arXiv:2305.02011v1 [cs.DS] 3 May 2023

逼近迪拉克保证值以上的长圈

Fedor V. Fomin* fomin@ii.uib.no
Petr A. Golovach* petr.golovach@ii.uib.no
Danil Sagunov† danilka.pro@gmail.com
Kirill Simonov‡ kirillsimonov@gmail.com

2023年5月4日

摘要

高于（或低于）保证值的参数化是参数化算法中一个成功的概念。其理念是，许多计算问题都存在“自然”的保证值，由此引出算法问题：能否高效地获得更好的解（高于保证值）？例如，对于任意一个含有 m 个子句的布尔 CNF 公式，都存在一个赋值，至少满足 $m/2$ 个子句。判断是否存在一个满足超过 $m/2+k$ 个子句的赋值有多困难？又或者，如果一个有 n 个顶点的图存在完美匹配，那么它的顶点覆盖至少为 $n/2$。是否存在一个大小至少为 $n/2+k$ 的顶点覆盖，其中 $k \geq 1$ 为某个值？找到这样的顶点覆盖有多困难？

上述保证范式已经在参数化算法和核化领域带来了若干令人振奋的发现。我们认为，这一范式也能够为近似算法领域中一些经过深入研究的问题带来新的视角。我们以最长圈问题为例。极值组合学中最古老的结果之一，是 1952 年提出的著名 Dirac 定理。Dirac 定理对最长圈的长度给出了如下保证：对于每一个具有最小度 $\delta(G) \leq n/2$ 的 2-连通 n-顶点图 图 G G，最长圈的长度 L 至少为 $2\delta(G)$。因此，寻找最长圈的“本质”部分在于近似“偏移量” $k = L - 2\delta(G)$。本文的主要结果是针对 k 的上述保证近似定理。非正式地说，该定理表明，近似偏移量 k 并不比近似一个圈的总长度 L 更困难。换言之，对于任意（具有合理良好性质的）函数 f，如果存在一个多项式时间算法，能够在一个具有长度为 L 的圈的无向图中构造一个长度为 $f(L)$ 的圈，那么就可以得到一个多项式时间算法，构造一个长度为 $2\delta(G) + \Omega(f(k))$ 的圈。

1 引言

对参数化算法和核化发展产生重大影响的概念之一，是高于保证值参数化这一思想。高于保证值参数化基于以下观察：如果解的大小存在一个足够大的下界，那么以解的大小对最大化/最小化问题进行自然参数化并不令人满意 [23]。为使这一讨论更加具体，考虑经典的NP完全问题 Max Cut。注意，在任何具有 m 条边的图中，总存在一个包含至少 $m/2$ 条边的割。（实际上，文献中已知略优的界

*挪威卑尔根大学信息学系。
†俄罗斯 V.A. 斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部。
‡哈索·普拉特纳研究所，波茨坦大学，德国

[18, 10]。）因此，以最大割的大小为参数时， MAX CUT 显然是固定参数可解（FPT）的。事实上，下面这个简单算法表明该问题是FPT：如果 $k \leq m/2$，则返回“是”；否则 $m \leq 2k$，使用任意暴力算法即可完成任务。然而，当人们寻求高于“保证”的下界 $m/2$的割时，关于 MAX CUT 的问题就变得更加有意义和有趣。

上述保证值方法由 Mahajan 和 Raman [45] 提出，并成功应用于参数化复杂性与核化领域若干基础问题的研究。关于说明性示例，请参见 [1, 4, 14, 23, 25, 32, 33, 34, 36, 37, 44], ，另可参阅 Gutin 和 Mnich [35]最近的综述。颇为令人意外的是，关于上述（或下述）保证值近似的理论仍未得到探索。（值得注意的例外包括 Mishra 等人[46] 关于超越最大匹配规模近似最小顶点覆盖的研究，以及 Bollob´as 和 Scott 关于超越 $m/2 + \sqrt{m/8}$ 界限 [10]近似最大割的研究。）

本文将上述保证值参数化的理念引入近似算法领域。具体而言，

> 本文旨在从上述保证值参数化的视角，研究图中寻找最长圈和最长 (s,t)-路径这两个经典问题的可近似性。

我们的结果。近似图中最长圈的长度有着悠久而丰富的历史 [6, 8, 21, 20, 28, 29, 49]。极值组合学中有若干基本结果，为图中最长圈的长度提供了下界。其中最早的下界由 1952 [17]的 Dirac 定理给出。Dirac 定理指出，最小顶点度为 $\delta(G)$的 2-连通图 G 包含一个长度为 $L \geq \min\{2\delta(G), |V(G)|\}$的圈。由于图 G 中任一长度为 $2\delta(G)$的最长圈，其 $\delta(G) < \frac{1}{2}|V(G)|$ 部分总是“互补”的（否则， G 就是哈密顿图，且可在多项式时间内找到最长圈），因此问题的核心在于计算“偏移量” $k = L - 2\delta(G)$。概括而言，我们论文的第一个主要发现是，Dirac 定理与近似十分契合。我们证明，近似偏移量 k 本质上并不比近似长度 L更困难。

更准确地说。回顾一下，如果对所有 x、 y，都有 $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$，则称 f 是次可加的。我们的主要结果如下定理。

定理 1. 设 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个非递减次可加函数，并假设我们给定了一个多项式时间算法，能在最长圈长度为 L 的图中找到长度至少为 $f(L)$ 的圈。那么，存在一个多项式时间算法，能在满足 $\delta(G) \leq \frac{1}{2}|V(G)|$ 且最长圈长度为 L 的 2-连通图 图 G 中找到长度至少为$2\delta(G) + \Omega(f(L - 2\delta(G)))$的圈。

二连通性条件十分重要。正如在 [24], 中所指出的，判定一个连通图 G 是否包含长度至少为 $2\delta(G)$ 的圈是 NP完全的。定理 1 可以直接推广到求解超过 $2\delta(G)$ 的最长路径问题的近似。对于最长路径，图的二连通性要求可以放宽为连通性。这可以通过向连通图 G 添加一个顶点 v 的标准归约来实现，参见例如 [24]。新图 $G + v$ 是二连通的，其最小顶点度等于 $\delta(G) + 1$，并且 G 存在长度至少为 L 的路径，当且仅当 $G + v$ 存在长度至少为 $L + 2$ 的圈。因此，在 $G + v$ 中对最长圈进行近似（利用定理 1），也就是在 G 中对最长路径进行近似。

相关工作。最早的最长路径和圈的近似算法是在精确参数化算法发展的基础上提出的。Monien [47]和 Bodlaender [9] 提出了参数化

分别以 $\mathcal{O}(L!2^L n)$ 和 $\mathcal{O}(L!nm)$ 的运行时间计算长度为 L 的路径的算法。这些算法还意味着可以在多项式时间内构造长度为 $\Omega(\log L/\log\log L)$ 的路径，其中 L 是图 G 中最长路径的长度。在 Alon、Yuster 和 Zwick 关于色编码的著名工作中，[2] 提出了一种算法，可在 $\mathcal{O}(5.44^L n)$ 时间内找到长度为 L 的路径/圈。Alon 等人的算法意味着可以在多项式时间内构造长度为 $\Omega(\log L)$ 的路径。后续大量研究致力于提高最长路径和圈的参数化算法运行时间中指数 c^L 的底数。综述 [26, 43]，和 [15, 的第 10] 章概述了这一研究方向中的思路与方法。这些算法运行时间中 L 的指数依赖在渐近意义上是最优的：若有算法能在 $2^{o(L)}n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内找到长度为 L 的路径（或圈），则会违背 Impagliazzo、Paturi 和 Zane 提出的指数时间假设（ETH）[38]。因此，进一步改进最长圈或最长路径参数化算法的运行时间，都无法带来优于 $\Omega(\log L)$ 的近似界。

Bj¨orklund 和 Husfeldt [6] 在最长路径的近似方面，迈出了“超越颜色编码”的第一步。他们提出了一种多项式时间算法，能够在最长路径长度为 L 的图中找到一条长度为 $\Omega(\log L/\log\log L)$ [2] 的路径。Gabow 在 [29] 中改进并扩展了这一结果，将其应用于最长圈的近似。他~~的算法能够~~在包含长度为 L 的圈的图中，计算出一个长度为 $2^{\Omega(\sqrt{\log L/\log\log L})}$ 的圈。Gabow 和 Nie [31] 指出，对 Gabow 算法进行改进后，可以得到一种多项式时间算法，构造长度为 $2^{\Omega(\sqrt{\log L})}$ 的圈。这优于 $(\log(L))^{\mathcal{O}(1)}$，但不如 L^{ε}。将 Gabow 和 Nie 的算法与定理 1 进行流水线组合，可以得到一种多项式时间算法，该算法能够在 2-连通图 G 中构造一个长度为 $2\delta(G)+\Omega(c^{\sqrt{\log k}})$ 的圈。对于顶点度有界的图，已有更好的近似算法 [13, 21]。

最长路径近似的上下界之间的差距仍然很大。Karger、Motwani 和 Ramkumar [40] 证明，除非 P = NP，否则最长路径问题不属于 APX。他们还证明，对于任意 $\varepsilon>0$，该问题都无法在 $2^{\log^{1-\varepsilon} n}$以内近似，除非 NP $\subseteq$ DTIME($2^{O(\log^{1/\varepsilon} n)}$)。Bazgan、Santha 和 Tuza [3] 将这些下界推广到了三次哈密顿图。对于有向图，上下界之间的差距则较小 [8, 30]。

我们的近似算法受到 Fomin、Golovach、Sagunov 和 Simonov [24] 近期关于超越 Dirac 界的最长圈参数化复杂性的研究启发。Fomin 等人关注于精确计算超出 $2\delta(G)$ 的“偏移量”。他们的参数化算法可以判断 G 是否包含长度至少为 $2\delta(G)+k$ 的圈，运行时间为 $2^{\mathcal{O}(k)}n^{\mathcal{O}(1)}$，因此可以在多项式时间内计算出长度为 $2\delta(G)+\Omega(\log k)$ 的圈。然而，[24]中 वकिसति的工具不足以突破偏移量的 $\Omega(\log k)$ 界。[24]中的主要组合工具是 Erd¨os-Gallai 分解和图的 Dirac 分解。为了满足近似的需要，我们必须发展这些分解的新颖（“嵌套”）变体，或证明这些分解的其他结构性质。

Dirac 定理是极值图论的核心支柱之一。优秀的综述[12] 和 [11] 介绍了图论这一基础子领域。除了 [24],之外，Jansen、Kozma 和 Nederlof 在 [39]中从参数化复杂性的角度研究了 Dirac 定理的算法应用。

论文结构。第 2 节概述了实现我们结果所采用的技术。接着，第 3 节介绍记号并列出辅助结果。第 4 节将引导读者了解关于 (s,t)-路径的近似结果的证明，这是定理 1 所需的关键要素。第 5 节专门证明定理 1 本身。最后，我们以 a 收尾。

第6节中的总结及一些开放性问题。

2 证明概述

在本节中，我们将介绍定理 1 的证明的整体策略，以及证明过程中所需的关键技术思想。我们工作的核心概念是针对Longest Cycle 问题的一种近似算法。形式上，对于给定的图 G ，该算法应在多项式时间内运行，并输出一个长度至少为 $f(L)$ 的圈，其中 L 是图 G 中最长圈的长度。函数 f 在这里表示该算法的近似保证。我们的工作允许它是一个任意的非递减函数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ，同时还要求它满足次可加性（即，对于任意的 x、y，均有 $f(x) + f(y) \geq f(x + y)$）。我们还指出，对于 Longest Cycle 的一个 $f(L)$-近似算法，可以直接得到一个针对 2-连通图中 Long(s,t)-Path 的 $\frac{1}{2}f(2L)$- 近似算法（根据门格尔定理，详情请参见引理 2 ）。

我们的两项主要贡献都假设我们将这样一个 f-近似算法作为黑盒提供给我们。事实上，我们只需要将该算法作为预言机，应用于任意图并获取其输出即可。我们无需修改该算法，也无需了解其具体的运行过程。

虽然我们的算法基于 Fomin 等人的结构性结果，但在本节第一部分中，我们不会介绍如何使用这些结果的细节。 [24],

我们的第一个贡献是一种多项式时间算法，它能在给定的含有两个顶点 $s, t \in V(G)$ 的 2-连通图 G 中，找到一条长的 (s,t)-路径。根据 Erd˝os-Gallai 定理， G 中最长的 (s,t)-路径的长度总是 $\delta(G - \{s,t\}) + k$ （对于 $k \geq 0$），而该算法的目标是在 G 中找到一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + \Omega(f(k))$ 的 (s,t)-路径。为找到这样一条路径，该算法首先以一种特定的技术方式递归地分解图 G 。因此，它会在多项式时间内输出若干个三元组 (H_i, s_i, t_i)，其中 H_i 是 G 的一个 2- 连通子式，且 $s_i, t_i \in V(H_i)$。对于每个三元组，算法都会运行黑盒，在 H_i 中找到最长 (s_i, t_i)-路径的一个 f-近似解。在第二轮中，我们的算法巧妙地利用构造出的近似解，在初始图 G 中构造一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + \Omega(f(k))$ 的路径。总结如下定理。

定理 2. 设 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个非递减次可加函数，并假设我们有一个多项式时间算法，该算法能够在给定两个顶点 s 和 t 的图中，计算长度至少为 $f(L)$ 的 (s,t)-路径，其中最长的 (s,t)-路径长度为 L。那么，对于一个 2-连通图 G ，若其中给定两个顶点 s 和 t ，且最长的 (s,t)-路径长度为 L，则存在一个多项式时间算法，能够输出长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + \Omega(f(L - \delta(G - \{s,t\})))$ 的 (s,t)-路径。

本文的第二项（也是主要）贡献，是一种多项式时间算法，用于近似给定 2-连通图 G 中的最长圈，其中 $2\delta(G) \leq |V(G)|$。该算法采用用于 Longest Cycle 的黑盒 f-近似算法，以找到长度为 $2\delta(G)+\Omega(f(k))$ 的圈，其中 $2\delta(G) + k$ 是 G 中最长圈的长度。根据应用于 G 的 Dirac 定理， k 始终至少为 0。

为实现这一点，我们的算法首先尝试对图 G 进行分解。然而，与首个所提出的算法相比，这里的分解过程要简单得多。事实上，分解过程从未被递归应用，因为分解本身无需被使用：只要其存在，即足以应用另一个简单的过程。

与第一个贡献类似，算法随后输出一个三元组序列（H_i、 s_i、 t_i），其中 H_i 是 G 和 s_i 的 2-连通子式， $t_i \in V$（H_i）。不同之处在于，对于每个三元组，算法运行的不是初始的黑盒 f-近似算法，而是第一个贡献中的算法，即定理 2 的算法。因此，每次运行的输出都是一条（s_i、 t_i）-路径

其长度为 $\delta(H_i - \{s_i, t_i\}) + \Omega(f(k_i))$，位于 H_i 中，其中 $\delta(H_i - \{s_i, t_i\}) + k_i$ 是 H_i 中最长的（s_i、t_i）-路径的长度。

最后，对于每个近似结果，我们的算法都会构造一个长度至少为 $2\delta(G) + \Omega(f(k_i))$ 的圈。可以保证，对于至少一个 i，$k_i = \Omega(k)$，因此所有构造出的圈中最长的圈长度至少为 $2\delta(G) + \Omega(f(k))$。下面给出相应的定理。

定理 1. 设 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个非递减次可加函数，并假设我们有一个多项式时间算法，能够在最长圈长度为 L 的图中找到长度至少为 $f(L)$ 的圈。那么，存在一个多项式时间算法，能够在满足 $\delta(G) \leq \frac{1}{2}|V(G)|$ 且最长圈长度为 L 的 2-连通图 图 G G 中找到长度至少为$2\delta(G) + \Omega(f(L - 2\delta(G)))$ 的圈。

值得注意的是，定理 2 实际上可由定理 1 推出（同样根据门格尔定理，见引理 2）。不过，如上所述，定理 1 中的算法使用了定理 2 中的算法，因此我们必须先证明后者，再证明前者。

在本节余下部分，我们将更详细地概述两个定理的证明，尤其会说明算法如何运用 [24] 的结构性结果。在两个证明中，我们还会通过展示特定图分解的一些有用性质来补充这些结果。为清晰起见，我们先介绍定理 1，因为它的证明较为简单。

2.1 近似求解最长圈

我们的算法以 Fomin 等人 [24] 提出的结构性结果为基础。在该工作中，作者证明了以下结论：存在一种算法，给定一个 2-连通图中的圈，要么找到一个更长的圈，要么判定 G 具有某种“特定结构”。该算法可应用于长度小于 $(2 + \sigma_1) \cdot \delta(G)$ 的任意圈（具体而言，我们使用 $\sigma_1 = \frac{1}{24}$，详见引理 14）。

要理解这一结构性结果为何重要，不妨回想一下，我们的目标是在最长圈长度为 $2\delta(G) + k$ 的 2-连通图 G 中，找到一个长度至少为$2\delta(G) + \Omega(f(k))$ 的圈。我们的算法只需从图 G 中任取一个圈，然后反复应用 [24] 的结果来扩展该圈。当圈的长度至少达到 $(2 + \sigma_1) \cdot \delta(G)$，或找到 G 的特定结构时，算法便停止。

这里的关键观察是，如果找到一个长圈，我们就能轻易得到良好近似。例如，如果 $\sigma_1 \cdot \delta(G)$ 小于 $\sigma_1/10 \cdot f(k)$，那么 $10\delta(G) < f(k)$。如果我们直接对 Longest Cycle 问题应用黑盒 f-近似算法，就能得到一个长度至少为 $f(2\delta(G) + k) \geq f(k) \geq 2\delta(G) + 4/5 \cdot f(k)$ 的圈。因此，取长度为 $(2 + \sigma_1) \cdot f(k)$ 的圈与长度为 $f(2\delta(G) + k)$ 的圈中较长者，我们就总能对 k 获得良好的近似保证值。

当应用于 G 和当前圈 C 的结构引理给出“特定结构”这一结果时，算法最重要的部分便会启动。这里我们需要具体说明这种结构，而结果可能有两种类型。第一种结果是图的一个有界顶点覆盖。该顶点覆盖的大小至多为 $\delta(G) + 2(k' + 1)$，其中 $k' \geq 0$ 满足 $|V(C)| = 2\delta(G) + k'$。这样的顶点覆盖保证 C 不会比 G 中的最长圈短太多：最长圈的长度至多为顶点覆盖大小的两倍，因此 $k \leq 4(k' + 1)$。于是，$k' = \Omega(k)$，而 C 就是一个足够好的近似。

第二个也是最后一个结构性结果是 Dirac 分解，其定义见 [24]。基本上，这种分解是通过寻找 G 的一个小型分离集获得的（该分离集仅由圈 C 的两个子路径 P_1、P_2 组成），而这种分解的各部分则是分离后 G 的连通分量。在 [24] 中证明的关于 Dirac 分解的主要结果是：总存在一个最长圈，使其至少包含这些部分之一中的一条边。

尽管 Dirac 分解的定义和性质可能显得相当复杂，但我们的算法甚至不需要找到 G 的 Dirac 分解。事实上，我们展示了 Dirac 分解的一个新颖且良好的性质。该性质保证：如果 G 存在一个 Dirac 分解，那么还存在 G 的一个 2-顶点分隔集 $\{u, v\}$，它同样能将 G 中的最长圈划分为几乎相等的部分。我们的贡献归纳为下面的引理。

引理 1. 设 G 是一个 2-连通图，且 P_1、P_2 为长度至多为 $2\delta(G) + \kappa$ 的圈 C 诱导出一个 Dirac 分解，其中 $2\kappa \leq \delta(G)$ 位于图 G G 中。若图 G G 中存在长度至少为 $2\delta(G) + k$ 的圈，则存在 u、$v \in V(G)$，使得

- $G - \{u, v\}$ 不连通，并且
- 存在一条 (u, v)-路径，其长度至少为 $\delta(G) + (k - 2)/4$，且位于图 G G 中。

我们的算法按如下方式应用引理 1。由于图 G G 中有 $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$ 个顶点对，我们的算法会遍历所有顶点对。如果一对顶点 u、v 将该图分离成至少两个部分，那么算法会找到一条较长的 (u, v)-路径，且该路径上的顶点只属于其中一个部分。具体而言，算法会遍历图 G $G - \{u, v\}$ 中的所有连通分量。对于固定的连通分量 H，我们的算法将定理 2 的算法应用于图 $G[V(H) \cup \{u, v\}] + uv$（添加边 uv 以确保二连通性），从而求得最长 (u, v)-路径的一个近似解。根据引理 1，如果 u、v 是所需的分离点对，那么至少对一个 H，所找到的 (u, v)-路径的长度应为 $\delta(G)+\Omega(k)$。如果找到了这样的路径，根据 Erd˝os-Gallai 定理，可以保证在图 G G 中，H 之外存在一条足够长的 (u, v)-路径。这两条路径合起来构成所需的圈，其长度为 $2\delta(G) + \Omega(k)$。

至此，定理 1 的证明概述结束。正式证明见第 5 节。

2.2 近似最长的 (s, t)-路径

虽然定理 1 的算法并未显式使用底层的 Dirac 分解，但在寻找 (s, t)-路径时（以及证明定理 2 时），我们需要更深入地利用得到的图分解。尽管 Fomin 等人的 Dirac 分解最初用于在 $2\delta(G)$ 之上寻找长圈 [24]，但为在 $\delta(G - \{s, t\})$ 之上寻找 (s, t)-路径，作者引入了 Erd˝os-Gallai 分解。

在第 4 节定理 2 的形式化证明中，我们给出了 Erd˝os-Gallai 分解的完整定义。在本概述中，我们尽量避开最技术性的细节，以便直观介绍这种分解的结构以及我们的算法如何运用它。

与 Dirac 分解类似，Erd˝os-Gallai 分解通过以下例程获得：给定一个图 G 及其中的一条 (s, t)-路径，该例程要么延长该路径，要么报告给定路径的两个子路径 P_1（以 s 开始）和 P_2（以 t 开始）在删除后会在 G 中诱导出一个 Erd˝os-Gallai 分解。该例程可以反复应用于一条 (s, t)- 路径，直到其长度达到 $(1+\sigma_2) \cdot \delta$（具体而言为 $\sigma_2 = \frac{1}{4}$，见引理 7；在此概述中，为简洁起见，我们也略去哈密顿 (s, t)-路径的情形）。请注意，与 Dirac 分解中的圈扩展例程不同，这里不可能出现有界顶点覆盖这一结果。与上一小节的算法类似，该算法唯一非平凡的部分是处理 Erd˝os-Gallai 分解这一结果。在另一种情况下，只需运行一次针对 Longest Cycle 的黑盒 f-近似算法，即可立即得到所需的近似。

这一分解的主要性质（由 [24] 给出）如下：如果 G 中存在一条长度至少为 $\delta(G - \{s, t\}) + k$ 的 (s, t)-路径，那么必然存在一条长度至少为 $\delta(G-\{s, t\})+k$ 的路径，该路径经过分解中的某个连通分量。此外，对于每个连通分量 G_i，恰好存在一对不同的入口点 s_i, t_i：如果

G 中一条 (s,t)-路径经过 G_i 时，必然需要从 s_i （或 t_i）进入 G_i 一次，并且恰好从 t_i （或 s_i）离开 G_i 一次。

此外，每个 G_i 的度与 G的度相差不大： $\delta(G_i - \{s_i, t_i\}) \geq \delta(G - \{s,t\}) - 2$成立。而这点常数差异总能通过连接 s和 t到 s_i和 t_i的路径来弥补：如果我们成功在 G_i中找到一条长度至少为 $\delta(G_i - \{s_i, t_i\}) + k_i$的 (s_i, t_i)-路径，就总能用任意一对从 $\{s,t\}$ 到 $\{s_i, t_i\}$ 的不相交路径将其补全为 G中的一条长度为 $\delta(G - \{s,t\}) + k_i$的 (s,t)-路径。如果这对路径的长度超过平凡下界 2，就能带来超过 $\delta(G - \{s,t\}) + k_i$的额外长度。

上一段内容启发我们采用以下近似算法：对于每个 G_i, s_i, t_i，我们的算法会递归地寻找一条长度为 $\delta(G_i - \{s_i, t_i\} + \Omega(f(k_i))$ 的 (s_i, t_i)-路径，其中 k_i取自图 G_i中最长 (s_i, t_i)-路径的长度。由于额外长度的另一部分来自连接 $\{s,t\}$和 $\{s_i, t_i\}$的两条不相交路径，我们希望使用黑盒 f-近似算法，求出这对路径的 f-近似解。

遗憾的是，寻找这样一对路径只能归约为寻找一条经过给定两个顶点的长圈（只需在图 G中将 s 与 t 、 s_i 与 t_i 拼接起来，再寻找一条经过所得两个顶点的长圈）。在他们的工作中，Fomin 等人证明，可以在 $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内找到长度至少为 k 的这样的圈。然而，这对我们用处不大，因为 k 仅有 $\mathcal{O}$（δ（G））的上界，而我们需要多项式时间。同时，我们也不知道有什么办法能迫使黑盒算法找到一条经过给定两个顶点的圈的 f-近似解。

这些论证使我们不再考虑递归近似算法。相反，我们的近似算法将对一个单一的“完整图景”图应用黑盒算法，该图依据 Erd˝os-Gallai 分解所揭示的结构构造而成。不过，这里的递归仍然存在：我们会对分解中的每个分量应用路径扩展程序。这引出了递归分解的思路，我们将在第 4 节中将其定义为嵌套的 Erd˝os-Gallai 分解。该分解可以看作一棵树，其中根节点是初始三元组（G， s，t），节点的子节点表示 Erd˝os-Gallai 分解给出的三元组（G_i， s_i， t_i），而该分解的叶节点是图 G_i，在这些图中可以找到长（ s_i， t_i） - 路径的充分近似解（取扩展程序得到的最长的（ $1+\sigma_2$）$\cdot \delta$（$G - \{s_i, t_i\}$）-长路径与黑箱算法得到的近似解中较长者）。图 1 展示了这一新颖分解的示意图。

在第 4 节中，我们证明，可以将分解中的一个叶子（G_i, s_i, t_i）内找到的长路径收缩为单条边 $s_i t_i$。此外，如果（G_j, s_j, t_j）是分解中（G_i, s_i, t_i）的子节点，并且从 $\{s_i, t_i\}$ 到 $\{s_j, t_j\}$ 的最长路径对恰好是一对边（因此不会像前文所述那样增加额外长度），我们就收缩这些边。我们证明中的关键是这样一个断言：经过此类收缩后，如果初始图中存在一条长度为 δ（$G - \{s,t\}$）$+ k$ 的（s,t）-路径，那么在通过所述收缩得到的图中，存在一条长度至少为 $\Omega(k)$ 的（s,t）-路径。完成所有收缩后，算法将黑盒算法应用于变换后的图，并在其中找到一条长度为 f（$\Omega(k)$）的（s,t）-路径（根据次可加性，该长度为 $\Omega(f(k))$）。

我们算法的最后部分（以及定理 2 的证明）是这样一个例程：将收缩后的图 G 中的这条 (s,t)-路径转换为初始图 G 中一条长度为 $\delta(G - \{s,t\}) + \Omega(f(k))$ 的路径。在这一部分，我们证明，始终可以将收缩后的图中一条长度为 r 的 (s,t)-路径转换为一条长度为 $\Omega(r)$ 的路径，且该路径至少经过一条对应于嵌套 Erd˝os-Gallai 分解中某个叶子的边（因此，它是 G_i 中 (s_i, t_i)-路径的良好近似）。最后，我们注意到，在 G 中撤销收缩，就能将这条路径转换为所需的近似。

这就完成了 t 定理 2 证明的概述。第 4 节包含完整内容，包括 1

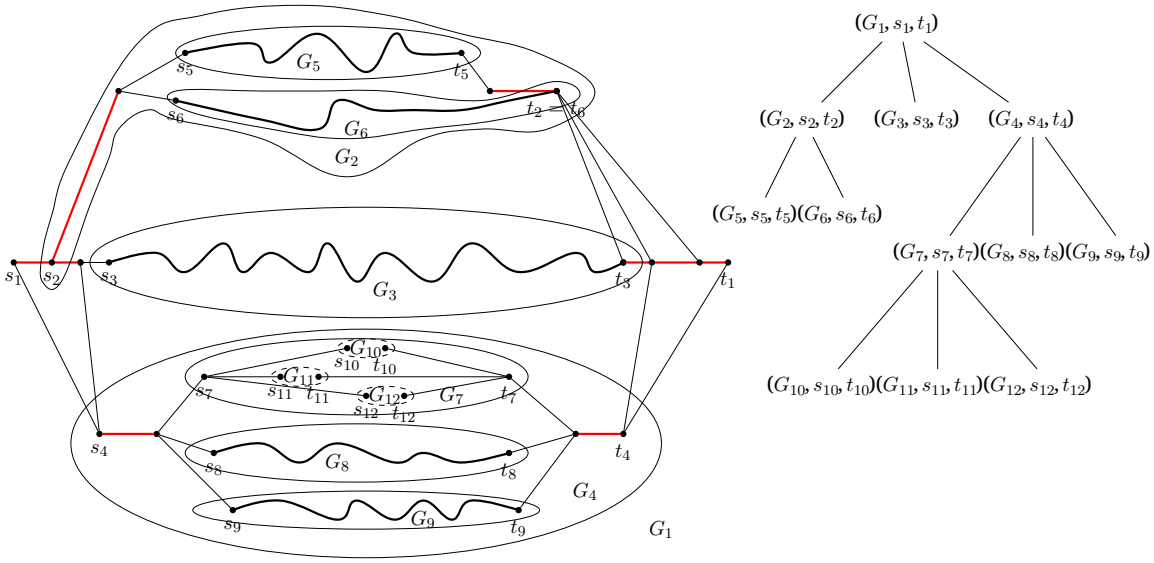

图 1：嵌套的 Erd˝os-Gallai 分解（左）及其对应递归树（右）的示意图。G_i 内部的红色直线路径表示在 G_i 中诱导 Erd˝os-Gallai 分解的一对路径。粗体的（s_i, t_i）-路径是最长（s_i, t_i）-路径的充分近似解（G_i）。虚线轮廓对应于常数为 δ（$G_i - \{s_i, t_i\}$）的 G_i，这是证明中少数几种技术情形之一。

技术细节和形式证明。

3 预备知识

本节定义全文使用的记号，并给出一些辅助结果。我们用 $[n]$ 表示正整数集合 $\{1, \ldots, n\}$。提醒一下，函数f：$D \to$R 若对所有 $x, y \in D \subseteq$R 都满足 $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$，则称其为次可加的。我们用 R+ 表示所有非负实数构成的集合。

回想一下，我们的主要定理是针对任意非递减的次可加函数 $f : \mathrm{R}_+ \to$ R 陈述的，且存在能够达到相应近似的算法。在整个证明过程中，我们还会额外假设，对每个 $x \in$R+，都有 $f(x) \leq x$。对于任意整数 $x \geq 3$，这已由定理陈述蕴含，因为在最长 (s, t)-路径（分别为圈）长度为 x 的图中，一致的近似算法不可能输出长度大于 x 的 (s, t)-路径（分别为圈）。然而，对于一般函数 f (·)，这在整个 R+ 上未必成立。若是如此，为使证明更清晰，我们将每个 $x \in$R+ 对应的 $f(x)$ 重新定义为：$=\min\{x, f(x)\}$。显然，f 仍然是次可加且非递减的，同时对近似算法施加的保证值也完全相同。

图。我们只考虑有限简单无向图，并使用标准记号（例如，参见 Diestel 的著作 [16]）。我们用 $V[G]$ 和 $E(G)$分别表示图 G的顶点集和边集。全文中，若不会引起混淆，我们用 n 和 m 分别表示所考虑图的顶点数和边数。对于集合 $X \subseteq V(G)$，用 $G[X]$表示图 G由 X诱导的子图，并用 $G - X$表示图 G 由 $V(G) \setminus X$诱导的子图。对于单顶点集合 $\{v\}$，我们用 $G - v$ 代替 $G - \{v\}$。对于顶点 v，$N_G(v)$表示 v的（开）邻域，即图 G中 v 的邻点集合。对于

集合 $X \subseteq V(G)$，$N_G(X) = \left(\bigcup_{v \in X} N_G(v)\right) \setminus X$。顶点 v 的度为 $\deg_G(v) = |N_G(v)|$。我们用 $\delta(G) = \min^{v \in V(G)} \deg_G(v)$ 表示 G 的最小度。如果根据上下文可以明确所考虑的图，则可以省略上述记号中的下标。我们提醒读者，对于 $uv \in E(G)$，边收缩操作是将 u 和 v 替换为一个单独的顶点 w_{uv}，使其与 $N_G(\{u, v\})$中的每个顶点都相邻。若图 G 的每条边至少有一个端点属于顶点集合 $X \subseteq V(G)$，则该集合称为顶点覆盖。

图 P 是图 G 的一条路径，是 G 的一个子图，其顶点集合可以表示为 $\{v_0, \ldots, v_k\}$，其中 $E(P) = \{v_{i-1}v_i \mid i \in [k]\}$。我们可以将路径 P 写成其顶点序列 v_0，.....，v_k。顶点 v_0 和 v_k 称为 P 的端点，其余顶点称为内部顶点。对于一条端点为 s 和 t 的路径 P，我们称 P 为一条（s，t）-路径。若两条路径 P_1 和 P_2 没有公共顶点，则称它们为（顶点）不相交；若两条路径中的任意一条的内部顶点都不是另一条路径的顶点，则称它们为内部不相交。一条圈 C 是 G 中的一个子图，它满足 $V(C) = \{v_1, \ldots v_k\}$ 且 $E(C) = \{v_{i-1}v_i \mid i \in [k]\}$，其中 $k \geq 3$，并假设 $v_0 = v_k$。路径（圈）的长度是其边的数量。对于两条内部不相交且恰好共享一个端点 $v_k = u_0$ 的路径 $P_1 = v_0$，.....，v_k 和 $P_2 = u_0$，.....，v_s，我们用 P_1P_2 表示它们的连接，即路径 v_0，.....，v_k，u_1，.....，u_s。如果 P_1 和 P_2 共享两个端点，且至少其中一条路径具有内部顶点，则我们用 P_1P_2 表示由这两条路径构成的圈。如果一条路径 P（或一个圈 C）满足 $V(P) = V(G)$（$V(C) = V(G)$，则称其为哈密顿路径（哈密顿圈）。

回顾一下，如果对于任意两个顶点 s 和 t，G 都包含一条 (s, t)-路径，那么 G 就是连通的。G 的一个（连通）分量是一个包含关系下极大的连通导出子图。一个至少有三个顶点的连通图 G 是 2-连通的，当且仅当对于每个 $v \in V(G)$，$G - v$ 都是连通的。一个至少有两个顶点的连通图 G 的顶点 v 是割点，当且仅当 $G - v$ 不连通。连通图 G 的一个块是一个不含割点的包含关系下极大的导出子图。注意，如果 G 至少有两个顶点，那么每个块要么同构于 K_2，要么是一个 2-连通图。对于 G 的块 B，一个不是 G 的割点的顶点 $v \in V(B)$ 称为内部。连通图中的块构成一种树结构（将每个块视为森林中的一个顶点，两个块若共享一个割点则相邻）。块树的叶子所对应的块称为叶块。对于 s，$t \in V(G)$，$S \subseteq V(G)$，如果 $G - S$ 不包含 (s, t)- 路径，那么 $\setminus \{s, t\}$ 就是一个 (s, t)- 分离集；我们也称 S 将 s 与 t 分离。我们还称 S 分离两个顶点集合 A 和 B，如果 S 将 A 中的每个顶点与 B 中的每个顶点分离。

以下有 用的观察可由门格尔定理直接推出（例如，参见 [16, 41]）.

引理 2。对于任意一个包含长度为 L 的圈的 2-连通图 G，图 G 中任意一对顶点之间都存在一条长度至少为$L/2$ 的路径。此外，给定一个圈 C 以及两个不同的顶点 s 和 t，可以在多项式时间内构造一条长度至少为 $|V(C)|/2$ 的（s，t）-路径。

我们注意到，给定一个用于最长圈的近似算法后，可以将其作为黑盒，用来近似任意两个顶点之间的最长路径。

引理3。设 $\mathcal{A}$ 是一个多项式时间算法，它能在图中找到一个长度至少为 $f(L)$ 的圈，且该图的最长圈长度为 L。那么，存在一个多项式时间算法，以 $\mathcal{A}$ 作为子程序；给定图 G 以及两个不同的顶点 s 和 t，该算法能找到一条长度至少为 $\frac{1}{2}f(2L)$ 的（s，t）-路径，其中 L 是图 G 中最长的（s，t）-路径的长度。

证明。设 G 是一个图，且 s、$t \in V(G)$ 是不同的顶点。不失一般性，假设 G 是连通的。设 P 是 G 中一条最长的（s，t）- 路径，其长度为 L。如果 st 是 G 的桥，那么 G 有唯一一条（s，t）-路径，且其长度为 1。在这种情况下，我们的算法返回这条路径；显然可以在多项式时间内找到它。假设情况并非如此。于是 $st \notin E(P)$ 且 $L \geq 2$。

我们构造 G 的两个副本 G_1 和 G_2。分别用 s_1 和 s_2 表示 s 在 G_1 和 G_2 中的副本。类似地，设 t_1 和 t_2 为 t 的副本，并分别用 P_1 和 P_2 表示 P 在 G_1 和 G_2 中的副本。接下来，我们通过合并 s_1 与 s_2，以及 t_1 与 t_2 来构造图 G'（如果 $st \in E(G)$，边 s_1t_1 和 s_2t_2 也会合并）。用 s' 表示 G' 中由 s_1 和 s_2 得到的顶点，并设 t' 为由 t_1 和 t_2 得到的顶点。注意，P_1 和 P_2 是 G' 中内部不相交的（s'，t'）-路径。特别地，这意味着 s' 和 t' 是 G' 的同一个块 B 中的顶点，而 P_1 和 P_2 是 B 中的路径。因此，B 包含长度为 $2L$ 的圈 $C = P_1P_2$。由此可知，B 中最长圈的长度至少为 $2L$。我们在 B 上调用 $\mathcal{A}$，该算法输出一个长度至少为 $f(2L)$ 的圈 C。注意，B 与 K_2 不同，即它是 2- 连通的。根据引理 2，B 有一条长度至少为 $\frac{1}{2}|V(C)| \geq \frac{1}{2}f(2L)$ 的（s'，t'）-路径 P'，且可在多项式时间内构造。注意，$\{s', t'\}$ 将 $V(G_1) \setminus \{s_1, t_1\}$ 与 $V(G_2) \setminus \{s_2, t_2\}$ 分离。因此，P' 要么是 G_1 中的一条（s_1，t_1）-路径，要么是 G_2 中的一条（s_2，t_2）-路径。假设 P' 是 G_1 中的一条路径（另一种情况对称）。由于 G_1 是 G 的副本，P' 在 G 中的副本是一条长度至少为 $\frac{1}{2}f(2L)$ 的（s，t）-路径，符合引理的要求。

由于 G' 可以在多项式时间内构造，且可以在多项式（线性）时间内找到图 G' 中包含 s' 和 t' 的唯一块 B（例如参见 [41]），因此总运行时间为多项式时间。□

我们将使用一个子程序，该子程序能够找到连接两对顶点、总长度至少为 k 的两条不相交路径，其中 k 是给定参数。对我们而言，k 取常数值即可；不过，事实上，对于以总长度为参数的这个问题，存在一个 FPT 算法。根据 [24] 关于 Long (s, t)-Cycle的以下结果，可以轻易推出这个结论：寻找一条经过给定的两个顶点 s 和 t、长度至少为 k 的圈。

定理 3（[24]中的定理 4）。存在一个以 k为参数的 Long (s, t)-Cycle FPT 算法。

为完整起见，我们接下来证明这个推论。

推论 1。存在一个 FPT 算法，给定一个图 G、两对顶点 $\{s,t\}$和 $\{s',t'\}$以及参数 k，该算法能够在 G 中找到连接 $\{s,t\}$ 和 $\{s',t'\}$ 的两条不相交路径，且总长度至少为 k；或者正确判定不存在这样的路径。

证明。构造一个新图 H，它由图 G 以及另外两个顶点 u 和 v组成。顶点 u 在 H、s 和 t 中恰好有两个邻点，而 v 的邻点是 s' 和 t'。现在运行参数为 $k+4$ 的 Long (s, t)-Cycle 算法，以在 H 中寻找一条经过顶点 u 和 v 的圈。如果找到这样的圈，那么从中移除顶点 u 和 v，即可在 G 中得到一对连接 $\{s,t\}$ 和 $\{s',t'\}$ 的不相交路径，其总长度至少为 k。反过来，如果 G 中存在一对所需的不相交路径，那么它们与顶点 u 和 v 一起构成 H 中一条长度至少为 $k+4$ 的圈。□

最后，使用以下推论会很方便，它推广了 Erd˝os 和 Gallai [19, Theorem1.16] 的定理。

推论 2（[24]中的推论 3）。设 G 是一个 2-连通图，s、t 是 G 中一对不同的顶点。对于任意 $B \subseteq V(G)$，s 与 t 之间存在一条长度至少为 $\delta(G-B)$ 的路径，该路径位于 G 中。此外，存在一种多项式时间算法可以构造出一条具有该长度的路径。

4 近似（s,t）-路径

本节将给出定理 2 的正式证明。该定理指出，对于 2-连通图中最长圈近似问题的任何保证值，都可以转化为对以下问题的近似：

在最小度之上求最长的 (s,t)-路径。为方便读者，下面重述该定理的精确表述。

定理 2. 设 $f:\mathrm{R}_{+}\to\mathrm{R}+$ 是一个非递减次可加函数，并假设我们给定了一个多项式时间算法，该算法能够在给定两个顶点 s 和 t 且具有长度为 L 的最长 (s,t)-路径的图中，计算一条长度至少为 $f(L)$ 的 (s,t)-路径。那么，存在一个多项式时间算法，能够在一个 2-连通图 G 中，给定两个顶点 s 和 t 且具有长度为 L 的最长 (s,t)-路径的条件下，输出一条长度至少为 $\delta(G-\{s,t\})+\Omega(f(L-\delta(G-\{s,t\})))$ 的 (s,t)-路径。

为了获得这一结果，我们首先回顾 Erd˝os-Gallai 分解的概念，该概念在 [24] 中提出，并回顾在那里确立的若干有用性质。随后，我们介绍这一概念的递归推广，称为嵌套 Erd˝os-Gallai 分解，并说明如何借助它对图进行压缩，使得压缩图中的一条长 (s,t)-路径能够提升为原图中的一条具有较大偏移量的 (s,t)-路径。

4.1 Erd˝os-Gallai 分解

本小节介绍 Erd˝os-Gallai 分解的性质，其定义如下。定义本身以及此处给出的大部分技术性结果均归功于 [24]。为了将 [24] 中的部分结果用于我们的目的，需要对其进行修改；我们在此给出这些结果及其完整证明。请注意， [24] 中的陈述在图中还存在低度顶点子集这一更一般的情形下同样成立；此处回顾这些结果时，我们会自动简化这些陈述。接下来，我们回顾 Erd˝os-Gallai 分解的定义。

定义 1（Erd˝os-Gallai 分解与 Erd˝os-Gallai 分量， [24]中的定义 2）。设 P 是 2-连通图 图 G G中的一条路径。若两条不相交路径 P_1 和 P_2 在 G 中为 G中的 P 诱导出 Erd˝os-Gallai 分解，则称它们为

- 路径 P的形式为 $P=P_1P'P_2$，其中内部路径 P' 至少有 $\delta(G-\{s,t\})$ 条边。
- $G-V(P_1\cup P_2)$中至少有两个连通分量，并且对于每个连通分量 H，都有 $|V(H)|\geq 3$，且满足以下条件之一。(R1) H 是 2-连通的，并且在 G 中， $V(H)$与 $V(P_1)$之间的匹配最大规模为 1， $V(H)$与 $V(P_2)$之间的匹配最大规模也为 1；(R2) H 不是 2-连通的， P_1 中恰有一个顶点与 H中的顶点相邻，即 $|N_G(V(H))\cap V(P_1)|=1$，并且 H 的叶块中没有内部顶点与 P_2中的顶点相邻；(R3) 与 (R2) 相同，但互换 P_1 和 P_2 。也就是说， H 不是 2-连通的，$|N_G(V(H))\cap V(P_2)|=1$，并且 H 的叶块中没有内部顶点与 P_1 中的顶点相邻。

Erd ˝os-Gallai 分解中的 Erd˝os-Gallai 分量集合定义如下。首先，对于每个类型为 (R1) 的分量 H， H 是该 Erd˝os-Gallai 分解的 Erd˝os-Gallai 分量。其次，对于每个类型为 (R2) 或 (R3) 的 H，其所有叶块也都是该 Erd˝os-Gallai 分解的 Erd˝os-Gallai 分量。

只要存在 Erd˝os-Gallai 分解，Erd˝os-Gallai 分量就能以多种方式帮助我们界定最优解的结构。首先，Fomin 等人 [24] 指出，最长的 (s,t)-路径必然会经过一个 Erd˝os-Gallai 分量。

引理 4（ [24] 中的引理 7）。设 G 是一个图，且 P_1, P_2 为 G中一条 (s,t)-路径 P所诱导的 Erd˝os-Gallai 分解。那么 G 中存在一条最长的 (s,t)-路径，它会进入一个 Erd˝os-Gallai 分量。

接下来，由于 Erd˝os-Gallai 分量与图的其余部分之间的连接受到很大限制，因此任何 (s,t)-路径都只有一次机会进入该分量。

引理 5（ [24] 中的引理 5）。设 G 是一个 2-连通图，且 P 是 G 中的一条 (s,t)-路径。设路径 P_1、P_2 在 G 中为 P 诱导出一个 Erdős-Gallai 分解。设 M 是一个 Erdős-Gallai 分量。那么，对于 G 中的每一条 (s,t)-路径 P'，如果 P' 进入 M，则 $V(M) \cap V(P')$ 的所有顶点都在 P' 中连续出现。

为了递归处理，方便的做法是将一个 Erd˝os-Gallai 分量及其部分直接连接一并纳入，从而使这个稍大的子图表现得与一个 (s,t)-路径实例完全相同。下一个引理中的子图 K 就起到这一作用。

引理 6（ [24]中的引理 8）。路径 P_1、P_2为图 G中的一条（s，t）-路径 P 诱导出一个 Erd˝os-Gallai 分解。设 M 是 G中的一个 Erd˝os-Gallai 分量。那么存在一个多项式时间算法，输出 G 的一个 2-连通子图 K 以及两个顶点 s'、$t' \in V$（K），使得对于每一条进入 M的（s，t）-路径 P'（位于 G中），以下条件成立：

1. V（K）$=$（V（M）$\cup\{s', t'\}$）；
2. $P'[V$（K）$]$是 P'的一个（s'，t'）-子路径，也是 K中的一条（s'，t'）-路径；
3. $\delta(K - \{s', t'\}) \geq \delta(G - \{s, t, s', t'\})$.

最重要的是，Erd˝os-Gallai 分解能够刻画极端情形：此时无法以“简单”的方式延长当前的（s，t）-路径。下一个引理将这一想法形式化，指出我们可以在多项式时间内找到一条较长的（s，t）-路径，或者找到一个 Erd˝os-Gallai 分解。该引理大体上是 [24], 中引理 4 的类比，不过此处的陈述略有修改。接下来，我们回顾第 2 节中的陈述并给出证明。

引理 7. 设 G 是一个 2-连通图，且 $\delta(G - \{s,t\}) \geq 16$。存在一个多项式时间算法，能够

- 要么 输出一条长度至少为 $\min\{\frac{5}{4}\delta(G - \{s,t\}) - 3, |V(G)| - 1$ 的 (s,t)-路径 P $\}$,
- 要么输出一条 (s,t)-路径 P，其与路径 P_1, P_2 一起构成 G 中 P 的 Erd˝os-Gallai 分解。此外，G 中不存在一条 (s,t)-路径，该路径进入此 Erd˝os-Gallai 分解的至少两个 Erd˝os-Gallai 分量。

证明。对 G, s, t 应用 [24] 的引理 4，其中 $B := \{s,t\}$ 且 $k := \lfloor \delta(G - \{s,t\})/4 \rfloor - 2$。注意，该引理要求的条件 $4k + 8 \leq \delta(G - \{s,t\})$ 已满足。现在，我们要么得到一条长度为 $\delta(G - \{s,t\}) + k$ 的 (s,t)-路径，要么得到一条 (s,t)-路径 P，满足 $V(P) \cup \{s,t\} = V(G)$，要么得到所需的 Erd˝os-Gallai 分解及路径 P, P_1, P_2。显然，$\delta(G - \{s,t\}) + k > \frac{5}{4}\delta(G - \{s,t\}) - 3$，因此，如果找到一条长度为 $\delta(G - \{s,t\}) + k$ 的路径，我们就完成了。如果一条 (s,t)-路径 P 满足 $V(P) \cup \{s,t\} = V(G)$，那么它就是 G 中的一条哈密顿路径，因此第二种情况下我们也完成了。

如果我们得到一个 Erd˝os-Gallai 分解，那么还需要检查是否存在一条经过由 P_1 和 P_2 在 G 中诱导的 Erd˝os-Gallai 分解中至少两个 Erd˝os-Gallai 分量的 (s,t)-路径。为此，遍历 Erd˝os-Gallai 分解中的所有有序 Erd˝os-Gallai 分量对。对于每一对，分别对这两个分量应用引理 6

Erd˝os-Gallai 分量，并得到两个三元组 (K_1, s_1, t_1) 和 (K_2, s_2, t_2)。当且仅当存在三条连接点对 (s, a_1)、(b_1, a_2)、(b_2, t) 的不相交路径时，才存在一条按照该分量对给定顺序依次进入两个 Erd˝os-Gallai 分量的 (s,t)-路径；其中，对每个 $i \in [2]$，(a_i, b_i) 是 (s_i, t_i) 的一个排列。

固定这些置换后，如果存在这样的路径，就可以利用 Robertson 和 Seymour 针对图 G 的著名算法，在多项式时间内找到它们。由于对于每个 $i \in [2]$，$\delta(K_i - \{s_i, t_i\}) \geq \delta(G - \{s,t\}) - 2$，这三条路径连同 K_i 内的两条 (s_i, t_i)-路径，可以合并成一条长度至少为 $2\delta(G - \{s,t\}) - 4 > \frac{5}{4}\delta(G - \{s,t\}) - 3$ 的 (s,t)-路径，因此算法会输出这条路径并停止。如果在所有步骤中都没有找到互不相交的三条路径，那么确实不存在进入至少两个 Erd˝os-Gallai 分量的 (s,t)-路径。 □

最后，为了处理不进入任何 Erd˝os-Gallai 分量的 (s,t)-路径，可以注意以下事实。直观而言，这样的路径应该远非最优，因为经过一个 Erd˝os-Gallai 分量会立即使路径至少多出 $\delta(G - \{s,t\}) - \mathcal{O}(1)$ 条边。本小节的最后一个引理将精确说明，如何以这种方式“提升”避开 Erd˝os-Gallai 分量的路径长度。为了得到这一结果，我们首先需要 [24] 中的一个技术引理，它能在可分离分量内得到长路径。

引理 8（ [24]中的引理 6）。设 H 是一个至少有一个割点的连通图。设 I 是 H的所有叶块的内部顶点集合。设 $S \subseteq V（H）\setminus I$ 将$V（H）$中的至少一个顶点与 I 在 H中分隔开。对于任意不是 H 的叶块的内部顶点的顶点 v，存在 H 的一个叶块的割点 c，以及 H中的一条（c，v）路径，其长度至少为$\frac{1}{2}$（$\delta（H）- |S|$）。这条路径可以在多项式时间内构造。

现在我们转向避开 Erd˝os-Gallai 分量的 (s,t)-路径。以下引理 9 已在第 2 节中陈述过，这里我们重述其内容并给出证明。

引理 9. 设 P 是一条长度至多为 $\delta(G - \{s,t\})$ 的 (s,t)-路径，且两条路径 P_1、P_2 在 G 中为 P 诱导出一个 Erd˝os-Gallai 分解。存在一种多项式时间算法，该算法给定 G 中一条长度至少为 $4k+5$ 的 (s,t)- 路径，且该路径不进入任何 Erd˝os-Gallai 分量，输出 G 中一条长度至少为 $\min\{\delta(G - \{s,t\})$、$\frac{3}{2}\delta(G - \{s,t\})$ 的路径。

证明。为清楚起见，我们将 $\delta := \delta(G - \{s,t\})$ 记作 Q。令 s 为图 G 中给定的 (t, G)-路径。记 S 为 k 上前 Q 个顶点的集合，记 T 为 k 上最后 Q 个顶点的集合。令 s' 为 Q 上第一个不属于 S 的顶点，令 t' 为 Q 上最后一个不属于 T 的顶点。由于 Q 包含多于 $2k$ 个顶点，s'，$t' \notin S \cup T$。s 的 (s', Q)-子路径的长度与 t' 的 (t, Q)-子路径的长度均为 k。

P_1 与 P_2 的总长度至多为 k，因此 $|V(P_1) \cup V(P_2)| \leq k + 2$。$s'$ 的 (t', Q)-子路径的长度至少为 $2k + 5 > 2|V(P_1) \cup V(P_2)|$。因此，该子路径至少包含一条 G 的边，且该边不与 $|V(P_1) \cup V(P_2)|$ 中的顶点关联。将这条边的端点记为 u 和 v。由于 Q 不进入任何 Erdős-Gallai 分量，这条边是图 $G - V$ 的某个可分连通分量 H 的非叶块中的一条边。分量 H 对应于 Erdős-Gallai 分解定义中的 (R2) 或 (R3)。不失一般性，假设 H 对应于 (R2)。

现在我们根据 $H - (S \cup T)$ 的结构分两种情况讨论。如果 $S \cup T$将 u 或v 与 H 中叶块的所有割点分离，那么在 H 中就有一个大小为 $2k$ 的集合满足引理 8 的条件。取 H 中一个在 G 中有邻点位于 $V(P_2)$ 的顶点 w。根据引理 8，存在一条长度至少为

$$\frac{1}{2}\delta(H) - 2k \geq \frac{1}{2}\delta(G - V(P_1 \cup P_2)) - 2k \geq \frac{1}{2}\delta(G - \{s,t\}) - \frac{5}{2}k - 1$$

的路径，位于 H 中，其中 c 是 H 的某个叶块 L 的割点。在这个叶块中，有一个顶点z，它在 $V(P_1)$ 中有一个邻点。根据推论 2，在 L 内有一条长度至少为 $\delta(L-c) \geq \delta(G-\{s,t\}) - 2$ 的 (c,z)-路径。将这两条路径合并，得到一条长度至少为$\frac{3}{2}\delta(G-\{s,t\}) - \frac{5}{2}k - 3$ 的 (z,w)-路径，位于 H 中。最后，在此路径前接上 P_1 的一个前缀，该前缀连接 s 与 z 的邻点；并在此路径后接上 P_2 的一个后缀，该后缀连接 w 的邻点与 t。由于 $s \neq z$ 和 $w \neq t$，路径长度至少增加两。所得路径是一条长度至少为 $\frac{3}{2}\delta(G-\{s,t\}) - \frac{5}{2}k - 1.$ 的 (s,t)-路径

第二种情况是：从 v 出发，可以在避开 $S \cup T$中的顶点的同时，到达图 H 中某个叶块 L 的割点 c。注意，根据 Erd˝os-Gallai 分解的性质，$V(Q) \cap V(L-c) = \emptyset$。接着，在 $L-c$ 中任取一个在 $V(P_1)$中有邻点的顶点 w。现在按如下方式构造一条 (v,s)-路径 Q'。首先，沿着图 H –$(S \cup T)$ 中的任意一条 (v,c)-路径前进。然后，继续沿着 $L-c$ 内部一条长度至少为 $\delta(L-c) \geq \delta(G-\{s,t\}) - 2$ 的 (c,w)-路径前进；根据推论 2，这样的路径存在。注意，这条路径与 Q没有公共顶点。最后，从 w 走到 P_1 中 w 的邻点，再沿着 P_1 反向走到 s，以完成 Q'。

令 x 为 Q' 上位于 c 之前、且属于 $V(Q)$的最后一个顶点。令 y 为 Q' 上位于 w之后、且属于 $V(Q)$的第一个顶点。由于 $v,s \in V(Q)$，x,y的定义都是恰当的。考虑 Q'的 (x,y)-子路径。它严格包含 L内的 (c,w)-路径，因此其长度至少为 $\delta(G-\{s,t\}) - 1$。此外，Q 的 (s,x)-子路径长度与 Q 的 (x,t)-子路径长度均至少为 k，因为 $x \notin S \cup T$。

现在，我们在 G中构造一条较长的(s,t)-路径。若 y 包含在 Q的(s,x)-子路径中，则按以下方式构造(s,t)-路径：沿着 P_1 从 s 走到 y，然后沿着 Q' 从 y 向后走到 x，最后沿着 Q 从 x 走到 t。这条路径的长度至少为$\delta(G-\{s,t\}) - 1 + k$。若 y属于 Q的(x,t)-子路径，则先取Q的(s,x)-子路径，然后沿着 Q' 从 x 走到 y，最后沿着 P_2 从 y 走到 t。这条路径的长度也至少为 $k + \delta(G-\{s,t\}) - 1$。证明完毕。 □

4.2 定理 2 的证明

为处理解的递归结构，我们引入 Erd˝os-Gallai 分解的以下嵌套推广。直观而言，它刻画了前一小节中的结构性观察如何使我们能够递归地构造 Erd˝os-Gallai 分解，以期找到一条较长的(s,t)-路径。嵌套 Erd˝os-Gallai 分解的示例见图 1。我们回顾第 2 节中的正式定义。

定义 2（嵌套 Erd˝os-Gallai 分解）。三元组序列 $(G_1,s_1,t_1),(G_2,s_2,t_2),\ldots,(G_\ell,s_\ell,t_\ell)$ 称为 G 和两个顶点 $s,t \in V(G)$ 的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解，若

- $(G_1,s_1,t_1) = (G,s,t)$;
- 对于每个 $i \in [\ell]$，要么
  - $\delta(G_i - \{s_i,t_i\}) < 16$，或 – 将引理 7 应用于 G_i、s_i、t_i，可得到一条路径 P_i，其长度至少为 $\min\{\frac{5}{4}\delta(G_i-\{s_i,t_i\}) - 3, |V(G_i)| - 1\}$，位于 G_i 中；或 – 将引理 7 应用于 G_i、s_i、t_i，可得到一条路径 P_i 以及两条路径 $P_{i,1}$、$P_{i,2}$，它们在 G_i 中为 P_i 诱导出一个 Erd˝os-Gallai 分解；对于该分解的每个 Erd˝os-Gallai 分量 M，存在 $j > i$，使得（G_j、s_j、t_j）是将引理 6 应用于 M（位于 G_i 中）的结果。在此情况下，我们称 G_i 已被分解。

- 对于每个 $i \in \{2, \ldots, \ell\}$，存在 $e(i) < i$，使得（G_i、s_i、t_i）是将引理 6 应用于 Erdős-Gallai 分解中的某个 Erdős-Gallai 分量所得的结果，该分解是对$G_{e(i)}$ 进行的，适用于 $P_{e(i)}$。

定理 2 的证明分为两步：首先，我们说明如何为给定的图 G 获得嵌套的 Erdős-Gallai 分解；然后，我们利用该嵌套的 Erdős-Gallai 分解，递归地构造最长（s，t）-路径的良好近似。第一部分只需在每个 Erdős-Gallai 分量上递归应用引理 7，直到各分量无法再分解为止。第二部分是主要难点，本节余下内容将重点讨论这一部分。为完整起见，我们首先证明，嵌套的 Erdős-Gallai 分解总能在多项式时间内构造出来。

引理 10. 存在一个多项式时间算法，该算法给定一个 2-连通图 G 及其两个顶点 s 和 t，可以输出针对 G、s、t 的嵌套 Erdős-Gallai 分解。

证明。该算法以三元组 $(G_1, s_1, t_1) = (G, s, t)$ 为起点递归执行。对于给定的三元组 (G_i, s_i, t_i)，如果 $\delta(G_i - \{s_i, t_i\}) < 16$，算法停止。否则，在 (G_i, s_i, t_i) 上调用引理 7 的算法。如果该算法返回一个长度至少为 $\frac{5}{4}\delta(G_i - \{s_i, t_i\}) - 3$ 的路径 P_i，则算法停止。另一方面，如果返回一个 Erdős-Gallai 分解，则对每个 Erdős-Gallai 分量 M，在 M 上运行引理 引理 6 的算法，以获得一个三元组 (G_j, s_j, t_j)，其中 j 是迄今生成的三元组中的最小可用索引。在此步骤生成的每个三元组上递归运行主算法。

根据定义，上述算法会生成一个嵌套的 Erdős-Gallai 分解。为证明其运行时间是多项式的，首先注意，不执行后续递归调用而运行该算法，显然需要多项式时间。假设该运行时间有上界 αn^c，其中 $\alpha > 0$ 为某个常数，且 $c \geq 1$，其中 $n = |V(G) \setminus \{s, t\}|$，而 (G, s, t) 是当前实例。我们对所得嵌套 Erdős-Gallai 分解的深度进行归纳，证明递归算法的运行时间至多为 αn^{c+1}。如果该实例不会产生任何递归调用，则结论显然成立。否则，假设产生了 ℓ 个新实例 $(G_{j_1}, s_{j_1}, t_{j_1}), \ldots, (G_{j_\ell}, s_{j_\ell}, t_{j_\ell})$，记 $n_i = |V(G_{j_i} \setminus \{s_{j_i}, t_{j_i}\}|$。注意，由于 Erdős-Gallai 分解中总是至少有 2 个分量，因此 $\ell \geq 2$。根据归纳法，运行时间有上界 $\alpha \cdot \left(n^c + \sum_{i=1}^{\ell} n_i^{c+1}\right)$。现在我们来界定 $\sum_{i=1}^{\ell} n_i^{c+1}$：首先注意到 $\sum_{i=1}^{\ell} n_i \leq n$，因为所有集合 $V(G_{j_i} \setminus \{s_{j_i}, t_{j_i}\}$ 两两不交，且不包含 s 或 t。我们将使用 [24] 中证明的以下数值观察。

断言 1（ [24] 中的命题 3）。设 $a_1, a_2, \ldots, a_q$ 是一列正整数，满足 $\sum_{i=1}^{q} a_i = n$。设 $x > 1$ 为一个整数。则 $\sum_{i=1}^{q} a_i^x \leq (n-1)^x + 1 \leq n^x - n^{x-1}$。

根据断言 1，我们可以将运行时间界定为

$$\alpha \cdot \left(n^c + \sum_{i=1}^{\ell} n_i^{c+1}\right) \leq \alpha \cdot \left(n^c + n^{c+1} - n^c\right) = \alpha n^{c+1},$$

完成证明。

□

显然，由此可知，引理 10 返回的嵌套 Erdős-Gallai 分解的规模也是多项式的。还要注意，构造算法会对所有足够大的 G_i 调用引理 7，因此在下文中我们假设相应的路径 P_i 已经计算完成。

现在我们着重讨论如何利用构造出的嵌套 Erdős-Gallai 分解来近似最长的 (s, t)-路径。首先，我们介绍算法 long nested st path：给定图 G 的一个嵌套 Erdős-Gallai 分解，该算法通过遍历此分解来计算一条较长的 (s, t)-路径。

long nested st path 的伪代码见算法 3。直观地说，该算法首先计算图 G 的一种压缩 H，使其符合嵌套 Erd˝os-Gallai 分解：未被分解的分量会被替换为单边，而访问某个分量时“不可避免”要经过的边则会被收缩。此压缩的计算封装在算法 1 中的 nested compress 函数里。作为子程序，该函数使用推论 1 给出的两条长不相交路径算法；该算法会在给定的顶点对之间，找出两条长度至少为给定值的不相交路径。

接下来，使用黑盒近似算法 long st path approx 计算 H 中的 (s,t)-路径 Q。随后，函数 nested decompress 在原图 G 中重构该路径，伪代码见算法 2。稍后我们将论证（引理 11），H 中任何长度为 r 的 (s,t)-路径都能以这种方式在 G 中得到一条长度至少为 $\delta(G-\{s,t\}) + r/8 - 3$ 的 (s,t)-路径。最后，要么 H 中 Q 的长度足够大，重构出的路径提供所需的近似，要么可以在某个分量中以一种“简单”的方式找到一条长路径，然后将其任意连接到 $\{s,t\}$。具体而言，在该分量中，只需选择由 long st path approx 计算出的最长路径的一个近似，或选择算法根据推论 2 返回的一条长 Erd˝os–Gallai 路径 long-eg st path。因此，在最后几行中，long nested st path 检查这些路径中是否有任何一条比重构出的路径 Q 更长。通过使用推论 1 给出的算法 two long disjoint paths（参数为 0），将分量内部的路径扩展为 G 中的一条 $\{s,t\}$-路径。

嵌套压缩$((G_1,s_1,t_1),(G_2,s_2,t_2)\ldots,(G_\ell,s_\ell,t_\ell))$
输入：针对 G、s 和 t 的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解。
输出：压缩图 H。
$H \longleftarrow G$;
对每个 $i \in \{2,\ldots,\ell\}$ 执行
  $j \longleftarrow e(i)$;
  $d_i \longleftarrow |\{s_j,t_j\} \setminus \{s_i,t_i\}|$;
  如果两条长不相交路径 $(G_i,\ \{s_j,t_j\},\ \{s_i,t_i\},\ d_i+1)$ 是 No，那么
    收缩 H 中 $\{s_j,t_j\}$ 和 $\{s_i,t_i\}$ 之间最大匹配的所有边;
  end
  如果 G_i 未被分解，则
    从 H 中移除 $V(G_i) \setminus \{s_i,t_i\}$ 中的所有顶点;
    添加边 s_it_i 到 H 并将其标记为 G_i;
  end
end
返回 H;

算法 1：利用给定的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解压缩给定的图 G。

现在，我们的目标是证明，long nested st path 算法构造的路径确实是 G 中最长 (s,t)-路径的理想近似。在本节余下部分，设 $G_1,\ldots,G_\ell$ 是给定的、针对 G,s,t 的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解。关于嵌套 Erd˝os-Gallai 分解，一个重要的直觉是：随着我们深入嵌套的 Erd˝os-Gallai 分量，分量 $\delta(G_i \setminus \{s_i,t_i\})$ 的最小度会降低，但与此同时，我们在从 $\{s,t\}$ 到 $\{s_i,t_i\}$ 的过程中收集到的边会越来越多。我们引入一些值来帮助衡量嵌套分量之间的这种差异：对每个 $i \in [\ell]$，记作 $d_i = |\{s_{e(i)},t_{e(i)}\} \setminus \{s_i,t_i\}|$。特别地，根据引理 6，我们知道对任意 $i \in [\ell]$，

嵌套解压$((G_1, s_1, t_1), (G_2, s_2, t_2) \ldots, (G_\ell, s_\ell, t_\ell)\ H, Q)$

输入：针对 G、s 和 t 的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解，以及压缩图 H 以及 H 中一条长度为 r 的 (s,t)-路径 Q。

输出：在 G 中，一条长度至少为 $\delta(G-\{s,t\})$ 的 (s,t)-路径 $+\,r/8-3$。

对于满足 $d_i > 0$ 且 Q 进入 G_i 的每个 $i \in \{2,\ldots,\ell\}$，执行其中的操作。

  $j \longleftarrow e(i)$;

  如果图 H 中连接 $\{s_j, t_j\}$ 和 $\{s_i, t_i\}$ 的边已被收缩，那么

    用相应的收缩边替换图 Q 中的 s_i 和/或 t_i；

  else

    S_1、$S_2 \longleftarrow$：两条长不相交路径（G、$\{s_j, t_j\}$、$\{s_i, t_i\}$、$d_i + 1$）；

    如果 Q 的长度增加，则用 S_1 和 S_2 替换 Q 中从 $\{s_j, t_j\}$ 到 $\{s_i, t_i\}$ 的两条子路径 Q 的长度增加;

  end

结束

$h \longleftarrow$ 使 Q 进入 G_h的最大 $h \in [\ell]$；

如果 G_h 未被分解，则

  将 $s_h t_h$ 中的 Q 替换为 P_h;

否则

  $k' \longleftarrow \lfloor (|E(Q) \cap E(G_h)| - 5)/8 \rfloor$;

  如果 $|E(P_h)| \geq \delta(G_h - \{s_h, t_h\}) + k'$ 则

    $R \longleftarrow P_h$;

  else

    $R \longleftarrow$ 将引理 9 应用于 G_h、P_h 和 Q 的（s_h，t_h）-子路径所得的结果;

  end

  如果 Q 的（s_h，t_h）-子路径比 R 短，则

    用 R 替换 Q 的（s_h，t_h）-子路径;

  end

结束

返回 Q;

算法 2：将图 H 中的一条路径解压为图 G中的一条长路径的算法。

$\delta(G_i) \geq \delta(G_{e(i)}) - d_i$。另一方面，任何连接 $\{s_{e(i)}, t_{e(i)}\}$ 到$\{s_i, t_i\}$ 的不相交路径对都至少包含 d_i 条边。由此得到以下关于如何将分量 G_j中的 (s_j, t_j)-路径延伸为 G中的 (s,t)-路径的简单观察。

断言 2. 对于每个 $j \in [\ell]$，令 $G_{j_1}, \ldots, G_{j_c}$满足 $j_c = j$且 $j_1 = 1$，并且对于每个 $i \in [c-1]$，$e(j_{i+1}) = j_i$。令 P 为图 G_j 中的一条 (s_j, t_j)- 路径。然后，将 P 与连接 $\{s,t\}$ 和 $\{s_j, t_j\}$ 的任意一对不相交路径组合，可得到图 G中的一条 (s,t)-路径，其长度至少为 $|E(P)| + \sum_{i\in[c-1]} d_{j_{i+1}}$。

然而，也可能存在连接嵌套分量 $G_{e(i)}$ and G_i 的更长路径。当我们在算法 1 中构造压缩图 H 时，会区分两种情况。其一，任意一对这样的路径的总长度均为 d_i，这意味着唯一的选择是使用 $\{s_{e(i)}, t_{e(i)}\}$ 与 $\{s_i, t_i\}$之间匹配的边。在这种情况下，我们只需收缩这些边，因为我们知道从 $G_{e(i)}$到达 G_i 没有其他选择。其二，存在一对总长度至少为 $d_i + 1$的不相交路径。这种情况对我们有另一种好处：由于我们能在多项式时间内找到这样一对路径，因此从 $G_{e(i)}$到 G_i时，我们可以经过至少 $d_i + 1$ 条边，同时最小度最多只会损失 d_i。这种结构上的二分性娱乐开户

long nested st path($(G_1, s_1, t_1), (G_2, s_2, t_2) \ldots, (G_\ell, s_\ell, t_\ell)$) 输入：针对 G、s 和 t 的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解。输出：在 G 中一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + f(k)/32 - 3$ 的 (s,t)- 路径，其中 $k = L - \delta(G - \{s,t\})$ 表示最长 (s,t)- 路径的长度 L，该路径位于 G 中。
3.1 $H \longleftarrow$ 嵌套压缩 $((G_1, s_1, t_1), (G_2, s_2, t_2) \ldots, (G_\ell, s_\ell, t_\ell))$; 3.2 $Q \longleftarrow$ 长 st 路径近似 (H, s, t); 3.3 $Q \longleftarrow$ 嵌套解压$((G_1, s_1, t_1), (G_2, s_2, t_2) \ldots, (G_\ell, s_\ell, t_\ell)\ H, Q)$; 3.4 对每个 $i \in [\ell]$ 执行
3.5 $P_i \longleftarrow$ {long st path approx(G_i, s_i, t_i)、long eg st path(G_i, s_i, t_i) 中较长者}; 3.
6 $Q \longleftarrow$ 两条长不相交路径$(G, \{s,t\}, \{s_i, t_i\}, 0)$ 中较长者 $\cup P_i$}; 3.7 结束 3.8 返回 Q;

算法 3：在给定嵌套 Erd˝os-Gallai 分解的 2-连通图中寻找一条长 (s,t)-路径的算法。

两个嵌套分量之间的“切片”是关键所在，它使我们能够将图 H 中一条 (s,t)-路径的长度提升至超过图 G 的最小度一个偏移量。我们将在下一个引理中正式证明压缩图 H 和嵌套解压过程的这一关键性质。

引理 11. *nested_decompress* 过程将图 H 中一条长度为 r 的 (s,t)-路径 Q 转换为图 G 中一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + r/8 - 3$ 的 (s,t)-路径。

证明. 注意，在嵌套 Erd˝os-Gallai 分解的树中，路径 Q 会经过一条由分量 G_i 组成的有根子路径。也就是说，存在指标 $j_1, j_2, \ldots, j_c \in [\ell]$，使得对于每个 $i \in [c-1]$，$j_1 = 1$ 和 $e(j_{i+1}) = j_i$。这是因为根据引理 7，在每一层的 Erd˝os-Gallai 分解中，Q 至多经过一个 Erd˝os-Gallai 分量。这里，如果 Q 含有一条未在 H 中收缩的 G_i 的边，我们就称 Q 经过分量 G_i；对于未分解分量 G_i，这意味着 Q 在 H 中含有边 $s_i t_i$。

根据引理 6，$\delta(G_{j_{i+1}}) \geq \delta(G_{j_i}) - d_{j_{i+1}}$。令 $h \in [\ell]$ 为满足 Q 进入 G_h，$h = j_c$ 的最大整数。记 p 为 $E(Q) \setminus E(G_h)$ 中边的数量，记 y 为 Q 的 (s_h, t_h)-子路径的长度，则 $p + q = r$。

现在我们分析在第 2.1–2.9 行执行替换操作后 Q 的长度。记 Y 为所有 $i \in [c-1]$ 的集合，使得第 1.6 行未在 $\{s_{j_i}, t_{j_i}\}$ 与 $\{s_{j_{i+1}}, t_{j_{i+1}}\}$ 之间进行收缩。对于每个满足 $d_{j_{i+1}} > 0$ 的 $i \in Y$，在 Q 中对 $\{s_{j_i}, t_{j_i}\}$ 与 $\{s_{j_{i+1}}, t_{j_{i+1}}\}$ 执行第 2.7 行的替换操作可得到

$$|E(Q) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| \geq d_{j_{i+1}} + 1 \geq 3d_{j_{i+1}}/2.$$

令 p' 表示上述 $p' \geq \frac{3}{2} \sum_{i \in Y} d_{j_{i+1}}$ 中所有这些替换完成后，G_h 之外的 Q 长度。此外，由于只有在替换能使路径变长时才会进行替换，因此 $p' \geq p$。

记 $X := [c-1] \setminus Y$ 为所有 $i \in [c-1]$ 的集合，其中在第 1.6 行中对 $\{s_{j_i}, t_{j_i}\}$ 和 $\{s_{j_{i+1}}, t_{j_{i+1}}\}$ 之间进行了收缩。对于每个 $i \in X$，算法会在 Q 中反转第 1.6 行执行的相应边收缩。这使 Q 的长度增加 $d_{j_{i+1}}$，因此在第 2.9 行之后有 $|E(Q) \setminus E(G_h)| \geq p' + \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}}$.

我们现在注意到，G_h 中的任何较长的（s_h，t_h）-子路径都可以与 Q 结合，从而在偏移量中至少保留 p 的一个常数比例。

断言 3. 在第 2.9 行之后，将 Q 中的（s_h， t_h）-子路径替换为 G_h 中长度为 δ（G_h –{s_h, t_h}）的路径 P $+ k'$，其中 k' 为非负整数，可得到 G 中的一条（ s， t ） - 路径，其长度至少为

$$\delta(G - \{s,t\}) + k' + p/3.$$

断言 3 的证明。所得路径的长度至少为

$$\begin{aligned}|E(Q) \setminus E(G_j)| + |E(P)| &\geq p' + \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}} + \delta(G_h - \{s_h, t_h\}) + k' \\ &\geq p' + \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}} + \delta(G - \{s,t\}) - \sum_{i \in [c-1]} d_{j_{i+1}} + k' \geq \delta(G - \{s,t\}) + k' + p' - \sum_{i \in Y} d_{j_{i+1}} \\ &\geq \delta(G - \{s,t\}) + k' + p/3.\end{aligned}$$

注意，最后一个不等式成立，因为 p' 至少为 $\frac{3}{2}\sum_{i \in Y} d_{j_{i+1}}$ ，也至少为 p。此时得到的路径是图 G 中的一条 (s,t)-路径，其中可能包含一些收缩边，因为并未逆转所有边收缩。逆转所有其余影响 Q 的边收缩，得到图 G 中一条长度至少相同的 (s,t)-路径。

⌟

为了估算 (s_h, t_h)-子路径的长度，考虑两种情况，具体取决于G_h的类型。

G_h 未被分解。在这种情况下， Q包含 H中的边 $s_h t_h$ ，并且在第 2.12 行中，该边被替换为路径 P_h。根据断言 3，由此得到一条长度至少为 $\delta(G-\{s,t\})+(r-1)/3$的路径，因为 P_h 的长度至少为 $\delta(G_h - \{s_h, t_h\})$，并且 $p = r - 1$。

G_h 被分解。根据 j 的选取， Q 的 (s_h, t_h)-子路径不会进入由 $P_{j,1}$ 和 $P_{j,2}$ 在 G_h 中所诱导的 Erd″os-Gallai 分解中的任何 Erd″os-Gallai 分量。

根据断言 3， G_h 内一条长度为 $\delta(G_h - \{s_h, t_h\}) + k'$ 的 (s_h, t_h)-路径与 Q 的外侧部分结合，可得到 G 内一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + p/3 + k'$ 的 (s,t)-路径。现在我们着重寻找 G_h 内一条足够长的 (s_h, t_h)-路径。

令 $k' := \lfloor (q-5)/8 \rfloor$，因此 $q \geq 8k' + 5 \geq 4k' + 5$。若 P_h 比 $\delta(G_h - \{s_h, t_h\}) + k'$ 更长，则将 P_h 代入断言 3，可得到一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + p/3 + k' + 1 \geq \delta(G - \{s,t\}) + p/3 + (q-5)/8 > \delta(G - \{s,t\}) + r/8 - 1$ 的 (s,t)-路径。否则，我们对 G_h、 P_h 以及 Q 的 (s_h, t_h)-子路径应用引理 9，从而在 G_h 中得到一条 (s_h, t_h)-路径 R 。

若 R 的长度至少为 $\delta(G_h - \{s_h, t_h\}) + k' - 1$，则由断言 3 可得所需的下界 $\delta(G - \{s,t\}) + r/8 - 3$。否则， $\frac{1}{2}\delta(G_h - \{s_h, t_h\}) - \frac{5}{2}k' < k'$，于是 $7k' > \delta(G_h - \{s_h, t_h\})$。由此可得 $q > \delta(G_h - \{s_h, t_h\}) + q/8 + 5$。因此，将断言 3 应用于 Q 的初始 (s_h, t_h)-子路径，可得到一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + p/3 + q/8 + 5 > \delta(G - \{s,t\}) + r/8$的路径。由于算法 2 取 R 与 Q的原始子路径中较长者，两种情况都已涵盖。

□

另一个有用的观察是，在一个已分解分量与嵌套分量之间的“切片”中，任意一条路径至多有两条边会被收缩。请注意，这一点并非显而易见，因为通往每个嵌套分量的两条边都有可能被收缩。

断言 4. 设 Q 是分解图 G_j 内的一条 (s_j, t_j)-路径。那么，除非可能收缩 Q 的第一条边和最后一条边，否则所有边 $E(Q) \cap E(G_j) \setminus \bigcup_{e\ (i)\ =j} E(G_i)$ 在 H 中均保持不变。

断言 4 的证明。设 i 满足：在第 1.6 行中，对 G_i 进行了收缩，且 $e(i) = j$ 和 $d_i > 0$。$\{s_j, t_j\}$ 与 $\{s_i, t_i\}$ 之间不存在两条总长度至少为 $d_i + 1$ 的不相交路径。

不失一般性，我们假设 $s_i \neq s_j$、$t_i \neq s_j$、$s_i \neq t_j$ 以及边 $s_j s_i$ 被收缩。若 $s_i \notin V(Q)$，则 Q 在 H中不受影响。我们假设 $s_i \in V(Q)$。若 s_i 是 $V(Q)$ 中的第二个顶点，则 $s_j s_i$ 是 $V(Q)$ 中的第一条边，符合要求。

现在假设 s_i 不是 Q中的第二个顶点。那么，Q 的 (s_j, s_i) 子路径长度至少为二。若 t_i 不属于这条子路径，我们就在 G_j中加入一条平凡的（长度为零或一的）(t_i, t_j) 路径，从而得到两条连接 $\{s_j, t_j\}$和 $\{s_i, t_i\}$的不相交路径，其总长度至少为 $2 + |\{t_i, t_j\}| - 1 > d_i$，这就产生了矛盾。

因此，t_i位于 Q的 (s_j, s_i) 子路径上。于是 $t_i \neq t_j$，所以 $d_i = 2$、s_i、t_i、s_j、t_j两两不同。我们有 Q的一条 (s_j, t_i) 子路径，以及 Q的一条 (s_i, t_j) 子路径，二者不相交。若其中一条长度至少为二，那么我们就有两条不相交路径，其总长度大于 d_i。因此，$s_j t_i$ 和 $s_i t_j$ 分别是 Q中的第一条边和最后一条边。该断言得证。

⌟

现在我们可以证明主要引理，该引理给出了算法 3 返回的 (s,t)-路径的长度下界。

引理 12. *long_nested_st_path*在 G 中输出一条长度至少为 $\delta(G - \{s,t\}) + f(k)/32 - 3$ 的 (s,t)-路径，其中 $k = L - \delta(G - \{s,t\})$，且 L 是 G 中最长 (s,t)-路径的长度。

证明. 令 T 为 G 中最长的 (s,t)-路径，$|E(T)| = L = \delta(G - \{s,t\}) + k$。我们的目标是证明：要么 T 在 H 中产生一条足够长的路径，从而可以应用引理 11；要么得出结论：经过收缩后，路径的大部分留在某个 Erd˝os-Gallai 分量内，也就是访问到的最深分量。对于后一种情况，我们将证明，只需取该分量内的一条长路径即可。

现在，我们针对 T 引入一些记号，依照与引理 11 的证明类似的方式，基于嵌套的 Erd˝os-Gallai 分解结构。令 $h \in [\ell]$ 为满足 T 进入G_h的最大整数。令 $j_1, j_2, \ldots, j_c$ 满足：对每个 $i \in [c-1]$，$j_c = j$, $j_1 = 1$ 和 $e(j_{i+1}) = j_i$。记Y为所有满足以下条件的 $i \in [c-1]$ 构成的集合：在 $\{s_{j_i}, t_{j_i}\}$ 与$\{s_{j_{i+1}}, t_{j_{i+1}}\}$之间，Line 1.6 中未执行任何收缩。记 $X := [c-1] \setminus Y$。

考察图 H 中位于两个连续嵌套分量 G_{j_i} 和 $G_{j_{i+1}}$之间的路径 T 会发生什么。由于 T 是 G 中最长的 (s,t)-路径，$E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})$ 中的边构成了 $\{s_{j_i}, t_{j_i}\}$ 与 $\{s_{j_{i+1}}, t_{j_{i+1}}\}$ 之间总长度尽可能长的两条不相交路径。如果$|E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| = d_{j_{i+1}}$，则 $E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})$ 中的所有边都会在 H 中被收缩。

否则，$|E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| > d_{j_{i+1}}$。根据断言 4，$E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})$中的所有边都存在于 H中，至多有 $d_{j_{i+1}}$ 条边（第一条和/或最后一条边）可能不存在。此外，回顾嵌套的 Erd˝os-Gallai 分解的性质，T 不会进入任何满足 $e(i) = j_i$ 的 G_i，除非是$G_{j_{i+1}}$。因此，移除未分解分量的内部顶点不会影响 $E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})$中的边。由此，在这种情况下，至少有 $|E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| - d_{j_{i+1}}$条边存在于 H中，这至少是 $E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})$中边数的三分之一，因为 $d_{j_{i+1}} \leq 2$。

令 T' 为对 H应用所有收缩后得到的路径 T。若 G_h 未被分解，则假设 T' 包含标记为 G_h 的边 $s_h t_h$。由上述内容可得

$$|E(T') \setminus E(G_h)| \geq \sum_{i \in [c-1]} |E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| - d_{j_{i+1}} \geq \frac{1}{3}(|E(T) \setminus E(G_h)| - \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}}).$$

最后一个不等式成立，因为对于每个带有 $d_{j_{i+1}} > 0$、$|E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| - d_{j_{i+1}}$ 的 $i \in Y$，$\frac{1}{3}|E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})|$ 至少如此，而对于所有其余指标 i，$|E(T) \cap E(G_{j_i}) \setminus E(G_{j_{i+1}})| =$

$d_{j_{i+1}}$。记 $p := |E(T') \setminus E(G_h)|$，并由上述内容得到等价的

$$|E(T) \setminus E(G_h)| \leq 3p + \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}}. \tag{1}$$

如果 $p \geq k/4$，那么 H 中存在一条长度至少为 $k/4+1$ 的 (s,t)-路径。在这种情况下，long nested st path 在第 3.2 行对 H 中最长的 (s,t)-路径进行近似，可得到一条长度至少为 $f\left(k/4+1\right) \geq f\left(k\right)/4$ 的路径。根据引理 11，对这条路径运行嵌套解压后，可在 G 中得到一条长度至少为 $\delta\left(G-\{s,t\}\right)+f\left(k\right)/32-3$ 的 (s,t)-路径，因此这种情况下证明完成。

否则，$p < k/4$。用 T_h 表示 T 的 (s_h,t_h)-子路径。为简单起见，记 $\delta := \delta\left(G-\{s,t\}\right)$，且 $\delta_h := \delta\left(G_h-\{s_h,t_h\}\right)$。我们分两种情况讨论。

G_h 被分解。在这种情况下，T_h 不会进入 G_h 的任何 Erd˝os-Gallai 分量。根据断言 4，T_h 中至多有两条边可在 H 中被收缩，将这类边的数量记为 d'_h。此外，至少有一条边没有被收缩，因此 $|E\left(T_h\right)|-d'_h \geq |E\left(T_h\right)|/3$。于是，$T'$ 是 H 中一条长度至少为 $p+|E\left(T_h\right)|-d'_h \geq \frac{1}{3}\left(|E\left(T\right)|-\sum_{i\in X} d_{j_{i+1}}\right)$ 的 (s,t)-路径。如果 $\sum_{i\in X} d_{j_{i+1}} \geq \delta + k/4 - 3$，那么无论第 3.5 行中 P_h 的长度如何，long nested st path 都会根据断言 2 输出一条长度至少为 $\delta + k/4 - 3$ 的 (s,t)-路径。

否则，T' 是 H 中一条长度至少为 $\frac{1}{3}(3k/4+3) = k/4+1$ 的 (s,t)-路径。与情形 $p \geq k/4$ 类似，long nested st path 随后会找到一条长度至少为 $f(k)/4$ 的路径，而 nested decompress 返回的路径 Q 的长度至少为 $\delta(G-\{s,t\})+f(k)/32-3$。

G_h 未被分解。这里，我们的目标是证明，在 G_h 中取一条在第 3.5 行计算出的 (s_h,t_h)-路径，再加上从 $\{s,t\}$ 到 $\{s_h,t_h\}$ 的任意连接，就能在 G 中得到一条足够长的 (s,t)-路径。令 $k_h := |E(T_h)| - \delta_h$。注意，根据 T 的选取，T_h 是 G_h 中最长的 (s_h,t_h)-路径。我们先证明如下结论。

断言5. 如果 G_h 是 未被分解，则在第3.6行，P_h 的长度至少为 $\delta_h + f(k_h)/8 - 3$.

断言5的证明。首先注意，如果根据嵌套 Erdős-Gallai 分解的定义，P_h 的长度至少为 $|V(G_h)|-1$，那么 P_h 就是 G_h 中一条哈密顿 (s_h,t_h)-路径。因此，其长度已达到可能的最大值，等于 $|E(T_h)| = \delta_h + k_h \geq \delta_h + f(k_h)$。因此，我们可以假设根据嵌套 Erdős-Gallai 分解得到的 P_h 的长度至少为 $\frac{5}{4}\delta_h - 3$。

如果 $f(k_h) \geq \frac{8}{7}\delta_h$，那么 long st path approx$(G_h, s_h, t_h)$（黑盒 (s,t)-路径近似算法）会返回一条长度至少为 $f(\delta_h+k_h) \geq f(k_h) \geq \delta_h + f(k_h)/8$ 的路径，因此我们就完成了。

否则，$f(k_h) \leq \frac{8}{7}\delta_h$。如果 $f(k_h) \leq 24$，那么只需令 P_h 的长度为 δ_h。在这种情况下，long eg st path(G_h, s_h, t_h)，即推论 2 中的精确 (s,t)-路径算法，会返回一条长度至少为 δ_h 的 (s_h,t_h)-路径。

现在只需处理以下情形：$f(k_h) > 24$，以及 $\delta_h \geq \frac{7}{8}f(k_h)$。由于 G_h 未被分解且 $\delta_h > 16$，根据嵌套 Erd˝os-Gallai 分解的定义，P_h 的长度至少为

$$\frac{5}{4}\delta_h - 3 \geq \delta_h + \frac{1}{4}\delta_h - 3 \geq \delta_h + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}f(k_h) - 3 \geq \delta_h + \frac{1}{8}f(k_h) - 3.$$

⌟

利用 (1)，我们可以将 k_h 的下界表示为

$$k_h = |E(T)| - |E(T)\setminus E(G_h)| - \delta_h \geq |E(T)| - 3p - \sum_{i\in X} d_{j_{i+1}} - \delta_h = \delta + k - 3p - \sum_{i\in X} d_{j_{i+1}} - \delta_h. \tag{2}$$

在第3.6行， P_h 被转换为图 G 中一条 (s,t)-路径，其长度至少为 $|E(P_h)| + \sum_{i \in X \cup Y} d_{j_{i+1}}$，这是由断言 2 得出的。根据断言5，这个长度至少为

$$
\begin{aligned}
&\delta_h + f(k_h)/8 - 3 + \sum_{i \in X \cup Y} d_{j_{i+1}} \\
&\qquad \geq \delta + (\delta_h - \delta) + f\left(k + \delta - 3p - \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}} - \delta_h\right)/8 + \sum_{i \in X \cup Y} d_{j_{i+1}} - 3 \\
&\qquad \geq \delta + \underbrace{(\delta_h + \sum_{i \in X \cup Y} d_{j_{i+1}} - \delta)}_{\geq 0 \text{ by Lemma 6}} + f\left((k - 3p) - (\delta_h + \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}} - \delta)\right)/8 - 3 \\
&\qquad \geq \delta + f\left(\delta_h + \sum_{i \in X \cup Y} d_{j_{i+1}} - \delta\right) + f\left((k - 3p) - (\delta_h + \sum_{i \in X} d_{j_{i+1}} - \delta)\right)/8 - 3 \\
&\qquad \geq \delta + f(k - 3p)/8 - 3 \\
&\qquad \geq \delta + f(k/4)/8 - 3 \geq \delta + f(k)/32 - 3.
\end{aligned}
$$

这里，对于第一个不等式，我们使用 (2)、函数 f 的性质，以及我们处于 $k > 4p$ 的情形这一事实。注意，对每个 $x \in \mathbb{Z}_+$， $f(x) \leq x$，因为我们已知有一种算法，能够在任意最长 (s,t)-路径长度为 x 的图中，找到一条长度为 $f(x)$ 的 (s,t)-路径。由此，我们证明了在每种情况下，返回的 (s,t)-路径长度都符合要求，证明完毕。 □

最后，注意算法 3 的运行时间关于给定的嵌套 Erd˝os-Gallai 分解的规模是多项式的。根据引理 10，其规模关于输入图 图 G G 的规模是多项式的。由此完成定理 2 的证明。

5 圈的近似

本节旨在证明定理 1，该定理确立了一种方法，可将 2-连通图 G 中最长圈的近似保证值提升至 $2\delta(G)$ 以上的偏移量。

定理 1. 设 $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个非递减次可加函数，并假设我们拥有一个多项式时间算法，能够在最长圈长度为 L 的图中找到长度至少为 $f(L)$ 的圈。那么，存在一个多项式时间算法，能够在 2-连通图 G 中找到长度至少为 $2\delta(G) + \Omega(f(L - 2\delta(G)))$ 的圈，其中 $\delta(G) \leq \frac{1}{2}|V(G)|$，且最长圈长度为 L。

我们首先回顾 Dirac 分解的概念，以及 Fomin 等人 [24] 已确立的相关性质。本节后续部分将证明一个全新的关键性质：对于存在 Dirac 分解的图，必定存在一对分离顶点，且这对顶点之间有一条长路径。最后，我们将这些结果与上一节中针对 (s,t)-路径的近似算法（定理 2）结合起来，从而得到定理 1 中的提升算法。

5.1 Dirac 分解

本小节介绍 Dirac 分解的定义和性质，包括一项算法结果，该结果允许从给定的 2-连通图构造 Dirac 分解

G。我们从 Dirac 分解的定义开始，它可以看作是针对圈的 Erd˝os-Gallai 分解的类似形式。

定义3（Dirac 分解和狄拉克分支， [24]中的定义5）。设 G 是一个 2-连通图，且 C 是图 G 中长度至少为 2δ（G）的一个圈。若图 G 中的两条不相交路径P_1 和 P_2 满足以下条件，我们称它们在 G 中为 C 诱导了一个 Dirac 分解：

- 圈 C具有如下形式： $C = P_1P'P_2P''$，其中路径 P'和 P''的长度均至少为δ（G）条 -2 边。

- 对于 $G - V$（$P_1 \cup P_2$）的每个连通分量 H，均有 $|V$（H）$| \geq 3$，并且满足以下条件之一。（D1） H 是 2-连通的；图 G' 中连接 V（H）与 V（P_1）的匹配最大规模为一，连接 V（H）与 V（P_2）的匹配最大规模也为一；（D2） H 不是 2-连通的； P_1 中恰有一个顶点与 H中的顶点相邻，也就是说， $|N_G$（V（H））$\cap V$（P_1）$| = 1$，且 H 的叶块中没有内部顶点与 P_2中的顶点相邻；（D3）与（D2）相同，但互换 P_1 和 P_2 。也就是说， H 不是 2-连通的，$|N_G$（V（H））$\cap V$（P_2）$| = 1$，且 H 的叶块中没有内部顶点与P_1中的顶点相邻。

- 在 H中恰好有一个连通分量 $G-V$，其中 $P_1 \cup P_2$满足 $V(H) = V(P') \setminus \{s', t'\}$，且 s'和 t'是 P'的端点。类似地，在 H中恰好有一个连通分量 $G-V$，其中 $P_1 \cup P_2$满足 $V(H) = V(P'') \setminus \{s'', t''\}$。

Dirac 分解的狄拉克分支集合定义如下。首先，对于每个类型为 (D1) 的分量 H， H 是该 Dirac 分解的一个狄拉克分支。其次，对于每个类型为 (D2) 或 (D3) 的 H 的每个叶块，该叶块也属于该 Dirac 分解的一个狄拉克分支。

首先，我们回顾 Dirac 分解的一个重要性质，该性质限制了一个圈如何穿过狄拉克分支。

引理13（ [24]中的引理17）。设 G 为一个2-连通图， C 为 G中的一个圈。设路径 P_1、 P_2 在 G中为 C 诱导一个 Dirac 分解。设 M 为该 Dirac 分解的一个狄拉克分支， P为 G 中的一条路径，使得 P在 V（P_1）$\cup V$（P_2）中至少包含一个顶点。若P进入 M，则 M中被 P命中的所有顶点在 P上连续出现。

现在我们重新陈述 [24] 关于给定图构造 Dirac 分解的结果。请注意，这里我们以略有不同的形式陈述该结果，这在本文的背景下更为方便。陈述如下，主要区别已用粗体标出。

引理 14（ [24] 中的引理 20）。设 G 是一个 n-顶点 2-连通图，且 k 是一个整数，使得 $\delta(G) \geq 12$， $0 < k \leq \frac{1}{24}\delta(G)$，并

$$2k + 12 \leq \delta(G) < \frac{n}{2}.$$

那么，给定一个长度小于 $2\delta(G)$ 的非哈密顿环 C，存在一种算法可以在多项式时间内找到以下任一项：

- G中的更长圈，或

- G 的顶点覆盖大小至多为 $\delta(G) + 2k$，或
- P_1, P_2 两条路径在 G 中为 C 诱导出一个 Dirac 分解。

为阐明这种形式，请注意，在引理 20 的原始表述中，$\delta(G-B)$ 的上界为 $\frac{n}{2} - \frac{|B|+k}{2}$，其中 B 是一个给定的小度顶点集合。在 [24], 中引理 20 的证明里，可以很容易地看出，这个上界的唯一原因是 $V(G) \setminus V(C) \setminus B$ 中至少存在一个顶点。由于在我们的工作中 B 始终为空，因此这等价于 $V(G) \neq V(C)$，即 C 的非哈密顿性。因此，将这一上界替换为关于 C 非哈密顿性的条件是合理的。

我们以狄拉克分解的另一项重要性质结束本小节：存在一个长圈，它至少进入一个狄拉克分支。遗憾的是，[24], 中的引理 19 对这一性质的表述要求该长圈在 2δ（G）以上的偏移量远小于 δ（G）。这里，我们以一种不需要这一条件、且在我们的研究框架下更加方便的形式给出这一性质。由于这一表述与原始表述存在显著差异，我们给出该结果的证明，其依据是 [24] 中引理 19 的证明。

引理 15（修改自 [24] 中的引理 19）。设 G 为一个图，且 P_1、P_2 为 G 中长度至多为 $2\delta(G-B)+\kappa$ 的圈 C 诱导的狄拉克分解，使得 $2\kappa \leq \delta(G)$。如果 G 中存在一个长度至少为 $2\delta(G) + k$ 的圈，该圈至少包含 $V(P_1) \cup V(P_2)$ 中的一个顶点，那么 G 中存在一个长度至少为 $2\delta(G) + k/2 - 1$ 的圈，并且该圈进入一个狄拉克分支。

证明。假设在图 G G 中存在一个长度至少为 $2\delta(G) + k$ 的圈 C'，且该圈在 $V(P_1) \cup V(P_2)$ 中至少包含一个顶点。如果 C' 已经包含一条狄拉克分支的边，我们便完成了。现在假设 C' 不包含任何狄拉克分支的边。我们将说明如何利用 C'，在图 G G 中构造一个长度至少为 $2\delta(G) + k/2 - 1$ 的圈，且该圈包含给定狄拉克分解中的一个狄拉克分支的边。

令 W 为 G 的所有顶点中，属于 Dirac 分解中 (D2) 型或 (D3) 型分量的非叶块的顶点所构成的集合。我们从以下断言开始。

断言 6. $|W \cap V(C')| > 0$。

证明 6。 这是一个计数论证。注意，C' 不可能包含一条边，使其两个端点都位于 G 的某个狄拉克分支内部。由于 G 的狄拉克分支是 Dirac 分解中的 (D1) 型分量，以及 (D2) 型或 (D3) 型连通分量的叶块，因此 C' 的每条边都至少有一个端点位于 $V(P_1) \cup V(P_2)$ 中，或者位于 (D2) 型或 (D3) 型连通分量的某个非叶块内部。所有非叶块的顶点集合之并构成集合 W。因此，$(W \cap V(C')) \cup V(P_1) \cup V(P_2)$ 是 C' 的一个顶点覆盖。

N请注意，任何圈的顶点覆盖至少包含其一半的顶点。然后

$$2|(W \cap V(C')) \cup V(P_1) \cup V(P_2)| \geq |V(C')|.$$

根据定义 Dirac 分解的 on, $|V(P_1) \cup V(P_2)| \leq \kappa - 2$。我们立即得到 tha t

$$2|W \cap V(C')| \geq 2\delta(G) + k - 2|V(P_1) \cup V(P_2)| \geq 2\delta(G) + k - 2(\kappa - 2) > 0.$$

⌟

现在取一个顶点 $w_1 \in W \cap V$（C'）。以下结论可用于构造一条从 w_1 开始的 C' 长弦。

断言 7. 设 H 是 Dirac 分解中的一个（D2）型或（D3）型分量。 C' 不包含 H 的叶块中的任何内部顶点。

断言 7 的证明。假设 C' 包含某个顶点 $u \in V$（H'），该顶点是 H 的某个叶块 L 的内部顶点。由于 L 是 G 的一个狄拉克分支， C' 不可能包含 L 的任何边，因此 C' 应当从 V（P_1）经由 u 进入 L （$\cup V$），并立即离开。根据狄拉克分解的定义，进入或离开 L 的唯一方式是经过 V（P_1）中的唯一顶点（如果 H 属于类型 (D2)），或者经过 V（P_2）中的唯一顶点（如果 H 属于类型 (D3)）。由于 C' 不可能两次包含同一个顶点，因此这是不可能的。」

现在构造从 w_1 开始的 C' 的弦。由于 w_1 是可分分量 H 的一个顶点， H 内存在叶块 L_1 的割点 c_1 ，且该叶块可从 w_1 到达。叶块 L_1 还包含至少一个顶点 $v_1 \neq c_1$ ，它与 V（P_1）（若 H 属于类型 (D2)）或与 V（P_2）（若 H 属于类型 (D3)）中的一个顶点相邻，且该顶点位于 H 之外。我们知道 δ（$L_1 - c_1$） $\geq \delta$（$G - c_1$） $- 1 \geq \delta$（G） $- 2$，因为 $L_1 - c_1$ 中顶点唯一的外部邻点是 V（P_1）或 V（P_2）中的一个顶点。由推论 2， L_1 内存在一条 (c_1, v_1)-路径，其长度至少为 δ（G） $- 2$。将其与 H 内的一条 (w_1, c_1)-路径结合，得到 H 内的一条 (w_1, v_1)-路径。

请注意，所构造的 (w_1, v_1)-路径除了 w_1 外，还可能包含来自 $V(C')$ 的顶点。设 $w_1' \in V(C')$ 为 $V(C')$ 中在 (w_1, v_1)-路径上距离 w_1 最远的顶点。请注意，根据命题 7，(w_1', v_1)-子路径仍包含 (c_1, v_1)-路径作为子路径。因此，我们得到一条长度至少为 $\delta(G) - 2$、位于 H 内且不包含 $V(C') \setminus \{w_1'\}$ 中任何顶点的 (w_1', v_1)-路径。要得到 C' 的长弦，还需从 v_1 外部到达 $V(P_1) \cup V(P_2)$ 中的顶点，然后沿着圈 C 前进，直到到达 C' 的一个顶点 v_1' 。这总是可行的，因为 $V(C) \cap V(C') \supseteq (V(P_1) \cup V(P_2)) \cap V(C') \neq \emptyset$。我们得到一条长度至少为 $\delta(G) - 1$、连接 w_1' 和 v_1' 的弦。

C' 的（w_1', v_1'）弦将其分成两条（w_1', v_1'）弧，其中一条弧的长度至少为$\delta(G) + k/2$。将这条弧与该弦合并，可得到一条长度至少为 $2\delta(G) + k/2 - 1$的圈，位于 G中。该圈包含 H的一个叶块中的边，也就是说，包含一个狄拉克分支中的边。证明完毕。 □

5.2 分离点对的存在性

本小节概述了 Dirac 分解背后的新组合结果，该结果对定理 1 的证明至关重要。它使我们能够避免在算法中显式使用 Dirac 分解，从而转而将问题归约为近似（s, t）-路径的算法。下面回顾其正式表述。

引理 1. 设 G 是一个 2-连通图，且 P_1, P_2 为圈 C在 G 中的 Dirac 分解，其中该圈的长度至多为 $2\delta(G) + \kappa$ ，并且满足 $2\kappa \leq \delta(G)$。若 G中存在一条长度至少为$2\delta(G) + k$ 的圈，则存在 $u, v \in V(G)$，使得

- $G - \{u, v\}$ 不连通，并且
- 在图 G 中存在一条长度至少为 $\delta(G) + (k-2)/4$ 的 (u, v)-路径。

证明。考虑图 G 中的最长圈 C'。我们假设该圈的长度至少为 $2\delta(G) + k$，并分四种情况讨论。

情形 1。 C' 完全包含于 H 的某个连通分量 $G - V(P_1 \cup P_2)$中，且H 是 2-连通的。于是 H 是一个 (D1) 型狄拉克分支。由于对于每个 $i \in \{1, 2\}$ ，$V(H)$ 与 $V(P_i)$ 之间的匹配大小恰好为 1，根据 K″önig 定理， $V(H)$之间的所有边

以及 $V(P_i)$均由单个顶点覆盖。将该顶点记为 u （对于 $i=1$ ）和 v （对于 $i=2$）。由于 G 是 2-连通的， u 和 v 彼此不同。由于 $\{u,v\}$ 将 H 与图的其余部分分离，且$V(C) \not\subset V(H \cup P_1 \cup P_2)$，因此 $G-\{u,v\}$ 不连通。接下来只需证明 G中存在一条较长的 (u,v)-路径。为此，若 $u \in V(H)$，记 $u'=u$；若$u \in V(P_1)$，则记 $u' \in N_G(u) \cap V(H)$。类似地选择 $v' \in V(H)$，即 v' 要么等于 v ，要么是 v的一个邻点。由于 G 是 2-连通的，总能选择彼此不同的 u' 和 v'。根据引理 2，在 H中存在一条 (u',v')-路径，其长度至少为 $\delta(G)+k/2$ ，因此在 G中也存在一条 (u,v)-路径，其长度至少为 $\delta(G)+k/2$。

情形 2。 C' 完全包含在连通分量 H 的一个叶块中，该连通分量属于 $G-V(P_1 \cup P_2)$。也就是说， C' 包含在一个类型为 (D2) 或 (D3) 的狄拉克分支中。 u 和 v 的选取与情形 1 类似。也就是说，若该狄拉克分支属于类型 (D2)，则选取 u ，使得 $u \in N_G(V(H)) \cap V(P_1)$，并令 v 为该狄拉克分支的割点。 $G-\{u,v\}$ 不连通，因为 $\{u,v\}$将该狄拉克分支与 H的其余部分分离。存在一条长度至少为$\delta(G)$的 (u,v)-路径 $+k/2+1$ ，因为根据引理 2，存在一条长度至少为 $\delta(G)$ 的 (z,v)-路径 $+k/2$ ，其中$z \in N_G(u) \cap V(H-v)$。对于类型 (D3)， u 和 v 的选取与此对称。

情况 3. C' 完全包含在连通分量 H 的一个非叶块中，该连通分量属于 $G-V(P_1 \cup P_2)$。在这种情况下， C' 不包含在狄拉克分支中。将包含 C' 的 H 的非叶块记为 K。不失一般性，我们假设 H 对应于 (D2)，即 $|N_G(V(H)) \cap V(P_1)|=1$。根据门格尔定理，要么存在两个顶点将 $V(K)$ 与 $V(P_1 \cup P_2)$ 在 G 中分离，要么存在三条从 $V(K)$ 到 $V(P_1 \cup P_2)$ 的不相交路径。如果属于前一种情况，将这两个顶点分别记为 u 和 v。显然， $G-\{u,v\}$ 不连通。存在两条从 $V(K)$ 到 $V(P_1 \cup P_2)$ 的不相交路径，其中一条经过 u ，另一条经过 v。根据引理 2，在 $V(K)$ 内使用一条长度至少为 $\delta(G)+k/2$ 的路径，将这些路径在 $V(K)$ 中的端点连接起来。显然，所得到的长路径包含一条长度至少为 $\delta(G)+k/2$ 的 (u,v)-路径作为子路径。

如果是后一种情况，那么这三条路径中必有两条以 $V(P_2)$ 为端点。设这两条路径分别从 $V(K)$ 中的 u_1 和 u_2 出发，并分别以 $V(P_2)$ 中的 v_1 和 v_2 为端点。注意，这些路径只使用 H 的边以及 G 中连接 $V(H)$ 与 $V(P_2)$ 的边。此外，这些路径都没有内部顶点位于 $V(K)$ 或 $V(P_2)$ 中。根据引理 2， K 中存在一条长度至少为$\delta(G)+k/2$的 (u_1,u_2)-路径。现在，将这条 (u_1,u_2)-路径与 (u_1,v_1)-路径、(u_2,v_2)-路径，以及 C 中位于 P_2 之外、连接 v_1 和 v_2 的子路径组合起来，在 G 中构造一个圈。由于根据 Dirac 分解的定义，该子路径包含作为子路径的 P' 和 P''，所以所得圈的长度至少为 $(\delta(G)+k/2)+1+1+2\cdot(\delta(G)-2) \geq 3\delta(G)+k/2-2 \geq 2\delta(G)+k/2$。这个圈包含 P' 的一条边，因此它进入一个 Dirac 分支；于是我们可以用这个圈替换 C' ，并应用下面的情形。

情况 4。 C' 与 $V(P_1 \cup P_2)$ 有一个公共顶点。由引理 15，我们可以假设 C'进入狄拉克分支 K ，但其长度至少为 $2\delta(G)+k/2-1$。根据情况 1 和情况 2，我们知道存在 u、 $v \in V(K \cup P_1 \cup P_2)$ ，使得 $G-\{u,v\}$ 中的顶点 $V(K)$ 与图的其余部分分离。由引理13， $V(K)$ 中的顶点在 C'上连续出现，因此 C' 的顶点和边在 K内诱导出一条路径。由于 C' 不包含在 $V(K)$ 中， u 和 v 中至少有一个出现在 C'中，因此根据 $|V(C') \cap \{u,v\}|$，分两种情况讨论。如果u、 $v \in V(C')$ ，那么 C' 上连接 u 和 v 的最长弧直接给出一条长度至少为 $(2\delta(G)+k/2-1)/2=\delta(G)+(k-2)/4$的路径。如果 u 和 v 中恰有一个出现在 C'上，不失一般性，假设 $u \in V(C')$。那么 $V(C') \subseteq V(K) \cup \{u\}$，因为 C' 不经过 v——这是进入 K的唯一另一条通路。与情况 1 和情况 2 类似，存在顶点 $v' \in V(K)$ ，它要么等于 v ，要么是 v的邻点。在 K内取一条从 v' 到 $V(C')$ 的最短路径。将其端点记为 w。用 C' 上连接 w和 u的最长弧，延长以 v' 为起点的路径。这给出一条 (v',u)-路径，因而也是一条 (v,u)-路径，其在 G中的长度至少为 $\delta(G)+(k-2)/4$。

□

5.3 定理 1 的证明

在本小节中，我们将定理 2 与本节前面给出的结果相结合，以完成定理 1 的证明。

定理 1 的证明。假设给定一个黑箱算法，该算法能在最长圈长度为 L 的图中找到长度为$f(L)$的圈。现在我们基于该黑箱算法描述所需的近似算法，该算法能找到长度至少为 $2\delta(G)+h(k)$ 的圈，其中

$$h(k)=\frac{1}{128}f(k)-8.$$

我们的算法以图 G 为输入，令 L 表示 G 和 $k=L-2\delta$ 中最长圈的长度。为方便起见，记 $\delta:=\delta(G)$。我们的算法目标是在 G 中找到长度至少为 $2\delta+h(k)$ 的圈。请注意，算法不会以任何方式估计 $h(k)$，它只会输出运行过程中找到的最长圈。我们着重证明该圈的长度始终至少为 $2\delta+h(k)$。

我们的算法伪代码见算法 4。算法开头几行用于处理各种特殊情况：要么黑箱近似算法直接就足够，要么可以直接找到一个长 Dirac 环。这有助于我们在后续分析中避免处理极端参数值。

如果 $2\delta\geq n$，算法将在第 4.5 行依据 Dirac 定理找到并输出 G 中的一个哈密顿环。在接下来的分析中，我们假设 $2\delta<n$。在第 4.1 行，我们的算法对 G应用黑盒 $f(L)$-近似算法。如果 $f(L)\geq\frac{49}{24}\delta$，那么所得圈的长度至少为 $2\delta+(f(L)-2\delta)\geq 2\delta+\frac{1}{49}f(L)$，这至少是 $2\delta+h(k)$。由于算法从不使当前圈变短，在这种情况下，输出将自动有效。现在我们还假设 $f(L)<\frac{49}{24}\delta$。

在第 4.2 行，我们的算法应用针对 Long Dirac Cycle 的 FPT 算法，在多项式时间内于 G 中找到长度至少为 $2\delta+1$ 的圈。如果找到这样的圈，那么我们的算法将在该圈与先前计算出的近似解之间保留长度较长者。如果 $h(k)=\frac{1}{128}f(k)-8\leq 1$，那么该圈就是所需的近似解。另一方面，如果 G中不存在长度至少为 $2\delta+1$ 的圈，那么 $k=L-2\delta=0$，因此长度为 2δ 的圈是一个有效的近似解。因此，在这种情况下，我们的算法仅输出由 Dirac 定理保证的、长度至少为 2δ 的圈，然后停止。

现在我们可以假设 $f(k)\geq 9\cdot 128$。由于 $f(L)<\frac{49}{24}\delta$，因此可得 $\delta>24$。于是，在第 4.7 行，如果 $\delta\leq 24$，我们的算法就直接停止，因为算法此前已经遇到了所需的近似圈。

现在我们到达算法的主要情形，在此我们利用 Dirac 分解的结构性结果来寻找一个长圈。在第 4.9 行之前，当前圈 C 的长度至少为 2δ。如果 C 的长度小于 $\lfloor 2\frac{1}{24}\delta\rfloor$，则对图 G 和圈 C 应用引理 14 的算法，参数为 $k'=|V(C)|-2\delta+1$。如果结果是一个比 C更长的圈，则用这个圈替换 C。如果仍然满足 $|V(C)|<\lfloor 2\frac{1}{24}\delta\rfloor$，那么我们的算法会再次对 G 和 C 应用引理 14。这个过程会重复进行，直到在 G中找到三种可能结构之一：

- 长度至少为 $\lfloor 2\frac{1}{24}\delta\rfloor$ 的圈 C；
- 大小至多为 $\delta+2(|V(C)|-2\delta+1)$ 的顶点覆盖；
- 两条路径 P_1,P_2 为 C诱导出一个 Dirac 分解。

长度约为 G 度以上的最长圈
输入：最小度为 δ 的 2-连通图 G
输出：长度至少为 $2\delta + h(k)$ 的圈 C，其中 $k = L - 2\delta$ 和 L 是图 G 中最长圈的长度
$C \longleftarrow$ 长度约为 G 的最长圈;
若长 Dirac 环$(G, \emptyset, 1)$为 YES，则
  $C \longleftarrow C$ 与在 G中计算得到的长度至少为 $2\delta + 1$ 的圈中较长者;
否则
  返回 G中长度为 2δ 的圈;
结束
如果 $\delta \leq 24$，则
  返回 C;
结束
当 $|V(C)| - 2\delta < \lfloor \frac{1}{24}\delta \rfloor$，且将引理 14 应用于 G 和 C 时，会得到一个更长的圈 do
  $C \longleftarrow$ 一条更长的圈在 G;
终点
若 $|V(C)| \geq \lfloor 2\frac{1}{24}\delta \rfloor$，或由引理 14 得到 G 的顶点覆盖，则
  return C;
结束
对于满足 $G - \{u, v\}$ 不连通的每个 $u, v \in V(G)$，执行
  $Q, R \longleftarrow$ 空路径;
  对于 $G - \{u, v\}$ 中的每个连通分量 H，执行
    $S \longleftarrow$ 度数近似以上的最长 st 路径$(G[V(H) \cup \{u, v\}] + uv, u, v)$;
    $Q, R \longleftarrow$ 在 Q, R, S之间的两条最长路径;
  end
  $C \longleftarrow$ 最长的 C、$Q \cup R$;
结束
返回 C;

算法 4：在 2-连通图 G中，寻找长度至少为 $2\delta(G) + h(k)$的圈的算法。

第一种结果是所需的偏移量 $h(k)$-近似，因为在这种情况下 $|V(C)| \geq 2\delta + \frac{1}{49} f(L) - 1 \geq 2\delta + h(k)$。在第二种结果中，由于顶点覆盖给出了任意圈长度的上界，$L \leq 2 \cdot (2 \cdot |V(C)| - 3\delta + 2)$，因此 $|V(C)| - 2\delta \geq \frac{L-4-2\delta}{4}$，所以 $|V(C)| \geq 2\delta + \frac{k}{4} - 1$。显然，在这种情况下，$C$ 也是一个有效的近似。因此，如果出现上述两种情况之一，我们的算法只需返回当前的圈 C。

接下来讨论最复杂的情况：找到了两条路径 P_1、P_2，它们构成一个狄拉克分解。现在我们的目标是使用引理 1 找到一对分离顶点，使它们之间存在一条很长的路径，然后使用定理 2 中已经建立的算法来近似这条路径的长度。

因此，在继续之前，我们需要获得一种用于寻找较长 (s, t)-路径的近似算法。为此，我们将引理3应用于求最长圈的黑盒 $f(L)$-近似算法，从而得到一种算法：在最长 (s, t)-路径长度为 p 的图中，找出一条长度至少为 $\frac{1}{2} f(2p)$ 的 (s, t)-路径。最后，我们将定理 2 应用于后一个算法，从而得到一种算法，能够找出长度为 $\delta + (\frac{1}{64} f(2k') - 3)$ 的 (s, t)-路径，其中 $k' = p - \delta$，最长 (s, t)-路径的长度为 p。

由于 $2(|V(C)|-2\delta)<\delta$，我们可以将引理 1 应用于 G 和 C。由此可知，存在一对顶点 $u, v\in V(G)$，使得 $G-\{u,v\}$ 不连通，并且在图 G 中，u 与 v 之间存在一条长度至少为 $\delta+(L-2\delta-2)/4$ 的路径。为了找到这对顶点，我们的算法遍历所有可能的 $u,v\in V(G)$，使得 $G-\{u,v\}$ 不连通。假设这对顶点 $\{u,v\}$ 已固定。于是，对于 $G-\{u,v\}$ 的每个连通分量 H，我们的算法将 (s,t)-路径近似算法应用于 $G[V(H)\cup\{u,v\}]+uv$，以寻找一条较长的 (u,v)-路径。注意，这是对该算法的合法应用，因为 $G[V(H)\cup\{u,v\}]+uv$ 是 2-连通的。

现在，算法的每次执行都会得到一条 (u,v)-路径。$G-\{u,v\}$中至少有两个连通分量，因此会产生至少两条 (u,v)-路径，而我们的算法只需将其中最长的两条路径拼接成一个圈。每条路径的长度至少为 $\delta-2$。此外，如果 $\{u,v\}$ 是引理 1 给出的点对，那么至少有一个分量中的最长 (u,v)-路径长度至少为 $\delta+(k-2)/4$。于是，对于这个连通分量 H，近似算法会找到一条长度至少为 $\delta(H-\{u,v\})+\frac{1}{64}f(2k')-3$ 的 (u,v)-路径 Q，其中

$$k'=\delta(G)+(k-2)/4-\delta(H-\{u,v\}).$$

记 $x=(\delta(G)-\delta(H-\{u,v\})$。注意，$x\le 2$ 和可能为负数。于是 Q的长度至少为

$$\delta(G)-x+\frac{1}{64}f(2(x+(k-2)/4))-3.$$

如果 $x\ge 0$，那么 Q 的长度至少为

$$\delta(G)-2+\frac{1}{64}f((k-2)/2)-3.$$

如果 $x<0$，那么根据 $-x\ge f(|x|)$，Q 的长度至少为

$$\begin{aligned}
&\delta(G)+f(|x|)+\frac{1}{64}f(-2|x|+(k-2)/2)-3\\
&\quad\ge \delta(G)+\frac{1}{64}f(64|x|)+\frac{1}{64}f(-2|x|+(k-2)/2)-3\\
&\quad\ge \delta(G)+\frac{1}{64}f(62|x|+(k-2)/2)-3\\
&\quad\ge \delta(G)+\frac{1}{64}f((k-2)/2)-3.
\end{aligned}$$

无论如何，Q 的长度至少为

$$\delta+\frac{1}{64}f(k/2-1)-5\ge\delta+\frac{1}{128}f(k-2)-5\ge\delta+\frac{1}{128}f(k)-\frac{1}{128}f(2)-5\ge\delta+\frac{1}{128}f(k)-6.$$

因此，如果我们的算法合并由数对 $\{u,v\}$ 给出的两条最长路径，就能得到一个长度至少为 $2\delta+\frac{1}{128}f(k)-8=2\delta+h(k)$ 的圈。由于算法会输出所构造的圈中最长的那个，证明完毕。

□

最后，我们证明定理 1 的推论，该推论可用于近似求解不一定是 2-连通图中的最长路径。

推论 3. 设 $f:\ \mathrm{R}_+\to\mathrm{R}$ 是一个非递减次可加函数。若存在一个多项式时间算法，能够在最长圈长度为 L 的 2-连通图中找到长度为 $f(L)$ 的圈，则存在一个多项式时间算法，能够在最长路径长度为 L 的图 G 中输出一条长度至少为 $2\delta(G)+f(L-2\delta(G))/128-8$ 的路径，其中 $\delta(G)<\frac{1}{2}|V(G)|$。

推论 3 的证明。取一个图 G。我们假设 G 是连通的；否则，对它的每个连通分支分别应用同一个算法。

向 G 添加一个全邻接顶点，得到一个 2-连通图 G'。注意， $\delta(G') = \delta(G) + 1$，并且当且仅当 G' 中存在长度至少为 c 的圈时， G 中存在长度至少为 $c-2$ 的路径。因此，对于 G' 中的最长圈长度 c 和 G 中的最长路径长度 p，有 $c - 2\delta(G') = c - 2\delta(G) - 2 = p - 2\delta(G)$。此外，$G'$ 中长度为 c 的圈可以转换为 G 中长度至少为 $c-2$ 的路径。

将定理 1 应用于 G'。得到的圈长度至少为 $2\delta(G') + f(k)/128 - 8$，其中$k = c - 2\delta(G')$ 表示 G' 中的最长圈长度 c。最后，将此圈转换为长度至少为 $2\delta(G) + f(k)/128 - 8$ 的路径，位于 G 中。

□

6 结论

本文证明了一个一般性定理，使我们能够利用所有用于近似最长圈长度的算法工具，来近似经典 Dirac 定理所给出的最长圈“偏移量”。只要能够在最长圈长度为 L 的 2-连通图 G 中计算出一个长度为 $f(L)$ 的圈，我们就能够构造出一个长度为 $2\delta(G) + \Omega(f(L - 2\delta(G)))$ 的圈。特别地，我们可以使用 Gabow 和 Nie 针对最长圈提出的当前最先进的近似算法 [30]。他们给出了一种算法，能够在最长圈长度为 L 的图中找到一个长度为 $f(L) = c^{\sqrt{\log L}}$ 的圈，其中 $c > 1$ 为某个常数。注意， f 是非递减且次可加的（因为 f 在 $[1, +\infty]$ 上是凹函数，而任意凹函数都是次可加的；我们还可以形式化地令 $f(x) = \min\{x, c^{\sqrt{\log x}}\}$（当 $x \geq 1$ 时），并令 $f(x) = x$（当 $x < 1$ 时），以符合定理 1 的表述）。将其代入定理 1 后，我们得到一个多项式时间算法，该算法能够在最长圈长度为 $L > 2\delta(G)$ 的 2-连通图 G 中输出一个长度为 $2\delta(G) + 2^{\Omega(\sqrt{\log(L - 2\delta(G))})}$ 的圈。

在参数化算法领域，已有许多关于计算超过某些保证值的最长圈或最长路径的结果。一个自然的问题是，类似于我们的近似结果是否也适用于其他类型的“偏移量”。举几个具体的问题，回顾一下，图 G 的退化度 $\mathrm{dg}(G)$ 是满足以下条件的最大值 d： G 有一个最小度为 d 的导出子图。根据 Erd˝os 和 Gallai [19], 的结果，退化度为 $d \geq 2$ 的图包含一个长度至少为 $d+1$ 的圈。Fomin 等人在 [22] 中证明，在一个 2-连通图中，可以在 $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内找到一个长度至少为 $L = \mathrm{dg}(G) + k$ 的圈。这立即给出了一个多项式时间算法，可计算出长度至少为 $\mathrm{dg}(G) + \Omega(\log(L - \mathrm{dg}(G)))$ 的圈。是否存在一种更好的近似方法，来求得超过退化度的最长圈?

另一个具体问题。Bez´akov´a 等人 [4] 给出了一个 FPT 算法，对于 $s, t \in V(G)$，该算法能在无向图 G中找到一条绕行路径。换句话说，他们给出了一个算法，能在 $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ 时间内找到一条长度至少为 $L = \mathrm{dist}_G(s,t) + k$ 的 (s,t)-路径。这里，$\mathrm{dist}_G(s,t)$ 表示 s 与 t之间的距离。因此，在无向图中，我们可以在多项式时间内找到一条长度为 $\mathrm{dist}_G(s,t) + \Omega(\log(L - \mathrm{dist}_G(s,t))$ 的 (s,t)-路径。是否存在更好的界仍是一个开放问题。对于有向图，寻找长绕行路径是否属于固定参数可解，仍是一个悬而未决的问题 [4]。关于有向图中长绕行路径的（不可）近似性，目前一无所知。

参考文献

[1] Noga Alon、Gregory Gutin、Eun Jung Kim、Stefan Szeider 和 Anders Yeo。求解高于紧下界的 MAX-r-SAT。载于第 21 届 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，第 511–517 页。SIAM，2010 年。

[2] Noga Alon、Raphael Yuster 和 Uri Zwick。颜色编码。《美国计算机协会会刊》，42(4)：844–856，1995。网址：http://dx.doi.org/10.1145/210332.210337, doi:10.1145/210332.210337.[3]Cristina Bazgan、Miklos Santha 和 Zsolt Tuza。关于在三次哈密顿图中近似寻找一个（另一个）哈密顿环。《算法杂志》，31(1)：249–268，1999。doi:10.1006/jagm.1998.0998.[4]Ivona Bez´akov´a、Radu Curticapean、Holger Dell 和 Fedor V. Fomin。寻找绕行圈是固定参数可处理的。《SIAM离散数学杂志》，33(4)：2326–2345，2019。doi:10.1137/17M1148566.[5] Andreas Bj¨orklund。用于无向哈密顿性的行列式和。《SIAM计算杂志》，43(1)：280–299，2014。doi:10.1137/110839229.[6] Andreas Bj¨orklund 和 Thore Husfeldt。寻找超对数长度的路径。《SIAM计算杂志》，32(6)：1395–1402，2003。doi:10.1137/S0097539702416761.[7] Andreas Bj¨orklund、Thore Husfeldt、Petteri Kaski 和 Mikko Koivisto。用于参数化路径与打包的窄筛。CoRR，abs/1007.1161，2010.[8] Andreas Bj¨orklund、Thore Husfeldt 和 Sanjeev Khanna。近似最长有向路径与圈。载于第31届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP）论文集，《计算机科学讲义》第3142卷，第222–233页。施普林格，2004。doi:10.1007/978-3-540-27836-8_21.[9] Hans L. Bodlaender。关于使用深度优先搜索进行线性时间子式测试。《算法杂志》，14(1)：1–23，1993.[10] B. Bollob´as 和 A. D. Scott。最大割的更优界。载于《当代组合学》，Bolyai数学学会研究丛书第10卷，第185–246页。J´anos Bolyai数学学会，布达佩斯，2002.[11] B´ela Bollob´as。极值图论。载于《组合学手册》第1、2卷，第1231–1292页。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，1995.[12] J. A. Bondy。基础图论：路径与回路。载于《组合学手册》第1、2卷，第3–110页。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，1995.[13] Guantao Chen、Zhicheng Gao、Xingxing Yu 和 Wenan Zang。近似有界度图中的最长圈。《SIAM计算杂志》，36(3)：635–656，2006.[14] Robert Crowston、Mark Jones、Gabriele Muciaccia、Geevarghese Philip、Ashutosh Rai 和 Saket Saurabh。针对超出Poljak-Turzik界的参数化λ-可扩展性质的多项式核。载于IARCS软件技术与理论计算机科学基础年会（FSTTCS），信息学莱布尼茨国际论文集（LIPIcs）第24卷，第43–54页，德国达格施图尔，2013。Schloss Dagstuhl–莱布尼茨信息学中心。[15] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Micha l Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。施普林格，2015.[16] Reinhard Diestel。《图论》，数学研究生教材第173卷。施普林格出版社，柏林，第5版，2017。

[17] G. A. Dirac. 关于抽象图的一些定理。《伦敦数学会会刊》（第 3 辑），2：69–81，1952。[18] C. S. Edwards. 关于二部子图的一些极值性质。《加拿大数学杂志》，3：475–485，1973。[19] P. Erd˝os 和 T. Gallai. 关于图的极大路径与回路。《匈牙利科学院数学学报》，10：337–356，1959。[20] Tom´as Feder 和 Rajeev Motwani. 在哈密顿图中寻找大圈。《离散应用数学》，158(8)：882–893，2010。doi:10.1016/j.dam.2009.12.006。[21] Tom´as Feder、Rajeev Motwani 和 Carlos Subi. 稀疏图中最长圈问题的近似算法。《SIAM 计算杂志》，31(5)：1596–1607，2002。doi:10.1137/S0097539701395486。[22] Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、Daniel Lokshtanov、Fahad Panolan、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi. 远离退化度。《SIAM 离散数学杂志》，34(3)：1587–1601，2020。doi:10.1137/19M1290577。

Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、Daniel Lokshtanov、Fahad Panolan、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。高于保证值的乘法参数化。《美国计算机协会计算理论汇刊》，13(3):18:1–18:16，2021。doi:10.1145/3460956。

[24]Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、Danil Sagunov 和 Kirill Simonov。Dirac 定理的算法扩展。载于《2022年ACM-SIAM离散算法年会论文集》（SODA），第406–416页，2022年。网址：https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611977073.20，arXiv：https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611977073.20，doi:10.1137/1.9781611977073.20。[25] Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、Danil Sagunov 和 Kirill Simonov。超越 Erdős–Gallai 界的最长圈。载于第30届欧洲算法研讨会（ESA 2022），2022年9月5日至9日，德国柏林/波茨坦，LIPIcs第244卷，第55:1–55:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz信息学中心，2022年。doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2022.55。¨Fedor V. Fomin 和 Petteri Kaski。精确指数算法。《ACM通讯》，56(3):80–88，2013年。网址：http://doi.acm.org/10.1145/2428556.2428575，doi:10.1145/2428556.2428575。¨Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov、Fahad Panolan 和 Saket Saurabh。高效计算代表族及其在参数化算法和精确算法中的应用。《ACM杂志》，63(4):29:1–29:60，2016年。网址：http://doi.acm.org/10.1145/2886094，doi:10.1145/2886094。[26]Martin Fürer 和 Balaji Raghavachari。将最小度斯坦纳树近似到距最优值仅差1。《算法杂志》，17(3):409–423，1994年。doi:10.1006/jagm.1994.1042。[27] Harold N. Gabow。寻找超多对数长度的路径和圈。《SIAM计算杂志》，36(6):1648–1671，2007年。doi:10.1137/S0097539704445366。[28] Harold N. Gabow 和 Shuxin Nie。寻找长有向圈。《ACM算法汇刊》，4(1)，2008年。

[31]Harold N. Gabow 和 Shuxin Nie。寻找长路径、圈和回路。载于第19届国际算法与计算研讨会（ISAAC）论文集，《计算机科学讲义》第5369卷，第752–763页。施普林格，2008年。doi:10.1007/978-3-540-92182-0_66。[32] Shivam Garg 和 Geevarghese Philip。提高顶点覆盖的门槛：超越更高保证值的固定参数可解性。载于第二十七届ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集，第1152–1166页。SIAM，2016年。doi:10.1137/1.9781611974331.ch80。[33] Gregory Gutin、Eun Jung Kim、Michael Lampis 和 Valia Mitsou。以紧界以上和以下的参数化方式研究顶点覆盖问题。《计算系统理论》，48(2):402–410，2011年。[34] Gregory Gutin、Leo van Iersel、Matthias Mnich 和 Anders Yeo。每个超越平均值参数化的三元置换约束满足问题都有一个变量数为二次的核。《计算机与系统科学杂志》，78(1):151–163，2012年。[35] Gregory Z. Gutin 和 Matthias Mnich。图问题在保证值以上和以下的参数化研究综述。CoRR，abs/2207.12278，2022年。arXiv:2207.12278，doi:10.48550/arXiv.2207.12278。[36] Gregory Z. Gutin 和 Viresh Patel。参数化旅行商问题：超越平均值。SIAM离散数学杂志，30(1):220–238，2016年。[37] Gregory Z. Gutin、Arash Rafiey、Stefan Szeider 和 Anders Yeo。超越保证值的参数化线性排列问题。《计算系统理论》，41(3):521–538，2007年。doi:10.1007/s00224-007-1330-6。[38] Russell Impagliazzo、Ramamohan Paturi 和 Francis Zane。哪些问题具有强指数复杂度？《计算机与系统科学杂志》，63(4):512–530，2001年。[39] Bart M. P. Jansen、László Kozma 和 Jesper Nederlof。低于Dirac条件的哈密顿性。载于第45届国际图论计算机科学概念研讨会（WG）论文集，《计算机科学讲义》第11789卷，第27–39页。施普林格，2019年。́David R. Karger、Rajeev Motwani 和 G. D. S. Ramkumar。图中最长路径的近似。《Algorithmica》，18(1):82–98，1997年。doi:10.1007/BF02523689。́Jon M. Kleinberg 和 Eva Tardos。《算法设计》。Addison-Wesley，2006年。[40] Ioannis Koutis。用于路径与装箱问题的更快代数算法。载于第35届国际自动机、语言与程序设计学术讨论会（ICALP）论文集，《计算机科学讲义》第5125卷，第575–586页。施普林格，2008年。[41] Ioannis Koutis 和 Ryan Williams。用于加速算法的代数指纹。《ACM通讯》，59(1):98–105，2016年。网址：http://doi.acm.org/10.1145/2742544，doi:10.1145/2742544。 ́Daniel Lokshtanov、N. S. Narayanaswamy、Venkatesh Raman、M. S. Ramanujan 和 Saket Saurabh。利用线性规划设计更快的参数化算法。《ACM算法汇刊》，11(2):15:1–15:31，2014年。doi:10.1145/2566616。

[45] Meena Mahajan、Venkatesh Raman 和 Somnath Sikdar。对保证值之上或之下进行参数化。《计算机与系统科学杂志》，75(2):137–153，2009年。[46] Sounaka Mishra、Venkatesh Raman、Saket Saurabh、Somnath Sikdar 和 C. R. Subramanian。K¨onig 子图问题及保证值以上的顶点覆盖问题的复杂性。Algorithmica，61(4):857–881，2011年。doi:10.1007/s00453-010-9412-2。[47]B. Monien。如何高效地寻找长路径。载于《组合问题的算法分析与设计》（乌迪内，1982年），《北荷兰数学研究》第109卷，第239–254页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1985年。URL：http://dx.doi.org/10.1016/S0304-0208(08)73110-4, doi:10.1016/S0304-0208(08)73110-4。[48] Neil Robertson 和 Paul D. Seymour。图小子 XIII：不相交路径问题。《组合理论杂志B辑》，63(1):65–110，1995年。doi:10.1006/jctb.1995.1006。[49] Sundar Vishwanathan。一种在哈密顿图中寻找长路径的近似算法。《算法杂志》，50(2):246–256，2004年。doi:10.1016/S0196-6774(03)00093-2。[50] Ryan Williams。在 $O^*(2^k)$ 时间内寻找长度为 k 的路径。《信息处理快报》，109(6):315–318，2009年。