可能的。我们由此得出 $\lambda=\pi_{\mathcal{E}}(\lambda)\in\mathrm{Smp}_{\mathcal{E}}$。□

命题 7.12. [35] 我们有 $\mathbf{K}=\mathbf{La}\prec$**超现实数类**$^{>}$。

证明： 根据Mantova-Matusinski，我们有以下等价关系适用于任意数 $\mathrm{x}\in$**超现实数类**:

$$\begin{aligned}
x\in\mathbf{No}_{>} &\iff x_L+\mathbb{N}<x<x_R-\mathbb{N}\\
&\iff \exp_{\mathbb{N}}(\lambda_{x_L})<\lambda_x<\log_{\mathbb{N}}(\lambda_{x_R})\\
&\iff \exp_{\mathbb{N}}(\mathcal{E}\lambda_{x_L})<\lambda_x<\log_{\mathbb{N}}(\mathcal{E}\lambda_{x_R})\\
&\iff \mathcal{E}^*(\lambda_{x_L})<\lambda_x<\mathcal{E}^*(\lambda_{x_R})\\
&\iff \lambda_x\in\mathbf{K}.
\end{aligned}$$

□

推论 7.13. **K**在超现实数类中是**尖锐**$^{>}$，$^{\succ}$。

证明。设 $\kappa\in\mathrm{K}$、$\kappa'\in\kappa_L^{\mathbf{K}}$ 和 $\kappa''\in\kappa_R^{\mathbf{K}}$。存在唯一的数 θ、θ'、$\theta''\in$超现实数类$^{>}$，使得 $\kappa=\lambda_\theta$、$\kappa'=\lambda_{\theta'}$ 和 $\kappa''=\lambda_{\theta''}$。设 $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$。我们有 $\theta>\theta'+\mathbb{N}$和 $\theta'+\mathrm{n}=\{\theta'_L+\mathrm{n}\ \theta'+\mathrm{n}_L\,|\,\theta'_R+\mathrm{n}\}$，其中

$$\theta_R+n>\theta>\theta'+n>\theta'_L+n\cup\theta'+n_L,$$

因此$\theta\sqsupseteq\theta'+n$。我们推断出$\exp_{\mathbb{N}}(\kappa')=\lambda_{\theta'+\mathbb{N}}\sqsubseteq\kappa$。对称的论证可得$\log_{\mathbb{N}}(\kappa'')=\lambda_{\theta''-\mathbb{N}}\sqsubseteq\kappa$。由于 $\exp_{\mathbb{N}}(\kappa')$在中共尾于 $\mathcal{E}^*[\kappa']$且 $\log_{\mathbb{N}}(\kappa'')$在中共初于 $\mathcal{E}^*[\kappa'']$，这证明了$\mathbf{K}=\mathbf{Smp}_{\mathcal{E}^*}$是尖锐的。□

另一方面，，该类**La** 并不尖锐：

命题7.14. 结构 La 在 超现实数类 中并非 尖锐 **超现实数类**$^{>,\ >}$。

证明。 给定 $r\in\mathbb{R}^{>}$和 $x\in$**超现实数类**$^{>,\ >}$，我们 有

$$x^{e^r} \;=\; (\exp_2\circ T_r\circ\log_2)(x) \;<\; (\exp_3\circ T_2\circ\log_3)(x).$$

我们推得元素 $(\exp_3\circ \mathrm{T}_2\circ\log_3)(\omega)$的 $\mathcal{E}[\omega]$是 $\dot{\omega}\mathrm{e}^{\mathbb{R}^{>}}$的严格上界，因而也是 $\dot{\omega}^{\mathbb{N}}$的严格上界。注意 $\lambda_1=\dot{\omega}^{\omega}$，所以 $\dot{\omega}^{\mathbb{N}}$在 $(\lambda_1)_L$中共尾。我们有 $(\lambda_1)_L^{\mathbf{La}}=\{\lambda_0\}=\{\omega\}$，所以 $(\lambda_1)_L$在 $\mathcal{E}[(\lambda_1)_L^{\mathbf{La}}]$中不共尾。这意味着 La 的定义分划并不尖锐。 □

8 嵌套的超现实 数

8.1 嵌套的超幂级数 和超现实 数

对函数方程的广义超幂级数解的研究始于 [17, 26]。众所周知，函数方程 $\mathrm{E}(\mathrm{x}+1)=\exp \mathrm{E}(\mathrm{x})$ 的非平凡解增长速度快于任何有限次迭代的指数函数。这促使人们引入“超级级数” [17, 38, 2, 16] ，将其作为超幂级数的一种推广，使其允许超有限次迭代的指数运算和对数函数。在 [26, 第 2.7.1], 节中曾指出，以下类型的函数方程 百家乐

$$f(x) \;=\; \sqrt{x}+\mathrm{e}^{f(\log x)} \tag{8.1}$$

允许 自然 符号 解 的 该形式

$$f(x) \;=\; \sqrt{x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\log x}+\mathrm{e}^{\cdots}}}. \tag{8.2}$$

这类表达式的形式微积分需要对 Écalle 最初的理论进行第二次扩展，即引入所谓的“嵌套超幂级数”。在我们的语境中，研究这些超现实数也是很自然的。

$$y \;=\; f(\omega) \;=\; \sqrt{\omega}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\omega}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\log\omega}+\mathrm{e}^{\cdots}}} \tag{8.3}$$

它们是通过将代入 ω 到x 中而从这类广义超幂级数中获得的。更具体地，人们可能会想知道是否存在序列y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in$**超现实数类**$^{\mathbb{N}}_{>}$满足。

$$y_i \;=\; \sqrt{\log_i\omega}+\mathrm{e}^{y_{i+1}},$$

对于所有 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}$。本节将证明，这类数实际上构成一个超现实子结构。这尤其表明，形如 (8.2) 或 (8.3) 的表达式具有很大的歧义，因此在某种程度上具有误导性。

为了为诸如 (8.2) 和 (8.3) 的嵌套超幂级数和超现实数建立健全的微积分，关键在于决定哪些形式为 (8.2) 的表达式应被视为格式正确。例如，函数方程

$$g(x) \;=\; \sqrt{x}+\mathrm{e}^{g(\log x)}+\log x \tag{8.4}$$

有一个“自然的” 解

$$g(x) \;=\; \sqrt{x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log_2 x}+\mathrm{e}^{\cdots}+\log_3 x}+\log_2 x}+\log x. \tag{8.5}$$

然而，这类表达式在基本微积分运算中表现不佳。例如，（8.5）的形式导数为

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \left\{ \frac{1}{2x\sqrt{\log x}} + \frac{1}{x\log x} \right\} \mathrm{e}^{g(\log x)} + \left\{ \frac{1}{2x\log x\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{x\log x\log_2 x} \right\} \mathrm{e}^{g(\log x)}\mathrm{e}^{g(\log_2 x)} + \cdots.$$

然而，该和

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x}\mathrm{e}^{g(\log x)} + \frac{1}{x\log x\log_2 x}\mathrm{e}^{g(\log x)}\mathrm{e}^{g(\log_2 x)} + \cdots$$

不满足第 2.3 节意义下的收敛性。幸运的是，正如第 2.7 节所指出的，方程 (8.4) 是方程 (8.1) 的一个扰动，其解自然可以用 f 来表示。

上述反例促使第二作者引入了所谓超幂级数域的抽象概念 [27] ，该概念排除了像 (8.5) 这样的超幂级数。 [26], 他将组合思想加以推广，进而与他的学生 Schmeling 一同在超幂级数域上构造了导子和右复合。 [38]Berarducci 和 Mantova 构造超现实数类 No 上良定义的导子 ∂_{BM} 时，这一理论再次发挥了关键作用。事实上，他们构造中的主要要素之一，是证明 [11, 定理 8.10] ： No 按照 [27, 38]的意义是一个超幂级数域。特别是，它满足以下条件：

T4. 设 $(\mathfrak{m}_i)_{i\in\mathbb{N}} \in$ **超现实数类**$^{\mathbb{N}}$ 是 一个 单项式 序列 满足 $\mathfrak{m}_{i+1} \in \operatorname{supp}\log\mathfrak{m}_i$ 对于 所有 i。那么 存在 一个 $i_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\forall i \geqslant i_0, \quad \mathfrak{m}_{i+1} \preccurlyeq \operatorname{supp}\log\mathfrak{m}_i \ \wedge\ (\log\mathfrak{m}_i)_{\mathfrak{m}_{i+1}} \in \{-1, 1\}.$$

这一条件可以被视为对一种形式化平移，即所有超现实数都应该是“良好嵌套的”这一想法。 尤其如此，它排除了形如.....的超现实数存在的可能性

$$\sqrt{\omega} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log\omega} + \mathrm{e}^{\sqrt{\log_2\omega} + \mathrm{e}^{\iddots + \log_3\omega} + \log_2\omega}} + \log\omega.$$

8.2 可容许的序列

给定序列 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in$ **超现实数类**$^{\mathbb{N}}$ 和 $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$，让我们研究如何为赋予一个含义，对于 这类形式的表达式

$$\varphi_0 + \epsilon_0\mathrm{e}^{\varphi_1 + \epsilon_1\mathrm{e}^{\varphi_2 + \epsilon_2\mathrm{e}^{\iddots}}}. \tag{8.6}$$

在本小节中，我们首先从对下界和上界的确定开始，针对(8.6)。我们称 (φ, ϵ) 为一个有符号序列，如果

超现实子结构1. $\varphi_i \geqslant 0$ 对所有$i \geqslant 2$。
超现实子结构2. $\varphi_i = 0 \Longrightarrow \epsilon_i = 1$ 对所有$i \geqslant 2$。**超现实子结构3.** $\varphi_i > 0$ 对无穷多个 i。**超现实子结构4.** $\varphi_i \in$ **超现实数类**$_{>}$ 对所有$i \geqslant 1$。

在这种情况下，我们可以定义一个带符号的序列 $(\varphi_{\nearrow k}, \epsilon_{\nearrow k})$ 对于每个$k \in \mathbb{N}$ 通过取 $(\varphi_{\nearrow k})_i := \varphi_{k+i}$ 以及 $(\epsilon_{\nearrow k})_i := \epsilon_{k+i}$ 对所有$i \in \mathbb{N}$。

假设该 (φ,ϵ) 是一个固定的带符号的序列。对于所有i，$j\in\mathbb{N}$ 满足$i\leqslant j$，我们定义函数 Φ_i，$\Phi_{i;}$，$\Phi_{j;i}$:**超现实数类 ⟶ 超现实数类** 通过

$$\begin{aligned}\Phi_i(x) &:= \varphi_i+\epsilon_i\mathrm{e}^x.\\ \Phi_{i;}(x) &:= (\Phi_0\circ\cdots\circ\Phi_{i-1})(x) = \varphi_0+\epsilon_0\mathrm{e}^{\varphi_1+\epsilon_1\mathrm{e}^{\varphi_2+\epsilon_2\mathrm{e}^{\cdots^{\varphi_{i-1}+\epsilon_{i-1}\mathrm{e}^x}}}}\\ \Phi_{j;i}(x) &:= (\Phi_i\circ\cdots\circ\Phi_{j-1})(x) = \varphi_i+\epsilon_i\mathrm{e}^{\varphi_{i+1}+\epsilon_{i+1}\mathrm{e}^{\varphi_{i+2}+\epsilon_{i+2}\mathrm{e}^{\cdots^{\varphi_{j-1}+\epsilon_{j-1}\mathrm{e}^x}}}}.\end{aligned}$$

按照约定，我们认为，$\Phi_{0;}(x)=x$ 且 $\Phi_{j;i}(x)=x$ 当$i=j$时。

记 $\epsilon_{i;}:=\epsilon_{;i}:=\epsilon_0\cdots\epsilon_{i-1}$ 和 $\epsilon_{j;i}:=\epsilon_{i;j}:=\epsilon_i\cdots\epsilon_{j-1}$，我们注意到，如果 $\epsilon_i=1$、$\epsilon_{i;}=1$ 和 $\epsilon_{j;i}=1$ 分别成立，那么 Φ_i、$\Phi_{i;}$ 和 $\Phi_{j;i}$ 都是严格递增的；反之，则严格递减。我们将用 $\Phi_{;i}$ 和 $\Phi_{i;j}$ 表示 $\Phi_{i;}$ 和 $\Phi_{j;i}$的部分逆函数。我们还将使用以下缩写

$$\begin{aligned}x_{i;} &:= \Phi_{i;}(x) & x_{j;i} &:= \Phi_{j;i}(x)\\ x_{;i} &:= \Phi_{;i}(x) & x_{i;j} &:= \Phi_{i;j}(x).\end{aligned}$$

例如，我们有

$$x_{1;3} = \varphi_1+\epsilon_1\mathrm{e}^{\varphi_2+\epsilon_2\mathrm{e}^x}$$

对于所有x 以及

$$x_{;1} = \log\frac{x-\varphi_0}{\epsilon_0},$$

当$x\ \frac{-\varphi_0}{\epsilon_0}>0$~~时。~~对于所有$i\in\mathbb{N}$，我们接下来定义

$$\begin{aligned}L_{i;} &:= (\varphi_i-\epsilon_{;i}\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i)_{i;} & L &:= \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}L_{i;}\\ R_{i;} &:= (\varphi_i+\epsilon_{;i}\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i)_{i;} & R &:= \textstyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}R_{i;}\end{aligned}$$

我们最后定义

$$\mathbf{S} := \{x\in\mathbf{No}:\forall i\in\mathbb{N},x_{;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i\}.$$

在本节余下部分中，符号序列 (φ,ϵ) 基本上保持固定。只有在少数情况下需要改变 (φ,ϵ)，届时我们会使用下标，例如写作 $\mathbf{S}_{\varphi,\epsilon}$，而不是 $\mathbf{S}$。对于每个 $\mathrm{k}\in\mathbb{N}$，我们也记作 $\mathbf{S}_{\nearrow k}:=\mathbf{S}_{\varphi\nearrow k}$、$\epsilon_{\nearrow k}$。

引理 8.1. 若 $x\in\mathbf{S}$ 或 $x\in(L\mid 实数集)$，则 $x_{;i}$ 对所有 $i\in\mathbb{N}$均为良定义。

证明。若 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$，则 $\mathbf{S}$ 的定义隐含地假设 $\mathbf{x}_{;i}$ 对所有 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}$ 都是良定义的。若 $\mathrm{x}\in(\mathrm{L}\mid\mathrm{R})$，特别是 $\mathrm{L}<\mathrm{R}$，则我们通过对 i 使用归纳法来证明该引理。显然，当 $\mathrm{i}=0$ 时结论成立。假设 $\mathbf{x}_{;i}$ 是良定义的，令 $\mathrm{j}>\mathrm{i}$ 为满足 $\varphi_j\neq 0$ 的最小值。将 $\Phi_{;i}$ 应用于不等式

$$L_{j;}<x<R_{j;},$$

我们得到

$$\epsilon_{;i}(L_{j;})_{;i}<\epsilon_{;i}x_{;i}<\epsilon_{;i}(R_{j;})_{;i}.$$

根据定义，我们有

$$\begin{aligned}(L_{j;})_{;i} &= \varphi_i+\epsilon_i\exp_{j-i}(\varphi_j-\epsilon_{;j}\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_j)\\ (R_{j;})_{;i} &= \varphi_i+\epsilon_i\exp_{j-i}(\varphi_j+\epsilon_{;j}\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_j),\end{aligned}$$

由此

$$\epsilon_{;i+1}\exp_{j-i}(\varphi_j-\epsilon_{;j}\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_j)<\epsilon_{;i+1}\frac{x_{;i}-\varphi_i}{\epsilon_i}<\epsilon_{;i+1}\exp_{j-i}(\varphi_j+\epsilon_{;j}\,\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_j).$$

无论在 $\epsilon_{;i+1}=1$还是在 $\epsilon_{;i+1}=-1$的情况下，都可得出 $(\mathrm{x}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i$由一个超现实数的指数函数从下方界定，因此 $(\mathrm{x}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i>0$。特别地，$\mathrm{x}_{;i+1}=\log((\mathrm{x}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i)$ 是良定义的。归纳法至此完成。□

命题 8.2. 我们 有 $\mathbf{S}=(L\,|$实数集$)$。

证明。 设 $x\in\mathbf{S}$ 且 $i\in\mathbb{N}$。 如果 $\epsilon_{;i}=1$，那么 $\Phi_{i;}$是严格递增的，因此

$$\begin{aligned} L_{i;}<x<R_{i;} &\iff \varphi_i-\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i<x_{;i}<\varphi_i+\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i\\ &\iff -\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i<x_{;i}-\varphi_i<\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i\\ &\iff x_{;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i. \end{aligned}$$

否则 $\Phi_{i;}$ 是 严格递减，因此

$$\begin{aligned} L_{i;}<x<R_{i;} &\iff \varphi_i+\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i>x_{;i}>\varphi_i-\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i\\ &\iff \mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i>x_{;i}-\varphi_i>-\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i\\ &\iff x_{;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i. \end{aligned}$$

在 两种 情况下，我们 得出结论 ，$L_{i;}<x<$实数集$_{i;}$ 当且仅当 $x_{;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i$。 由于 这一等价关系对 所有 $i\in\mathbb{N}$，该 结论 得证。□

我们 称 带符号 序列 (φ,ϵ) 是 可容许的 ，如果

AS. $L<$实数集.

命题8.3. 以下陈述彼此等价。

a) (φ,ϵ) 是可容许的。*b*) $\mathbf{S}$ 是一个超现实数子结构。*c*) $\forall i\in\mathbb{N}$,
$\forall \mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\varphi_i$, $\forall j>i$ $\exists\psi\in$**超现实数类**$^{\prec\operatorname{supp}\varphi_j}$,
$\mathfrak{m}\succ(\varphi_j+\psi)_{j;i}-\varphi_i$。

证明。由前一个命题可得 b) $\Longrightarrow$ a)。如果 (φ,ϵ) 是可容许的，那么由命题 4.18(b)， $\mathbf{S}=(\mathrm{L}\,|\,\mathrm{R})$ 是一个超现实子结构。取 $\psi\in\mathbf{S}_{\nearrow j}-\varphi_j$，我们也可得到 c)。事实上，我们有 $(\varphi_j+\psi)_{j;i}-\varphi_i\in(\mathrm{S}_{\nearrow j})_{j;i}-\varphi_i\subseteq\mathrm{S}_{;i}-\varphi_i$，因此根据 S 的定义，$(\varphi_j+\psi)_{j;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i$。 $\mathbf{S}$ 的定义也给出 $\psi\prec\operatorname{supp}\varphi_j$。最后，假设 c) 成立，并证明 a)。

设 $\mathrm{i},\mathrm{j}\in\mathbb{N}$。若 $\mathrm{i}=\mathrm{j}$，则根据定义和函数 $\Phi_{i;}$ 的严格单调性，可得 $\mathrm{L}_{i;}<\mathrm{R}_{i;}$。假设 $\mathrm{i}<\mathrm{j}$。设 $\mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\varphi_i$，并考虑满足 $(\varphi_j+\psi)_{j;i}-\varphi_i\prec\mathfrak{m}$ 的 $\psi\in\mathrm{No}^{\prec\operatorname{supp}\varphi_j}$。根据 c)，这样的 ψ 存在；由命题 4.18(d)，这类数 ψ 所成的类 $\mathbf{C}_{\mathfrak{m}}$ 是一个凸超现实子结构。此外，族 $(\mathbf{C}_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\varphi_i}$ 在 $(\operatorname{supp}\varphi_i,\geqslant)$ 上递减，因此根据命题 4.18(e)，其交集非空。取 y 属于这个交集，则 $\mathrm{L}_{i;}<((\varphi_j+\mathrm{y})_{j;i})_{i;}=(\varphi_j+\mathrm{y})_{j;}$，因为 $(\varphi_j+\mathrm{y})_{j;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i$。同理，$((\varphi_j+\mathrm{y})_{j;i})_{i;}=(\varphi_j+\mathrm{y})_{j;}<\mathrm{R}^{j;}$，因为 $\mathrm{y}=(\varphi_j+\mathrm{y})-\varphi_j\prec\operatorname{supp}\varphi_j$。这表明 $\mathrm{L}_{i;}<(\varphi_j+\mathrm{y})_{j;}<\mathrm{R}^{j;}$。由对称性可知，若 $\mathrm{i}>\mathrm{j}$，也有相同结论，即 (φ,ϵ) 可采。 □

8.3 嵌套的序列

设 (φ,ϵ) 为一个固定的可容许序列。既然我们已经描述了形如 (8.6) 的表达式的下界 L 和上界 R，接下来要确定满足以下条件的元素 $\mathrm{y}\in\mathbf{S}=(\mathrm{L}\,|\,\mathrm{R})$

$$\operatorname{supp}\varphi_i\succ\frac{y_{;i}-\varphi_i}{\epsilon_i}\in\mathbf{Mo}$$

对所有$i\in\mathbb{N}$。这类元素称为嵌套的超现实数，而我们用$\mathbf{Ne}=\mathbf{Ne}_{\varphi,\,\epsilon}$关于类的嵌套的超现实数，并且相对于我们固定的可容许序列(φ,ϵ)。

事实证明，并非所有可容许序列(φ,ϵ)都会产生嵌套的超现实数类（参见下文的例子8.14）。我们称为嵌套的，当且仅当

NS. $\operatorname{supp}\varphi_i\succ e^{\mathbf{S}_{\nearrow(i+1)}}$，对于所有$i\in\mathbb{N}$。

本小节的主要目标是证明，只要(φ,ϵ)是嵌套的，Ne 就是一个超现实子结构（特别地，Ne 非空）。在下一小节中，我们将给出若干例子以及 NS 成立的充分条件。

如果满足$\varphi_1>0$或$(\varphi_1,\epsilon_1)=(0,1)$，我们就称$(\varphi,\epsilon)$是大的。注意，对于$\mathrm{i}>0$，可容许序列$(\varphi_{\nearrow i},\epsilon_{\nearrow i})$总是大的。我们先说明如何将一般情形归结为$(\varphi,\epsilon)$为大的情形。假设$(\varphi,\epsilon)$不是大的，令$(\varphi',\epsilon')$为满足$(\varphi'_0,\epsilon'_0)=(0,1)$、$(\varphi'_1,\epsilon'_1)=(-\varphi_1,-\epsilon_1)$，且对$\mathrm{i}\geqslant 2$有$\varphi'_i=\varphi_i$的大嵌套序列。假设我们知道如何证明$\mathrm{Ne}_{\varphi',\epsilon'}$是 Mo 的一个超现实子结构。记$\mathrm{S}(\mathrm{a}):=-\mathrm{a}$和$\mathrm{I}(\mathrm{a})=\mathrm{a}^{-1}$，则有$\Xi_{\mathbf{Mo}}\circ\mathrm{S}=\mathrm{I}\circ\Xi_{\mathbf{Mo}}$，因此 I 在 Mo 上诱导出一个严格递减的自-$\sqsubseteq$-嵌入。由此可知，函数$\mathrm{x}\longmapsto\mathrm{I}\circ\Xi_{\mathbf{Ne}_{\varphi',\epsilon'}}(-\mathrm{x})$是 Mo 到其自身的一个嵌入。因此，该映射的值域$(\mathrm{Ne}_{\varphi',\epsilon'})^{-1}$是一个超现实子结构，$\mathrm{Ne}=\varphi_0+\epsilon_0(\mathrm{Ne}_{\varphi',\epsilon'})^{-1}$也同样如此。

在本节的剩余部分，设(φ,ϵ)是一个固定的大型嵌套的序列。

引理 8.4. 对于x，$y\in\mathbf{S}$，有如下结论

$$(x_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1=_{\mathcal{E}}(y_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1.$$

证明。 取$i\in\mathbb{N}^{>}$为最小元，使得$\varphi_i\neq 0$。有$x_{;i}-\varphi_i$，$y_{;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i$，因此

$$\tfrac{1}{2}y_{;i}<x_{;i}<2y_{;i}$$

and

$$\exp_{i-1}y_{;i}=_{\mathcal{E}}\exp_i(\tfrac{1}{2}y_{;i})<\exp_i x_{;i}<\exp_i(2y_{;i})=_{\mathcal{E}}\exp_i y_{;i}$$

我们注意到，$(x_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1=\exp_{i-1}x_{;i}$且$(y_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1=\exp_i y_{;i}$。由凸性可知$\mathcal{E}[(y_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1]$，有$(x_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1\in\mathcal{E}[(y_{;1}-\varphi_1)/\epsilon_1]$，因此得到结论。□

引理8.5. 存在一个 - $\sqsubseteq$-嵌入

$$\Phi_{1;}:\mathbf{S}_{\nearrow 1}\cap(\varphi_1+\epsilon_1\mathbf{Mo})\longrightarrow\mathbf{S}.$$

证明。回顾一下，对于所有$\mathrm{x}\in$超现实数类，$\Phi_{1;}(\mathrm{x})=\varphi_0+\varepsilon_0\mathrm{e}^{x}$。首先证明$\mathbf{U}:=\mathbf{S}_{\nearrow 1}\cap(\varphi_1+\epsilon_1\mathrm{Mo})$是一个超现实子结构。由 NS 可知，$\mathbf{S}_{\nearrow 1}=\varphi_1+\epsilon_1\mathrm{e}^{\mathbf{S}_{\nearrow 2}}$。记$\mathbf{S}_{\nearrow 2}(\mathrm{L}_{\nearrow 2}|\mathrm{R}_{\nearrow 2})$，如同$\mathbf{S}$，注意到$\mathrm{L}_{\nearrow 2}$和$\mathrm{R}_{\nearrow 2}$分别是纯无穷数集合，且分别没有最大元和最小元。由命题 4.18(b)可得，$\mathbf{S}_{\nearrow 2}\cap$超现实数类$_{>}=(\mathrm{L}_{\nearrow 2}|\mathrm{R}_{\nearrow 2})_{\mathbf{No}_{>}}$是超现实数类$_{>}$的一个凸超现实子结构。由命题 4.18(d)，可推得$\mathbf{U}=\varphi_1+\epsilon_1\mathrm{e}^{\mathbf{S}_{\nearrow 2}\cap\text{超现实数类}_{>}}$是$\varphi_1+\epsilon_1\mathrm{Mo}^{\prec\operatorname{supp}\varphi_1}$的一个凸超现实子结构。

由命题 4.28 和 NS，函数$\mathrm{x}\longmapsto\varphi_0+\epsilon_0\mathrm{x}$是$\mathrm{e}^{\mathbf{U}}$上的$\sqsubseteq$-嵌入，因此只需证明 exp 是$\mathbf{U}$上的$\sqsubseteq$-嵌入。为此，考虑满足$\mathrm{u}\sqsubseteq\mathrm{v}$的数$\mathrm{u}$、$\mathrm{v}\in\mathbf{U}$。由于$\mathrm{u}$、$\mathrm{v}\in\varphi_1+\epsilon_1\mathrm{Mo}^{\prec\operatorname{supp}\varphi_1}$，命题 4.28 意味着$\mathrm{u}=\varphi_1+\epsilon_1\mathfrak{u}$和$\mathrm{v}=\varphi_1+\epsilon_1\mathfrak{v}$可分别表示为某些无限单项式$\mathfrak{u}$和$\mathfrak{v}$，其中$\mathfrak{u}\sqsubseteq\mathfrak{v}$。

考虑$\mathfrak{m}\in\mathbf{Mo}^{>}$。这些割$(\mathbb{R}^{>}\mathfrak{m}_L^{\mathbf{Mo}}|\mathbb{R}^{>}\mathfrak{m}_R^{\mathbf{Mo}})$和$(\mathfrak{m}_L|\mathfrak{m}_R)$是互相共尾。由(7.1)，可推出：

$$\forall\mathfrak{m}\in\mathbf{Mo}^{>},\mathrm{e}^{\mathfrak{m}}=\{\mathcal{E}\mathfrak{m},\mathcal{D}\mathrm{e}^{\mathfrak{m}_L^{\mathbf{Mo}}}\mid\mathcal{D}\mathrm{e}^{\mathfrak{m}_R^{\mathbf{Mo}}}\}.$$

命题 4。36 因此 推出 是 一个 $\sqsubseteq$-嵌入 于 $\mathcal{E}[\mathfrak{m}]\cap\mathbf{Mo}^{>}$ 对 每个 $\mathfrak{m}\in\mathbf{Mo}^{>}$。 利用 引理 8。4，我们 推得 。

在引理 8.4 之前，我们已经注意到 $\mathrm{I}:\mathrm{Mo}\longrightarrow\mathrm{Mo};\mathfrak{m}\longmapsto\mathfrak{m}^{-1}$ 是一个 $\sqsubseteq$-嵌入。由于 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$ 是单项式，因此可得 $\mathrm{e}^{\epsilon_1\mathfrak{u}}=(\mathrm{e}^{\mathfrak{u}})^{\epsilon_1}\sqsubseteq(\mathrm{e}^{\mathfrak{v}})^{\epsilon_1}=\mathrm{e}^{\epsilon_1\mathfrak{v}}$。根据 [11,命题 4.23]，，我们得出结论 $\mathrm{e}^{u}=\mathrm{e}^{\varphi_1+\epsilon_1\mathfrak{u}}\sqsubseteq\mathrm{e}^{\varphi_1+\epsilon_1\mathfrak{v}}=\mathrm{e}^{v}$。□

为了证明 Ne 是一个超现实子结构，现在让我们引入一个作用于 $\mathbf{S}$上的适当函数群 $\mathcal{G}$。在第二阶段，我们将证明 $\mathrm{Ne}=\mathrm{Smp}\mathcal{G}$。定理 6.20 随后表明 Ne 是一个超现实子结构。

引理 8。6。 给定 $x\in\mathbf{S}$ 和 $r\in\mathbb{R}^{>}$， 我们 有 $\varphi_0+r\,(x-\varphi_0)\in\mathbf{S}$。

证明。 设 $y=\varphi_0+r\,(x-\varphi_0)$。 让 我们 通过 对 i 进行 归纳法 $\in\mathbb{N}$ 证明，

$$L_{i;}<y<R_{i;}$$

且当 $\mathrm{i}\geqslant 1$ 时 $\mathrm{y}_{;i}-\mathrm{x}_{;i}\leqslant 1$。当 $\mathrm{i}=0$ 时显然成立，因此假设 $\mathrm{i}>0$。如果 $\mathrm{i}=1$，那么 $\mathrm{y}_{;i}-\mathrm{x}_{;i}=\log\mathrm{r}\leqslant 1$。如果 $\mathrm{i}>1$，则由归纳假设可得

$$y_{;i}-x_{;i}=\log\frac{y_{;i-1}-\varphi_{i-1}}{x_{;i-1}-\varphi_{i-1}}=\log\left(1+\frac{y_{;i-1}-x_{;i-1}}{x_{;i-1}-\varphi_{i-1}}\right)=\log(1+o(1))=o(1)\leqslant 1.$$

根据 **NS**， 我们 还 有 $\operatorname{supp}\varphi_i>\mathrm{e}^{x_{;i+1}}$， 从而

$$\varphi_i-\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i<\varphi_i+\epsilon_i\mathrm{e}^{x_{;i+1}}<\varphi_i+\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i.$$

我们 根据 $\operatorname{supp}\varphi_i>1$ 由 **SS4**得到。 由于 $y_{;i}=x_{;i}+O(1)=\varphi_i+\epsilon_i\mathrm{e}^{x_{;i+1}}+O(1)$， 这 意味着

$$\varphi_i-\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i<y_{;i}<\varphi_i+\mathbb{R}^{>}\operatorname{supp}\varphi_i.$$

应用 $\Phi_{i;}$， 我们 得出 $L_{i;}<y<R_{i;}$， 这 完成了 我们的 归纳法 证明 。 □

该 引理 表明 $\mathbf{S}_{\nearrow i}-\varphi_i$ 在 作用下 对 的 $\mathcal{H}$对 所有 $i\in\mathbb{N}$均 成立。这 使我们 能够定义 一个 严格 递增 双射

$$\Psi_{i,r}:\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{S};x\longmapsto(\varphi_i+r\,(x_{;i}-\varphi_i))_{i;}$$

对于所有$i\in\mathbb{N}$ and$r\in\mathbb{R}^{>}$。我们取

$$\mathcal{G}:=\langle\Psi_{i,r}:r\in\mathbb{R}^{>},i\in\mathbb{N}\rangle$$

为由这些函数生成的函数群。通常，我们将 $\mathcal{G}_{\nearrow i}$ 用于通过对应用此定义所得的函数群，而不是 (φ,ϵ)。

引理8.7。给定$x\in\mathbf{S}$，我们有：

a) 对于每个 $i>0$，集合 $\Psi_{i,\mathbb{R}^{>}}(x)$ 包含 $\Psi_{i-1,\mathbb{R}^{>}}(x)$的严格上界和下界。*b)* 集合 $\{\Psi_{i,r}(x):r\in\mathbb{R}^{>}、i\in\mathbb{N}、i>j\}$在 $\mathcal{G}[x]$ 中对于所有 $j\in\mathbb{N}$都是共尾且共初的。*c)* 对于 $y\in\mathcal{G}[x]$，，我们有 $\varphi_0+\epsilon_0\partial_{y-\varphi_0}\in\mathcal{G}[x]$，，由此 $\mathcal{G}[x]^{\bullet}\in\varphi_0+\epsilon_0 Mo$。*d)* $(\mathcal{G}_{\nearrow 1}[x_{;1}])_{1;}=\mathcal{G}[x]$。*e)* $\mathcal{G}[x]^{\bullet}_{;1}=\mathcal{G}_{\nearrow 1}[x_{;1}]^{\bullet}$。

证明。

a) 该数$x_{;i+1}$为正无穷大，因此我们有

$$\varphi_i+2^{-\epsilon_i}(x_{;i}-\varphi_i)+\mathbb{Z}<x_{;i}<\varphi_i+2^{\epsilon_i}(x_{;i}-\varphi_i)+\mathbb{Z},$$

由此

$$e^{\varphi_i+2^{-\epsilon_i}(x_{;i}-\varphi_i)}\prec e^{x_{;i}}\prec e^{\varphi_i+2^{\epsilon_i}(x_{;i}-\varphi_i)}.$$

如果 $\epsilon_{i-1}=1$，那么它就可以推出

$$\varphi_{i-1}+e^{\varphi_i+2^{-\epsilon_i}(x_{;i}-\varphi_i)}<\varphi_{i-1}+\mathbb{R}^{>}e^{x_{;i}}<\varphi_{i-1}+e^{\varphi_i+2^{\epsilon_i}(x_{;i}-\varphi_i)}.$$

应用 $\Phi_{i-1;}$，我们得到

$$\Psi_{i,2^{-\epsilon_i}}(x)<\Psi_{i-1,\mathbb{R}^{>}}(x)<\Psi_{i,2^{\epsilon_i}}(x).$$

如果 $\epsilon_{i-1}=1$，那么类似的推理会得出

$$\Psi_{i,2^{\epsilon_i}}(x)<\Psi_{i-1,\mathbb{R}^{>}}(x)<\Psi_{i,2^{-\epsilon_i}}(x).$$

在两种情况下，这表明 $\Psi_{i,\ \mathbb{R}^{>}}(x)$ 包含严格的上和下界对$\Psi_{i,\ \mathbb{R}^{>}}(x)$。

b) 通过对 $\mathrm{j}\in\mathbb{N}$ 进行归纳法，我们证明 $\Psi_{j,\mathbb{R}^{>}}$ 关于 $\mathcal{G}_{<j}:=\langle\Psi_{i,r}:\mathrm{i}<\mathrm{j},\ \mathrm{r}\in\mathbb{R}^{>}\rangle\subseteq\mathcal{G}$ 严格共尾且共初。注意 $\mathcal{G}_{<0}=\{\mathrm{id}_{\mathbf{S}}\}$。鉴于 a)，这显然对 $\mathrm{j}=0$ 成立。

假设该命题对于给定的 $\mathrm{j}\in\mathbb{N}$成立，我们首先证明 $\Psi_{j,\mathbb{R}^{>}}$ 关于 $\mathcal{G}_{\leqslant\mathrm{j}}:=\mathcal{G}_{<j+1}$ 是共尾的。给定满足$\gamma_1,\ldots,\gamma_l\in\mathcal{G}_{<j}$的 $\mathrm{x}'=(\Psi_{j,r_1}\circ\gamma_1\circ\cdots\circ\Psi_{j,r_l}\circ\gamma_l)(\mathrm{x})$，我们必须证明存在某个 $\mathrm{s}\in\mathbb{R}^{>}$，使得 $\mathrm{x}'<\Psi_{j,s}(\mathrm{x})$。利用关于 l 的第二次归纳法，我们可以找到一个 $\mathrm{s}'\in\mathbb{R}^{>}$，使得 $\mathrm{y}:=(\Psi_{j,r_2}\circ\gamma_2\circ\cdots\circ\Psi_{j,r_l}\circ\gamma_l)(\mathrm{x})<\Psi_{j,s'}(\mathrm{x})$。利用关于 j 的归纳假设，可得对于某个 $\mathrm{t}\in\mathbb{R}^{>}$，有 $\gamma_1(\mathrm{y})<\Psi_{j,t}(\mathrm{y})<\Psi_{j,s't}(\mathrm{x})$，因此 $\mathrm{x}'=\Psi_{j,r_1}(\gamma_1(\mathrm{y}))<\Psi_{j,r_1}\mathrm{s}'\mathrm{t}(\mathrm{x})$。

类似地，可以证明，$\Psi_{j,\mathbb{R}^{>}}$ 关于 $\mathcal{G}_{\leqslant j}$ 是严格共初的。对于 $\mathrm{i}=\mathrm{j}+1$ 应用 a)，还可以推出 $\Psi_{j+1,\mathbb{R}^{>}}$ 关于 $\mathcal{G}_{<j+1}$ 是严格共初的。由归纳法得证。

c）我们有 $\varphi_0+\mathbb{R}^{>}(y-\varphi_0)\subseteq\mathcal{G}[x]$,由此可得 $\varphi_0+\epsilon_0\mathfrak{d}_{y-\varphi_0}\in\mathbf{Hull}(\varphi_0+\mathbb{R}^{>}(y-\varphi_0))\subseteq\mathcal{G}[x]$。

d）应用*b*）于$j=0$得到 $\mathcal{G}[x]:=\mathbf{Hull}(\Psi_{i,\mathbb{R}^{>}}(x):i\geqslant 1)$。因此，

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}_{\nearrow 1}[x_{;1}])_{1;} &= \mathbf{Hull}(((\varphi_{i+1}+\mathbb{R}^{>}(x_{;(i+1)}-\varphi_{i+1}))_{i+1;1})_{1;}:i\geqslant 0)\\ &= \mathbf{Hull}(\Psi_{i,\mathbb{R}^{>}}(x):i\geqslant 1)\\ &= \mathcal{G}[x].\end{aligned}$$

e) 设 $\mathrm{a}=\mathcal{G}[\mathrm{x}]^{\bullet}$，$\mathrm{b}=\mathcal{G}_{\nearrow 1}[\mathrm{x}_{;1}]^{\bullet}$。由 d) 可知，$\mathrm{b}\sqsubseteq\mathrm{a}_{;1}$，因此引理 8.5 蕴含 $\mathrm{b}_{1;}\sqsubseteq(\mathrm{a}_{;1})_{1;}=\mathrm{a}$。由于 $\mathrm{b}_{1;}\in\mathcal{G}[\mathrm{x}],$，故 $\mathrm{a}\sqsubseteq\mathrm{b}_{1;}\sqsubseteq\mathrm{a}$，进而 $\mathrm{a}=\mathrm{b}_{1;}$。□

定理 8。8。 实数集 类 **Ne** 是 一个 超现实数子结构。

证明。首先证明，每个满足 $\mathrm{x}\in\mathbf{S}$ 的光环的根 $\mathrm{a}=\mathcal{G}[\mathrm{x}]^{\bullet}$ 都是一个嵌套单项式。事实上，根据引理 8.7(e)，对 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}$ 进行归纳可得，对于所有 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}$，$\mathrm{a}_{;i}=\mathcal{G}_{\nearrow i}[\mathrm{x}_{;i}]^{\bullet}$。结合引理 8.7(c)，可得对于所有 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}$，$(\mathrm{a}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i\in\mathrm{Mo}$，正如所需。

为了得出 Ne 与超现实子结构 $\mathrm{Smp}_{\mathcal{G}}$ 相一致的结论，还需要证明每个光环至多包含一个嵌套单项式。给定 Ne 中的 $\mathrm{a}<\mathrm{b}$，只需证明 $\mathcal{G}[\mathrm{a}]<\mathrm{b}$。令 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}\ \mathrm{and}\ \mathrm{r}\in\mathbb{R}^{>}$。若 $\epsilon_{;i+1}=1$，则 $\epsilon_{;i}=\epsilon_i$ 且 $(\mathrm{a}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i<(\mathrm{b}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i$。这些都是单项式，因此 $\mathbb{R}^{>}(\mathrm{a}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i<(\mathrm{b}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i$，由此得到 $\Psi_{i,\mathbb{R}^{>}}(\mathrm{a})<\mathrm{b}$。同样，若 $\epsilon_{;i+1}=-1$，则 $(\mathrm{b}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i<\mathbb{R}^{>}(\mathrm{a}_{;i}-\varphi_i)/\epsilon_i$，由此再次得到 $\Psi_{i,\mathbb{R}^{>}}(\mathrm{a})<\mathrm{b}$。利用引理 8.7(b)，我们得出 $\mathcal{G}[\mathrm{a}]<\mathrm{b}$。□

8.4 嵌套性 的充分 条件

设 (φ,ϵ) 为一个带符号的序列。 对于条件 **AS** 和**NS** ，可能并不容易针对 (φ,ϵ)进行检验。我们来介绍一些更强的充分条件，这些条件**可以推出 AS** 和 **NS**。

命题 8.9. 设 (φ,ϵ) 是 一个 带符号 序列 使得 满足

$$\forall i>0,\forall j>i,\forall \psi\in \mathbf{No}^{<\operatorname{supp}\varphi_j},\quad (\varphi_j+\psi)_{j;i}-\varphi_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i.$$

那么 (φ,ϵ) 是 一个 嵌套的 序列。

证明。该条件显然蕴含命题 8.3(c) 中的条件，而后者等价于 AS。给定 $\mathrm{i}\in\mathbb{N}$，接下来我们证明 $\operatorname{supp}\varphi_i>\mathrm{e}^{\mathbf{S}_{\nearrow(i+1)}}$。令满足$\varphi_j\neq 0$的最小 $\mathrm{j}>\mathrm{i}$。给定 $\xi\in\mathbf{S}_{\nearrow(i+1)}$ 和 $\psi:=\log_{j-(i+1)}\xi\in\mathbf{S}_{\nearrow j}$，我们得到 $\psi\prec\operatorname{supp}\varphi_j$，因此 $\mathrm{e}^{\xi}=(\psi_{j;i}-\varphi_i)/\epsilon_i\prec\operatorname{supp}\varphi_i$。□

例 8.10. 该 命题 尤其 适用于 引言 中 的 带符号 序列 (φ,ϵ)，其中 满足 $\varphi_i=\sqrt{\log_i\omega}$且 $\epsilon_i=1$对于 所有 $i\in\mathbb{N}$均成立。

例 8.11. 该 命题 也 适用于 任意 满足 (φ,ϵ)且 $\varphi_{2i}=0$以及 $\epsilon_{2i}=1$对 $i\in\mathbb{N}$ 且 $\varphi_{2i-1}=\log_{3i}\omega$对 $i>0$。

给定一个满足适当条件 NS* （见下文）的符号序列 (φ,ϵ)，Schmeling 构造了一个包含相应嵌套超幂级数 [38, 的超幂级数域（第 2 节）。5]。沿着 [29, 第 6] 页和 [12, 第 14], 页的思路，我们猜想每个超幂级数域都可以嵌入超现实数类 No 中。作为证明这一猜想的研究计划的一部分，我们再提出两个涉及嵌套超幂级数的更具体的猜想。

猜想 8.12。 设 (φ,ϵ) 是 一个 带符号的 序列 ，满足 以下 条件 成立 ：

NS*. $\forall i>0,\ \forall \mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\varphi_i,\ \exists j>i,\ \forall\psi\in\mathbf{No}_{>}^{<\operatorname{supp}\varphi_j},\ (\varphi_j+\psi)_{j;i}-\varphi_i\prec\mathfrak{m}.$

那么 (φ,ϵ) 是 一个 嵌套的 序列。

例 8.13. 该 条件 **NS*** 对于 序列 $((\log_i\omega)_{i\in\mathbb{N}^>},((-1)^i)_{i\in\mathbb{N}^>})$，该条件并不 满足 命题 8.9中的条件。 它 也 满足 于

$$\varphi_0=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{e}^{\sqrt{\omega}-\mathrm{e}^{\sqrt{\log\omega}+\mathrm{e}^{\cdots^{\sqrt{\log_k\omega}}}}},$$

$\epsilon_0=-1$且 $\epsilon_i=1$，$\varphi_i=\sqrt{\log_i\omega}$对于所有$i>0$。该序列也不满足命题的要求，命题8.9。

让我们以一个满足AS但不满足NS的 (φ,ϵ) 有符号序列**的**反例来**结束**。

例8.14。考虑由嵌套的序列 $((\sqrt{\log_i\omega})_{i\in\mathbb{N}},(1)_{i\in\mathbb{N}})$ 所得到的形式为的嵌套的数数

$$x=\sqrt{\omega}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log\omega}+\mathrm{e}^{\sqrt{\log_2\omega}+\mathrm{e}^{\cdots}}}.$$

给定这样一个数 x，我们定义 $(\varphi_0,\epsilon_0):=(\mathrm{x}-\sqrt{\omega},1)$ 以及 $(\varphi_i,1):=(\sqrt{\log_i\omega},1)$ 对所有$\mathrm{i}\in\mathbb{N}$。 根据定义，$(\varphi_{\nearrow 1},\epsilon_{\nearrow 1})$是嵌套的，因此存在 $\mathrm{u}\in\mathrm{Ne}_{\nearrow 1}$，使得 $\mathrm{u}<\log(\mathrm{x}-\sqrt{\omega})$。数 $\varphi_0+\mathrm{e}^u$属于$\mathbb{Ne}$，因此序列 (φ,ϵ)是可容许的。然而，我们有 $\mathrm{e}^v=\varphi_0$，因此 $\mathrm{e}^v\not\prec\operatorname{supp}\varphi_0$。这意味着 $\varphi_0+\mathrm{e}^v$不属于 $\mathbf{S}$，因此 (φ,ϵ)不是嵌套的。

甚至存在 满足条件的 序列 (φ,ϵ)满足$\mathbf{Ne}=\emptyset$。 然而，我们猜想：

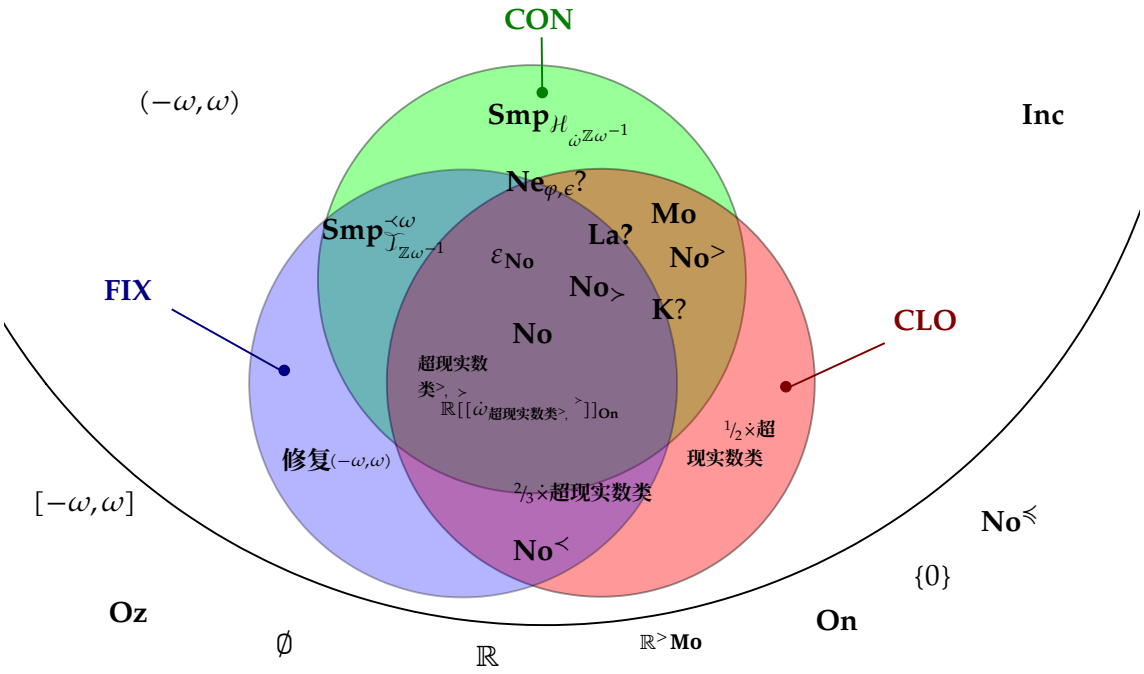

图 A.1： 超现实子结构领域的一瞥。

猜想8。15。 对于每个满足条件的序列 (φ,ϵ)，存在 一个$k\in\mathbb{N}$ 使得 $(\varphi_{\nearrow k},\epsilon_{\nearrow k})$是嵌套的。

我们在猜想 8.12 和 8.15 方面取得了良好进展。在超级级数这一更一般的框架下，我们计划在即将发表的论文中报告这方面的成果。

附录 A 超现实子结构图谱

我们遇到了几类超现实子结构：区间和凸超现实子结构、 $\sqsubseteq$-终段子结构、不动点结构，以及通过凸分划或群作用得到的结构。这些不同的超现实子结构族之间存在非平凡交集。图 A.1 展示了由此形成的领域概貌。我们采用了以下标准进行分类：

- 超现实子结构位于大圆上。
- **超现实数类**-闭的超现实子结构位于最右侧的较小圆内（CLO）。
- 通过 超现实数类的 凸子类 的 凸分划 得到的 **结构位于** 中间偏上较小的圆(CON)。
- 不动点 的 结构位于 最左侧 较小的 圆 (**FIX**)。

图 A.1 中所有表示的类都满足这样一个性质：它们的非空割都是有根的，而其他简单类（如超现实数类 No $\dotplus 1$）则不具备这一性质。等价地说，它们都唯一地与 No 的某个初始子类 $\sqsubseteq$ 同构 $(\leqslant,\sqsubseteq)$。

问号表示我们不知道 La 和 **K** 是否可视为不动点结构。$\mathrm{Ne}_{\varphi,\epsilon}$ 的性质可能随 (φ,ϵ) 而变化；我们假设 (φ,ϵ) 是嵌套的。类 La 是 No-闭的，但这一结果并非显而易见。我们通过计算对数原子数的符号序列推导出了这一结果，但计算过程过于冗长，无法在此呈现。

$\mathbf{S}$	$\mathbf{No}$	$\mathbf{No}^{>}$	超现实数类$^{>}$, $_{>}$	$\mathbf{S}_{\varphi,\epsilon}$
$\mathbf{\Pi}[x], x\in\mathbf{S}$	$\mathbf{Hull}(x+\mathbb{Z})$	$\mathbf{Hull}(\mathbb{R}^{>}x)$	$\mathbf{Hull}(\exp_{\mathbb{Z}}(x))$	$\mathbf{Hull}((\mathbb{R}^{>}x_{;i})_{i;}:i\in\mathbb{N}^{>})$
$\mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$	$\mathbf{No}_{\succ}$	$\mathbf{Mo}$	$\mathbf{K}$	霓$_{\varphi,\ \epsilon}$

表 A.1. 超现实数类的例子超现实子结构，对应于由 **Π**-最简单的元素 .

$\mathbf{S}$	$\mathbf{No}$	一个 $+$超现实数类	一个 $\times$超现实数类，一个>0	$\mathbf{Mo}$	$\mathbf{No}_{\succ}$	超现实数类 $\prec$ 超现实数类$^{\succ'}-1$
$\mathbf{Fix}_{\mathbf{S}}$	超现实数类 （一个 $\times\omega$）$+$超现实数类	（$\sup_{\sqsubseteq}$一个 $\times$一个 $\times\cdots$）$\times$超现实数类	$\varepsilon_{\mathbf{No}}$	$\mathbb{R}[[\omega^{\text{超现实数类}^{>}}]]_{\mathbf{On}}$	拉 $\cap(\dot{\omega}^{\omega^{-1}},\ \omega)$	

表 A.2. 例子 的超现实 子结构 作为 固定 点 的 类 获得。

$\mathbf{U}\prec\mathbf{V}$	$\mathbf{No}^{\sqsupseteq\beta}$	$\mathbf{No}^{>}$	$\mathbf{No}_{\succ}$	$\mathbf{Mo}$	$\mathbf{La}$	$\varepsilon_{\mathbf{No}}$
$\mathbf{No}^{\sqsupseteq x}$	超现实数类$^{\sqsupseteq x+\beta}$ $(\omega\times\beta)+$超现实数类$^{>}$	超现实数类$^{\sqsupseteq x+1}$ 超现实数类$^{\geq 0}$	$x+$超现实数类 $\succ$ $\mathbb{R}[[\omega^{\text{超现实数类}^{>1}}]]_{\mathbf{On}}$	$x\dot{+}\mathbf{Mo}$ $\dot{\omega}^{\text{超现实数类}^{>}}$	$x\dot{+}\mathbf{La}$?	$x\dot{+}\varepsilon_{\mathbf{No}}$ $\varepsilon_{\mathbf{No}}$
$\mathbf{No}_{\succ}$	$\dot{\omega}^{\beta}\times\mathbf{Mo}$	$\mathbf{Mo}^{>\omega}$	?	$\mathbf{Smp}_{\mathcal{D}}$	?	$\varepsilon_{\mathbf{No}}$
$\mathbf{Mo}$	?	$\mathbf{La}^{>\omega}$	$\mathbf{K}$	?	?	?
$\mathbf{La}$						

表 A.3. 若干常见超现实子结构的交错嵌套 的 各种 常见 超现实 子结构。 这些 符号 ？表示 到目前为止我们尚 无法 对 相应的 交错嵌套给出 一种 可理解的 描述 。

接下来我们给出一些例子，展示由超现实数子结构构成的对象，它们作为 **Π**-最简单元素，用于凸分划，通过不动点，以及作为其他超现实数子结构的交错嵌套。

备注 A.1. 恒等式 $\mathrm{La}\cap\left(\dot{\omega}^{\omega^{-1}},\omega\right)=(\mathrm{Mo}\prec\mathrm{No}^{\sqsupseteq\omega^{-1}})^{\prec\omega}$ 在此作为示例给出；证明见 [4] 。这也是我们计算对数原子数的符号序列时的一个中间步骤。对于每个纯无穷数 θ 和整数 $n\in\mathbb{Z}$，都存在类似的描述，用某些简单超现实子结构的不动点来描述 $\mathrm{La}\cap(\lambda_{\theta+n},\lambda_{\theta+n+1})$ 。

附录 B 集合-论问题

真 类作为集合

严格来说，“No 构成一个实闭域”之类的陈述实际上并无意义。事实上，No 是一个真类而不是一个集合，而实闭域的定义依赖于集合论。集合论中最常见的标准是 ZFC，即带有选择公理的策梅洛–弗兰克尔公理。从基础的角度来看，将超现实数理论建立在带有全局选择公理的冯·诺伊曼–伯奈斯–哥德尔集合论（简称 NBG 集合论）之上更为方便；后者是 ZFC 的保守扩展 [13, 21]。

集合-大小的相对化

反过来说，本文中许多针对类大小的超现实子结构所推导出的结果，都有集合大小的类似结果。更确切地说，给定一个正则无限序数 κ，那么许多关于 $(\mathrm{No}\leqslant,\sqsubseteq)$ 的命题都可以相对化到 $(\mathrm{No}(\kappa)\leqslant,\sqsubseteq)$；在这种情况下，“基数为 $<\kappa$ 的集合”相对于“基数为 κ 的集合”所起的作用，类似于一般“集合”相对于“真类”所起的作用。

例如，$\mathrm{No}(\kappa)$ 的一个超现实子结构是一个子集 $S \subseteq \mathrm{No}(\kappa)$，并且对于 S 中任意两个子集 $L < R$，若满足 $|L|, |R| < \kappa$，集合 $(L|R) \cap \mathrm{No}(\kappa)$ 就是有根的。换言之，$\mathrm{No}(\kappa)$ 的超现实子结构是其自身内部 $(\mathrm{No}(\kappa), \leqslant, \sqsubseteq)$ 的同构副本，并且在许多方面，它们的行为与通常的超现实子结构类似。特别是，如果 κ 是 $\mathrm{ZFC}_{\kappa'}$ 中 No 的基数，且 $\kappa' > \kappa$ 如上所述，那么超现实子结构实际上可以视为这类集合大小的相对化结果。

共尾性

在ZFC中，线性有序集的共尾性 $\mathrm{cof}(X, \leqslant)$ 等价于 $(X, \leqslant)$

- X的共尾良序子集的最小序型 $(X, \leqslant)$,
- X的共尾子集的最小基数 $(X, \leqslant)$,
- 在X 中以共尾方式嵌入的唯一正则序数 $(X, \leqslant)$。

假设采用 NBG 集合论，并将 On 视为初始正则序数，这一定义自然可以推广到真类。特别地，超现实子结构的每个凸子类 $\mathbf{X}$ 都有一个共尾性 $\mathrm{cof}(\mathbf{X}, \leqslant)$，其取值于 $\mathrm{On} \cup \{\mathrm{On}\}$；共尾性的基本性质在此情形下仍然适用。例如，No 的互相共尾凸子类具有相同的共尾性。

术语表

超现实数类 No.1 l(x) 数 x 的符号序列的序数长度.1 x[α] αx 的符号序列中的第 x 项.6 x $\sqsubseteq$ y x 比 y 更简单.6 $x_{\sqsubset}$ 严格比其简单的数构成的集合.6ot(X $<_X$) 序型.6(x_L, x_R) x 的典范表示.6suppx 作为级数的支撑.8 x $\dotplus$ y 当 supp y $\prec$ supp x 时，和 x $+$y.8 序数类 On.8 $\mathrm{On}^{>}$ 非零序数类.9 $\mathrm{On}_{\mathrm{lim}}$ 极限序数类.9$\alpha \dotplus \beta$ 序数和.9$\alpha \dot{\times} \beta$ 序数积.9α^{β} 序数乘方.9 x $\dot{+}$y 和的串接.9 x $\dot{\times}$y 积的串接.10 a $\dot{+}$ **No** 首项为 a 的符号序列所对应的数构成的超现实子结构 . . . . . 12 a $\dot{\times}$ **No** 由 a 与 $-$a 的超限串接构成的超现实子结构.12$\mathbf{X}^{\bullet}$ **X** 的最简元素或根.12$(\mathbf{L}|\mathbf{R})_{\mathbf{S}}$ 介于 **L** 与 **R** 之间的 **S** 元素类.12$\{\mathbf{L}|\mathbf{R}\}_{\mathbf{S}}$ $(\mathbf{L}|\mathbf{R})_{\mathbf{S}}$ 的根.12$\Xi_{\mathbf{S}}$ **S** 的定义超现实同构.13($x_L^{\mathbf{S}}$, $x_R^{\mathbf{S}}$) x 在 **S** 中的典范表示.14 $x_{\sqsubset}^{\mathbf{S}}$ **S** 中严格比 x 更简单的元素集合.14 $S^{\exists x}$ 满足 x $\sqsubseteq$ y 的数 y $\in$S 构成的类.14$\Xi_{\mathbf{T}}^{\mathbf{S}}$ $\mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{T}$ 的典范超现实同构.14 S $\prec$T 将 **T** 嵌套入 **S** 的 $\Xi_{\mathbf{S}}$ **T**.14 No(α) 满足 l(x) $< \alpha$ 的超现实数 x 构成的集合.15

$\sup_{\mathbf{X},\sqsubseteq X}$ 上确界 的 该 $\sqsubseteq$-链 X 中 $(\mathbf{X},\sqsubseteq)$ 15

Inc 示例的一个超现实子结构定义为一棵树。 16

Hull$_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ 凸 Hull 的 **X**在 **Y**。 17

No$^{\leqslant}$ 类 的有限 超现实数 。 18

No$^{>}$ 超现实数 子结构 的严格 正 超现实数 。 19

超现实数类$^{>,\ >}$ 超现实数子结构的正无穷超现实数。 19

No$^{<}$ 超现实数子结构的无穷小。 19

超现实数类$^{<\operatorname{supp}\varphi}$ 超现实数子结构的数x 满足$x \prec \operatorname{supp}\varphi$。 20

ω^x Conway 的 ω-映射 $\Xi_{\mathbf{Mo}}$ 23

Mo 超现实数子结构的单项式. 23

Fix$_{\mathbf{S}}$ 类 的不动点的 $\Xi_{\mathbf{S}}$。 24

No$_{>}$ 超现实数子结构的纯粹无限超现实数。 25

ε_x Gonshor'的 ε-映射 $\Xi_{\mathbf{Fix}_{\mathbf{Mo}}}$。 25

$\mu^{\mathbf{S}}_{\mathbf{X}}$ 投影 $\mathbf{S}^{\supseteq \mathbf{X}^\bullet} \twoheadrightarrow \mathbf{X}$的 极大 初始 片段 位于 于 **X**。 27

$-\langle_{\beta<\alpha}\mathbf{U}_\beta$ 左 嵌套 的 一 族 $(\mathbf{U}_\beta)_{\beta<\alpha}$ 的超现实数 子结构 29

$\mathbf{S}^{<\alpha}$ 超限 右-嵌套 的**S** 自身 之中 31

$\mathbf{\Pi}[x]$ 凸 等价 类 的x 对于 **Π** 32

Smp$_{\mathbf{\Pi}}$ 类 的 **Π**-简单 元素 32

$=_{\mathbf{\Pi}}, <_{\mathbf{\Pi}}, \leqslant_{\mathbf{\Pi}}$ **Π**-导出关系 32

$\pi_{\mathbf{\Pi}}$ 投影 $\mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{Smp}_{\mathbf{\Pi}}$到 根 的 等价 类 32

$\mathbf{\Pi}[\mathbf{X}]$ 并集 的 $\mathbf{\Pi}[x]$ 对于 $x \in \mathbf{X}$. 32

$\Pi[x]$ 特定的 共尾 和 共初 子集的 $\mathbf{\Pi}[x]$ 34

Oz 类 **超现实数类**$_{>}$ + $\mathbb{Z}$ 的 Conway 整数 34

$\mathbf{\Pi} \trianglelefteq \mathbf{\Pi}'$ **Π** 是 对 细化的 **Π**′ 35

$\mathcal{G}[x]$ 凸 包 在 **S** 的 轨道在 $\mathcal{G}$ 38

Smp$_{\mathcal{G}}$ 超现实的 子结构 属于 $\mathcal{G}$-简单 元素 。 39

$<_{\mathcal{G}}, =_{\mathcal{G}}, \leqslant_{\mathcal{G}}$ $<_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}, =_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}, \leqslant_{\mathbf{\Pi}_{\mathcal{G}}}$.39

$\langle X\rangle$ 群作用 生成 由 X。 39

$Y \trianglelefteq X$ X 是 逐点 共尾 相对于 Y。 39

$X \trianglelefteqslant Y$ X 和Y是互相逐点共尾。 39

T_c 平移通过c。 40

$\mathcal{T}$ 群实数实数平移。 40

H_s 伸缩变换通过s 。 40

$\mathcal{H}$ 群正实实数伸缩变换。 40

$\asymp, \prec, \preccurlyeq$ 赋值-理论渐近关系。 40

$\mathfrak{d}$ 主导单项式投影 $\pi_{\mathcal{H}}$ 到**Mo** 。 40

P_s 幂乘以s。 40

$\mathcal{D}$ 正实正实幂。 41

$\mathcal{E}^*$ 群由（有限）次迭代次 exp 和 log 。 41

$\mathcal{E}$ 由 生成 的 $\exp_n \circ \mathcal{H} \circ \log_n$，对于 $n \in \mathbb{N}$。 41

La 超现实 子结构 的 对数函数-原子数 。 41

$\lambda.$ Berarducci-Mantova's λ-映射 $\Xi_{\mathbf{La}}$。 41

K 超现实 子结构 的 κ-数 。 41

$\kappa.$ Kuhlmann-Matusinski's κ-映射 $\Xi_{\mathbf{K}}$。 41

$\operatorname{cof}(\mathbf{X}, \leqslant)$ 共尾性 的 $(\mathbf{X}, \leqslant)$。 58

索引

可容许序列.51$\mathcal{G}$-典范元素.39 **S** 中的典范表示 . . . . . 14$\sqsubset$- 链 .15**S**- 闭子类 .26 共尾割表示 .6 共尾性 . 58 凸分划.32 凸性.17$\sqsubset$-凸性.17 康威括号.6 割.12 割方程.19 定义分划.33 定义超现实同构.14 嵌入. 11 广义割方程.20$\sqsubset$-终子结构.14 有限超现实数.18**S**- 固定超现实数.24 光环.38 超现实数子结构的交错 . . . . . 14 无限超现实数 .19 无穷小 .19 左因子，右因子.14 左选项，右选项.14 数的长度.6 极限超现实数.6 对数原子数.41 对数原子性.46ω-映射.25 单项式.23 嵌套序列.52 嵌套超现实数.52 全显整数.34 参数化.14 逐点共尾性.39 纯无穷数.25 在 **s** 中的表示.14 根.12 尖锐.36 符号序列.49Π-简单元素.32Π-简单投影.32$\mathcal{G}$-简单投影.39 简单性.6 简单性关系.2 强线性映射.7 后继超现实数.6 上确界.6 超现实同构.14 超现实子结构.12 稀薄凸划分.33 拓扑投影.27 一致割方程.21 良基级数.7 良基集.7

参考文献

[1] M. Aschenbrenner、L. van den Dries 和 J. van der Hoeven。《渐近微分代数与超渐近级数的模型论》。《数学年刊研究》第195卷。普林斯顿大学出版社，2017。[2] M. Aschenbrenner、L. van den Dries 和 J. van der Hoeven。论数、芽与超渐近级数。载于《国际数学家大会论文集》2018，第2卷，第19–42页。里约热内卢，2018。[3] M. Aschenbrenner、L. van den Dries 和 J. van der Hoeven。超现实数作为普遍 H-域。《欧洲数学会杂志》，21(4):1179–1199，2019。[4] V. Bagayoko。对数原子数的符号序列。HAL-02952455，2020。[5] V. Bagayoko 和 J. van der Hoeven。超现实数的超级数域。技术报告，HAL，2021。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03232836。[6] V. Bagayoko 和 J. van der Hoeven。作为超幂级数的超现实数。技术报告，HAL，2022。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03681007。[7] V. Bagayoko、J. van der Hoeven 和 E. Kaplan。超幂级数域。技术报告，HAL，2021。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03196388。[8] V. Bagayoko、J. van der Hoeven 和 V. Mantova。定义超现实超指数函数。技术报告，HAL，2020。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02861485。[9] A. Berarducci。超现实数、指数运算与导子。https://arxiv.org/abs/ 2008.06878，2020年8月。[10] A. Berarducci、S. Kuhlmann、V. Mantova 和 M. Matusinski。指数域与 Conway 的 omega 映射。《美国数学会会刊》，2019。

[11] A. Berarducci 和 V. Mantova。超现实数、导子与超幂级数。JEMS，20(2):339–390，2018。[12] A. Berarducci 和 V. Mantova。作为超现实函数芽的超幂级数。《美国数学会汇刊》，371:3549–3592，2019。[13] P. J. Cohen。《集合论与连续统假设》。纽约：W. A. BENJAMIN，1966。[14] J. H. Conway。《数与博弈》。Academic Press，1976。[15] L. van den Dries 和 Ph. Ehrlich。超现实数域与指数运算。Fundamenta Mathematicae，167(2):173–188，2001。[16] L. van den Dries、J. van der Hoeven 和 E. Kaplan。对数超级数。《美国数学会汇刊》，372(7):5199–5241，2019。[17] J. Écalle。《可分析函数导论及 Dulac 猜想的构造性证明》。Hermann，Actualités mathématiques 丛书，1992。[18] P. Ehrlich。Conway 名称、简洁性层级与超现实数树。《逻辑与分析杂志》，3(1):1–26，2011年1月。[19] Ph. Ehrlich。具有简洁性层级的数系：Conway 超现实数理论的推广。《符号逻辑杂志》，66(3):1231–1258，2001。[20] Ph. Ehrlich 和 E. Kaplan。具有简洁性层级的数系：Conway 超现实数理论的推广（二）。《符号逻辑杂志》，83(2):617–633，2018。[21] U. Felgner。局部选择公理与普遍选择公理的比较。Fund. Math.，71:43–62，1971。[22] A. Fornasiero。《超现实数上的积分》。博士论文，爱丁堡大学，2004。[23] A. Fornasiero。将亨泽尔域嵌入幂级数域。代数杂志，304(1):112–156，2006年10月。[24] H. Gonshor。《超现实数理论导论》。剑桥大学出版社，1986。[25] H. Hahn。关于非阿基米德量系。Sitz. Akad. Wiss. Wien，116:601–655，1907。[26] J. van der Hoeven。自动渐近分析。博士论文，巴黎综合理工学院，法国帕莱索，1997。[27] J. van der Hoeven。强单调超幂级数。未发表的法国国家科学研究中心活动报告第1章，https://www.texmacs.org/joris/schmeling/rap1-2000.pdf，2000。[28] J. van der Hoeven。广义幂级数上的算子。Journal of the Univ. of Illinois，45(4):1161–1190，2001。[29] J. van der Hoeven。超幂级数与实微分代数。《数学讲义》第1888卷。施普林格出版社，2006。[30] S. Kuhlmann 和 M. Matusinski。超现实数的指数-对数等价类。Order 32，第53–68页，2015。[31] D. Lemire。《超现实数：标准形分解、极值、无穷和与集合函数》。博士论文，蒙特利尔大学，1996。[32] D. Lemire。超现实数标准形的连续分解及 ε数的推广。Ann. Sci. Math. Québec，21(2):133–146，1997。[33] D. Lemire。关于标准形可无限分解的超现实数的若干注记。Ann. Sci. Math. Québec，23(1):73–85，1999。[34] J. Lurie。超现实代数的有效内容。《符号逻辑杂志》，63(2):337–371，1998。[35] V. Mantova 和 M. Matusinski。带导子的超现实数、Hardy 域与超幂级数：一篇综述。《当代数学》，第265–290页，2017。[36] J. Rosenstein。《线性序》，《纯粹与应用数学》第98卷。Academic Press，1982。[37] S. Rubinstein-Salzedo 和 A. Swaminathan。超现实分析：超现实数上的实分析类比。《逻辑与分析杂志》，6，2014。[38] M. C. Schmeling。《超幂级数域》。博士论文，巴黎第七大学，2001。