arXiv:2305.02016v1 [cs.RO] 3 May 2023

随机高保真自主固定翼飞机飞行模拟器

马德里理工大学 自动化与机器人中心

2023年5月

作者：**Eduardo Gallo**

摘要

本文介绍了一款高保真固定翼飞行模拟器的架构和算法，该模拟器旨在测试和验证用于自主飞行器的新型制导、导航与控制（GNC）算法。该飞行模拟器力求尽可能重现影响飞机性能的各种因素，包括飞行所处的地球模型、飞行物理学及其相关运动方程，尤其是机载传感器的行为；同时将假设或简化限制在最低限度，并纳入仿真中通常不会考虑的多种相对细微的效应。这些效应有时可能会导致制导、导航与控制算法无法按预期运行。作者以开源软件的形式发布了飞行模拟器的 C++ 实现。

仿真器的模块化设计使用户能够用新的制导、导航与控制算法替换标准算法，从而评估这些算法在特定任务和气象条件（大气特性、风场、空气湍流）下的性能。测试与评估通过蒙特卡洛模拟进行，因为大多数仿真模块（例如飞行器任务、气象条件、传感器引入的误差以及初始条件）都是以随机方式定义的，因此会根据用户设定的输入参数，在每次执行时以伪随机方式变化，从而确保结果适用于广泛的条件。

除了对固定翼平台上通常配备的所有传感器的输出进行建模（例如加速度计、陀螺仪、磁力计、皮托管、风向标以及全球导航卫星系统（GNCC）接收机），仿真器还能够生成逼真的地球表面图像，模拟机载摄像机沿所得轨迹飞行时所拍摄的画面，从而支持视觉和视觉惯性导航系统的应用与评估。

关键词：飞行模拟器、制导、导航与控制、传感器、随机的、固定翼

符号

给定变量或符号的含义总是在其首次出现时予以明确说明，否则会提供交叉引用，指明其得到适当解释的位置。本文档按照章和附录（例如，第5章或附录 C）、节（例如，第 5.2 节或 C.2 节）、小节（例如，第 5.2.5 节或 C.2.2 节）等层级组织。请注意，在引用小节时，不使用前缀“sub”。表格（例如，表 1.3）和图（例如，图 1.2）的引用方式也十分简单。当引用出现在圆括号内时，表示其指向某个方程或数学表达式，例如 (4.20)；当引用出现在方括号内时，表示其指向某个文献参考，例如 [1]；当引用前面带有字母“A”且位于方括号内时，则表示其指向附录 A 中列出的某项假设，例如 [A60]。缩略词以大写打字机字体显示，并可通过相应引用定位到缩略词列表中的具体条目，例如 GNSS。

关于数学符号，向量和矩阵以粗体表示（例如，$\mathbf{x}$ 或$\mathbf{R}$），通常前者用小写字母表示，后者用大写字母表示，但并非总是如此。变量或向量上方带帽符号$<\hat{\cdot}>$表示其（惯性）估计值，带圆形重音符号 $<\mathring{\cdot}>$表示其（视觉）估计值，带波浪号 $<\tilde{\cdot}>$表示其测量值，带点 $<\dot{\cdot}>$表示其时间导数。其他常用于表示向量的符号包括宽帽符号 $<\widehat{\cdot}>$，表示其反对称形式；双竖线 $<\|\cdot\|>$，表示其范数；以及楔形符号 $<\cdot^\wedge>$，表示切空间表示。对于标量，竖线 $<|\cdot|>$表示其绝对值。

附录 C 定义了本文档中使用的各种参考系，详见表 C.1。每个参考系均以大写字母 F 表示，后跟用于标识该坐标系的下标，例如 $\mathrm{F_B}$ 表示机体坐标系。参考系的使用频率很高，因此每次在正文中提及时，都引用附录 C 中相应章节并不实际；因此大多数引用均已省略。

向量上方的上标用于指定观察或计算该向量所采用的参考系（例如，$\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 表示在北东地坐标系或 $\mathrm{F_N}$中观察到的地速，而$\mathbf{v}^{\mathrm{B}}$ 是同一向量，但在机体坐标系 $\mathrm{F_B}$中观察）。下标可用于明确变量或向量的含义，例如$\mathbf{v}_{\mathrm{TAS}}$ 表示空速向量，而非地速$\mathbf{v}$；也可用于指明向量的某个分量（例如，$\mathbf{v}_2^{\mathrm{N}}$ 表示$\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$的第二个分量）。此外，若向量带有两个表示参考系的下标，则表示该向量从第一个参考系指向第二个参考系。例如，$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}$ 表示在 $\mathrm{F_B}$[1]中观察到的、从 $\mathrm{F_N}$ 到 $\mathrm{F_B}$的角速度。

本文档大量依赖于 [1]，中讨论的线性概念和李代数概念，包括：

- 随机变量、分布、随机过程、白噪声和稳健统计。
- 欧几里得空间和李群，包括特殊正交群 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{SO}(3)$ 的各种参数化方式，该群表示刚体旋转（姿态）；以及特殊欧几里得群 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{SE}(3)$，该群表示完整的刚体运动（位姿）。
- 李代数的概念，例如流形、切空间、扰动、加减算子、时间导数和速度、伴随、协方差以及雅可比矩阵。

[1]这类似于在 $\mathrm{F_B}$中观察到的 $\mathrm{F_B}$ 相对于 $\mathrm{F_N}$ 的角速度。

- 欧几里得空间及其在李群上的推广中常见的数学技术，例如离散积分、梯度下降优化和状态估计。

- 多个刚体的线速度和角速度以及加速度的合成。

与参考坐标系的情况一样，每次使用其中讨论的概念时都附上对 [1] 的外部参考并不实际。有时会提供指向 [1] 的参考，但读者在需要了解上述主题的更多信息时，应自动查阅该文档。

本文档中包含许多不同类型的雅可比矩阵或函数偏导数矩阵（正式定义见 [1]），因此需要采用一种特殊的符号表示法。雅可比矩阵表示为字母 $\mathbf{J}$，并结合一个下标和一个上标：

- 下标提供有关函数定义域的信息，由一个表示增量如何添加到定义域中的符号以及定义域本身组成。当定义域属于欧几里得空间[2] 时，使用 $+$，但当定义域为流形或李群时则不使用；在这些情况下，$\oplus$表示增量是在局部切空间中添加的，而 $\boxplus$ 表示增量是在全局切空间中添加的。

- 上标由第二个符号和陪域本身组成，其中第二个符号表示如何在函数像或陪域中计算差异。当陪域为欧几里得[3]时，使用 $-$；当差异在陪域流形的局部切空间中计算时，使用$\ominus$；当差异在全局切空间中计算时，使用 $\boxminus$。

存在多种 $\mathbb{SO}(3)$ 和 $\mathbb{SE}(3)$ 表示方式 [1],，虽然它们完全等价，但每种应用都有其首选的参数化方式。因此，视需要采用旋转矩阵（例如 $\mathbf{R}_{\text{NB}}$）、旋转矢量（例如 $\mathbf{r}_{\text{NB}}$）、单位四元数（例如 $\mathbf{q}_{\text{NB}}$）和欧拉角（例如 $\boldsymbol{\phi}_{\text{NB}}$），而不特别说明它们指的是同一个概念，例如空间 F_{N} 系与局部 F_{B} 系之间的 $\mathcal{R}_{\text{NB}}$ 旋转。同样，视需要采用仿射表示（例如 $\mathbf{R}_{\text{EB}}$, $\mathbf{T}^{\text{E}}{}_{\text{EB}}$）、齐次矩阵（例如 $\mathbf{M}_{\text{EB}}$）、变换向量（例如 $\boldsymbol{\tau}_{\text{EB}}$）和单位双四元数（例如 $\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}}$），以表示空间坐标系 F_{E} 与局部坐标系 F_{B}之间的 $\mathcal{M}_{\text{EB}}$ 刚体运动。不过，最广泛使用的参数化方式是用于旋转的单位四元数 $\mathbf{q}$，以及用于刚体运动的单位双四元数 $\boldsymbol{\zeta}$。

与使用 $\mathbb{SO}(3)$ 和 $\mathbb{SE}(3)$ 李群相关的最常见符号有：$\circ$ 表示串接，$\otimes$ 表示单位四元数和单位双四元数的乘积，$<\cdot^{-1}>$ 表示逆，$\oplus$ 和 $\ominus$ 表示局部扰动，$\boxplus$ 和 $\boxminus$ 表示全局扰动，$\mathbf{Ad}$ 表示伴随矩阵，$\mathbf{g}()$ 表示点的变换，而 $\mathbf{g}_*()$ 表示向量的变换。

最后请注意，本文档中有些情况下需要对包含 $\mathbb{SO}(3)$ 和 $\mathbb{SE}(3)$ 元素的状态进行积分、优化或估计。由于这些并非欧几里得空间，作者采用李群理论对常见的微积分方法进行改造，例如 Runge-Kutta 积分、高斯-牛顿最小化以及扩展卡尔曼滤波器（EKF）状态估计，使其能够在 $\mathbb{SO}(3)$ 或 $\mathbb{SE}(3)$ 流形上运行，具体说明见 [1]。这种方法近年来在机器人领域的应用日益广泛，并避免了航空器导航和轨迹预测中通常采用的简化处理；它不仅更加严谨、优雅，还能避免因不断将所得位姿重新投影回流形而导致误差累积。

[2]当上下文已明确指出定义域是欧几里得空间时，下标符号有时可以省略。[3]当上下文已明确指出陪域是欧几里得空间时，上标符号有时可以省略。[4]尽管欧几里得空间在形式上定义于 [1],，但也可以非正式地将其理解为符合欧几里得几何五条公理的空间（1st 与同一事物相等的事物彼此也相等；2nd 等量加等量，和相等；3rd 等量减等量，差相等；4th 彼此重合的事物彼此相等；5th 整体大于部分）。

缩略语

加速度计 加速度计
ADS 空数据系统
AOA 攻角
AOS 侧滑角
AT 实际轨迹
AVL Athena 涡格法
凸包近似法 凸包近似法相机
CEP 圆概率误差
D 微分
地心地固坐标系 地心地固 (ECEF)
EGM96 地球重力场模型 1996
扩展卡尔曼滤波器 扩展卡尔曼滤波器
EUROCONTROL 欧洲航空安全组织
航空导航
FTE 飞行技术误差
格洛纳斯 全球导航卫星系统
制导、导航与控制 制导、导航与控制
全球导航卫星系统 全球导航卫星系统
GPS 全球定位系统
陀螺仪 陀螺仪
积分 积分
国际民用航空组织 国际民用航空航空
组织
IMU 惯性测量单元
INS 惯性导航系统
INSA 国际民航组织非标准大气
国际标准大气 国际民用航空组织 标准大气
ISO 国际组织用于
标准化
磁力计 磁力计力计
MEMS 微机电系统
系统
MSL 平均海平面
北东地坐标系 东北向下
NSE 导航系统误差
OAT 外部空气温度
OSP 外部静压
观测轨迹 观测值 轨迹
比例 比例
PID 比例积分微分
PSD 功率谱密度
PSFC 功率比油耗
爬升率 爬升率
参考轨迹 参考轨迹
感测轨迹 感测轨迹
SWaP 尺寸、重量与功率
TAS 真空速
TSE 总系统误差
无人驾驶航空器系统 无人驾驶航空器系统
无人驾驶飞行器（UAV）
涡格法 涡格法
VT 视觉轨迹
WGS84 1984年世界大地测量系统
WMM 世界磁场模型

目录

摘要

符号说明

缩略语

1 引言 **1**

1.1 目标.2 1.2 飞行仿真与概述.2 1.3 飞机轨迹的概念.4

2 地球模型 **7**

2.1 1984年世界大地测量系统及相关椭球体.7 2.2 综合重力模型.9 2.2.1 地球重力场模型1996.9 2.2.2 离心加速度和重力加速度.9 2.2.3 平均海平面与WGS84椭球体重力公式.10 2.2.4 位势高度.11

2.3 天气与国际民航组织非标准大气.12

2.3.1 定义.12 2.3.2 假设.14 2.3.3 位势高度与气压高度之间的关系.14 2.3.4 表达式.15

2.4 风与湍流.18

2.5 世界磁场模型.19 2.6 重力和磁场模型的精度.20 2.7 实现、验证与执行.21

3 飞机模型 **24**

3.1 质量与惯性分析.25 3.2 传感器位置与方向.26 3.3 控制参数.27 3.4 空气动力学.28 3.4.1 量纲分析.29 3.4.2 流体动力学分析.30 3.4.3 纵向力和力矩.30 3.4.4 侧向力和力矩.33 3.4.5 质心变化修正.35 3.5 推进.35

3.5.1 量纲分析.35 3.5.2 活塞发动机功率生成与燃油消耗.36 3.5.3 螺旋桨、推力与扭矩.37

3.5.4 质心变化校正.39 3.6 实现、验证与执行.39

4 飞行物理学 **42**

4.1 惯性坐标系的选择.42 4.2 线速度和角速度.43 4.3 实际轨迹.45 4.4 运动方程.45 4.4.1 运动学方程.46 4.4.2 力方程.46 4.4.3 旋转方程.48 4.4.4 力矩方程.48 4.4.5 质量方程.49 4.5 运动方程积分.49 4.5.1 欧几里得空间中的积分.50 4.5.2 刚体旋转流形中的积分.50 4.5.3 刚体运动流形中的积分.50 4.6 实现、验证与执行.52

5 个传感器 **53**

5.1 感测轨迹.54 5.2 惯性传感器.54 5.2.1 惯性传感器误差源.55 5.2.2 单轴惯性传感器误差模型.57 5.2.3 系统噪声值的获取.61 5.2.4 偏置漂移值的获取.61 5.2.5 三轴加速度计传感器误差模型.62 5.2.6 三轴陀螺仪传感器误差模型.63 5.2.7 惯性传感器安装.64 5.2.8 综合惯性传感器误差模型.65 5.2.9 选用的惯性传感器.67 5.3 非惯性传感器.68

5.3.1 磁力计.68 5.3.2 大气数据系统.70 5.3.3 全球导航卫星系统接收机.72

5.4 相机.73 5.4.1 图像生成、针孔相机模型和图像坐标系.74 5.4.2 相机安装.75 5.4.3 Earth Viewer.76 5.5 实现、验证与执行.77

6 飞行前程序 79

6.1 惯性传感器校准.80 6.2 平台坐标系姿态的确定.81 6.3 摆动或磁力计校准.82 6.4 相机标定.83 6.5 相机坐标系位姿的确定.83 6.6 自主对准.84 6.6.1 水平对准.84 6.6.2 陀螺寻北.84

6.6.3 磁对准.85 6.6.4 自对准结果.85 6.7 精对准.86 6.8 实现、验证与执行.88

7 制导与 控制 89

7.1 制导系统.90 7.1.1 参考轨迹.90 7.2 控制系统.92 7.2.1 PID 控制器.92 7.2.2 主回路与次回路.94 7.2.3 控制系统目标.95 7.3 实现、验证与执行.96

8 导航 97

8.1 观测轨迹.97 8.2 惯性导航滤波器.98 8.2.1 欧几里得空间中的空数据滤波器.100 8.2.2 刚体旋转局部流形中的导航滤波器.102 8.3 实现、验证与执行.106

参考文献 108

A 假设 A-1

B 物理常数 B-1

C 坐标系 mes C-1

C.1 地球中心坐标系.C-2 C.1.1 惯性坐标系.C-2 C.1.2 地球坐标系.C-2 C.1.3 球坐标系.C-3 C.1.4 北东地坐标系.C-4 C.2 飞机中心坐标系.C-5 C.2.1 机体坐标系.C-5 C.2.2 风轴坐标系.C-6 C.2.3 地速坐标系.C-7 C.2.4 湍流坐标系.C-8 C.2.5 参考系.C-8 C.3 传感器坐标系.C-9 C.3.1 平台坐标系.C-9 C.3.2 加速度计坐标系.C-9 C.3.3 陀螺仪坐标系.C-10 C.3.4 相机坐标系.C-10

第 1 章

引言

一种无人驾驶飞行器（UAV），也称为无人机，是一种机上没有人工飞行员的飞机。它只是无人驾驶航空器系统（UAS）的一个组成部分，该系统不仅包括无人驾驶飞行器平台，还包括一个基于地面的控制器，以及两者之间的通信系统 [2]。除了尺寸、重量、机载设备和性能之外，无人驾驶飞行器还可以根据其动力来源（电力、活塞发动机、涡轮发动机）、升力产生方式（固定翼、单旋翼、多旋翼、复合式）以及自主程度进行分类。在最后这一类别中，无人驾驶航空器系统分为遥控飞机和自主飞机。前者由地面人工操作员持续向飞机提供控制指令，而后者则依靠机载计算机执行预先上传的任务目标。

对于远程驾驶的平台，无人驾驶飞行器还会利用通信信道向地面提供其当前状态（位置、速度、姿态等），有时也会传送照片或视频；地面操作员依靠这些信息持续生成控制指令。自主飞行器也可以利用通信信道向地面提供信息，地面可据此决定是否更新任务目标；但正如其名称所示，自主飞行器无需与地面进行任何形式的通信即可运行，它们会继续执行任务，直到飞行结束或通信恢复。

过去几年，无人驾驶航空器系统的数量、种类和应用呈指数级增长，预计这一趋势未来还将持续 [3, 4]。对于低尺寸、重量与功率（尺寸、重量与功率）的飞行器而言，这一点尤为明显，因为较低的成本使其适用于广泛的用户和应用场景，包括民用和军用。这些飞行器中有相当大一部分能够自主运行。尽管具体情况略有差异，这些平台都依靠一组传感器持续提供有关机体状态的含噪数据、一个用于估计飞机位姿（位置加姿态）的导航算法，以及一个根据导航输出调整飞机控制机制、从而成功执行预装任务的控制系统。

本文重点介绍固定翼自主平台，这类平台通常配备全球导航卫星系统（GNSS）接收机、加速度计、陀螺仪、磁力计、大气数据系统、皮托管、风向标以及一个或多个相机[1]。加速度计和陀螺仪的组合称为惯性测量单元（IMU）。随着尺寸、重量与功率（SWaP）的降低，所有传感器引入的误差都会显著增大，尤其是惯性测量单元。近年来，固态加速度计和陀螺仪的引入极大地提升了低尺寸、重量与功率（SWaP）惯性测量单元的性能，新型号与几年前生产的型号相比，性能有了显著改善。对于低尺寸、重量与功率（SWaP）的飞行器而言，平台自身质量较小，使得测量读数中的噪声问题更加严重。这会导致惯性减小，进而使大气湍流引起的高频加速度和旋转更加明显。

航空器导航 传统上依赖加速度计、陀螺仪和

[1]本文档采用单台相机。

磁力计提供的测量值，因此会产生缓慢但无界的位置漂移，只有借助外部导航（无线电）辅助设备进行三角定位才能消除这种漂移。近年来，卫星导航的引入彻底消除了位置漂移，并使低尺寸、重量和功耗平台上的自主惯性导航成为可能 [5, 6, 7]。 [8] 对低尺寸、重量和功耗无人驾驶飞行器系统及其面临的问题（包括 GNSS 信号退化或缺失）进行了全面综述。

本章讨论本文档的目标（章节 1.1），列出相关高保真飞行模拟器的主要模块，这些模块与文档大纲相对应（章节 1.2），随后介绍理解仿真所需的关键概念，例如各种类型的轨迹、频率和误差（章节 1.3）。

1.1 目标

本文档的主要目标是描述相关自主固定翼飞机高保真飞行模拟器的功能及其底层算法。该仿真系统配备了标准的制导、导航与控制（GNC）系统，不仅可用于测试和验证新型制导、导航与控制算法，还可用于评估这些算法在面对不同等级的传感器、恶劣且多变的风况和大气条件、具有挑战性的任务，甚至在缺少 GNSS 信号的情况下的表现。该仿真器的源代码采用 C++ 编写，并以开源代码的形式发布于 [9]。

虽然仿真永远无法完全取代新算法的实地测试，但本文所述的仿真器旨在尽可能复现各种因素对制导、导航与控制系统性能的影响，将假设或简化限制在最低限度，并纳入多种通常不会在仿真中考虑的相对次要效应；这些效应有时可能导致算法未能按预期运行。

请注意，尽管第5章中描述的传感器套件包含一台仿真相机，能够生成逼真的地球表面图像，模拟真实机载摄像机沿最终轨迹飞行时记录的画面，但制导、导航与控制系统并未使用这些图像。不过，通过加入相机，该仿真已做好准备，可接入视觉导航算法，以补充甚至替代所提出的惯性导航系统。

该仿真器经过设计，其大多数输入均以随机方式而非确定性方式定义。这一设计便于使用蒙特卡洛模拟；在模拟中，定义天气、风场、湍流、初始条件、机载传感器引入的误差，以及地球重力场和磁场的具体参数，会以伪随机方式在每次执行或运行之间变化。此外，该仿真器还支持以随机方式定义代表飞行器任务的制导目标。使用蒙特卡洛模拟有助于在广泛的条件范围内评估给定算法，确保几乎所有对结果有影响的参数在每次运行中都不相同，从而提高评估结果的意义。

1.2 飞行仿真与概述

由于高保真仿真器的主要目标是充当测试平台，用于实现、测试和评估新型制导、导航与控制算法，因此它必须能够准确模拟低尺寸、重量与功率固定翼自主飞行器的飞行，并考虑多种因素对最终飞机轨迹的影响，例如大气条件、风、空气湍流、飞机的气动与推进性能、机载传感器、构成任务的制导目标、驱动油门和气动控制装置以使轨迹符合制导目标的控制系统，以及处理传感器获取的数据并向控制系统提供适当目标的导航系统。

本章节概述了飞行模拟器中协同工作的各个模块及其相互作用，以便读者能够结合更宏观的背景来理解后续章节，

了解它们所属的系统以及它们如何为整体仿真目标做出贡献，而不只是将它们视为独立的实体。

图 1.1 展示了自主飞行器飞行过程中发生的两个不同过程。第一个过程由右侧的黄色方框表示，重点关注飞行物理学以及飞机与周围环境之间的相互作用，这种相互作用会产生实际飞机轨迹；第二个过程由左侧的绿色方框表示，包含负责确保最终轨迹尽可能接近原始目标的飞机系统。如图所示，仿真的这两个部分并非彼此独立。飞行器飞行取决于飞机系统提供的控制参数 $\boldsymbol{\delta}_{\text{CNTR}}$ （油门位置和气动操纵面的位置）随时间的变化，而系统行为则完全取决于真实飞机状态 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$。

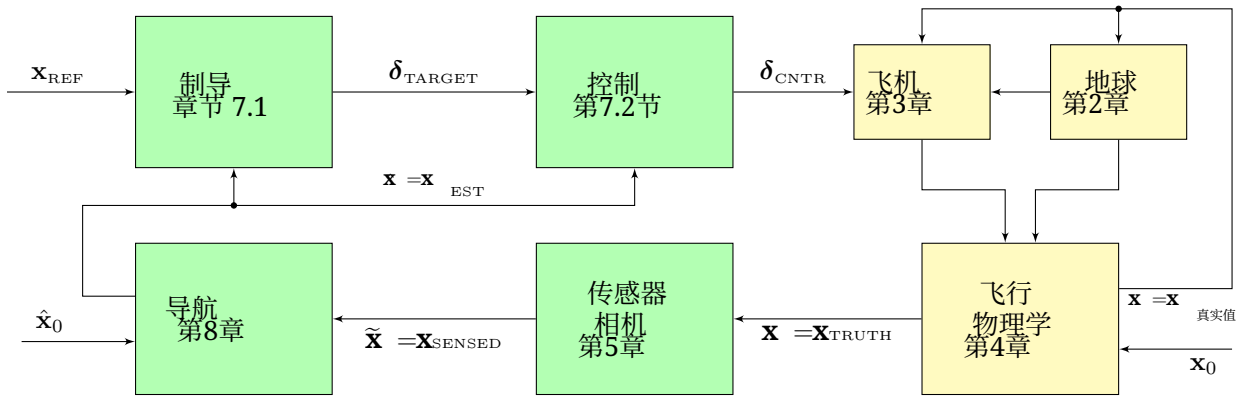

图 1.1：高保真仿真的组成部分

仿真的第一部分（黄色方框）模拟飞机飞行及其仿真过程，并由此得到实际轨迹或真实轨迹，这是第2章、第3章和第4章的重点。这几章讨论飞行器平台及其与大气的相互作用，并将飞行器控制装置随时间的变化作为输入。其目标是建立高精度模型，描述飞机飞行中涉及的大多数物理现象，同时识别并阐明引入简化处理的情形。这样一来，仿真飞机对控制输入变化的响应（这些输入由本文后续讨论的算法生成）就会与真实飞机飞行时的响应十分接近，从而能够验证或否定制导、导航与控制算法。第2章介绍飞机运动所处的环境及其对飞机轨迹的影响因素，例如引力场、大气、风和空气湍流。随后，第3章重点讨论飞机的气动与推进性能，以及这些性能对大气条件、油门杆位置和气动操纵面的依赖关系。第一部分最后以第4章作结，该章介绍描述飞行物理学的运动方程，以及通过对这些方程进行积分而得到的飞机实际轨迹或真实轨迹。

仿真的第二部分（绿色模块）重点介绍自主飞行器上安装的系统，其主要任务是调节油门杆和气动操纵面，使由此产生的轨迹符合先前载入的任务目标。为此，飞机配备了一套用于测量飞机状态的传感器、一个负责估计载体位姿的导航系统，以及制导与控制系统；这些系统共同将该估计值与任务目标进行比较，并据此调节油门杆和操纵面，使飞机偏离目标的程度最小。第5章介绍飞机上安装的各种传感器，分析其误差源，并引入描述其行为的模型。第6章讨论飞行前需要执行的校准和对准程序，以减少不同传感器引入的误差。在为制导、导航与控制系统安排的两章中的第一章——第7章中，介绍了负责将任务目标转换为控制目标的制导系统，以及负责将这些目标与导航系统提供的估计值进行比较，从而获得适当的油门和操纵面调节量的控制系统。最后，第8章介绍惯性导航系统，其任务是获得尽可能准确的估计值

基于传感器测量值的飞机状态。

本文档还包括三个附录。附录 A 汇总了模拟器中采用的不同假设，附录B 列出了文档全文所引用的不同常数，附录 C 汇总了前面所有章节中使用的各种参考坐标系，描述了定义这些参考坐标系所需的变量，并解释了它们之间的关系。

1.3 飞机轨迹的概念

如图 1.1 所示，各种类型的飞机轨迹或飞机状态构成了不同仿真模块之间的主要接口。飞机轨迹是由一组变量组成的、带有时间戳的序列，用于表示某一时刻的飞机状态。如果条件允许，飞机状态应由描述飞机位姿（位置加姿态）、线运动学和角运动学以及动力学的变量组成。根据其准确性和完整性（飞机状态变量的标识和数量），可以定义多种不同的飞机轨迹表示；这些表示列于表 1.1 中，并在下文加以描述：

轨迹	首字母缩略词	其他名称	Math	描述	章节
实际	AT	real, true	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{真实值}}$	真实飞机状态	4.3
感知值	ST	-	$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}$	由机载传感器测量	5.1
观测值	OT	估计值	$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{EST}}$	惯性导航输出	8.1
视觉	VT	图像	$\hat{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{x}_{\text{IMG}}$	视觉导航输出	N/A
参考	RT	制导，脚本	$\mathbf{x}_{\text{REF}}$	取自任务目标	7.1.1

表 1.1：飞机轨迹的类型

- 实际轨迹 (AT)、真实轨迹或真值轨迹 由一系列带时间戳的飞机实际状态 组成，以$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}(t)$ 表示，是飞机实际飞行的轨迹。它是飞机油门和操纵面位置设定后，与周围环境相互作用的结果。该过程由图 1.1 中的黄色方框表示，其起点是环境变量（温度、压力、风、湍流、引力）对飞机真值位置的依赖关系，这些变量由地球模型（第2章）提供。飞机的气动和推进力及力矩（第3章）取决于这些环境变量，以及油门和操纵面的位置 $\boldsymbol{\delta}_{\text{CNTR}}(t_c)$，其中 $t_c = c \cdot \Delta t_{\text{CNTR}}$，这些位置由控制系统设定（仿真中的控制系统以 50 Hz 的频率运行）。随后，飞机运动完全取决于环境条件和飞机性能；第4章通过对运动方程进行积分来对此过程建模，而积分需要初始条件 $\mathbf{x}_0$。

  实际轨迹或真实轨迹的定义见第 4.3 节。这是一个容易理解的概念，但所有相关参与者都无法获知飞机的实际状态，因为不存在足够精确、能够无误差测量其各个分量的传感器。在现实世界中，所有分量都连续变化；但在仿真中，其计算频率为 500 Hz，因此得到 $\mathbf{x}(t_t) = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}(t_t)$，其中 $t_t = t \cdot \Delta t_{\text{TRUTH}}$。不过，真实轨迹仅用于评估，并作为飞机传感器的输入，因为飞机的制导、导航与控制系统是基于轨迹的其他精度较低的表示来运行的。

- **感知轨迹**（*ST*），表示为 $\tilde{\mathbf{x}}(t_s) = \mathbf{x}_{\text{感知值}}(t_s)$，其中 $t_s = s \cdot \Delta t_{\text{感知值}}$，是飞机轨迹的一种离散表示，它将不同机载传感器在一系列离散时间点的输出整合在一起，这些输出称为感测到的飞机状态。感知轨迹在第5.1节中定义，在仿真中，其获取频率为100 Hz；然而，其中某些组成部分的生成频率较低，例如图像为10 Hz，GNSS接收机测量值为1 Hz。因此，感测状态不仅是不完整的，即不包含构成实际状态的所有变量，而且也存在部分错误，因为其中包含了传感器本身引入的误差。然而，感知轨迹是制导、导航与控制系统唯一能够获取的实际轨迹视图。

机载传感器在获取感测轨迹时引入的误差将在第5章中描述。随后，导航系统将获取感知状态，并对其进行处理，以减少测量误差。

• 观测轨迹 (OT) 或估计轨迹，表示为 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$，其中 $t_n = n \cdot \Delta t_{\text{EST}}$，是惯性导航系统的输出，包含观测到的飞机状态，也就是飞机系统对飞机实际状态所掌握的最准确信息。观测轨迹在第8.1节中定义，在仿真中以 100 Hz 的频率计算。它可以被视为感测轨迹的改进版本，因为它是完整的（不仅包含感测变量，还包含实际轨迹中与制导和控制系统更相关的其他分量），并且误差也更小（它对实际轨迹的表征更准确）。惯性导航系统如何获取该轨迹将在第8章中说明。

• 视觉轨迹 (VT) 或图像轨迹，表示为 $\mathring{\mathbf{x}}(t_i) = \mathbf{x}_{\text{IMG}}(t_i)$，其中 $t_i = i \cdot \Delta t_{\text{IMG}}$，是视觉导航系统的输出。它可作为观测轨迹的替代方案或补充，由一系列视觉飞机状态组成，表示通过视觉算法估计得到的实际轨迹，其生成频率与图像相同，即 10 Hz。请注意，如前所述，尽管仿真器能够生成逼真的地球表面图像，因而这些图像有可能被视觉导航系统使用，但目前尚未实现此类系统，因此图 1.1 中没有显示视觉轨迹。

• 参考轨迹 （RT）、制导轨迹或轨迹脚本，用$\mathbf{x}_{\text{REF}}$表示，在第 7.1.1 节中定义，其中包含根据任务目标应当实现的目标轨迹。因此，它并不完整，因为对于每个飞行段，它只包含飞机应当遵循的轨迹分量。请注意，制导、导航与控制系统的主要目标是使飞机实际飞行的真实轨迹或实际轨迹尽可能接近参考轨迹，但实际上它所做的是缩小观测轨迹与参考轨迹之间的差异。

离散时间	频率	周期	变量	系统
$t_t = t \cdot \Delta t_{\text{TRUTH}}$	500 赫兹	0.002 秒	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$	飞行物理学
$t_s = s \cdot \Delta t_{\text{感知值}}$	100 赫兹	0.01 秒	$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{感知值}}$	传感器
$t_n = n \cdot \Delta t_{\text{EST}}$	100 赫兹	0.01 秒	$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{EST}}$	惯性导航
$t_c = c \cdot \Delta t_{\text{CNTR}}$	50 赫兹	0.02 秒	$\boldsymbol{\delta}_{\text{目标}}, \boldsymbol{\delta}_{\text{CNTR}}$	制导与控制
$t_i = i \cdot \Delta t_{\text{IMG}}$	10 赫兹	0.1 秒	$\mathring{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{IMG}}$	视觉导航与相机（传感器）
$t_g = 克 \cdot \Delta t_{\text{GNSS}}$	1 Hz	1 s		GNSS接收机（传感器）

表1.2：不同系统及轨迹表示的工作频率

如图1.1所示，仿真器还需要真实初始条件$\mathbf{x}_0$ 来启动积分，从而得到实际轨迹；导航系统则需要自身的估计初始条件 $\hat{\mathbf{x}}_{0,}$，如第8章所述，这些条件大多直接取自传感器本身。

表1.2列出了仿真中并存的各种运行频率，以及按这些频率采样或计算的变量和以这些频率运行的系统。

误差	缩写	比较对象	备注
飞行技术误差	FTE	观测轨迹和参考轨迹	评估制导与控制系统的性能
导航系统误差	NSE	实际轨迹与观测轨迹	评估导航系统的性能
总系统误差	TSE	实际轨迹与参考轨迹	飞行技术误差与导航系统误差的组合

表 1.3：不同轨迹类型之间的误差 类型

表 1.3 和图 1.2 展示了不同类型轨迹之间的差异 [10], ，这些差异可用于评估不同飞行器系统的性能。每个制导、导航与控制系统的最终目标都是减小总系统误差 (TSE)，即实际轨迹与参考轨迹之间的差异。这个目标可以

然而，这个目标可以分为两个彼此相当独立、相辅相成的子目标。第一个是减小导航系统误差 (NSE)，即实际轨迹与观测轨迹之间的差异，这取决于机载传感器和导航系统的性能；第二个是减小飞行技术误差 (FTE)，即观测轨迹与参考轨迹之间的差异，这属于制导与控制系统的职责。

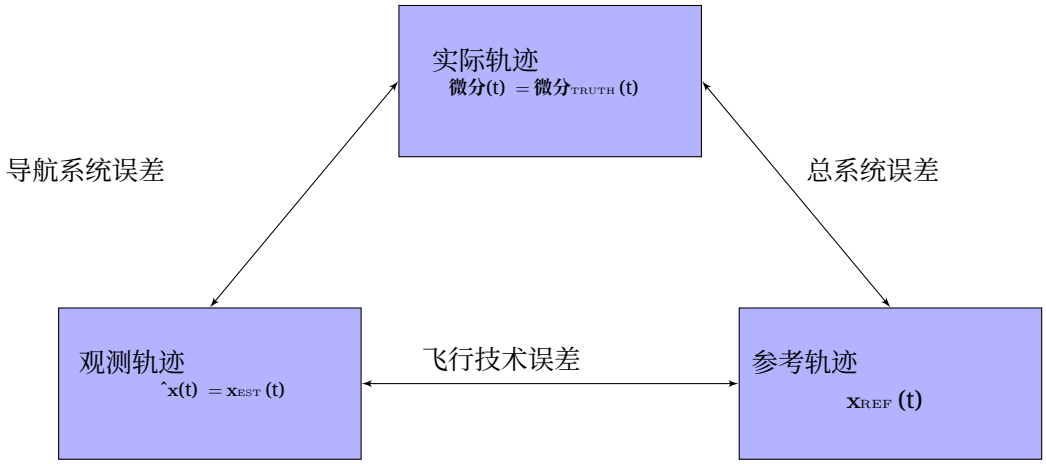

图 1.2：轨迹误差

第2章

地球模型

地球模型涵盖一系列概念、假设和模型，它们共同构成了飞机运动及其与环境相互作用的基础框架。轨迹计算过程的准确性在很大程度上取决于对该框架的恰当定义，因为飞机性能及其运动都依赖于大气特性以及对地球物理的恰当建模。

地球模型在仿真中的行为以图形方式展示于图2.1中。所有输出（大气条件、风、空气湍流等）均基于飞机的真实状态，尤其是时间和大地位置。



图2.1：地球模型流程图

本章首先介绍用于模拟地球表面的参考椭球（第 2.1 节），它是地心地固参考系 F_E 以及笛卡尔坐标、地心坐标和大地坐标的基础，飞机的位置便是通过这些坐标相对于地球确定的。随后，本章定义了椭球重力模型，用以表示引力位与离心位的组合；该模型确立了大气的垂直平衡，并为定义平均海平面和位势高度奠定基础（第 2.2 节）。第 2.3 节介绍天气和大气模型；第 2.4 节则描述低频风分量——它是影响飞机轨迹的重要因素——以及湍流或高频风分量，后者会显著影响飞机动力学。导航不可或缺的地球磁场将在第 2.5 节介绍。第 2.6 节分析先前所述模型提供的、供飞行器系统使用的重力场和磁场，与实际存在并由飞机传感器测得的重力场和磁场之间的差异；导航系统的设计应考虑模型的不精确性，以降低其对飞机轨迹的影响。本章最后讨论地球模型的实现与验证（第 2.7 节）。

2.1 世界大地坐标系统1984及相关椭球

大地测量学是一门科学学科，研究如何在三维时变空间中测量和表示地球，包括地球的引力场。良好的地球大地参考系对于飞机地理定位和导航至关重要。1984年世界大地测量系统（WGS84） [11]是用于这些目的的事实标准 [6, 7, 12, 13, 14]；它定义了适当的参考系，引入了不同的坐标组，并提供了基本常数。

WGS84系统基于以下假设：

- 地球表面是一个旋转椭球体 [A1]。
- 地球椭球体以地球质心 [A2]为中心。
- 地球以恒定速度绕椭球体对称轴 [A3]旋转。

WGS84 椭球体 由其长半轴 a 和扁率 f [11]（附录B）定义。其他椭球体参数，例如短半轴 b、 1st 第一偏心率 e 和 2nd 第二偏心率 g，均可直接求得：

$$\mathrm{b} = \mathrm{a}\,(1-\mathrm{f}) \tag{2.1}$$

$$\mathrm{e} = \sqrt{\frac{\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2}} = \sqrt{\mathrm{f}\,(2-\mathrm{f})} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{g} = \sqrt{\frac{\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}{\mathrm{b}^2}} \tag{2.3}$$

椭球曲率半径对于导航 [6, 7, 12, 13, 14]非常重要。给定椭球面上的任意点 P_1 ，卯酉圈旋转中心 X 是旋转轴与一条直线的交点，该直线经过 P_1 且垂直于椭球面（图 2.2）。卯酉圈曲率半径N 是椭球截面的曲率半径，该截面由一个垂直于子午线且经过 $\mathrm{P}_1\mathrm{X}$[1]的平面所截得。

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^2\sin^2\varphi}} \tag{2.4}$$

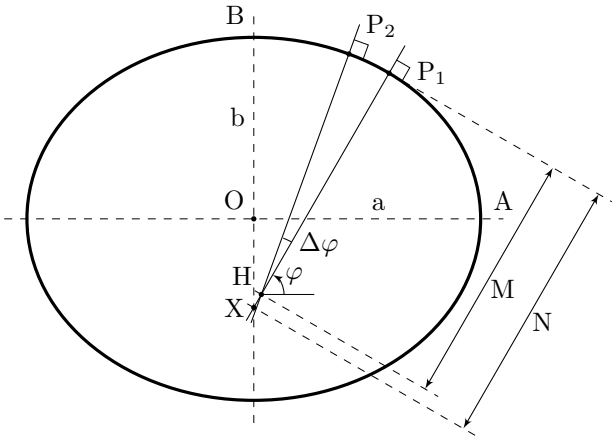

图 2.2：沿子午线剖切椭球体所得的椭圆

子午线旋转中心 H 是同一子午线上两个间隔无穷小的点 P_1 和 P_2 处椭球面法线的交点。子午线曲率半径M 是 H 到点 P_1的距离。

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{N}}{1+\mathrm{g}^2\cos^2\varphi} \tag{2.5}$$

基于表示地球表面的椭球体，WGS84 还引入了地心地固参考系及其相关坐标（笛卡尔坐标、地心坐标、大地坐标），这些内容在章节 C.1.2 中定义，用于表示任意点相对于地球的位置。

[1]公式（2.4）积分控制器 引入纬度 φ，其定义见 C.1.2.3 节，即赤道平面与直线 $\mathrm{P}_1\mathrm{X}$ 之间的夹角 .

2.2 综合重力模型

本节旨在建立作用于所有飞机的引力和离心加速度模型，并定义依赖于它们的平均海平面和位势高度H概念。平均海平面作为测量高度的参考，而位势高度H则是连接用于确定飞机相对于地球位置的几何高度或大地高度 h（C.1.2.3 节）与气压高度 $\mathrm{H_P}$（第 2.3 节）的关键；大气特性（进而飞机性能）均以气压高度为基础。

2.2.1 地球重力场模型1996

引力对所有飞机的运动都有显著影响，因此必须以足够的精度进行建模。处于引力场$\mathbf{g}$ 中的所有物体都会受到由引力位函数 $\mathrm{U_g}$导出的势加速度，因此：

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\nabla} \mathrm{U_g} \tag{2.6}$$

与 WGS84 [11], 相关联的地球重力场模型1996（EGM96） [15], 包含一个非常精确的地球引力场模型。该模型将引力位函数 $\mathrm{U_g}$ 表示为勒让德多项式级数展开，最高阶数和次数均为360。它基于地心坐标（章节 C.1.2.2）和球坐标系 $\mathrm{F_S}$对（2.6）进行展开：

$$\mathbf{g}^{\mathrm{S}}(\theta,\, \lambda,\, \mathrm{r}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{r}} \dfrac{\partial \mathrm{U_g}}{\partial \theta} & \dfrac{1}{\mathrm{r}\, \sin\theta} \dfrac{\partial \mathrm{U_g}}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial \mathrm{U_g}}{\partial \mathrm{r}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2.7}$$

航空器导航和轨迹预测不需要如此高的精度，因此可以将 EGM96 模型简化为椭球引力模型 [12, 14]。假设引力场仅随地心距离和余纬变化 [A4], ，则只需使用 EGM96 勒让德多项式的前两项（球形和椭球形变化），得到：

$$\mathrm{U_g}(\theta, \mathrm{r}) = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}} \right)^2 \bar{\mathrm{C}}_{20} \frac{\sqrt{5}}{2} \left(3\, \cos^2\theta - 1 \right) \right] \tag{2.8}$$

其中 GM 为地球引力常数（包含大气质量） [11], ，C_{20} 为 EGM96 二阶带谐系数 [15] （附录B）。应用式 (2.7) 可得到一个椭球引力场：

$$\mathbf{g}^{\mathrm{S}}(\theta, \mathrm{r}) = -\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}^2} \left[\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}} \right)^2 \bar{\mathrm{C}}_{20}\, 3\sqrt{5}\, \sin\theta \cos\theta \quad 0 \quad 1 + 3 \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}} \right)^2 \bar{\mathrm{C}}_{20} \frac{\sqrt{5}}{2} \left(3\, \cos^2\theta - 1 \right) \right]^{\mathrm{T}} \tag{2.9}$$

2.2.2 离心加速度和重力加速度

由地球绕极轴旋转产生的离心加速度 $\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ 不仅会影响飞机轨迹，还会影响大气垂直平衡，因此在定义位势高度和确定平均海平面时发挥着关键作用 [12, 14]。根据 [11], ，地球绕椭球体对称轴的角速度 ω_{E} 可视为常数（附录 B）。

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{E}} = \omega_{\mathrm{E}}\, \mathbf{i}_3^{\mathrm{E}} \tag{2.10}$$

任何相对于地球质心 $\mathrm{O_E}$ 的位置由其笛卡尔坐标$\mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{EN}} = \mathbf{T}^{\mathrm{E},\mathrm{CAR}}$ 表示的物体，都会因地球自转而受到离心加速度 $\mathbf{a_c}$ ，其方向平行于

赤道平面，且源自离心位 $\mathrm{U_c}$。

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U_c} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{c}^\mathrm{E} = -\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{E}^\mathrm{E}\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{E}^\mathrm{E}\,\mathbf{T}_\mathrm{EN}^\mathrm{E} \tag{2.12}$$

使用地心坐标和球坐标系 $\mathrm{F_S}$ 可得：

$$\mathbf{a}_\mathrm{c}^\mathrm{S}(\theta,\,\lambda,\,\mathrm{r}) = \left[\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{U_c}}{\partial\theta} \quad \frac{1}{\mathrm{r}\,\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{U_c}}{\partial\lambda} \quad \frac{\partial \mathrm{U_c}}{\partial \mathrm{r}}\right]^\mathrm{T} \tag{2.13}$$

离心位及其加速度的最终表达式如下：

$$\mathrm{U_c}(\theta,\mathrm{r}) = \frac{\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}^\mathrm{T}\,\boldsymbol{\omega}_\mathrm{E}}{2} = \frac{(\omega_\mathrm{E}\;\mathrm{r}\;\sin\theta)^2}{2} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{c}^\mathrm{S}(\theta,\mathrm{r}) = \left[\omega_\mathrm{E}^2\,\mathrm{r}\,\sin\theta\,\cos\theta \quad 0 \quad \omega_\mathrm{E}^2\,\mathrm{r}\,\sin^2\theta\right]^\mathrm{T} \tag{2.15}$$

重力加速度克$_\mathrm{c}$ 定义为引力加速度和离心加速度之和。需要定义平均海平面的概念，并建立大地高度与位势高度之间的关系，这会影响第 2.3 节所述的大气特性。重力加速度可以定义为由位函数 U 导出，即：

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla}\mathrm{U} \tag{2.16}$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{U_g} + \mathrm{U_c} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{g}_\mathrm{c} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_\mathrm{c} \tag{2.18}$$

2.2.3 平均海平面与WGS84椭球体重力公式

平均海平面(MSL)定义为最能代表平均海平面的等位势面[2]。由于WGS84和EGM96模型的构建方式，地球表面（由WGS84椭球体定义）是一个位势面，其上的点大地高度h 均为零。因此，MSL表面可视为与WGS84椭球体重合 [14, 16]。

$$\mathrm{h_{MSL}} = 0 \tag{2.19}$$

然而，根据（2.9）所给出的简化重力模型，通过（2.18）计算得到的重力加速度$\mathbf{g}_\mathrm{c}$ 沿$\mathbf{i}_1^\mathrm{N}$ 方向存在不可忽略的分量，因此并不垂直于WGS84椭球体所表示的位势面。若要以这种方式计算得到的重力矢量$\mathbf{g}_\mathrm{c}$ 沿垂向，就需要在EGM96多项式中加入更多项。WGS84并不将重力计算为引力与离心加速度之和，而是直接给出表达式（2.20）[3]，，该表达式取决于大地高度φ 和高度h （章节C.1.2.3），并基于第2.1节和第2.2.1节已介绍的常数，以及赤道和两极处的理论平均海平面重力值（$\mathrm{g_{cMSL,\,E}}$，$\mathrm{g_{cMSL,\,P}}$） [11] （附录B）：

$$\mathbf{g}_\mathrm{c,MOD}^\mathrm{N} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \mathrm{g}_\mathrm{c,MOD,3}^\mathrm{N}\end{bmatrix}^\mathrm{T} \tag{2.20}$$

$$\mathrm{g}_\mathrm{c,MOD,3}^\mathrm{N} = \mathrm{g_{cMSL}}\left[1 - \frac{2}{\mathrm{a}}\left(1 + \mathrm{f} + \mathrm{m} - 2\,\mathrm{f}\,\sin^2\varphi\right)\mathrm{h} + \frac{3}{\mathrm{a}^2}\,\mathrm{h}^2\right] \tag{2.21}$$

$$\mathrm{g_{cMSL}} = \mathrm{g_{cMSL,E}}\,\frac{1 + \mathrm{k}\,\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^2\sin^2\varphi}} \tag{2.22}$$

$$\mathrm{k} = \frac{\mathrm{b}\;\mathrm{g_{cMSL,P}}}{\mathrm{a}\;\mathrm{g_{cMSL,E}}} - 1 \tag{2.23}$$

[2]海洋表面并非固定不变的水位。即使消除了潮汐和海浪的影响，洋流和盐度梯度仍会导致海平面围绕平均海平面上下振荡约1米。[3]这个表达式称为Somigliana椭球重力公式。

$$m = \frac{\omega_E^2 \, a^2 \, b}{GM} \tag{2.24}$$

仿真器不使用（2.9），而是直接基于（2.20）计算重力。如果需要引力，则通过减去（2.15）给出的离心加速度来求得。表达式（2.20）使用下标$_{MOD}$（模型），以区别于（2.75）；说明请参见第2.6节。

2.2.4 位势高度

位势高度 H 的定义是：当单位质量移动距离 dH 时，标准自由落体加速度 g_0[4] [17] (附录B) 所做的微分功，与重力加速度 g_c 使单位质量沿大地距离 dh 移动时所做的功相同。因此，位势高度与大地高度之间的关系如下：

$$-g_c \, dh = -g_0 \, dH \tag{2.25}$$

MSL 也可以定义为位势高度为零的表面：

$$H_{MSL} = 0 \tag{2.26}$$

通过对 MSL（h_{MSL} =$H_{MSL} = 0$）与任意点之间的式 (2.25) 积分，可得大地高度与位势高度之间的关系。

$$\int_{h_{MSL}=0}^{h} g_c \, dh = g_0 \int_{H_{MSL}=0}^{H} dH \tag{2.27}$$

无法得到显式表达式，但可以轻松制成表格：

$$H = f_H(h, \varphi) \tag{2.28}$$
$$h = f_h(H, \varphi) \tag{2.29}$$

h [m]	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	(2.30)
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1000	997.15	997.51	998.48	999.80	1001.12	1002.08	1002.43	999.84
2000	1993.99	1994.70	1996.64	1999.29	2001.93	2003.85	2004.55	1999.37
3000	2990.52	2991.58	2994.49	2998.46	3002.42	3005.31	3006.36	2998.58
4000	3986.73	3988.15	3992.03	3997.32	4002.59	4006.45	4007.85	3997.48
5000	4982.62	4984.40	4989.25	4995.86	5002.46	5007.27	5009.03	4996.07

表 2.1：不同纬度下的位势高度与大地高度

如表2.1所示，纬度的影响非常小：对于每1000 m的几何高度，赤道与两极之间的位势高度差异约为5 m。这一事实，加上采用查表法而非显式解所带来的代价，解释了为什么通常（[17] 例如）会采用通过对式(2.25)进行积分得到的简化表达式，该积分基于半径为R_E [18]的球形地球表面（附录B）、通过从式(2.8)中去除 2^{nd}项而得到的球形引力，以及平均离心效应。

$$H = \frac{R_E \cdot h}{R_E + h} \tag{2.30}$$

[4]标准自由落体加速度 g_0 由自由落体加速度的 Lambert 方程 [17]$g = 9.80616\,(1 - 0.0026373\cos(2\varphi) + 0.0000059\cos^2(2\varphi))$ m/s^{2}在纬度 $\varphi = 45^\circ\,32'\,33''$ 下得到。

$$\mathrm{h} = \frac{\mathrm{R_E} \cdot \mathrm{H}}{\mathrm{R_E} - \mathrm{H}} \tag{2.31}$$

为方便起见，仿真 [A5]采用了这一简化处理，因此在温带纬度下产生的误差最小，如表2.1所示。该表比较了在不同纬度下应用公式(2.28)与公式(2.30)所得的结果：

2.3 天气和国际民航组织非标准大气

大气是飞机运动及其与环境相互作用所处的介质。飞机性能直接取决于飞机所在位置的大气特性（压力、温度、密度），因此有必要定义一个足够精确且符合实际的大气模型，以正确捕捉大气特性之间的依赖关系。

国际民用航空组织（ICAO）标准大气（ISA） [17]是航空领域用于计算和评估飞机性能、测试和仪器校准的国际标准[16]。标准大气能够正确反映不同变量之间的物理学规律及相互关系，但它本质上是为标准化而构建的静态模型，无法捕捉天气引起的随水平位置和时间变化的大气变化。因此，仿真器采用了作者对 ISA 的推广模型，该模型引入了一个基于两个参数（压力和温度偏差）的准静态大气模型；当两个参数均为零时，该模型默认为 ISA。作者将此模型命名为国际民航组织非标准大气（INSA），并将其发表于 [19]。

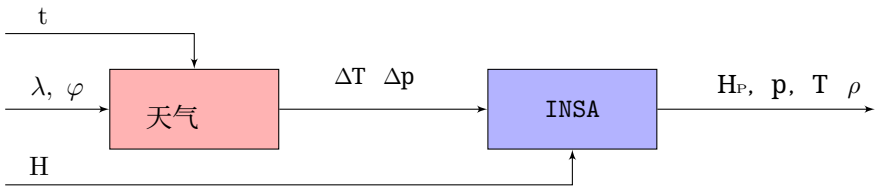

图2.3：天气与 INSA 流程图

INSA模型由作者多年前受欧洲航空安全组织（EUROCONTROL）委托开发，相关知识产权均归其所有（©2023年 保留所有权利）。EUROCONTROL已授予作者在本文档中使用INSA模型的许可。

如图2.3所示，天气模型是专门构建的，用于再现特定日期的预期气象条件。输入时间和水平位置（由经度 λ 和纬度 φ给出）后，模型会返回温度和压力偏差（ΔT 和 Δp）。这两个参数构成一个 INSA模型实例；该模型基于与国际标准大气相同的假设，并提供与特定位置和时间对应的空气柱中所有大气变量随位势高度的变化。尽管 [19] 中介绍的 INSA模型涵盖对流层和平流层，但仿真仅限于最低层（对流层）。

2.3.1 定义

The 以下定义对于正确理解和推导大气模式是必要的。 l:

- 柱状大气模型 是一组关系，用于描述沿着与地球[5]位势面正交的无限窄空气柱，大气压力、温度和密度如何随大地高度h 变化：

$$[\mathrm{p} \quad \mathrm{T} \quad \rho]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{CAM,h}}(\mathrm{h}) \tag{2.32}$$

[5]这样，位势加速度始终位于处于垂直平衡状态且没有横向加速度的气柱内。

代入（2.31）后得到：

$$[\mathrm{p} \quad \mathrm{T} \quad \rho]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{CAM,H}}(\mathrm{H}) \tag{2.33}$$

• 标准大气，也称为国际民航组织标准大气或 ISA，是由 [17] 定义的柱状模型。它给出了标准大气压力、温度和密度随气压高度 $\mathrm{H_P}$ 变化的表达式：

$$[\mathrm{p} \quad \mathrm{T_{ISA}} \quad \rho]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{ISA}}(\mathrm{H_P}) \tag{2.34}$$

请注意，标准温度 $\mathrm{T_{ISA}}$ 定义为标准条件下的大气温度，而气压高度 $\mathrm{H_P}$ 定义为这些特定条件下的位势高度 H（章节 2.2.4）。由于 ISA 是一项标准，这两个变量也广泛用于非标准条件，但需要指出的是，通常情况下 $\mathrm{T_{ISA}} \neq\neq \mathrm{T}$ 且 $\mathrm{H_P} \neq\neq \mathrm{H}$。

标准平均海平面条件是指标准大气中气压高度 $\mathrm{H_P}$ 为零处的条件。其温度为 $\mathrm{T_0}$，，压力为 $\mathrm{p_0}$，，且 ρ_0 [17]（附录B）。

• 非标准大气或 INSA 是由 [19], 定义的柱状模型，它们遵循与标准大气 ISA 相同的假设，但不同之处在于以下一个或两个参数不为零[6]：

– 温度偏差 $\Delta\mathrm{T}$ 是给定的 INSA 与 ISA 在平均海平面处的大气温度之差。– 气压偏差 $\Delta\mathrm{p}$ 是给定的 INSA 与 ISA 在平均海平面处的大气压力之差。

平均海平面条件（以下标记为 MSL）是指在非标准大气中，位势高度 H 为零的各点所对应的条件（章节 2.2.4），其与非标准条件下的 $(\mathrm{T_0}, \mathrm{p_0}, \rho_0)$ 不同。

这两个参数的数值可以唯一确定任意非标准大气[7]。因此，非标准大气给出了大气压力、温度和密度关于位势高度H及其两个偏置参数的函数表达式。

$$[\mathrm{p} \quad \mathrm{T} \quad \rho]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{INSA}}(\mathrm{H}, \Delta\mathrm{T}, \Delta\mathrm{p}) \tag{2.35}$$

• 大气比值 是无量纲变量，表示给定点的大气特性与标准平均海平面条件下相应大气特性之间的比值。

$$\delta = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p_0}} \tag{2.36}$$

$$\theta = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_0}} \tag{2.37}$$

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{2.38}$$

• 天气模型 是一组关系，根据水平位置和时间提供平均海平面处的温度和压力偏差。

$$[\Delta\mathrm{T} \quad \Delta\mathrm{p}]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{WM}}(\lambda, \varphi, \mathrm{t}) \tag{2.39}$$

[6]标准大气可被视为非标准大气的一种特例，其中温度 $\Delta\mathrm{T}$ 和压力 $\Delta\mathrm{p}$ 偏置均为零。[7]对于任何给定的非标准大气，两个偏置 $\Delta\mathrm{T}$ 和 $\Delta\mathrm{p}$ 均为常数。

获取飞机所处环境的大气特性分为两个步骤。首先，需要根据天气模型提供的平均海平面处的温度和压力偏差，以及飞机的经度、纬度和时间，构建非标准柱状模型。定义柱状模型后，即可将位势高度与气压高度关联起来，进而获取大气压力、温度和密度。

2.3.2 假设

TINSA 柱状大气模型基于以下假设 [19] :

- 大气由纯空气构成，纯空气是一种理想气体 [A7]。因此，任意一点的热力学性质（压力、温度和密度）均遵循理想气体定律：

$$p = \rho R T \tag{2.40}$$

其中，R 为空气比气体常数 [17] （附录B）。

- 大气相对于地球表面静止 [A8], ，因此流体的静态力平衡[8] 在垂向（垂直于地球表面）上满足：

$$dp = -\rho 克_c dh \tag{2.41}$$

利用式（2.25）可得压力相对于位势高度H的微分：

$$dp = -\rho 克_0 dH \tag{2.42}$$

- 温度随高度变化而线性下降，其变化梯度由给定的梯度 β_T （附录B）确定，其中高度以气压高度 H_P [A9] 表示。β_T 的数值取决于大气层：

$$dT = \beta_T dH_P \tag{2.43}$$

- 对流层顶是对流层的上界，因此也是本文档中各表达式的适用上限。以气压高度（$H_{P,\,trop}$） [A10] （附录B）表示时，其高度为常数。

- 空气湿度不会影响任何其他大气属性的数值 [A11], ，因此不予考虑。

2.3.3 位势高度与气压高度之间的关系

尽管位势高度H在第2.2.4节中定义，气压高度H_P 在第2.3.1节中定义，但推导出两者之间的数学表达式尤为重要，因为飞机的性能通常以气压高度H_P[9]表示，而其运动必须用大地高度h表示；根据式（2.27），大地高度h与位势高度H直接相关。

理想气体定律与流体静力学垂直平衡（2.40，2.42）结合后得到：

$$dp = -\frac{p}{R\,T}\, g_0\, dH \tag{2.44}$$

[8]重力加速度g_c 包含大气所处的引力场和离心加速度场，如第2.2.3节所述。[9]为尽可能提高数据的通用性，性能数据以H_P 为自变量给出。由于气压高度与大气压力之间存在一一对应关系（2.62），许多不依赖温度的性能参数无法简单地表示为位势高度H的函数，因为H与H_P 之间的关系（2.69）取决于温度偏差 ΔT。

对于标准大气，根据章节 2.3.1 中的定义，大气温度即为标准温度 (T =T_{ISA})，位势高度则变为气压高度 (H =H_P)：

$$dp = -\frac{p}{R\ T_{ISA}}\ g_0\ dH_P \tag{2.45}$$

将 th 相除 最后两个表达式得出两种高度的导数之比 ：

$$\frac{dH}{dH_P} = \frac{T}{T_{ISA}} \tag{2.46}$$

因此，位势高度与气压高度的增量变化之比，等于该点的大气温度与同一点在标准大气条件下的温度之比。如图 2.5 所示。

2.3.4 表达式

根据图2.3所示的流程图，在针对给定的水平位置和时间从天气模型获取温度和压力偏差（ΔT、 Δp）后，相应的INSA模型负责提供与输入位势高度H相对应的压力、温度和气压高度H_P 。随后，可通过公式（2.40）轻松求得大气密度 ρ ，而大气比值（压力 δ、温度 θ和密度 σ）则可通过公式（2.36、2.37、2.38）确定。

大气关系式是对第2.3.2节中引入的微分方程进行积分后得到的，因此需要已知某些参考高度处的数值，才能得到完整的表达式。这些参考高度如下：

- 标准平均海平面条件。以下标$H_P = 0$表示，其定义见第2.3.1节，指标准大气条件下气压高度H_P 为零时的状况。相应的压力$p_{H_P=0}$ 和标准温度$T_{ISA;H_P=0}$ 分别为p_0 和T_0 。温度偏差 ΔT决定非标准大气中的实际温度 $T_{H_P=0}$ ，而位势高度$H_{H_P=0}$ 的数值则通过将公式（2.69）应用于标准平均海平面条件得出。

$$\begin{aligned}
H_{P,\ H_P=0} &= 0 && (2.47)\\
T_{ISA,\ H_P=0} &= T_0 && (2.48)\\
p^{H_P=0} &= p_0 && (2.49)\\
T_{H_P=0} &= T_0 + \Delta T && (2.50)\\
H_{H_P=0} &= \frac{1}{\beta_T}\left(T_0 - T_{ISA,MSL} + \Delta T\ \mathrm{Ln}\frac{T_0}{T_{ISA,MSL}}\right) && (2.51)
\end{aligned}$$

- 平均海平面条件。按定义以 MSL 为下标的位势高度 H_{MSL} 始终为零（见第 2.3.1 节）；而气压偏差 Δp 则确定大气压力 p_{MSL}的数值。气压高度 $H_{P,MSL}$、标准温度 $T_{ISA,MSL}$以及温度 T_{MSL}的数值由式（2.64、2.65、2.66）给出。

$$\begin{aligned}
H_{MSL} &= 0 && (2.52)\\
p_{MSL} &= p_0 + \Delta p && (2.53)\\
H_{P,MSL} &= \frac{T_0}{\beta_T}\left[\left(\frac{p_{MSL}}{p_0}\right)^{-\frac{\beta_T R}{g_0}} - 1\right] && (2.54)\\
T_{ISA,MSL} &= T_0 + \beta_T\ H_{P,MSL} && (2.55)\\
T_{MSL} &= T_0 + \Delta T + \beta_T\ H_{P,MSL} && (2.56)
\end{aligned}$$

2.3.4.1 标准温度与压力高度之间的关系

将温度梯度（2.43）应用于标准大气，可得：

$$\mathrm{dT_{ISA}} = \beta_{\mathrm{T}}\ \mathrm{dH_P} \tag{2.57}$$

该方程可在标准平均海平面（$\mathrm{T_{ISA,H_P=0}}$ =$\mathrm{T_0}$，$\mathrm{H_{P,H_P=0}} = 0$）与任意一点之间进行积分，得到：

$$\mathrm{T_{ISA}} = \mathrm{T_{ISA}}\left(\mathrm{H_P}\right) = \mathrm{T_0} + \beta_{\mathrm{T}}\ \mathrm{H_P} \tag{2.58}$$

因此，对于所有 INSA大气，$\mathrm{T_{ISA}}$ 与 $\mathrm{H_P}$ 之间的关系是唯一的，且不取决于 ΔT或Δp。

2.3.4.2 温度与气压高度之间的关系

标准平均海平面（$\mathrm{T^{H_P=0}} = \mathrm{T_0} + \Delta\mathrm{T}, \mathrm{H_{P,H_P=0}} = 0$）与任意点之间温度梯度（2.43）的积分结果为：

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}\left(\mathrm{H_P}, \Delta\mathrm{T}\right) = \mathrm{T_0} + \Delta\mathrm{T} + \beta_{\mathrm{T}}\ \mathrm{H_P} \tag{2.59}$$

上述表达式如图 2.4 所示，描述了大气温度 T 如何随气压高度 $\mathrm{H_P}$ 和温度偏置 ΔT 呈线性变化，但不受气压偏差Δp 的影响。

2.3.4.3 压力与气压高度之间的关系

将流体静力平衡（2.42）与标准大气（$\mathrm{H_P}$ =H 和 $\mathrm{T_{ISA}}$ =T）的理想气体定律（2.40）结合，可得：

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}} = -\frac{\mathrm{g_0}}{\mathrm{R}\ \mathrm{T_{ISA}}}\ \mathrm{dH_P} \tag{2.60}$$

表达式 (2.58) 可代入上述关系式：

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{p}} = -\frac{\mathrm{g_0}}{\mathrm{R}}\ \frac{\mathrm{dH_P}}{\mathrm{T_0} + \beta_{\mathrm{T}}\ \mathrm{H_P}} \tag{2.61}$$

在标准平均海平面条件（$\mathrm{p^{H_P=0}}$ =$\mathrm{p_0}$，$\mathrm{H_{P,\ H_P=0}} = 0$）与任意点之间的积分变为：

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}\left(\mathrm{H_P}\right) \quad = \quad \mathrm{p_0}\ \left(1 + \frac{\beta_{\mathrm{T}}}{\mathrm{T_0}}\ \mathrm{H_P}\right)^{-\frac{\mathrm{g_0}}{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{R}}} \tag{2.62}$$

$$\mathrm{H_P} = \mathrm{H_P}\left(\mathrm{p}\right) \quad = \quad \frac{\mathrm{T_0}}{\beta_{\mathrm{T}}}\ \left[\left(\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p_0}}\right)^{-\frac{\beta_{\mathrm{T}}\mathrm{R}}{\mathrm{g_0}}} - 1\right] \tag{2.63}$$

这一表达式如图 2.4 所示，描述了 p 与 $\mathrm{H_P}$ 之间存在的一一对应关系，因为它们之间的关系不依赖于 ΔT 或 Δp。由于使用长度单位比使用压力单位更容易，因此飞机性能通常以气压高度的形式给出，尽管显然飞机的气动响应和推进响应是基于大气压力的。

平均海平面处的气压高度 $H_{P,\,MSL}$（之前在 (2.54) 中展示）可由 2.63 得出：

$$H_{P,MSL} = \frac{T_0}{\beta_T}\left[\left(\frac{p_{MSL}}{p_0}\right)^{-\frac{\beta_T R}{g_0}} - 1\right] \tag{2.64}$$

将此结果代入式（2.58）和（2.59），即可得到先前在式（2.55）和（2.56）中所示的平均海平面标准温度和非标准温度（$T_{ISA,\,MSL}$ 和 T_{MSL}）：

$$T_{ISA,MSL} = T_0 + \beta_T\, H_{P,MSL} \tag{2.65}$$

$$T_{MSL} = T_0 + \Delta T + \beta_T\, H_{P,MSL} \tag{2.66}$$

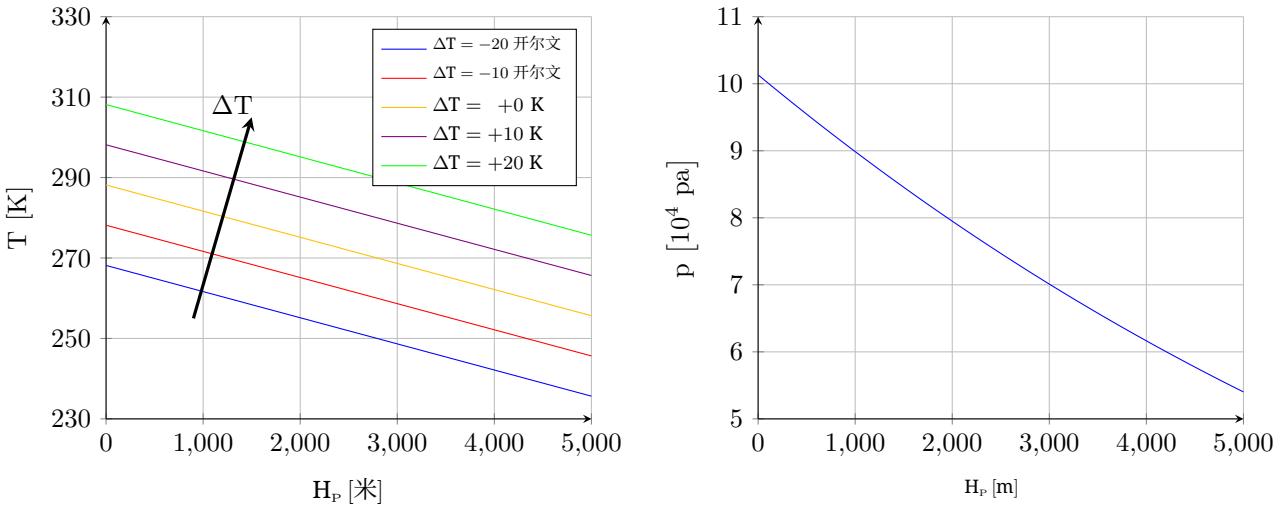

图 2.4：不同 ΔT 下温度和压力随气压高度的变化

2.3.4.4 位势高度与气压高度之间的关系

起点是式（2.46）给出的两种高度微分增量之间的关系：

$$\frac{dH}{dH_P} = \frac{T}{T_{ISA}} \tag{2.67}$$

该表达式表明，在暖大气（$\Delta T > 0$）中，位势高度 H 的增长速度快于气压高度 H_P；在冷大气中则较慢。对于暖大气，两者的比值随高度增加，直到在对流层顶达到最大值；冷大气的情况则相反。

代入式（2.58）和（2.59）可得：

$$\frac{dH}{dH_P} = \frac{T_0 + \Delta T + \beta_T\, H_P}{T_0 + \beta_T\, H_P} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0 + \beta_T\, H_P} \tag{2.68}$$

将其在平均海平面条件（$H_{P,\,MSL}$ 由式（2.64）给出，$H_{MSL} = 0$）与对流层顶以下任意一点之间积分，可得：

$$H = H\left(H_P, \Delta T, \Delta p\right) = H_P - H_{P,MSL} + \frac{\Delta T}{\beta_T}\,\mathrm{Ln}\frac{T_0 + \beta_T\, H_P}{T_{ISA,MSL}} \tag{2.69}$$

其中 $T_{ISA,\,MSL}$ 由（2.65）给出。表达式（2.67）和（2.69）以图形形式呈现在图 2.5 中，展示了温度偏差和压力偏差的影响： ΔT 决定两种高度增量之间的比值，

而 Δp 的影响则通过平均海平面处的压力 p_{MSL} （2.54）体现。换言之，在表示 H 与 H_P 的关系时，温度偏差 ΔT 决定斜率，压力偏差 Δp 则标示零点。

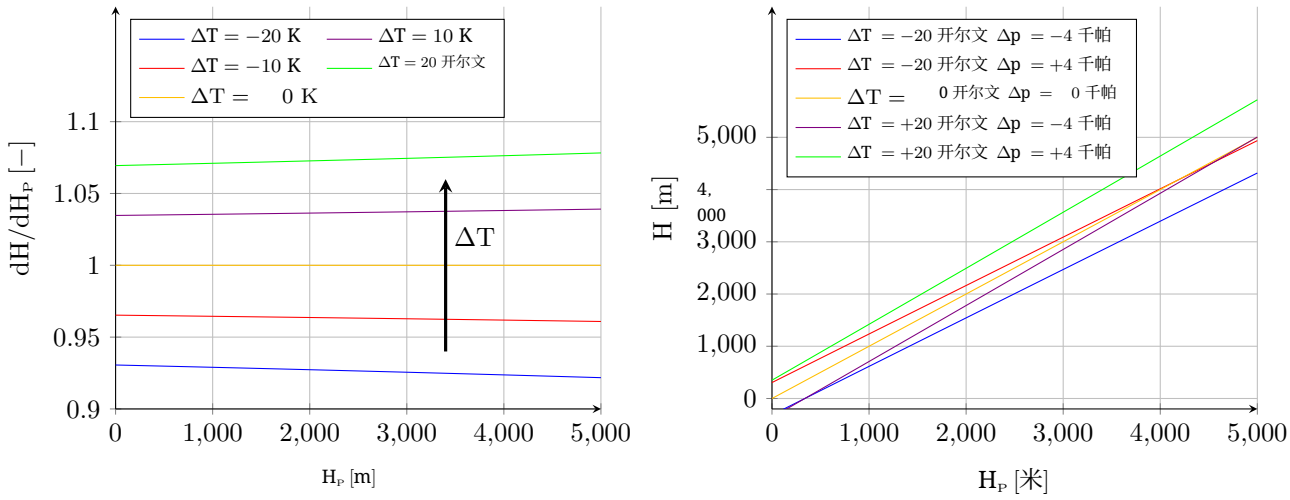

图 2.5：不同 ΔT 条件下的位势高度与气压高度关系

无法对 [2.69] 进行反演，从而获得压力高度 H_P 关于位势高度 H 的显式表达式，但二者的一一对应关系可通过迭代迅速收敛。

2.4 风与湍流

飞行器飞行在执行过程中会受到所遇风况的显著影响，风可分为低频和高频分量 [A12]。每种分量对飞行的影响方式各不相同。

本文将低频风称为风场，它是由大气中大尺度压力和温度变化引起的准静态空速。与飞机所经历的加速度相比，风场随位置（经度、纬度、高度）和时间的变化非常小，因此对飞行动力学的影响相当有限。另一方面，风场随时间持续产生的作用会显著影响飞机的运动学及其最终轨迹，因为风场可视为持续推动飞机位移。风场可从气象服务 [20] 获取，通常以 NED 参考系（章节 C.1.4）提供，其中 3rd 分量通常会被舍弃：

$$\mathbf{v}^{\text{N}}_{\text{WIND}} = \begin{bmatrix} \text{v}^{\text{N}}_{\text{WIND},1} & \text{v}^{\text{N}}_{\text{WIND},2} & \text{v}^{\text{N}}_{\text{WIND},3} \end{bmatrix}^{\text{T}} = \mathbf{f}_{\text{WIND}}\left(\mathbf{T}^{\text{E,GDT}}, \text{t}\right) = \mathbf{f}_{\text{WIND}}\left(\lambda,\ \varphi,\ \text{h},\ \text{t}\right) \tag{2.70}$$

风向 χ_{WIND} 定义为大地北向（$\mathbf{i}^{\text{N}}_1$）与风速（$\mathbf{v}_{\text{WIND}}$）在水平面（由$\mathbf{i}^{\text{N}}_1$和$\mathbf{i}^{\text{N}}_2$定义）上的投影之间的夹角；而风航迹角 γ_{WIND} 表示$\mathbf{v}_{\text{WIND}}$ 与其在水平面上的投影之间的夹角。

$$\mathbf{v}^{\text{N}}_{\text{WIND}} = \text{v}_{\text{WIND}} \begin{bmatrix} \cos\gamma_{\text{WIND}} \cos\chi_{\text{WIND}} & \cos\gamma_{\text{WIND}} \sin\chi_{\text{WIND}} & -\sin\gamma_{\text{WIND}} \end{bmatrix}^{\text{T}} \tag{2.71}$$

湍流涵盖高频风的变化[10]，这些变化会随时间相互抵消，因此对最终飞机轨迹的影响相对较小。然而，湍流会产生强烈但频率较高的加速度，对飞机动力学及其控制系统都有显著影响，

[10]本文不考虑风切变和阵风等其他不常见的风现象，因为它们都是风强度和/或风向的短暂变化；尽管从设计角度来看这些现象很重要，但它们对飞机的整体轨迹影响不大，而且出现频率不足以影响飞机动力学。

控制系统需要持续调整操纵面，以减小湍流对飞机制导目标的影响。

仿真采用了 [21, 22], 中所述的 Dryden湍流模型，该模型将湍流建模为一种由其速度谱 [23]定义的随机过程。假设空气湍流在时间和空间上都是冻结的，这意味着飞机所经历的湍流完全由飞机相对于冻结湍流的运动产生，而非由湍流本身的变化或运动产生 [A13]。

该模型根据飞机高度 （地形上方高度）区分两个不同的湍流区域：低于 1000 英尺和高于 2000 英尺，两者之间采用线性插值。Dryden模型基于一组表达式，根据飞机高度[11] 计算两个高度区域以及三个 F_T 湍流坐标系方向（章节 C.2.4）各自的湍流尺度长度和湍流强度。

三个 F_T 坐标轴各自的速度谱取决于先前获得的湍流尺度长度和强度，以及飞机高度、空速和翼展。随后，根据谱表示对带限白噪声进行滤波，以生成湍流。结果是一系列随时间变化的湍流强度$\mathbf{v}^{T}{}_{湍流}=$ f(t)，可通过 (C.22) 转换为北东地形式：

$$\mathbf{v}_{\mathrm{TURB}}^{\mathrm{N}}(\mathrm{t})=\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NT}}(\mathrm{t})_{*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{TURB}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\right)=\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NT}}(\mathrm{t})_{*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{TURB}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\right)=\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{3}\left(\chi_{\mathrm{WIND}}(\mathrm{t})\right)_{*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{TURB}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\right) \tag{2.72}$$

2.5 世界磁场模型

地球磁场是一种重要的导航工具，因为磁力计（章节 5.3.1）对其进行测量后，可为飞机提供一个绝对参考向量，该向量始终指向磁北，可用于控制飞机姿态，尤其是航向（章节 C.2.1）。事实上，地球磁场由多个相互叠加并相互作用的磁场组成 [24]。其中最重要的有：

- 由导电流体外核产生的地球主磁场。
- 由地壳和上地幔产生的地壳磁场。
- 高层大气和磁层中的电流产生的综合扰动场，这些电流会在海洋和地面中感应出电流。

世界磁场模型（WMM） [24] 由一个12阶12次的球谐主磁场（由地核产生）模型构成，该模型包含168个球谐高斯系数；另包含一个12阶12次的球谐长期变化（由地核产生的缓慢时间变化）场模型。构成该模型基础的观测磁场，是主磁场（随时间和空间变化）、地壳磁场（随空间变化，但在 WMM 的时间尺度内视为恒定）以及扰动场（随空间变化且随时间快速变化）各自贡献的总和。地球主磁场占主导地位，在地球表面的场强中占比超过95%。长期变化是主磁场随时间缓慢发生的变化。

WMM 根据大地坐标$\mathbf{B}$ 、时间以及北东地坐标系 F_N 中的磁场强度$\mathbf{T}^{\mathrm{E},\ \mathrm{GDT}}$ 提供相应数值。与重力的情况一样，下标$_{\mathrm{MOD}}$ （模型）用于将此表达式与第 2.6 章节中推导的表达式区分开来。

$$\mathbf{B}_{\mathrm{MOD}}^{\mathrm{N}}=\mathbf{f}_{\mathrm{B}}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\,\mathrm{t}\right)=\mathbf{f}_{\mathrm{B}}\left(\lambda,\,\varphi,\,\mathrm{h},\,\mathrm{t}\right) \tag{2.73}$$

磁偏差 χ_{MAG} 是大地北向（$\mathbf{i}_1^{\mathrm{N}}$）与磁场在水平面（由$\mathbf{i}_1^{\mathrm{N}}$ 和$\mathbf{i}_2^{\mathrm{N}}$构成）上的投影之间的夹角，而磁倾角 Δ_{MAG} 是磁场与其在水平面上的投影 [24]之间的夹角。虽然 χ_{MAG} 遵循偏航角的常用判定标准，即

[11]湍流强度表达式还取决于强度等级（轻度、中度、重度）。

当方向为北偏东时为正， Δ_{MAG} 则在朝下时为正。

$$\chi_{\text{MAG}} = \arctan \frac{\text{B}_2^{\text{N}}}{\text{B}_1^{\text{N}}} \qquad \Delta_{\text{MAG}} = \arctan \frac{\text{B}_3^{\text{N}}}{\sqrt{\text{B}_1^{\text{N}2} + \text{B}_2^{\text{N}2}}} = \arctan \frac{\text{B}_3^{\text{N}}}{\text{B}_{\text{HOR}}^{\text{N}}} \tag{2.74}$$

仿真器没有实现 WMM，而是依赖从 [25] 中的磁场计算器预先加载的数值。假设地球磁场在局部范围内可用经度和纬度的双线性函数近似，同时忽略高度和时间的影响 [A14]，（作者已通过数值方法验证这一事实），则可以使用上述计算器，利用当前时间和预期飞行高度，获取构成一个包围预期飞机轨迹的正方形四个顶点处的磁场，再根据经度和纬度进行线性插值，从而得到每个位置的预期磁场。这种方法不仅省去了实现 WMM 所需的大量工作，而且在执行时所需的计算资源也更少。

2.6 重力和磁场模型的准确性

第8章所述的导航算法依赖于对飞机所处环境中的重力加速度和磁场的精确了解：前者由加速度计测量，是估计飞机俯仰角和倾侧角的主要依据；后者由磁力计测量，用于估计飞机航向。

因此，飞机实际经历的重力和磁场与机载计算所得值之间的任何差异，都会对导航算法的精度产生负面影响。因此，有必要区分导航系统采用的重力和磁场模型与第4章中用于获取飞机轨迹、以及第5章中作为加速度计和磁力计输入的实际值：前者根据估计的飞机位置和时间来估计$\mathbf{克}^{\text{N}}{}_{\text{c}}$ 和$\mathbf{B}^{\text{N}}$ 的数值。

因此，飞机实际经历的重力和磁场与飞行器系统估计的并不相同。为考虑这些差异，仿真器在确定导航系统的估计值（第8章）时采用第2.2节和第2.5节推导出的模型，即表达式（2.20）和（2.73）；而在计算飞机实际经历的重力和磁场（即决定其运动并由传感器测量的数值）时，则会对这些模型施加随机扰动。

请注意，尽管可以采用更精确的模型，但本章节的目标是通过承认现实与机载模型之间存在差异，为仿真引入真实感。与其忽略这些始终存在的差异，进而将宝贵资源用于实现更精确的模型，不如引入真实重力场和磁场与模型中的重力场和磁场之间的实际差异，这一点重要得多。

参数	数值	Unit	表达式
σ_{gDEV}	0.0001	米/秒²	克$_{\text{cDEV}} \sim \text{N}\left(0,\ \sigma_{\text{gDEV}}{}^2\right)$
$\sigma_{\gamma\text{DEV}}$	0.0028	°	$\sim \text{N}\left(0,\ \sigma_{\gamma\text{DEV}}{}^2\right)$
ϕ_{DEV}		°	γ_{DEV}
			$\phi_{\text{DEV}} \sim \text{U}\left(-179, +180\right)$

表 2.2：重力偏差模型参数

虽然 WGS84 模型能够准确捕捉重力加速度的大小，但地球表面的垂线偏差在山区至多为 $60'' = 0.0167°$ 的量级，而在低地区域则很少超过 $20'' = 0.0056°$ [7]，（其定义为 3σ）。在地球上空的高度处，差异甚至更小。[26] 对各种重力模型之间的差异进行了分析。作者基于三个随机变量开发了一种模型，该模型对（2.20）模型提供的$\mathbf{克}^{\text{N}}{}_{\text{c MOD}}$ 数值的重力矢量大小和方向进行修正。每次飞行都会产生不同的重力实现。

偏差，但在给定的飞行过程中，实际重力矢量与建模重力矢量之间的差异不会发生变化[A6]。

该模型由表 2.2 以及表达式 (2.75) 和 (2.76) 描述，并采用 [1] 中所述的正态分布和均匀分布。首先通过 g_{cDEV} 调整重力场强度，然后将其绕 ϕ_{DEV} 给出的水平方向旋转 γ_{DEV} 角，使其偏离垂向。请注意$\mathbb{SO}(3)$指数映射的用法：

$$\mathbf{g}^{N}_{c,REAL} = \mathbf{g}_{Exp(\mathbf{n}^{N}_{DEV}\,\gamma_{DEV})_{*}}\left(\mathbf{i}^{N}_{3}\ \left(g^{N}_{c,MOD,3} - g_{cDEV}\right)\right) \tag{2.75}$$

$$\mathbf{n}^{N}_{DEV} = \begin{bmatrix}\cos\phi_{DEV} & \sin\phi_{DEV} & 0\end{bmatrix}^{T} \tag{2.76}$$

对于地球磁场，局部变化更为显著。幸运的是，WMM [24] 提供了模型给出的磁场强度与在地球各处测得的磁场强度之间差值的标准差数值。这些数值列于表 2.3 中：

参数	数值	Unit	表达式
$\sigma_{BDEV,1}$	138	nT	$B^{N}_{DEV\,1} \sim N\left(0,\ {\sigma_{BDEV,1}}^{2}\right)$
$\sigma_{BDEV,2}$	89	nT	$B^{N}_{DEV\,2} \sim N\left(0,\ {\sigma_{BDEV,2}}^{2}\right)$
$\sigma_{BDEV,3}$	165	nT	$B^{N}_{DEV\,3} \sim N\left(0,\ {\sigma_{BDEV,3}}^{2}\right)$

表2.3：磁学偏差模型参数

作者实现了一个简单模型，根据表2.3中的三种标准分布，对式（2.73）给出的磁场进行修正。每次飞行都会产生不同的磁场偏差实现值，但在一次飞行过程中，实际磁场向量与模型磁场向量之间的差异不会改变 [A15]。

$$\mathbf{B}^{N}_{REAL} = \mathbf{B}^{N}_{MOD} - \mathbf{B}^{N}_{DEV} \tag{2.77}$$

$$\mathbf{B}^{N}_{DEV} = \begin{bmatrix}B^{N}_{DEV,1} & B^{N}_{DEV,2} & B^{N}_{DEV,3}\end{bmatrix}^{T} \tag{2.78}$$

如上所述，在确定飞机运动（第4章）以及飞机传感器的输入（第5章）时，采用式（2.75）和（2.77）表示的实际重力场和磁场；而导航系统在第8章估计这些向量时，则使用式（2.20）和（2.73）所表示的模型。

2.7 实现、验证与执行

本章所述的地球模型已实现为一个面向对象的 C++ 库，其依据是图2.6所示的流程图。该模型包含四个可由用户配置或具有随机性的模块（图中的红色方块），以及四个确定性模块（蓝色方块）。给定时间以及以大地坐标表示的飞机位置$\mathbf{T}^{E,GDT}$，地球模型会计算决定飞机性能的大气特性（H_P，p，T ρ）、飞机动力学的外部影响因素，例如重力加速度$\mathbf{g}^{N}{}_{c\,MOD}$、风速$\mathbf{v}^{N}{}_{WIND}$和湍流场$\mathbf{v}^{N}{}_{TURB}$，以及地球磁场$\mathbf{B}^{N}{}_{MOD}$ 和局部曲率半径 N 与 M。如第2.6节所述，必须区分由飞机传感器测得的重力场和磁场（$\mathbf{g}^{N}{}_{c\,REAL}$，$\mathbf{B}^{N}{}_{REAL}$）与导航系统估计的重力场和磁场（$\mathbf{g}^{N}{}_{c\,MOD}$，$\mathbf{B}^{N}{}_{MOD}$）。

- WGS84 模块包含第 2.1 节所述的椭球体形状、第 C.1 节以地球为中心的参考系，以及第 2.2.3 节的重力模型。鉴于这些章节中的方程复杂度较低，其验证过程很简单。

- GEOP 模块表示第 2.2 节所述的几何高度与位势高度之间的关系。这些显式表达式也很容易验证。

- 天气模块允许用户引入不同的函数（从常数函数到三维函数。

（表格）用于表示飞机所经历的天气，并提供作为经度、纬度和时间（2.39）的函数的平均海平面温度偏置和气压偏差。

• INSA 模块包含第 2.3 节所述标准大气和非标准大气模型的实现。标准大气的官方文献 [17] 提供了压力、温度和位势高度随气压高度变化的详细表格，可据此验证实现。非标准大气 [19] 则由作者开发，旨在提供一个能够模拟不同大气条件，同时保留标准大气所依据的全部假设的框架。对非标准大气的验证包括计算所得表达式的数值导数（第 2.3.4 节），以确认其符合第 2.3.2 节中的假设。

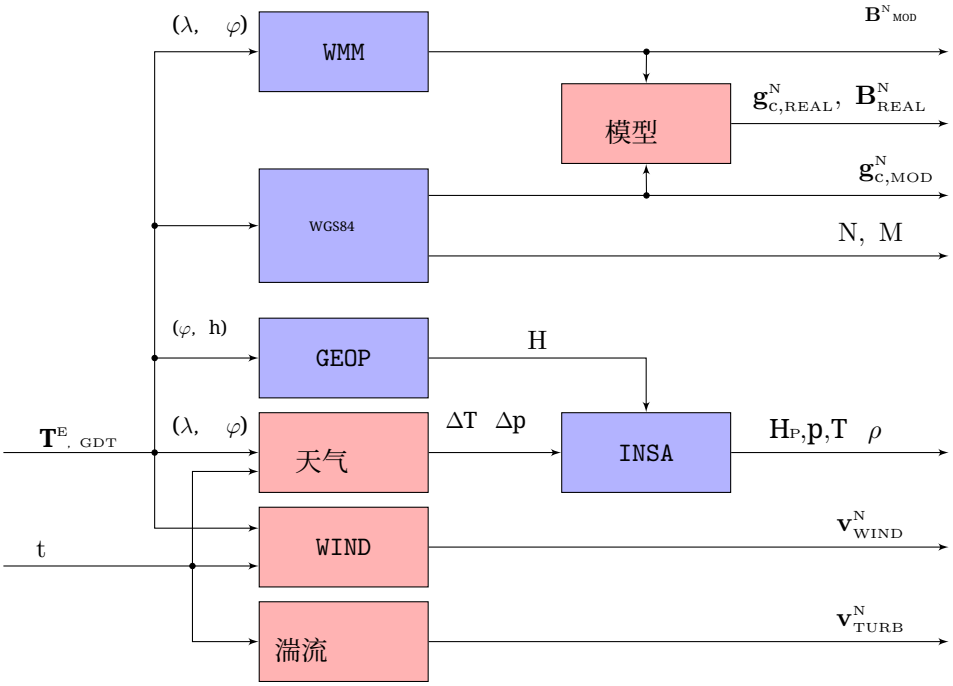

图 2.6：地球模型流程图

• WIND模块与WEATHER模块类似，用户可以使用不同的函数（最多四维的表格）来表示飞机所经历的低频风场（2.70）。

• 湍流模块的实现分为两个步骤。第一步是在MatLab® 中针对不同数量的随机种子实现第2.4节所述的湍流生成方法，生成以极高采样率制表的结果 F_T 帧向量 $\mathbf{v}_{T\ TURB}$，然后将其保存为文本文件。第二步在C++中实现，只需在所需时间对这些表进行求值，并将结果转换为北东地坐标系。该实现已通过统计验证[12] ，并与Simulink®中提供的Dryden模型实现进行了比较。

• WMM模块提供了第2.5节所述的磁场模型。由于它基于预加载的数值，因此验证过程很简单。

• 模型模块实现了第 2.6 章节中所述的随机畸变模型。验证很直接，因为随着执行次数增加，输出的标准差应趋近于输入数值。

确定性模块（图 2.6 中的蓝色模块）的执行无需多作解释，因为仿真中的其他模块会在需要时调用它们，而且在输入相同的情况下，它们始终返回相同的输出。下面将逐一说明其余模块的行为，但在所有情况下，它们的输出都会因

[12]由于其依赖随机生成的分布，因此无法进行精确验证。

每次单独的仿真运行或执行 j 而异，因此取决于飞行种子 $\Upsilon_{j,\,F}$。关于 $\Upsilon_{j,\,F}$ 的生成方式和含义，请参阅第5.5节，了解详细说明。

Type	组	种子
飞行	$\Upsilon_{j,F}$	$\upsilon_{j,\,F,\,\text{WEATHER}}$, $\upsilon_{j,\,F,\,\text{WIND}}$, $\upsilon_{j,\,F,\,\text{MODELS}}$, $\upsilon_{j,\,F,\,\text{TURB}}$

表 2.4：地球模型种子

每次执行均使用一个飞行种子 $\Upsilon_{j,\,F}$进行初始化。该种子是所有随机变量的唯一输入，因此再次使用相同种子时，可确保结果具有可重复性。随后使用飞行种子$\Upsilon_{j,\,F}$ 初始化一个离散均匀分布。除了第 5.5、6.8 和 7.3 节所述的执行之外，还会执行该分布三次，分别生成天气种子$\upsilon_{j,\,F,\,\text{WEATHER}}$、风种子 $\upsilon_{j,\,F,\,\text{WIND}}$以及模型精度种子 $\upsilon_{j,\,F,\,\text{MODELS}}$。此外，湍流种子 $\upsilon_{j,\,F,\,\text{TURB}}$ 设为轨迹执行编号（$\upsilon_{j,\,F,\,\text{TURB}} = j$）。因此，这些种子将作为下文所述各随机地球模型模块的初始化种子：

- WEATHER 模块可自定义，支持使用任意两个函数，根据经度、纬度和时间计算平均海平面处的温度偏差和压力偏差（2.39）。这两个函数可以依赖随机参数，因此其数值会随不同的蒙特卡洛仿真运行而变化。如果是这种情况，则使用天气种子$\upsilon_{j,\,F,\,\text{WEATHER}}$ 初始化标准正态分布和离散均匀分布，并在需要时生成相应数值，以获得所需参数。

- 风模块与天气类似，因为它支持使用任意函数，根据经度、纬度、高度和时间提供北东地坐标系中的风（2.70）。与前一种情况类似，该函数可以随机定义，因此每次执行时都会有所不同；在这种情况下，使用风种子 υ 初始化标准正态分布和离散均匀分布$_{j,\,F,\,\text{风模块}}$，并根据需要生成相应的参数。

- TURBULENCE模块的执行依赖于使用先前存储的、包含预计算数值的文本文件，具体如上文所述。湍流种子（$\upsilon_{j,F,\text{TURB}} = j$）用于选择要使用的文本文件，从而确保每次执行所得到的结果都不相同。

- 模型模块提供真实重力场和磁场与飞机系统中已加载模型所估计的重力场和磁场之间的差异。这些差异会影响飞机运动和传感器读数。正如第2.6节所述，这些差异在飞行过程中不会改变。模型精度种子 $\upsilon_{j,\,F,\,\text{模型模块}}$ 用于初始化标准正态分布 $N(0,\,1)$和离散均匀分布 $U(-179,\,180)$。前者进行五次采样，以获得表 2.3 中的三个磁偏差以及表 2.2 中的两个重力偏差；后者仅采样一次，以获得表 2.2 最后一行所示的重力偏差方向。

第3章

飞机模型

飞机模型是轨迹计算过程中的关键组成部分，它提供飞机飞行时产生的气动作用和推进作用（力和力矩）。图3.1以图示方式展示了飞机模型在仿真中的作用；其任务是评估平台产生的力和力矩（包括气动作用和推进作用），以及燃油消耗、质心位置和惯性矩阵[1]。其输入包括控制系统（第7.2节）提供的油门和气动操纵面位置 $\boldsymbol{\delta}_{\text{CNTR}}$，飞机状态的各项实际分量$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$（第4.3节），例如空速、攻角和侧滑角、飞机角速度，以及地球模型在第2章中计算出的气压、温度和密度。

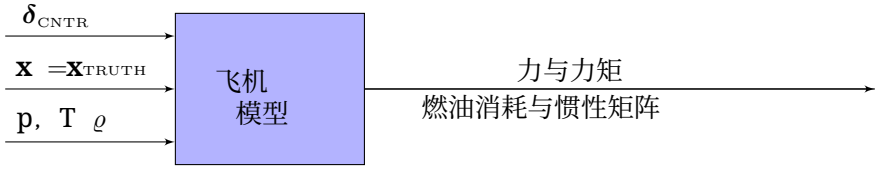

图3.1：飞机模型流程图

飞机是仿真的关键组成部分，因此必须谨慎地对其进行建模，因为它会对最终生成的轨迹产生重大影响。然而，由于仿真的主要目的是评估不同的制导、导航与控制算法，飞机只是实现这一目的的手段，而不是目的本身；只要所选飞机经过适当建模，并且从动力学角度看表现良好，就无须特别偏好某一架飞机或某一组飞机。换言之，模型不必准确表示某架现有飞机，但其飞行动力学以及稳定性与操纵特性必须尽可能真实。从仿真的角度来看，与其采用一个不太精确的真实飞机模型，不如采用一个不存在的飞机的详细性能模型。基于这一原因，作者选择使用公开可用的气动和推进软件，在虚拟环境中设计一架飞机并对结果进行定性验证，而不是选取一架现有飞机，再试图获取能够准确反映其性能的模型。

本章各章节分别介绍飞机的不同特性：其几何形状和质量特性（第 3.1 节）、传感器的位置和朝向（第 3.2 节）、制导与控制系统影响飞机动力学所使用的控制量（第 3.3 节）、以及飞机产生的气动力和力矩（第 3.4 节）和推进力和力矩（第 3.5 节）。最后简要讨论飞行器模型实现和验证（第 3.6 节）。

图3.2展示了最终飞机的整体外观，该飞机配备了上单翼、推进式螺旋桨和 ∧尾翼。图3.3、图3.4和图3.5展示了其他视图。其主要特性见表3.1。

[1]随着燃烧消耗的燃油导致飞机质量减小，飞机质心及其惯性特性会略有变化，详见第 3.1 节

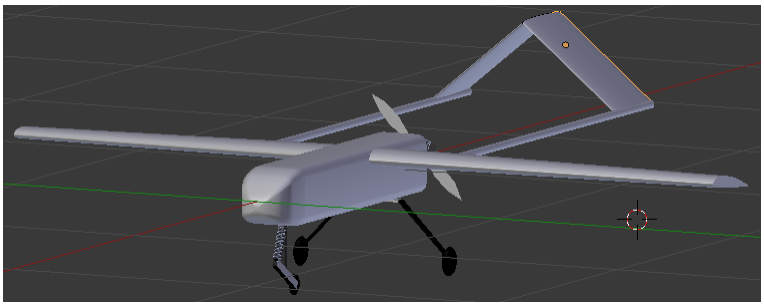

图3.2：飞机整体视图

变量	符号	数值	Unit
总质量（含燃料）	m_{full}	19.715	kg
总质量（不含燃料）	m_{empty}	17.835	kg
机翼面积	S	0.878	m^2
翼弦	c	0.359	m
翼展	b	2.680	m
飞机长度	l	2.320	m

表 3.1：飞机特性

3.1 质量与惯性分析

假设飞机是一个质量和几何形状均具有横向对称性的刚体 [A16,A17]。飞机的各个主要部件（机翼、尾翼、尾撑、机身、油箱、燃料、发动机、配重、前起落架、主起落架和航空电子设备）均已赋予质量及其质心位置。表3.1所示飞机的总质量由各部件质量相加得出；如图5.5所示，油箱加满时，飞机质心 O_B[2] 位于飞机对称面上，相对于参考点 O_R[3] 向前 207 毫米、向上 5 毫米；油箱空时，则向前 219 毫米、向上 6 毫米。由此可得：

$$\mathbf{T}^{R}_{RB,full} = \begin{bmatrix} 0.207 & 0 & -0.005 \end{bmatrix}^{T} \text{ m} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{T}^{R}_{RB,empty} = \begin{bmatrix} 0.219 & 0 & -0.006 \end{bmatrix}^{T} \text{ m} \tag{3.2}$$

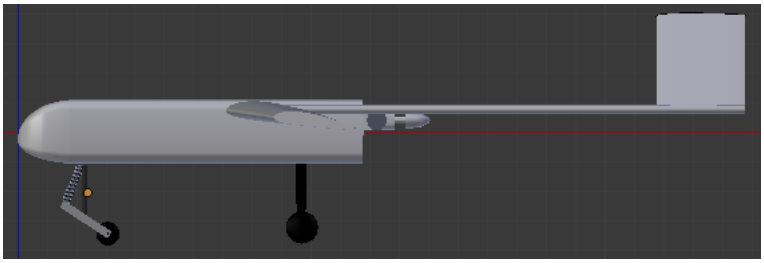

图 3.3：飞机左视图

对于惯性分析，已为飞机的每个部件指定一个简单形状，以估计其相对于自身质心 [27] 的力矩（I_x，I_y，I_z）。此外，还估计了机翼和尾翼的惯性乘积（J_{xz}）[4]。

[2]飞机质心O_B 在章节 C.2.1 中定义为机体坐标系 F_B的原点。[3]参考点 O_R 在章节 C.2.5 中定义为参考系 F_R的原点。[4]其余部件的惯性积均为零，因为它们被建模为具有横向和垂向对称性；机翼和尾翼的 J_{xy} 和 J_{yz} 也为零，因为它们具有横向对称性。

将所有部件的惯性特性相加，以获得相对于飞机质心的飞机惯性矩阵：

$$\mathbf{I}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{full}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I_x} & 0 & -\mathrm{J_{xz}} \\ 0 & \mathrm{I_y} & 0 \\ -\mathrm{J_{xz}} & 0 & \mathrm{I_z} \end{bmatrix}_{\mathrm{full}} = \begin{bmatrix} 2.202 & 0 & -0.191 \\ 0 & 3.462 & 0 \\ -0.191 & 0 & 5.490 \end{bmatrix} \ \mathrm{kg\ m^2} \tag{3.3}$$

$$\mathbf{I}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{empty}} = \begin{bmatrix} \mathrm{I_x} & 0 & -\mathrm{J_{xz}} \\ 0 & \mathrm{I_y} & 0 \\ -\mathrm{J_{xz}} & 0 & \mathrm{I_z} \end{bmatrix}_{\mathrm{empty}} = \begin{bmatrix} 2.198 & 0 & -0.192 \\ 0 & 3.430 & 0 \\ -0.192 & 0 & 5.458 \end{bmatrix} \ \mathrm{kg\ m^2} \tag{3.4}$$

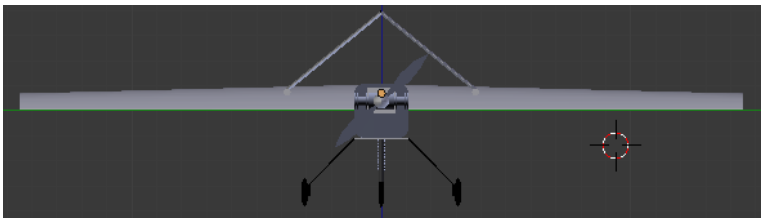

图 3.4：飞机正视图

由于空油箱构型与满油箱构型之间的质心位置和惯性矩阵差异很小，因此可以采用线性插值，根据质量 [A18, A19] 估算其数值：

$$\mathbf{T}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{RB}} = \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{RB}} = \mathbf{f}_{\mathrm{T}}\left(\mathrm{m}\right) = \mathbf{T}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{RB,full}} + \frac{\mathrm{m_{full}} - \mathrm{m}}{\mathrm{m_{full}} - \mathrm{m_{empty}}} \left(\mathbf{T}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{RB,empty}} - \mathbf{T}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{RB,full}}\right) \tag{3.5}$$

$$\mathbf{I}^{\mathrm{B}} = \mathbf{f}_{\mathrm{I}}\left(\mathrm{m}\right) = \mathbf{I}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{full}} + \frac{\mathrm{m_{full}} - \mathrm{m}}{\mathrm{m_{full}} - \mathrm{m_{empty}}} \left(\mathbf{I}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{empty}} - \mathbf{I}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{full}}\right) \tag{3.6}$$

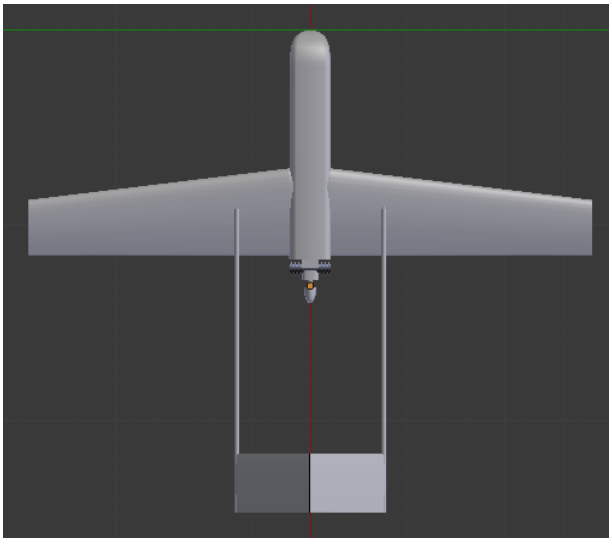

图 3.5：飞机俯视图

3.2 传感器位置与方向

第5章介绍了飞机配备的各种传感器，这些传感器可协助导航和控制。每种传感器对于安装在飞机内部或外部都有各自的要求：

- 如第 5.3.1 节所述，磁力计三轴组件应尽可能安装在飞机内部远离飞机磁体、电流和铁磁材料的位置；正确安装后，并在.....的辅助下

在其校准或摆动校准过程（第6.3节）中，磁力计提供以 F_B ($\tilde{\mathbf{B}}^B$) 为参考的地球磁场测量值，且这些测量值与其相对于 F_B 的位姿无关。

- 第 5.3.2 节所述的大气数据传感器可以安装在飞机外部的任何位置，只要能够清晰地感知未受扰动的气流，并且其读数不受其相对于F_B的位姿影响。

- 为简化起见，假设第 5.3.3 节中建模的GNSS接收机直接提供飞机质心位置的估计值，而不是接收机自身的位置估计值 [A20]。

- 加速度计和陀螺仪在第 5.2 节中进行了描述。它们旨在测量机体坐标系 F_B 相对于惯性坐标系 F_I 的比力和角速度（第 4.4.2.1 节和第 4.2 节），并在 F_B 中观测这些量（$\tilde{\mathbf{f}}_{B/IB}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B/IB}$）；但实际上，它们测量的是平台坐标系 F_P 的比力和角速度，并在 F_P 中观测这些量（$\tilde{\mathbf{f}}_{P/IP}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{P/IP}$）。鉴于它们对惯性导航的重要性，确定 F_B 与 F_P之间的相对位姿是不可或缺的，相关内容在第 5.2.7 节中进行了详细描述。

- 第 5.4 节所述的数码相机安装在机身下部，朝向下方，其视场不会被起落架或飞机的任何其他部件遮挡。因此，生成的图像均以相机坐标系 F_C为视角；F_B 与 F_C 之间的相对位姿对于视觉导航（第 6.5 节）至关重要。

3.3 控制参数

控制参数是制导与控制系统用来影响飞机所受力和力矩，进而控制飞机姿态和运动学特性的不同手段。控制参数的数量（4）与运动方程中的自由度相同，具体如下：

- 油门参数 δ_T [-] 表示油门杆的位置，其中 1 表示最大功率或油门杆完全前推，0 表示怠速。

- 升降舵参数 δ_E [°] 表示升降舵的偏转角度，正值表示舵角向前、升降舵向下，并产生沿 $\mathbf{i}_{B2}$方向的负力矩。

- 副翼参数 δ_A [°] 表示副翼的[7] 偏转，正值表示舵角向右、右侧副翼向上、左侧副翼向下，且力矩沿 $\mathbf{i}_{B1}$方向为正。

- 方向舵参数 δ_R [°] 表示方向舵的[8] 偏转，正值表示右脚蹬下压、方向舵向右，且力矩沿 $\mathbf{i}_{B3}$方向为正。

它们可以组合成控制参数向量：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}} = [\delta_T \quad \delta_E \quad \delta_A \quad \delta_R]^T \tag{3.7}$$

由于采用了 $\wedge$ 构型，该模型飞机没有传统的升降舵或方向舵，而是在两个尾翼各自的后缘处设有一个可动舵面。若分别将左、右尾翼上的舵面称为 δ_{LF} 和 δ_{RF} [°]，并规定舵面向下偏转为正，则两个舵面同向运动时会产生升降舵效应，而反向运动时则产生方向舵效应。

$$\delta_E = 0.5\ (\delta_{LF} + \delta_{RF}) \tag{3.8}$$

[5]在传统飞机中，升降舵由两个舵面组成，分别位于水平安定面的后缘，它们朝同一方向运动以产生俯仰力矩。[6]升降舵的行为与其他控制面不同，因为负偏转会产生正力矩。[7]在传统飞机中，副翼是位于两侧机翼后缘的两个舵面，它们朝相反方向运动以产生滚转力矩。[8]在传统飞机中，方向舵是位于垂直安定面后缘的可动舵面，通过偏转产生偏航力矩。

$$\delta_{\mathrm{R}} \quad = \quad 0.5\ (\delta_{\mathrm{LF}} - \delta_{\mathrm{RF}}) \tag{3.9}$$

根据上述表达式，只要适当调整左、右尾翼的控制参数，就能实现升降舵和方向舵的任意组合。从此处起，本文档不再提及尾翼舵面，而是采用传统参数。在需要时，升降舵和方向舵的位置都会在内部转换为左右尾翼的控制位置，以产生相应的气动效应。

3.4 空气动力学

本章节旨在为飞机飞行过程中产生的气动作用（力和力矩）建立逼真的表达式。这些气动作用是运动方程的关键组成部分，而运动方程是计算飞机轨迹所必需的。在机体坐标系 $\mathrm{F_B}$ 中，这些气动作用分别称为纵向 ($\mathrm{F_x}$)、横向 ($\mathrm{F_y}$)和垂向 ($\mathrm{F_z}$)气动力，以及滚转 ($\mathrm{M_l}$)、俯仰 ($\mathrm{M_m}$)和偏航 ($\mathrm{M_n}$)力矩[14, 23, 28, 29, 30, 31, 32]。

$$\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} \quad = \quad [\mathrm{F_x} \ \ \mathrm{F_y} \ \ \mathrm{F_z}]^{\mathrm{T}} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} \quad = \quad [\mathrm{M_l} \ \ \mathrm{M_m} \ \ \mathrm{M_n}]^{\mathrm{T}} \tag{3.11}$$

然而，从历史上看，气动力通常是在风轴坐标系 $\mathrm{F_W}$ （章节 C.2.2）中描述的，在该坐标系中（符号相反时）分别称为阻力 (D)、侧向力 (Y)和升力 (L)。

$$\mathbf{F}^{\mathrm{W}}_{\mathrm{AER}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{WB*}}}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}}\right) = [-\mathrm{D} \quad -\mathrm{Y} \quad -\mathrm{L}]^{\mathrm{T}} \tag{3.12}$$

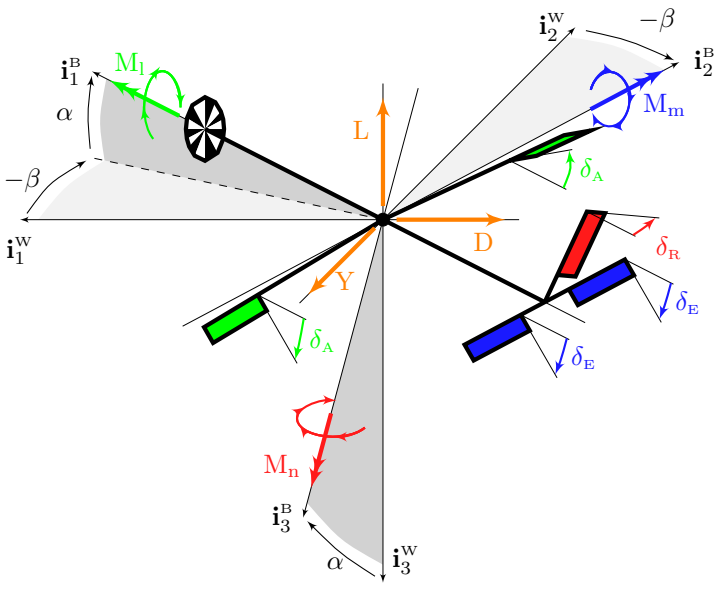

图3.6：飞机产生的气动力与力矩

图3.6 展示了飞机示意图，其中标出了图 C.5 所示的机体坐标系和风轴坐标系，并用不同颜色突出显示了气动操纵面及其对应的控制参数，以及由此产生的气动力与力矩。

获取气动模型所采用的过程如下：

1. 使用量纲分析，根据无量纲参数得出真实的物理依赖关系。

2. 使用流体动力学分析软件，获得不同气动构型（无量纲参数的组合）下的气动作用。 3. 根据上一步的结果构建等间距表格。 4. 在轨迹计算过程请求时查询该表格。 5. 修正燃料消耗导致的飞机质心变化。

3.4.1 量纲分析

Buckingham π 定理指出，任何涉及一定数量 n 个物理变量（具有量纲）的物理意义方程，都可以在不丢失信息的前提下，改写为由原始变量构成的一组精简的p个无量纲参数，其中 $\mathrm{p} = \mathrm{n} - \mathrm{k}$，$k$是所涉及的物理量纲数 [33]。对物理过程建模时，总是优先采用无量纲形式，因为它能以最低的复杂度体现真实的物理依赖关系。

气动作用是由飞机外部结构与其周围流动的空气相互作用产生的。因此，涉及的物理变量如下：

- 所建模的气动力（$\mathrm{F_x}$, $\mathrm{F_y}$, $\mathrm{F_z}$）和力矩（$\mathrm{M_l}$, $\mathrm{M_m}$, $\mathrm{M_n}$）。
- 气流的特性，例如压力 p、温度 T、密度 ρ、绝热指数 κ、空气比气体常数 R、黏度μ_v和相对湿度 $\mathrm{R_H}$。
- 飞机尺寸由其机翼面积 S、机翼弦长c、翼展b和飞机长度l定义。
- 飞机几何形状由一组较长的无量纲参数 $\mathrm{p_k}$ 定义，用于描述飞机的外部形状；此外还有控制参数（δ_E δ_A δ_R）及其随时间的变化（$\dot{\delta}_\mathrm{E}$ $\dot{\delta}_\mathrm{A}$ $\dot{\delta}_\mathrm{R}$）。
- 飞机与气流之间的相互作用由空速 $\mathrm{v_{真空速}}$、迎角 α、侧滑角 β、它们随时间的变化 $\dot{\mathrm{v}}_{\text{真空速}}$ $\dot{\alpha}$、以及 β和飞机角速度的三个分量 (p、q、r) $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B/NB}}$ （章节4.2）定义。

由于物理维度的数量为 $\mathrm{k} = 4$ （长度、质量、时间和温度），可以利用四个物理变量（机翼面积 S、气压 p、空气温度 T 和空气比气体常数 R）将所有其他物理变量转换为无量纲参数，从而消去这四个物理变量 [34]。结果如下：

$$\left[\frac{\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}}}{\mathrm{p\,S}} \quad \frac{\mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}}}{\mathrm{p\,S^{\frac{3}{2}}}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{A},1}\left(\begin{array}{c} \dfrac{\rho\,\mathrm{R\,T}}{\mathrm{p}}, \kappa, \dfrac{\mu_\mathrm{v}\sqrt{\mathrm{R\,T}}}{\mathrm{p}\sqrt{\mathrm{S}}}, \mathrm{R_H}, \dfrac{\mathrm{c}}{\sqrt{\mathrm{S}}}, \dfrac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{S}}}, \dfrac{\mathrm{l}}{\sqrt{\mathrm{S}}}, \mathrm{p_k}, \delta_\mathrm{E}, \delta_\mathrm{A}, \delta_\mathrm{R}, \dfrac{\dot{\delta}_\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \dfrac{\dot{\delta}_\mathrm{A}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \\ \dfrac{\dot{\delta}_\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \dfrac{\mathrm{v_{TAS}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \alpha, \beta, \dfrac{\dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{TAS}}\sqrt{\mathrm{S}}}{\mathrm{R\,T}}, \dfrac{\dot{\alpha}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \dfrac{\dot{\beta}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \dfrac{\mathrm{p}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \dfrac{\mathrm{q}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}, \dfrac{\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}} \end{array}\right) \tag{3.13}$$

理想气体的假设 [A7], 无空气湿度 [A11], 准静态流动[9] [A21], 以及无黏度 [A22],，再结合已知的飞机几何形状，可以消去许多参数：

$$\left[\frac{\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}}}{\mathrm{p\,S}} \quad \frac{\mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}}}{\mathrm{p\,S^{\frac{3}{2}}}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{A},2}\left(\kappa,\, \delta_\mathrm{E},\, \delta_\mathrm{A},\, \delta_\mathrm{R},\, \frac{\mathrm{v_{TAS}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}},\, \alpha,\, \beta,\, \frac{\mathrm{p}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}},\, \frac{\mathrm{q}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}},\, \frac{\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{S}}}{\sqrt{\mathrm{R\,T}}}\right) \tag{3.14}$$

有几个因素可以进一步简化式 (3.14)。首先，任何无量纲参数都可以乘以或除以其他无量纲参数的任意组合，而不会改变量纲 [33]。其次，假设气流不可压缩 [A23],，这意味着马赫数 $\mathrm{M} = \mathrm{v_{TAS}}/\sqrt{\kappa \mathrm{R\,T}}$ 可视为零。第三，经典气动理论 [23, 28, 29], 指出，气动力和力矩与空气绝热指数 κ、气压 p 以及马赫数的平方成正比[10]。

[9]准静态意味着力和力矩取决于某些变量，但不取决于这些变量的时间导数。对此有一个小例外，即不忽略角速度的影响。[10]注意，$\kappa\,\mathrm{p\,M^2}$ 等于 $\rho \mathrm{v_{tas}^2}$。

由此可以定义气动力和力矩系数 [14, 23, 28, 29, 30, 31, 32]:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} = \left[\mathrm{F_x} \;\; \mathrm{F_y} \;\; \mathrm{F_z}\right]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{S}\,\mathrm{v}_{\mathrm{TAS}}^2\,\left[\mathrm{C_{Fx}} \;\; \mathrm{C_{Fy}} \;\; \mathrm{C_{Fz}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} = \left[\mathrm{M_l} \;\; \mathrm{M_m} \;\; \mathrm{M_n}\right]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{S}\,\mathrm{v}_{\mathrm{TAS}}^2\,\left[\mathrm{b}\,\mathrm{C_{Ml}} \;\; \mathrm{c}\,\mathrm{C_{Mm}} \;\; \mathrm{b}\,\mathrm{C_{Mn}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.16}$$

其中

$$\left[\mathrm{C_{Fx}} \;\; \mathrm{C_{Fy}} \;\; \mathrm{C_{Fz}} \;\; \mathrm{C_{Ml}} \;\; \mathrm{C_{Mm}} \;\; \mathrm{C_{Mn}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{A},3}\left(\delta_{\mathrm{E}},\, \delta_{\mathrm{A}},\, \delta_{\mathrm{R}},\, \alpha,\, \beta,\, \frac{\mathrm{p\,b}}{2\,\mathrm{v_{TAS}}},\, \frac{\mathrm{q\,c}}{2\,\mathrm{v_{TAS}}},\, \frac{\mathrm{r\,b}}{2\,\mathrm{v_{TAS}}}\right) \tag{3.17}$$

T最终表达式是通过使用无量纲角速度参数（p'、q'、r'）得到的。):

$$\left[\mathrm{C_{Fx}} \;\; \mathrm{C_{Fy}} \;\; \mathrm{C_{Fz}} \;\; \mathrm{C_{Ml}} \;\; \mathrm{C_{Mm}} \;\; \mathrm{C_{Mn}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}_{\mathrm{A},4}\left(\delta_{\mathrm{E}},\, \delta_{\mathrm{A}},\, \delta_{\mathrm{R}},\, \alpha,\, \beta,\, \mathrm{p}',\, \mathrm{q}',\, \mathrm{r}'\right) \tag{3.18}$$

方程（3.18）包含了生成气动力和力矩所涉及的物理依赖关系的最简单形式。阻力、侧向力和升力系数也以相同的方式定义：

$$\mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{W}} = -\left[\mathrm{D} \;\; \mathrm{Y} \;\; \mathrm{L}\right]^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\,\rho\,\mathrm{S}\,\mathrm{v}_{\mathrm{TAS}}^2\,\left[\mathrm{C_D} \;\; \mathrm{C_Y} \;\; \mathrm{C_L}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.19}$$

3.4.2 流体动力学分析

涡格法（VLM）是一种数值方法，用于飞机设计早期阶段的计算流体动力学。该方法将飞机的升力面建模为由离散涡组成的无限薄片，以计算每个涡产生的升力和诱导阻力，同时忽略可压缩性和黏度的影响。随后，将各个涡产生的升力和诱导阻力相加，得到力和力矩 [30, 31, 32]。Athena 涡格法（AVL）是一款用于任意构型刚性飞机气动分析的软件 [35]。它将扩展涡格模型用于升力面，并结合细长体模型来描述机身。该软件最适用于主要由薄升力面构成、攻角和侧滑角较小的气动构型。这些表面及其尾流均表示为单层涡片，并离散为马蹄形涡丝；涡丝的尾段假定与$\mathbf{i}_1^{\mathrm{p}}$ 轴平行 [36]。

为便于使用 AVL，已对飞机外形进行了详细建模。除机身建模为细长体外，其余表面（机翼、尾翼、副翼、尾部操纵面）均通过六十四个条带或气动剖面[11], 进行建模，共计 620 个涡。每次执行 AVL 时，都需要输入右侧（3.18）中所示的八个独立参数的数值，并会返回力和力矩系数，以及这些系数相对于输入参数的导数。

气动模型依赖通过多次执行 AVL 构建的多维表。纵向作用与横向作用采用的方法略有不同，具体如下文各章节所述。

3.4.3 纵向力和力矩

本章节描述其作用主要位于飞机纵向平面内的气动力与力矩：纵向力（$\mathrm{F_x}$）和垂向力（$\mathrm{F_z}$），以及俯仰力矩（$\mathrm{M_m}$）。鉴于式（3.18）中有八个独立参数，因此必须选出其中最重要的参数进行列表建模，同时将其余参数的影响线性化。对于纵向作用，影响较大的三个参数是攻角 α 和侧滑角 β，以及升降舵偏角δ_{E}。如式（3.20）所示，每个纵向系数（$\mathrm{C_{lon}}$ 表示 $\mathrm{C_{Fx}}$、$\mathrm{C_{Fz}}$或 $\mathrm{C_{Mm}}$）均可建模为

[11]机翼采用的翼型为 NACA4415，尾翼采用的翼型为 NACA0005。

六个三维表之和（独立参数为 α、 β和 δ_E），计算时将其余所有参数均视为零（$\boldsymbol{\delta}_0 \rightarrow \delta_A = \delta_R = p' = q' = r' = 0$）。

$$\begin{aligned} C_{lon} \quad = \quad & C_{lon}\big|_{\boldsymbol{\delta}_0}(\alpha, \beta, \delta_E) + \frac{\partial C_{lon}}{\partial \delta_A}\bigg|_{\boldsymbol{\delta}_0}(\alpha, \beta, \delta_E)\cdot\delta_A + \frac{\partial C_{lon}}{\partial \delta_R}\bigg|_{\boldsymbol{\delta}_0}(\alpha, \beta, \delta_E)\cdot\delta_R \\ & + \frac{\partial C_{lon}}{\partial p'}\bigg|_{\boldsymbol{\delta}_0}(\alpha, \beta, \delta_E)\cdot p' + \frac{\partial C_{lon}}{\partial q'}\bigg|_{\boldsymbol{\delta}_0}(\alpha, \beta, \delta_E)\cdot q' + \frac{\partial C_{lon}}{\partial r'}\bigg|_{\boldsymbol{\delta}_0}(\alpha, \beta, \delta_E)\cdot r' \end{aligned} \tag{3.20}$$

构成纵向作用的表格是通过使用表 3.2 所示的输入，对 AVL 总共执行 360 次计算而构建的：

输入		Unit	范围	#
迎角	α	°	$-5.0, -2.5, \ldots, 10.0, 12.5$	8
侧滑角	β	°	$-10.0, -7.5, \ldots, 7.5, 10.0$	9
升降舵	δ_E	°	$-8.0, -4.0, 0, 4.0, 8.0$	5

表 3.2：用于生成纵向模型的 AVL 输入

构建完成后，为了获得飞机轨迹，需要对运动方程进行积分，并连续评估这些表以获得气动力与力矩。尽管这些表采用等间距的自变量构建，以避免原本所需的高开销二分查找，但鉴于表的评估频率很高，必须选择一种能在精度和速度之间取得良好平衡的评估算法。另一个需要考虑的重要因素是解及其一阶导数的连续性和平滑性，因为不连续可能导致轨迹积分器和导航滤波器出现收敛问题。

所选方法为双抛物线插值，该方法能够得到连续且平滑的结果，其一阶微分也连续，但在节点处不够平滑。虽然下文以一维情况进行说明，但所需的三维处理过程可通过一系列一维插值实现，每次插值均基于上一次的结果。双抛物线插值以输入值两侧的四个表格点（上方两个、下方两个）为依据，执行两次不同的抛物线插值（每次基于三个点）：一次舍弃第一个点，另一次舍弃最后一个点；然后对两次结果进行线性组合。

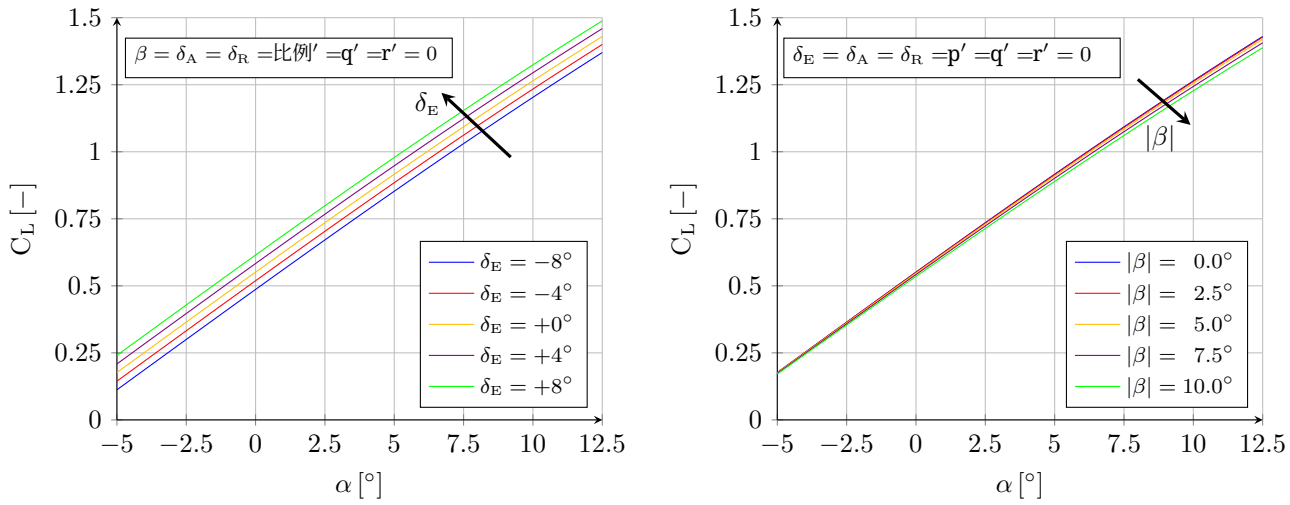

图 3.7：不同 δ_E 和 β条件下 C_L 与 α 的关系

最后一步是验证通过查表得到的结果是否真实可信，且能体现设计合理的飞机的行为。检验任何气动模型有效性的首要标准，是升力系数 C_L 与迎角 α [14, 23, 29]之间的线性关系，如图 3.7 所示。由于升力 L 与空速 v_{TAS} 的平方成正比（3.19），因此可以通过较快飞行并采用较小的迎角，或较慢飞行并采用较大的迎角，产生相同的升力（例如，在相同气压高度 H_P下飞行）。图 3.7

还显示，C_L 会随着升降舵偏角 δ_E 增大，这是因为水平安定面产生了额外升力；而随着侧滑角 β 增大，C_L 会略微减小，这是因为流动对称性 [14, 23, 29]有所减弱。

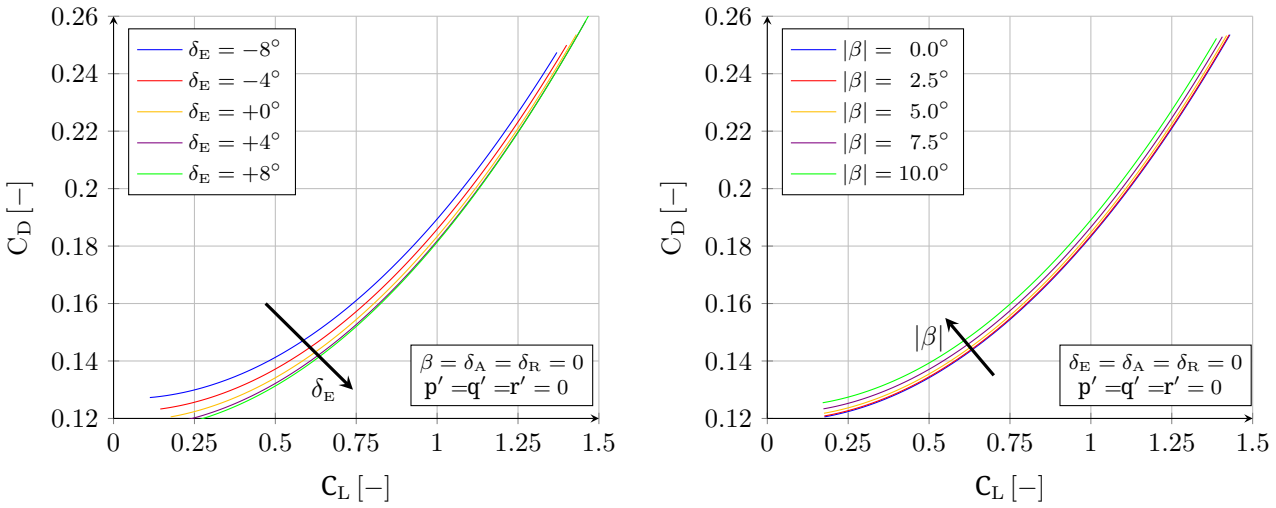

图 3.8：不同 δ_E 和 β 下的 C_D 与 C_L 的关系

第二项检验是阻力系数 C_D 随迎角 α [14, 23, 29] 变化的二次函数特性。结合上述 C_L 与 α 之间的线性关系，可得到一条抛物线形状的阻力极曲线，如图 3.8 所示。阻力极曲线表示阻力系数和升力系数 C_D 与 C_L 之间的关系，是衡量特定飞机气动效率的主要指标。对于给定的构型，该曲线能够确定最佳 C_L（进而确定最佳 α），使 C_D/C_L[12] 达到最小值。图中表明，最高效的气动构型（即在相同阻力下产生更大升力的构型）是在无侧滑 β 且升降舵具有较大偏角 δ_E 的情况下获得的。

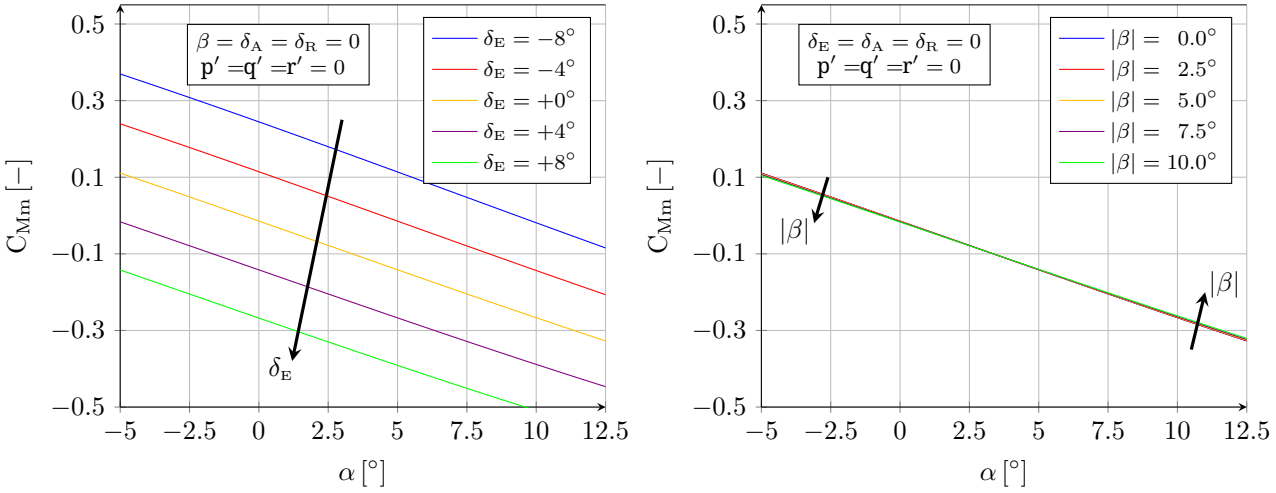

图3.9：不同 δ_E 和 β下 C_{Mm} 与 α 的关系

另一个有效性检查是飞机纵向稳定性，通过图3.9进行分析。图中显示，俯仰力矩系数 C_{Mm} 随着迎角 α的增加而降低，这表明飞机具有纵向稳定性 [14, 23, 29], ，因为任何增大机身俯仰角 θ （从而增大迎角 α）的扰动都会产生抵抗该扰动的负俯仰力矩，使飞机回到平衡状态。图3.9还显示，升降舵是控制飞机俯仰 θ 及其迎角 α的主要方式；当舵角向前移动、使升降舵向下偏转时， δ_E 增加并导致俯仰力矩系数 C_{Mm}减小，进而使飞机减小俯仰角，从而减小迎角。

[12]要获得它，画一条 从原点向阻力极曲线作一条切线。切点表示最佳位置。

油门 δ_T 和升降舵 δ_E 由飞机控制系统操纵，以实现其两个纵向制导目标：其中一个用于达到并保持给定的空速，另一个通常用于保持高度，或按照给定的速率爬升和下降。

3.4.4 横向力和力矩

本章节中描述的横向作用包括侧向力（F_Y）、偏航力矩（M_n）和横滚力矩（M_l）。其分析方法与上一章节中纵向作用的分析方法类似，不同之处在于，本例中最重要的参数是侧滑角 β、副翼偏角 δ_A 和方向舵偏角 δ_R。

$$\begin{aligned} C_{lat} &= C_{lat}\big|_{\boldsymbol{\delta}_5}(\beta,\delta_A,\delta_R) + \left.\frac{\partial C_{lat}}{\partial \alpha}\right|_{\boldsymbol{\delta}_5}(\beta,\delta_A,\delta_R)\cdot(\alpha-5) + \left.\frac{\partial C_{lat}}{\partial \delta_E}\right|_{\boldsymbol{\delta}_5}(\beta,\delta_A,\delta_R)\cdot\delta_E \\ &\quad + \left.\frac{\partial C_{lat}}{\partial p'}\right|_{\boldsymbol{\delta}_5}(\beta,\delta_A,\delta_R)\cdot p' + \left.\frac{\partial C_{lat}}{\partial q'}\right|_{\boldsymbol{\delta}_5}(\beta,\delta_A,\delta_R)\cdot q' + \left.\frac{\partial C_{lat}}{\partial r'}\right|_{\boldsymbol{\delta}_5}(\beta,\delta_A,\delta_R)\cdot r' \end{aligned} \tag{3.21}$$

尽管每个侧向系数（C_{lat} 代表 C_{F_Y}、C_{M_l} 或 C_{M_n}）也由六个三维表的和建模（独立参数为 β、δ_A 和 δ_R），但它们是在迎角为 $5°$[13]、而所有其他参数均为零的点上求值的（$\boldsymbol{\delta}_5 \to \alpha = 5°$，$\delta_E = p' = q' = r' = 0$）。

在这种情况下，横向表的构建需要使用以下输入执行 225 次 AVL：

输入		Unit	范围	#
侧滑角	β	°	$-10.0, -7.5, \ldots, 7.5, 10.0$	9
副翼	δ_A	°	$-8.0, -4.0, 0, 4.0, 8.0$	5
方向舵	δ_R	°	$-8.0, -4.0, 0, 4.0, 8.0$	5

表3.3：用于横向模型生成的 AVL 输入

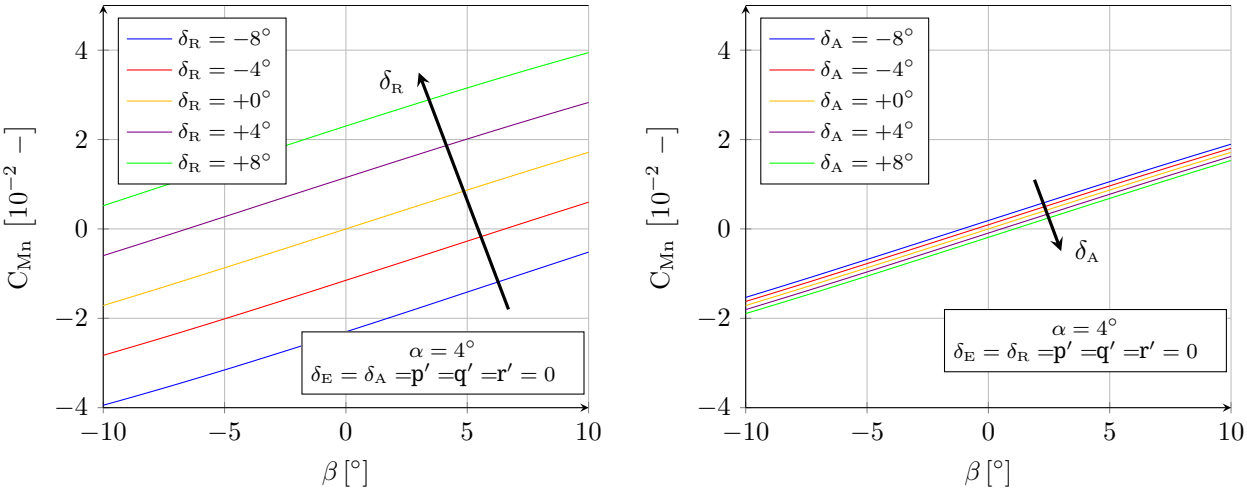

图3.10：C_{Mn} 与 β 的关系，适用于各种 δ_R 和 δ_A

飞机的偏航力矩 M_n 可以通过图3.10进行分析。注意，由于飞机的对称性 [A17], ，如果给定的方向舵 δ_{R0} 和侧滑角 β_0 数值产生偏航力矩系数 C_{Mn0}，那么它们的相反数（$-\delta_{R0}$、$-\beta_0$）将产生（$-C_{Mn0}$），副翼 δ_A 的作用也遵循相同的规律。方向舵是控制飞机偏航角 ψ的主要方式；当向下踩右侧脚蹬，使方向舵向右偏转时，δ_R 增大，并产生更大的偏航力矩系数 C_{Mn}，进而使飞机向右转弯。尽管副翼的位置 δ_A 也会影响偏航力矩，但其对 C_{Mn} 的影响要小得多。图3.10还表明，如果气流从飞机右侧吹来（正侧滑角 β），则其在垂直安定面上产生的侧向力会使飞机向右旋转（正 C_{Mn}）。

[13] 飞机在飞行中的正常状态通常具有非零迎角。

因此，飞机在横向上是稳定的 [14, 23, 29]，，因为任何增大其侧滑角 β、使飞机向左旋转的扰动，都会产生更大的偏航力矩，从而抵消该扰动，并使飞机重新恢复平衡。

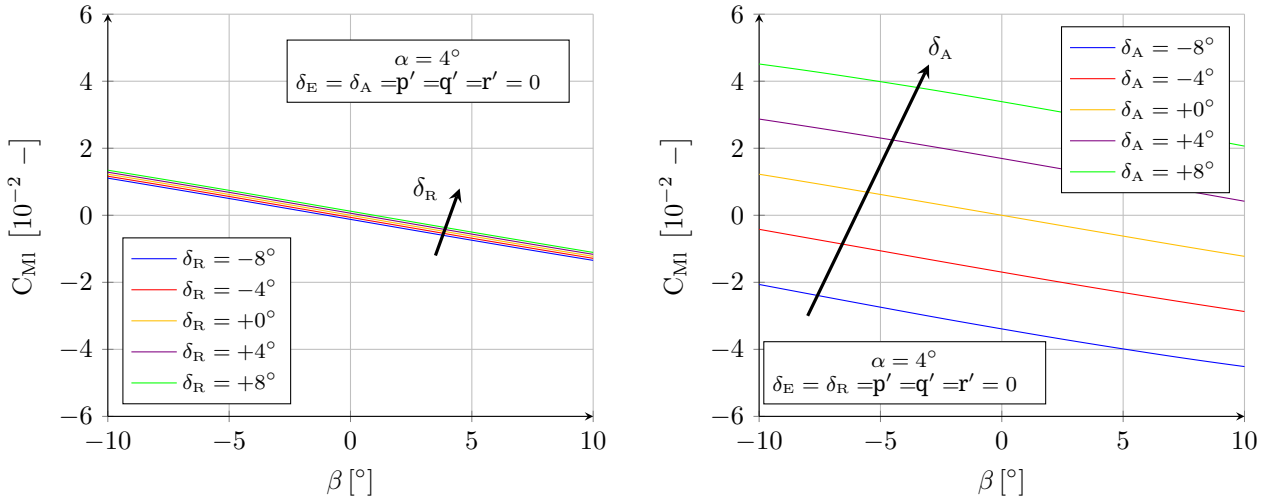

图3.11：不同 δ_R 和 δ_A条件下 C_{Ml} 与 β 的关系

图3.11所示的滚转力矩 M_l，在侧滑角β、副翼 δ_A和方向舵 δ_R方面呈现出与上一段所述偏航力矩 M_n 相同的对称特性。副翼的作用是控制飞机的倾侧角 ξ；当操纵角向右移动（δ_A 增大）时，右副翼抬起而左副翼下沉，右机翼的升力减小，左机翼的升力增大，由此产生正的滚转力矩系数 C_{Ml}，使飞机向右倾斜。尽管方向舵偏角 δ_R 也会影响滚转力矩，但其对 C_{Ml} 的影响小得多。图3.11还显示，如果气流从飞机右侧吹来（侧滑角 β为正），机身会部分阻挡流向左机翼的气流，降低其升力，从而使飞机向左滚转（C_{Ml}为负）。

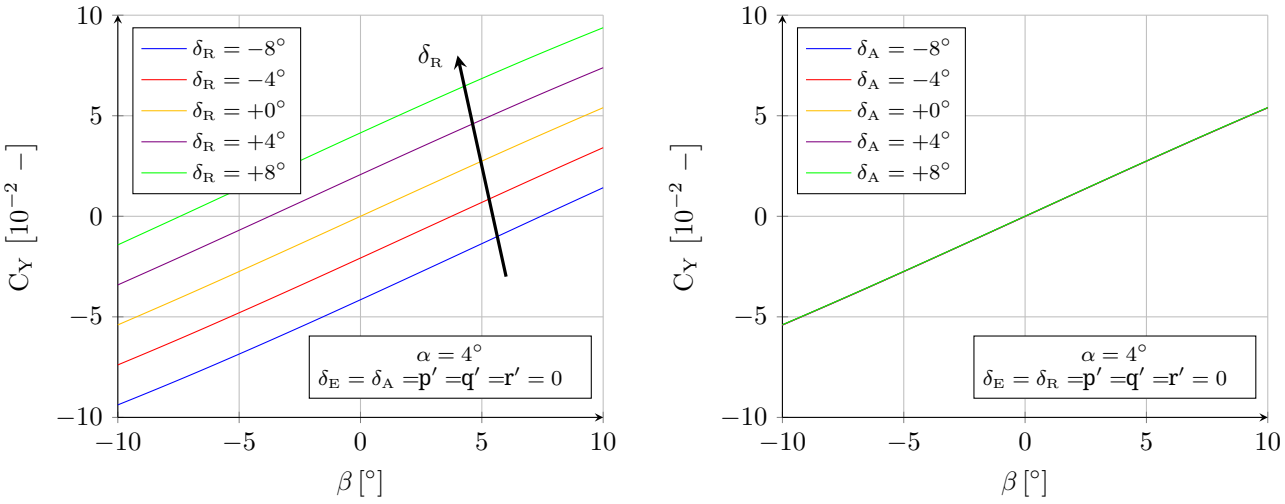

图3.12：不同 δ_R 和 δ_A条件下，C_Y 与 β 的关系

虽然与升力和阻力相比，这些力非常小，但图3.12仍可用于分析侧向力 Y，它与偏航力矩和滚转力矩具有相同的对称特性。图中曲线的斜率为正，因为气流从右侧吹向机身和垂直安定面（正 β）时，会产生向左的力（正 C_Y）。副翼 δ_A 对侧向力的影响可以忽略不计，但正的方向舵偏角 δ_R 会增大垂直安定面产生的侧向力（即其升力），从而增大飞机所受的侧向力。

飞机控制系统通过方向舵 δ_{R} 和副翼 δ_{A} 的协调动作，实现其两个横向方向引导目标。其一几乎总是实现对称飞行（$\beta = 0$），因为根据图3.8，这是效率最高的气动构型；其二则是沿给定航向飞往预定目的地，或在转弯时保持一定的倾侧角。

3.4.5 质心变化修正

前面各章节中给出的气动力与力矩表达式是在满油箱构型下推导的，因此需要针对燃油消耗引起的质心位置变化进行修正。请注意，质心变化不会改变 $\mathrm{F_B}$ 坐标轴的方向，只会改变其原点 $\mathrm{O_B}$，因此最终的气动力与力矩如下：

$$\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} = \mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER,full}} \tag{3.22}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} = \mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER,full}} + \widehat{\mathbf{F}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER,full}} \left[\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{RB}}(\mathrm{m}) - \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{RB,full}}\right] \tag{3.23}$$

3.5 推进

推进分析采用与第 3.4 章节空气动力学分析相同的方法，旨在获得飞机推进系统产生的力和力矩的真实表达式，这些力和力矩称为推力 (T)和螺旋桨扭矩 ($\mathrm{M_T}$)：

$$\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}} = \left[\mathrm{T_x} \;\; \mathrm{T_y} \;\; \mathrm{T_z}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}} = \left[\mathrm{M_{Tl}} \;\; \mathrm{M_{Tm}} \;\; \mathrm{M_{Tn}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.25}$$

基于飞机横向对称性假设 [A17] 以及推力、螺旋桨轴和飞机机身之间对准的假设 [A24,A25]，这些方程可以简化为：

$$\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}} = \left[\mathrm{T_x} \;\; 0 \;\; 0\right]^{\mathrm{T}} = \left[\mathrm{T} \;\; 0 \;\; 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.26}$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}} = \left[\mathrm{M_{Tl}} \;\; 0 \;\; 0\right]^{\mathrm{T}} = \left[\mathrm{M_T} \;\; 0 \;\; 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.27}$$

3.5.1 量纲分析

推力和螺旋桨扭矩的产生源于两个不同的物理过程。第一个过程是通过动力装置内部发生的燃烧，将燃料内能转化为机械旋转能 [37, 38, 39, 40]，；第二个过程是螺旋桨将该机械能传递给气流，使其速度增加，从而产生推力 [40, 41]。这两个过程并非相互独立，因为发动机和螺旋桨共用同一根动力轴。涉及的物理变量如下：

- 通过动力轴传递的功率 (P) 产生的推进力 ($\mathrm{T_x}$，$\mathrm{T_y}$，$\mathrm{T_z}$) 和力矩 ($\mathrm{M_{Tl}}$，$\mathrm{M_{Tm}}$，$\mathrm{M_{Tn}}$)。
- 注入气缸的燃料流量 F，以及其低热值 $\mathrm{L_{HV}}$。
- 气流的特性，例如压力p、温度 T、密度 ρ、绝热指数 κ、空气比气体常数 R、黏度μ_{v}以及相对湿度 $\mathrm{R_H}$。
- 动力轴的状态由其转速 n 和扭矩 Q定义。
- 混合气浓度 $\mathrm{f_E}$，等同于燃油空气质量比。
- 活塞发动机的热力效率 $\eta_{\mathrm{E,\,t}}$ 表示燃料内能转化为功率的百分比；容积效率 $\eta_{\mathrm{E,\,v}}$ 表示进气行程中气缸容积被新鲜空气充满的百分比。

- 活塞发动机几何形状由总发动机排量 V_E 以及一系列描述发动机形状的无量纲参数 p_E 表示。

- 螺旋桨几何形状由其直径 D_P、位于桨叶长度 75% 处截面的迎角 β_{75}以及一系列描述螺旋桨形状的无量纲参数 p_P 表示。
- 气流与动力装置及螺旋桨的相互作用由空速 v_{TAS}、迎角 α、侧滑角 β及其随时间的变化 $\dot{v}_{TAS}$ $\dot{\alpha}$、和 $\dot{\beta}$定义。

3.5.2 活塞发动机功率生成与燃油消耗

此时，最好将这两个随机过程分开，从活塞发动机的功率产生开始。与空气动力学的情况一样，物理维度的数量为 $k = 4$ （长度、质量、时间和温度），因此应用 Buckingham π 定理 [33] 可以消除四个物理变量（空气温度 T、空气密度 ρ、空气比气体常数 R 和发动机总排量 V_E），同时消除所有其他变量的量纲 [34]:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{P}{p\, V_E^{2/3} \sqrt{R\, T}\, \eta_{E,t}\, \eta_{E,v}} & \dfrac{F\, L_{HV}}{p\, V_E^{2/3} \sqrt{R\, T}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{f}_{P,1} \left(\begin{matrix} \dfrac{L_{HV}}{R\, T}, \dfrac{p}{\rho\, R\, T}, \kappa, R_H, \dfrac{n\, V_E^{1/3}}{\rho\, R\, T}, \dfrac{n\, Q}{P}, f_E, p_E \\ \dfrac{v_{TAS}}{\sqrt{R\, T}}, \alpha, \beta, \dfrac{\dot{v}_{TAS}\, V_E^{1/3}}{R\, T}, \dfrac{\dot{\alpha}\, V_E^{1/3}}{\sqrt{R\, T}}, \dfrac{\dot{\beta}\, V_E^{1/3}}{\sqrt{R\, T}} \end{matrix} \right) \tag{3.28}$$

通过以下假设，可以进一步简化该表达式：理想气体 [A7], 无空气湿度[A11], 准定常流 [A21], 轴功率与扭矩之间的关系（$P = n\, Q$）、发动机热力效率恒定 [A26], 以及针对特定发动机进行具体化。此外，进气口处气流动能完全回收 [A27] 后，可以消去空速 v_{TAS}，并以总压力[14] p_t 和总温度 T_t替代压力和温度:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{P}{p_t\, V_E^{2/3} \sqrt{R\, T_t}\, \eta_{E,v}} & \dfrac{F\, L_{HV}}{p_t\, V_E^{2/3} \sqrt{R\, T_t}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{f}_{P,2} \left(\frac{L_{HV}}{R\, T_t}, \frac{n\, V_E^{1/3}}{\rho\, R\, T_t}, f_E \right) \tag{3.29}$$

这表明，活塞发动机产生的功率及其燃油消耗取决于三个参数：转速、燃料储存的能量以及混合比 [34]。动力装置模型假设始终使用航空汽油，且混合气浓度由发动机内置控制单元自动控制，因此无量纲旋转速度是唯一的独立参数。

$$\begin{bmatrix} \dfrac{P}{p_t\, V_E^{2/3} \sqrt{R\, T_t}\, \eta_{E,v}} & \dfrac{F\, L_{HV}}{p_t\, V_E^{2/3} \sqrt{R\, T_t}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{f}_{P,3} \left(\frac{n\, V_E^{1/3}}{\rho\, R\, T_t} \right) \tag{3.30}$$

该表达式可以从两种角度分析：第一种是认为油门位置 δ_T 通过输出功率轴的旋转速度来控制活塞发动机；第二种是交换各项，并认为输出功率和转速取决于喷入气缸的燃料量。从实际角度看，选择哪种方式并不重要，关键在于动力装置的运行状态由驾驶舱内的单一参数 δ_T 控制。

尽管航空领域使用的大多数活塞发动机都配备了动态进气口和离心式压气机（由位于出口处的离心式涡轮驱动），以提高气缸的进气压力并减小自然吸气发动机随高度增加而产生的性能衰减，但该飞机尺寸较小，使得安装压气机并不切实际。所选发动机为 CRRCpro GF55II 二冲程自然吸气汽油发动机 [42], ，其特性列于表 3.4 中。

[14]总量（压力 p_t、温度 T_t 和密度 ρ_t）是指：流体以静态大气量（p、T、 ρ）运动，并通过一个静止、无黏度或惯性力、绝热且对所分析控制体积具有固定边界的过程完全减速后所获得的量。此过程保持流体的熵及其总焓不变。

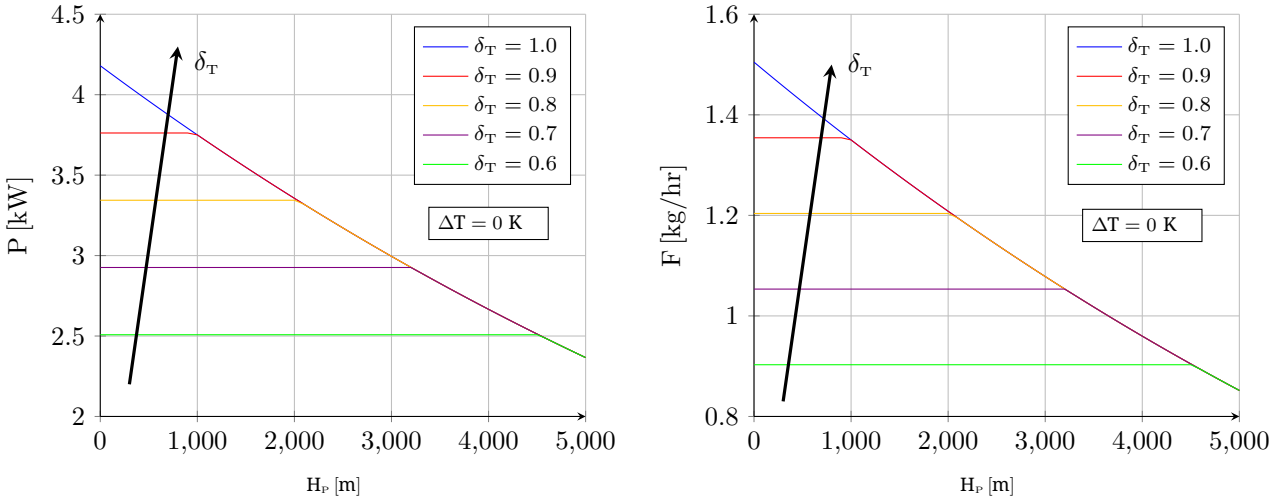

图3.13：活塞发动机功率和燃油消耗

变量	数值	Unit	变量	数值	Unit
气缸数	2	-	最大功率	4180	W
总排量	55.0	cm^3	最大功率转速	7600	rpm
Bore	3.4	cm	转速范围	1600-7800	rpm
冲程	3.0	cm	Mass	1780	g
功率比油耗	1.0	s^2/m^2			

表3.4：动力装置特性

实验数据表明，容积效率 $\eta_{E,v}$ 与总温的平方根成正比 [34, 43], ，由此可以建立以下活塞发动机行为模型：

$$P = \min\left(P_{max} \cdot \delta_T, P_{max} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{\theta}}\right) \tag{3.31}$$

$$F = PSFC \cdot P \tag{3.32}$$

其中，P_{max} 和 PSFC 分别是表3.4中所示的最大功率和功率比油耗。图3.13显示了在不同油门杆位置 δ_T 下，功率和燃油消耗（两者成正比）随气压高度 H_P 的变化情况，适用于标准大气[15] ($\Delta T = 0$ K)。功率参数 δ_T 的意义在于，发动机试图生成相对于最大功率 P_{max} 所表示的功率，且不受高度影响。在全油门状态下（$\delta_T = 1$），根据式（3.31），生成的功率会随高度迅速下降；而在较低油门设定下（$\delta_T < 1$），功率会保持不变，直至无法再维持。

3.5.3 螺旋桨、推力和扭矩

将 Buckingham π 定理 [33]应用于螺旋桨，也可以消去四个物理变量（空气温度 T、空气密度 ρ、轴转速 n 和螺旋桨直径D_P），同时消去其余所有变量的量纲 [34]:

$$\frac{\mathbf{F}^B_{PRO}}{\rho\, n^2\, D_P^4} = \mathbf{f}_{P,4}\left(\frac{p}{\rho R T}, \kappa, \frac{R T}{n^2 D_P^2}, \frac{\mu_v \sqrt{R T}}{\rho\, n^2\, D_P^3}, R_H, \frac{P}{\rho\, n^3\, D_P^5}, \frac{n\, Q}{P}, \beta_{75}, p_P, \frac{v_{TAS}}{n\, D_P}, \alpha, \beta, \frac{\dot{v}_{TAS}}{n^2\, D_P}, \frac{\dot{\alpha}}{n}, \frac{\dot{\beta}}{n}\right) \tag{3.33}$$

通过以下假设，可以进一步简化此表达式：理想气体 [A7], 无空气湿度[A11], 准定常流 [A21], 无黏度 [A22], 不可压缩流 [A23], 轴之间的关系

[15]温度与气压高度之间的关系取决于 ΔT（第 2.3 章节）。

功率和扭矩（$P = n\,Q$）、推力与螺旋桨轴的对准 [A25], 对轴向空速的专属依赖 [A28], 以及针对特定螺旋桨的具体化：

$$\frac{T}{\rho\, n^2\, D_P^4} = f_{P,5}\left(\frac{P}{\rho\, n^3\, D_P^5},\ \frac{v^B_{TAS,1}}{n\, D_P}\right) \tag{3.34}$$

这表明，固定桨距螺旋桨产生的推力系数 C_T 取决于两个参数[34, 40, 41]：通过旋转轴输入的功率系数 C_P ，以及前进比 J，其定义为螺旋桨轴向速度与旋转速度之比。螺旋桨效率 η_P 相应定义如下：

$$C_T = \frac{T}{\rho\, n^2\, D_P^4} \tag{3.35}$$

$$C_P = \frac{P}{\rho\, n^3\, D_P^5} \tag{3.36}$$

$$J = \frac{v^B_{TAS,1}}{n\, D_P} \tag{3.37}$$

$$\eta_P = \frac{T\, v^B_{TAS,1}}{P} = \frac{C_T\, J}{C_P} \tag{3.38}$$

JavaProp 是一款简单的软件程序，旨在用于螺旋桨和风力涡轮机的设计与分析[44], ，在其适用范围内可用于航空和船用级应用。它基于力矩与二维翼型特性的耦合，因此能够考虑不同翼型剖面及其对螺旋桨性能的影响。估算直径为 0.51 m 的双叶固定桨距螺旋桨几何形状（如 [42] 中所建议），随后执行 JavaProp，得到由 (3.39) 和 (3.40) 表示的螺旋桨图谱：

$$C_T = f_{P,6}(J) \tag{3.39}$$

$$C_P = f_{P,7}(J) \tag{3.40}$$

螺旋桨图谱以图形形式显示在图3.14左侧。C_T和C_P 随J减小的速率不同，形成了螺旋桨效率 η_P 与进速比J之间的经典关系曲线：在相对较宽的进速比范围内，效率较高，而在范围两侧效率会急剧下降，尤其是在空速较高时。最大效率出现在空速与螺旋桨旋转速度 [40, 41]的特定比值下。

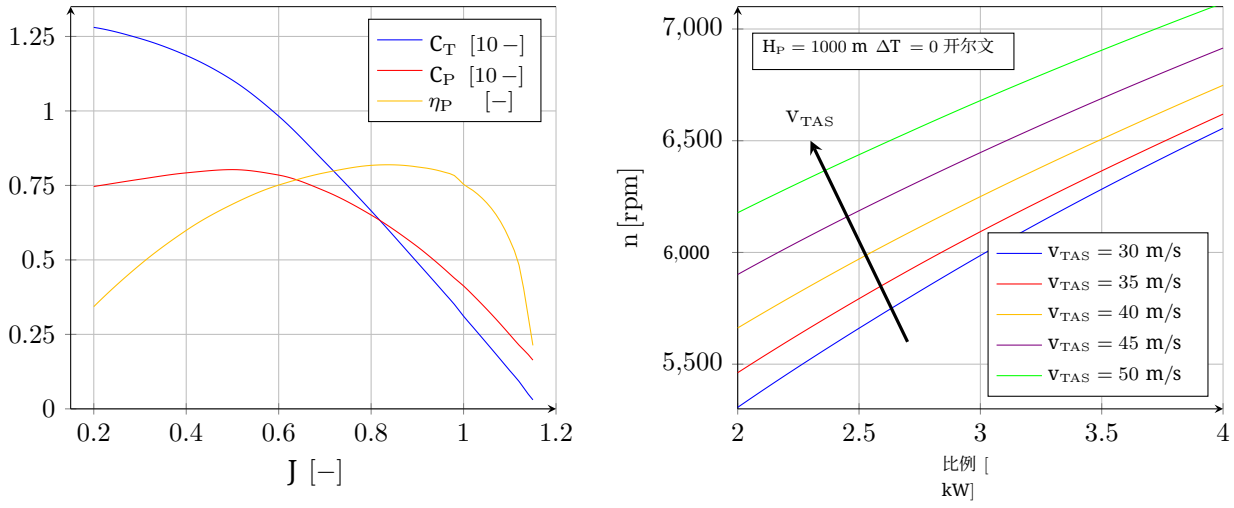

图3.14：螺旋桨效率和旋转速度

从飞机的角度来看，值得关注的是活塞发动机与螺旋桨组成的系统的综合性能，其中前者的输出功率和旋转速度是后者的输入。一旦

已知大气特性和空速后，就可以通过式（3.31）求得轴功率，进而可确定唯一的旋转速度n，此时按照定义（3.36）和螺旋桨图谱（3.40）得到的功率系数 C_P 相一致 [A29]。在相同气压高度下以不同速度飞行时的结果如图3.14右侧所示。

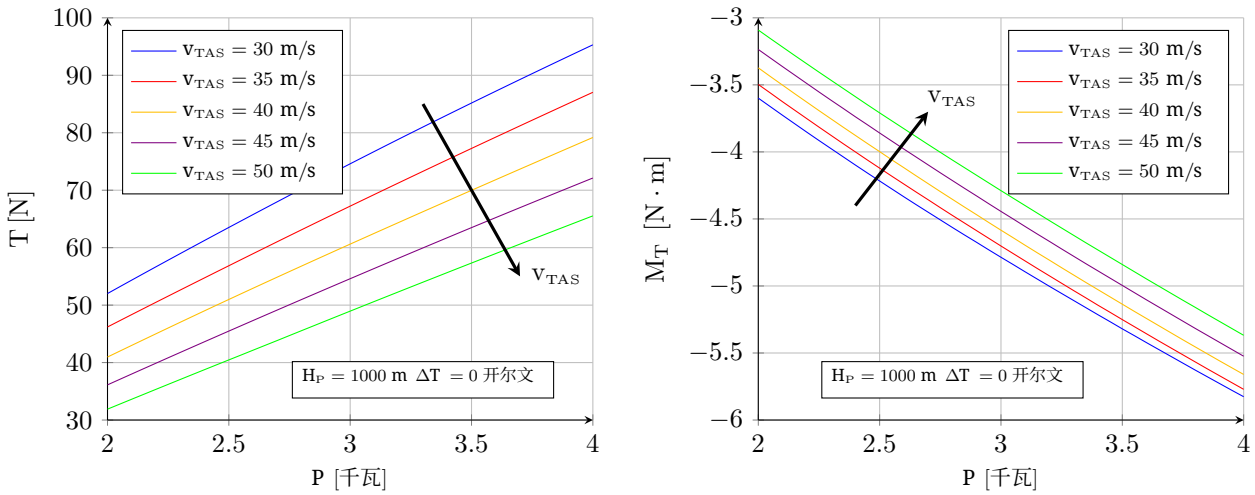

图3.15：螺旋桨推力和扭矩

一旦确定了旋转速度，进距比 J 就固定了，因此可以通过式 (3.39) 求得推力系数 C_T，并通过式 (3.35) 求得推力，结果如图 3.15 左侧所示。请注意，最后两幅图的形状源自式 (3.37) 和 (3.38) 中 J 和 η_P 的定义，因为它们意味着轴向速度与径向速度之间，以及推力与空速之间存在反比关系。

图3.15右侧所示的螺旋桨扭矩 M_T，是牛顿第三运动定律所描述的、由传递到轴上的机械扭矩引起的反作用力矩。所选螺旋桨配置为逆式后推[16]，，沿正 $\mathbf{i}_1^B$ 方向旋转，这意味着螺旋桨扭矩 M_T 为负，并使飞机向左横滚。

$$M_T = -\frac{P}{2\,\pi\,n} \tag{3.41}$$

为抵消螺旋桨扭矩，飞行员应施加正向副翼（$\delta_A > 0$），这会产生正向 M_l，但同时也会产生负向 M_n，若不同时通过施加正向方向舵（$\delta_R > 0$）进行补偿，则会引发向左偏航。

3.5.4 质心变化修正

由于推进力和力矩均按照（3.26）和（3.27）与 $\mathbf{i}_1^B$ 方向对齐，且从满油箱到空油箱的过程中，飞机质心的位置仅沿 $\mathbf{i}_3^B$ 方向变化 1 mm，沿 $\mathbf{i}_2^B$ 方向没有变化，因此可以认为，飞机质心的位置变化不会对 $\mathbf{F}^{B}{}_{PRO}$ 或 $\mathbf{M}^{B}{}_{PRO}$ 产生任何影响，且由此引入的误差极小[A30]。

3.6 实现、验证与执行

本章节所述的飞机模型已根据图3.16所示的流程图，实现为一个面向对象的 C++ 库。输入第2.3节所述的大气条件（p, T ϱ）、第3.3节定义的控制参数 $\boldsymbol{\delta}_{CNTR}$、机体坐标系下的空速 $\mathbf{v}^{B}{}_{实际轨迹}$（如第4.2节所述，其等效于空速 v_{TAS} 加上攻角 α 和侧滑角 β）、第 4.2 节定义的飞机角速度 $\boldsymbol{\omega}_{NB}$ 以及飞机质量 m 后，该模型将返回飞机质心的位置

[16]推进式螺旋桨位于机身后方，而非传统拉式螺旋桨所在的机身前方。「逆」是指其旋转方向与拉式螺旋桨相同（从飞机前方观察时为逆时针）。

质量$\mathbf{T}^{\mathrm{R}}{}_{\text{参考基准}}$、其机体坐标系 $\mathrm{F_B}$ 转动惯量**积分控制器**^{B}、$\mathrm{F_B}$ 气动和推进力（$\mathbf{F}^{\mathrm{B}}{}_{\text{气动}}$和$\mathbf{F}^{\mathrm{B}}{}_{\text{PRO}}$）、燃油消耗 F，以及相对于飞机质心的 $\mathrm{F_B}$ 气动和推进力矩（$\mathbf{M}^{\mathrm{B}}{}_{\text{气动}}$和 $\mathbf{M}^{\mathrm{B}}{}_{\text{PRO}}$）。

- 惯性块包含飞机质心的位置及其在油箱满油和空油构型下的惯性矩阵，如第 3.1 节所述；积分器根据输入的飞机质量进行线性插值。由于其复杂度较低，该模块已通过人工验证。

- 空气动力学块根据第 3.4 节所述的过程计算气动力与力矩。AVL 生成的不同数据集分别包含特定飞机构型的气动力与力矩，这些数据集由 MatLab® 脚本处理，脚本将数据制成表格并保存为单个文本文件。随后，在相应的 C++类构造时加载该文件，将不同的表格存入内存；最后，在执行时对这些表格求值，从而提供轨迹计算过程所需的气动力与力矩。

  空气动力学模型经过定性验证，目的不仅是实现纵向和横向稳定性，还要确保气动力与力矩各分量对其相关参数的依赖关系正确，也就是说，模型能够代表一架设计合理的飞机。第 3.4 节总结了验证过程，并附有多张图表展示结果。由于 AVL 生成的文件基于对飞机所有气动表面的详细几何描述（尺寸、位置和形状），模型的建立经历了持续改进的过程：分析结果，然后调整几何形状，以修正观测到的缺陷。

- 推进模块根据第3.5节所述的动力装置和螺旋桨模型，计算推进力和力矩以及燃油消耗。构造时，螺旋桨图谱会加载到内存中；轨迹计算过程需要时，则根据发动机产生的功率与螺旋桨吸收的功率相匹配后得到的轴旋转速度对其进行评估。验证过程通过检验不同条件下得到的性能是否符合第3.5节列出的假设来完成。

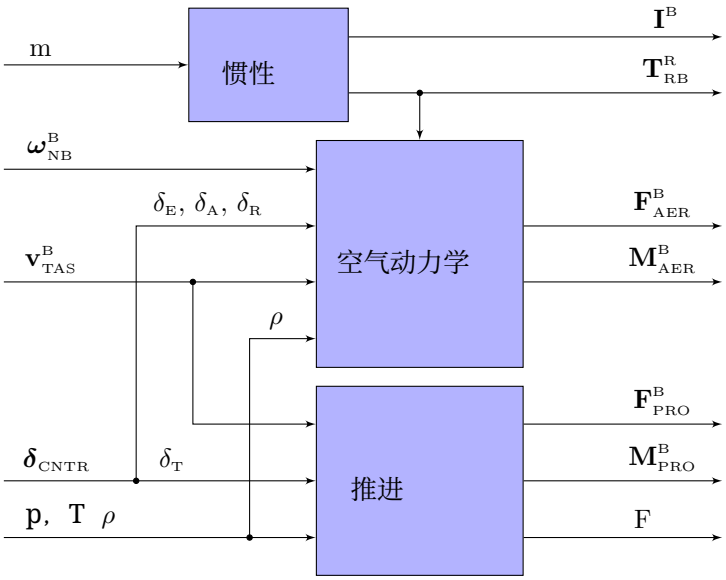

图3.16：飞机模型流程图

与飞行仿真的其他模块不同，飞机模型完全是确定性的，只要输入不发生变化，就始终提供相同的结果。高保真仿真始终采用同一架飞机，并且不考虑其惯性、气动和推进特性对飞机控制和导航能力的影响。尽管本文档并未对此进行证明，但作者认为，

只要它们代表的是经过合理设计且具有良好平衡性的飞机，飞机性能就不会对其导航能力产生任何影响。这并不意味着控制和导航算法与飞机性能相互独立，而是意味着只需进行少量修改，这些算法同样适用于性能不同于本章所述的其他固定翼飞机。

第4章

飞行物理学

本章介绍描述飞行物理学的微分方程，对这些方程进行积分即可得到真实飞机的轨迹。这些方程确立了描述飞机在某一时刻状态的变量之间的相互关系，例如位置、速度和姿态，以及这些变量随时间的变化和导致这些变化的力和力矩。对这些方程进行积分后，会得到飞机状态的时间序列，这些状态共同构成飞机实际轨迹$\mathbf{x}_{\text{TRUTH}}(t_t)$；该轨迹最早在第1.3节中引入，并将在下文第4.3节中详细定义。请注意，尽管真实轨迹或实际轨迹在现实世界中是连续的，但在仿真中，其计算频率为500 Hz，其中 $t_t = t \cdot \Delta t_{\text{TRUTH}}$。

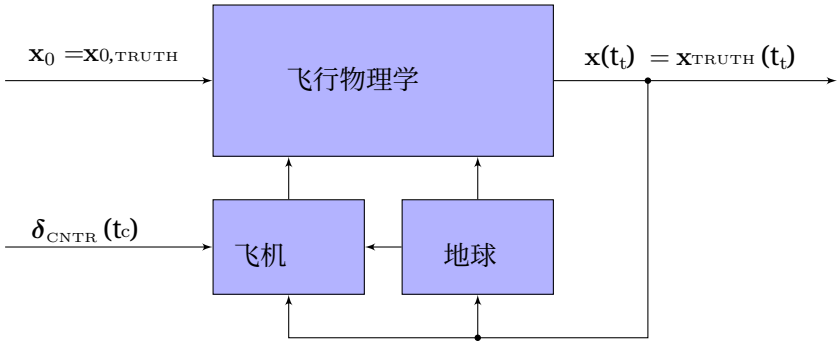

图 4.1：轨迹计算流程图

该过程如图 4.1 所示，其中实际状态向量$\mathbf{x}(t_t) = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}(t_t)$ 随时间的变化可由其初始值 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0,\text{TRUTH}}$ 以及由第 7.2 节所述控制系统以 50 Hz 更新的飞机控制参数的时间变化 $\delta_{\text{CNTR}}(t_c)$ 获得，其中 $t_c = c \cdot \Delta t_{\text{CNTR}}$。该过程分别需要第 2 章和第 3 章所述的大气特性和飞机性能。

关于选择最合适的参考系来应用运动方程，将在第 4.1 章节中讨论。接下来，第 4.2 章节介绍所需的各种线速度和角速度。在第 4.3 章节定义实数或实际飞机轨迹后，第 4.4 章节将建立表示飞行器飞行的运动方程，并在第 4.5 章节讨论对这些方程进行积分以获得实际轨迹。最后，第 4.6 章节将以关于实现和验证的几点说明作结。

4.1 惯性坐标系的选择

描述任何物体运动的方程既可以在非惯性坐标系中建立，也可以在惯性坐标系中建立。在非惯性坐标系中，必须考虑由该坐标系中的加速度引起的惯性力和力矩；本文采用的是后一种方法。惯性坐标系 是这样一种坐标系：在其中，合力为零的物体

所受的力为零时，不会产生任何加速度，而是保持静止或沿直线做匀速运动。对于地球大气层中物体的运动，以太阳质心为中心、坐标轴相对于其他恒星固定的参考系始终被视为惯性坐标系 [A31]。

在分析某一物体的运动时，若某参考系相对于公认惯性系统的加速度（线加速度和角加速度）与所研究运动的特征加速度相比可以忽略，则可将该参考系视为惯性系。仿真中采用的惯性坐标系 F_I 以地球质心为中心，其坐标轴相对于除太阳 [5, 6, 7, 12, 23, 28, 29, 45]以外的任何恒星均不旋转。该坐标系相对于公认的惯性坐标系不旋转，其线加速度可近似为 $\left(\omega^2{}_{E-S} \cdot R_{E-S}\right)$，其中 ω_{E-S} 是地球绕太阳运动所产生的转速，R_{E-S} 是地球与太阳之间的距离（附录B）。其数值（$5.95 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$）与飞行[1] 的特征加速度相比足够小，因此在本文中可将 F_I 视为惯性系；这意味着可以忽略地球质心绕太阳平动所产生的加速度 [A32]。

4.2 线速度和角速度

在第 4.4 节介绍运动方程之前，先回顾其中涉及的不同线速度和角速度会很有帮助。这样，在介绍运动方程时就会更容易，因为本节解释了其中涉及的许多概念。

- 飞机的绝对或地速$\mathbf{v}$ 是其质心 ($O_N \equiv O_B \equiv O_G$) 相对于地心地固坐标系 F_E （C.1.2 节）的速度，也就是说，它表示飞机相对于地球表面的运动。它是空速$\mathbf{v}_{TAS}$、风场$\mathbf{v}_{WIND}$和湍流$\mathbf{v}_{TURB}$[2]的和：

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{EN} = \mathbf{v}_{EB} = \mathbf{v}_{TAS} + \mathbf{v}_{WIND} + \mathbf{v}_{TURB} \tag{4.1}$$

作为自由向量，绝对速度可以在不同坐标系中表示：

$$\mathbf{v}^N = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{NB*}}\left(\mathbf{v}^B\right) \tag{4.2}$$

在 F_G （C.2.3 节）中观察时，地速只有一个分量 ($\mathrm{v} = \|\mathbf{v}\|$)，不过，采用北东地坐标系或 F_N 形式更有用，因为它的三个分量具有明确的物理意义（北向、东向和向下的速度，第 C.1.4 节）。地速在 F_N 中的分量与大地坐标$\mathbf{T}^{E,GDT}$ 的时间导数在几何上相关（见 C.1.2.3 节），这是因为大地坐标与北东地坐标系对准。它们还取决于第 2.1 节定义的椭球曲率半径：

$$\mathbf{v}^G = \begin{bmatrix} \mathrm{v} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.3}$$

$$\mathbf{v}^N = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{NG*}}\left(\mathbf{v}^G\right) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\,\left[M\left(\varphi\right) + h\right] & \dot{\lambda}\,\left[N\left(\varphi\right) + h\right]\,\cos\varphi & -\dot{h} \end{bmatrix}^T \tag{4.4}$$

- 空速 $\mathbf{v}_{真空速}$是飞机质心 ($O_N \equiv O_B \equiv O_W$) 相对于周围空气质量的速度，表示气流与飞机相互作用的强度和方向。用 F_W 表示时（章节 C.2.2），它只有一个分量 ($\mathbf{v}_{真空速} = \|\mathbf{v}_{真空速}\|$)；而其 F_B形式则取决于章节 C.2.2 中定义的攻角和侧滑角：

$$\mathbf{v}^W_{TAS} = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{TAS} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.5}$$

$$\mathbf{v}^B_{TAS} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{BW*}}\left(\mathbf{v}^W_{TAS}\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_{TAS}\,\cos\beta\,\cos\alpha & \mathrm{v}_{TAS}\,\sin\beta & \mathrm{v}_{TAS}\,\cos\beta\,\sin\alpha \end{bmatrix}^T \tag{4.6}$$

[1]例如，该数值仅为重力加速度的 0.6‰。[2]风场是低频风分量的同义词，湍流则是高频风分量的同义词（章节 2.4）。

事实上，用其模以及攻角和侧滑角代替$\mathbf{v}^{\mathrm{B}}$ 真空速通常更实用：

$$\mathrm{v}_{\mathrm{TAS}} = \|\mathbf{v}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{TAS}}\| \qquad \alpha = \arctan \frac{\mathrm{v}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{TAS},3}}{\mathrm{v}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{TAS},1}} \qquad \beta = \arcsin \frac{\mathrm{v}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{TAS},2}}{\mathrm{v}_{\mathrm{TAS}}} \tag{4.7}$$

• 风速定义为飞机周围空气团相对于地球坐标系 $\mathrm{F_E}$的速度，可分为低频（风场）和高频（湍流）分量（章节 2.4）。表达式 (2.70) 和 (2.72) 分别给出了 $\mathbf{v}_{\mathrm{N\ WIND}}$ 和$\mathbf{v}_{\mathrm{N\ TURB}}$的数值。

• 飞机的惯性速度 $\mathbf{v}_{\mathrm{IN}}$ 是其质心 ($\mathrm{O_N} \equiv \mathrm{O_B}$) 相对于惯性坐标系 $\mathrm{F_I}$的速度，并在章节 4.4 中间接用于求得运动方程。根据 [1],中讨论的速度合成，它满足：

$$\mathbf{v}_{\mathrm{IN}} = \mathbf{v}_{\mathrm{EN}} + \mathbf{v}_{\mathrm{IE}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}\, \mathbf{T}_{\mathrm{EN}} \tag{4.8}$$

其中，$\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}$ 是上文定义的地速，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}$ 是式 (4.16) 给出的地球角速度，$\mathbf{T}_{\mathrm{EN}}$是飞机相对于 $\mathrm{O_E}$的位置，而$\mathbf{v}_{\mathrm{IE}}$ 为零，因为 $\mathrm{F_E}$ 和 $\mathrm{F_I}$ 坐标系的原点都位于地球质心：

$$\mathbf{v}_{\mathrm{IN}} = \mathbf{v}_{\mathrm{EN}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}\, \mathbf{T}_{\mathrm{EN}} \tag{4.9}$$

• 飞机的惯性角速度可分解为三个角速度之和：飞机角速度（$\mathrm{F_B}$ 相对于 $\mathrm{F_N}$）、运动角速度（$\mathrm{F_N}$ 相对于 $\mathrm{F_E}$）以及地球角速度（$\mathrm{F_E}$ 相对于 $\mathrm{F_I}$）：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}} \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{EN}} + \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IE}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}} + \mathbf{Ad}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}}\, \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}} + \mathbf{Ad}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{EB}}}\, \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{IE}} \tag{4.11}$$

• 飞机角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}$ 表示代表飞机的 $\mathrm{F_B}$ 相对于其关联的北东地坐标系 $\mathrm{F_N}$ 随时间的变化，其中包含北、东、地向。用 $\mathrm{F_B}$ 表示时，其分量在历史上称为 {p、q、r}，其与表示飞机姿态的四元数$\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$之间的关系可由 [1] 得到：

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}} = \begin{bmatrix} \mathrm{p} & \mathrm{q} & \mathrm{r} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = 2\, \mathbf{q}^{*}_{\mathrm{NB}} \otimes \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}} \tag{4.12}$$

• 运动角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}$ 表示物体在不改变其相对于 WGS84椭球体的姿态的情况下，由于地球表面的曲率而跨越地球表面运动时所经历的旋转。可采用旋转矢量表示章节 C.1.4 中列出的两个连续旋转，从而得到该角速度：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}} = \dot{\lambda}\, \mathbf{i}^{\mathrm{E}}_3 - \dot{\varphi}\, \mathbf{i}^{\mathrm{N}}_2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}} = \dot{\lambda}\, \mathbf{g}^{-1}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}*}}\left(\mathbf{i}^{\mathrm{E}}_3\right) - \dot{\varphi}\, \mathbf{i}^{\mathrm{N}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}\, \cos\varphi & -\dot{\varphi} & -\dot{\lambda}\, \sin\varphi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.13}$$

根据 (4.4)，这等价于：

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{v}^{\mathrm{N}}_2}{\mathrm{N}(\varphi) + \mathrm{h}} & \dfrac{-\,\mathrm{v}^{\mathrm{N}}_1}{\mathrm{M}(\varphi) + \mathrm{h}} & \dfrac{-\,\mathrm{v}^{\mathrm{N}}_2\, \tan\varphi}{\mathrm{N}(\varphi) + \mathrm{h}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.14}$$

常用的 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{EN}}$ 相对于$\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 的微分或雅可比矩阵因此为：

$$\mathbf{J}\begin{matrix}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\end{matrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{\mathrm{N}+\mathrm{h}} & 0\\ \dfrac{-1}{\mathrm{M}+\mathrm{h}} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-\tan\varphi}{\mathrm{N}+\mathrm{h}} & 0\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

- 地球角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}$ 由 WGS84 椭球体（第 2.1 节）绕其对称轴以恒定速率旋转所产生 ω_{E} （附录B） [A3], ，表示任何相对于地球表面（NED）固定的物体每二十四小时所经历的完整旋转：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{E}} = \omega_{\mathrm{E}}\,\mathbf{i}_3^{\mathrm{E}} = [0\ \ 0\ \ \omega_{\mathrm{E}}]^{\mathrm{T}} \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}} = \mathbf{Ad}_{\mathbf{q}_{\mathrm{EN}}}^{-1}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{E}} = [\omega_{\mathrm{E}}\cos\varphi \quad 0 \quad -\omega_{\mathrm{E}}\sin\varphi]^{\mathrm{T}} \tag{4.17}$$

4.3 实际轨迹

本章的主要目标是建立一组常微分方程，从已知初始条件$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0,\mathrm{TRUTH}}$出发，并将油门和气动操纵面的随时间变化作为输入，便可得到飞机的实际轨迹 $\mathbf{x}(t_t) = \mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}(t_t)$，也称为真实轨迹（AT）。实际轨迹最早在第 1.3 节中引入，它包含一组变量随时间的变化，这些变量共同描述飞机状态 [14, 23], ，即所有其他变量的值都可以通过本章以及第 2 章和第 3 章所示的代数方程求得。该方程组对应于：

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{TRUTH}} = \mathbf{f}_{\mathrm{TR}}\left(\mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}(\mathrm{t}),\,\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}(\mathrm{t}),\,\mathrm{t}\right) \tag{4.18}$$

$$\mathbf{x}_{0,\mathrm{TRUTH}} = \mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}(\mathrm{t}=\mathrm{t}_0) \tag{4.19}$$

其中，控制参数 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}(t)$ 随时间的变化被视为输入，因为该输入由第 7.2 章节所述的控制系统提供。因此，实际轨迹是一系列带有时间戳的实际状态向量 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}$，定义如下：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}} = [\mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{GDT}}\quad \mathbf{v}^{\mathrm{B}}\quad \mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\quad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\quad \mathrm{m}]^{\mathrm{T}} \tag{4.20}$$

- 飞机质心的位置，以其大地坐标表示 $\mathbf{T}_{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{GDT}}$ ，定义见章节 C.1.2.3。
- 在 $\mathrm{F}_{\mathbf{v}_{\mathrm{B}}}$ 中观察到的地速$_{\mathrm{B}}$，定义见第 4.2 节。
- 相对于 F_{N} 的姿态$\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$ ，定义见章节 C.2.1。
- 在 $\mathrm{F}_{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$ 中观察到的惯性角速度 $\boldsymbol{\omega}$，定义见章节 4.2。
- 飞机质量，其会因燃油消耗而随时间逐渐减少。

4.4 运动方程

运动方程由一组一阶微分方程 (4.18) 组成，这些方程给出状态向量各个分量随时间的导数，因此可以通过积分得到实际轨迹。下面各章节分别介绍与状态向量各分量对应的方程，而积分过程则在第 4.5 章节中介绍。

4.4.1 运动学方程

运动学方程提供大地坐标的时间导数 $\mathbf{T}^{\mathrm{E,\,GDT}}$ 并通过对（4.4）进行逆运算得到：

$$\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}}{[\mathrm{N}(\varphi)+\mathrm{h}]\,\cos\varphi} & \dfrac{\mathrm{v}_1^{\mathrm{N}}}{\mathrm{M}(\varphi)+\mathrm{h}} & -\mathrm{v}_3^{\mathrm{N}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.21}$$

因此，其关于速度的微分或雅可比矩阵如下：

$$\mathbf{J}\,\frac{\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}}{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{(\mathrm{N}+\mathrm{h})\,\cos\varphi} & 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{M}+\mathrm{h}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

利用章节 4.2 中的关系，$\dot{\mathbf{T}}_{\mathrm{E,GDT}}$ 的依赖关系如下：

$$\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \mathbf{f}_{\mathrm{T,TR}}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\,\mathbf{v}^{\mathrm{B}},\,\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\right) \tag{4.23}$$

4.4.2 力方程

力方程给出了绝对速度$\mathbf{v}^{\mathrm{B}}$ 的时间导数，它们由在惯性参考系 $\mathrm{F_I}$中观察时作用于飞机质心的力平衡得出：

$$\sum \mathbf{F}^{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{m}\,\mathbf{v}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{m}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{I}} = \mathrm{m}\,\mathbf{a}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{I}} \tag{4.24}$$

其中，质量随时间的变化足够缓慢，可视为准静态 [A33]。应用加速度合成 [1]，令 $\mathrm{F_I}$ 为 $\mathrm{F_0}$，、$\mathrm{F_E}$ 为 $\mathrm{F_1}$，，且 $\mathrm{F_B}$ 为 $\mathrm{F_2}$，可得机体坐标系的惯性加速度$\mathbf{a}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{IB}}$的下列表达式：

$$\mathbf{a}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{I}} = \mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} + \left(\mathbf{a}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}} + \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}}\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}}\right) + 2\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} \tag{4.25}$$

(4.25) 右侧的第一项是线加速度$\mathbf{a}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{EB}}$，即在 $\mathrm{F_I}$ 中观察到的飞机绝对速度$\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}$ 的时间导数。它可以转换为飞机角速度和运动角速度（$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EB}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}$）以及飞机绝对速度$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{EB}}$的函数：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{IE}*}}\left(\mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}}\right) = \mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{IE}*}}\left(\mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}}\right) = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EB}*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\right)\right)}{\mathrm{dt}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{EB}*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\right)\right)}{\mathrm{dt}} \\ &= \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{EB}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{dt}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\left(\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{EB}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{R}_{\mathrm{EB}}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\right) = \mathbf{R}_{\mathrm{IB}}\,\left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\right) \qquad (4.26) \\ \mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}} &= \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}} \qquad (4.27) \end{aligned}$$

注意，根据 (4.1)，$\mathbf{v}_{\mathrm{EB}} = \mathbf{v}_{\mathrm{EN}} = \mathbf{v}$，重复相同的过程，将 $\mathrm{F_B}$ 替换为 F_{N}：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} &= \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\right)\right)}{\mathrm{dt}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{EN}*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\right)\right)}{\mathrm{dt}} \\ &= \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{EN}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\right)}{\mathrm{dt}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\left(\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{EN}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} + \mathbf{R}_{\mathrm{EN}}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\right) = \mathbf{R}_{\mathrm{IN}}\,\left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} + \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\right) \qquad (4.28) \\ \mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{N}} &= \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} + \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{N}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} \qquad (4.29) \end{aligned}$$

如果在 $\mathrm{F_E}$ 坐标系中进行，过程会简单得多：

$$\mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} = \mathbf{R}_{\mathrm{IE}}\,\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} \tag{4.30}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} \;=\; \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} = \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{E}} = \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{E}} \tag{4.31}$$

式（4.25）的第二项称为牵连加速度$\mathbf{a}_{\mathrm{trs}}$，由于 $\mathrm{F_E}$ 相对于 $\mathrm{F_I}$ 的线加速度$\mathbf{a}_{\mathrm{IE}}$ 为零（因为二者的原点均位于$\mathbf{T}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{IE}} = \mathbf{0}$，即地球质心），因此该项可以简化。同时，角加速度 $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{IE}}$ 也为零，因为 $\mathrm{F_E}$ 以恒定速率 ω_{E}绕$\mathbf{i}_3^{\mathrm{E}}$ 旋转。

$$\mathbf{a}_{\mathrm{trs}}^{\mathrm{I}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}}\, \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{I}}\, \mathbf{T}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{I}} \tag{4.32}$$

因此，牵连加速度与地球绕其对称轴自转所产生的向心加速度 一致，也就是说，它与式 (2.12) 给出的离心加速度$\mathbf{a}_{\mathrm{c}}$ 方向相反。其北东地坐标系形式$\mathbf{a}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{trs}}$可直接根据地球角速度 (4.17) 和笛卡尔坐标$\mathbf{T}^{\mathrm{E,CAR}}$ 的定义 (C.4) 得出：

$$\mathbf{a}_{\mathrm{trs}}^{\mathrm{N}} = -\mathbf{a}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{N}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}}\, \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}}\, \mathbf{T}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{E}}^2\ (\mathrm{N}+\mathrm{h})\ \sin\varphi\ \cos\varphi & 0 & \omega_{\mathrm{E}}^2\ (\mathrm{N}+\mathrm{h})\ \cos^2\varphi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.33}$$

(4.25) 式的第三项称为科里奥利加速度$\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}$。其北东地形式$\mathbf{a}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{cor}}$ 也可以由地球角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}$ 和飞机绝对速度$\mathbf{v}_{\mathrm{EB}}$得到：

$$\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} = 2\, \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}}\, \mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} 2\,\omega_{\mathrm{E}}\ \mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}\ \sin\varphi & 2\,\omega_{\mathrm{E}}\ (-\mathrm{v}_1^{\mathrm{N}}\ \sin\varphi - \mathrm{v}_3^{\mathrm{N}}\ \cos\varphi) & 2\,\omega_{\mathrm{E}}\ \mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}\ \cos\varphi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.34}$$

其导数 关于速度的导数或雅可比矩阵（本文后续将采用），其响应于 ：

$$\mathbf{J}\begin{matrix}\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{N}}\end{matrix} = 2\, \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}} = 2\,\omega_{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 0 & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

科里奥利加速度和雅可比矩阵也可以在 $\mathrm{F_E}$ 坐标系中使用：

$$\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{E}} \;=\; 2\, \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{E}}\, \mathbf{v}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{E}} = 2\,\omega_{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} -\mathrm{v}_2^{\mathrm{E}} & \mathrm{v}_1^{\mathrm{E}} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.36}$$

$$\mathbf{J}\begin{matrix}\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{E}} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{E}}\end{matrix} \;=\; 2\, \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{E}} = 2\,\omega_{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

将这些项引入式 (4.24)，并转换为 $\mathrm{F_B}$、$\mathrm{F_N}$ 或 $\mathrm{F_E}$ 后，得到：

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}^{\mathrm{B}} &= \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{IB*}}}^{-1} \left(\sum \mathbf{F}^{\mathrm{I}} \right) = \mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{F}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} + \mathrm{m}\, \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB*}}}^{-1} \left(\mathbf{g}^{\mathrm{N}} \right) \\ &= \mathrm{m} \left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\, \mathbf{v}^{\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB*}}}^{-1} \left(\mathbf{a}_{\mathrm{trs}}^{\mathrm{N}} \right) + \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB*}}}^{-1} \left(\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \right) \right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}^{\mathrm{N}} &= \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{IN*}}}^{-1} \left(\sum \mathbf{F}^{\mathrm{I}} \right) = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB*}}} \left(\mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{F}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} \right) + \mathrm{m}\, \mathbf{g}^{\mathrm{N}} \\ &= \mathrm{m} \left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\, \mathbf{v}^{\mathrm{N}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} + \mathbf{a}_{\mathrm{trs}}^{\mathrm{N}} + \mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}^{\mathrm{E}} &= \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{IE*}}}^{-1} \left(\sum \mathbf{F}^{\mathrm{I}} \right) = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EB*}}} \left(\mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{F}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} \right) + \mathrm{m}\, \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN*}}} \left(\mathbf{g}^{\mathrm{N}} \right) \\ &= \mathrm{m} \left(\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{E}} + \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN*}}} \left(\mathbf{a}_{\mathrm{trs}}^{\mathrm{N}} \right) + \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN*}}} \left(\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \right) \right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

根据$\mathbf{g}_{\mathrm{c}} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{\mathrm{c}} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_{\mathrm{trs}}$ 式（2.18）和$\mathbf{v}_{\mathrm{EB}} = \mathbf{v}_{\mathrm{EN}} = \mathrm{v}$ </style}式（4.1），飞机线速度的时间导数的最终表达式如下：

$$\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}} \;=\; \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{F}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{m}} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EB}}^{\mathrm{B}}\, \mathbf{v}^{\mathrm{B}} + \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB*}}}^{-1} \left(\mathbf{g}_{\mathrm{c,REAL}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \right) \tag{4.41}$$

$$\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} \;=\; \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB*}}} \left(\frac{\mathbf{F}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{F}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{m}} \right) - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\, \mathbf{v}^{\mathrm{N}} + \mathbf{g}_{\mathrm{c,REAL}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} \tag{4.42}$$

$$\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{E}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EB}*}}\left(\frac{\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} + \mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}}}{\mathrm{m}}\right) + \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}*}}\left(\mathbf{g}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{c,REAL}} - \mathbf{a}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{cor}}\right) \tag{4.43}$$

将地球模型（章节 2）、飞机性能（章节 3）以及章节 4.2 中的速度表达式代入（4.41）后， $\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}}$ 的依赖关系如下：

$$\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{f}_{\mathrm{v,TR}}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\, \mathbf{v}^{\mathrm{B}},\, \mathbf{q}_{\mathrm{NB}},\, \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}},\, \mathrm{m},\, \mathrm{t},\, \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}\right) \tag{4.44}$$

另一方面，式（4.42）给出的在 $\mathrm{F_N}$ 中观察到的地速时间导数，被第8章所述的惯性导航系统所采用。请注意， $\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$ 与 $\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}}$之间的关系对于导航系统的设计至关重要，可以通过比较式（4.41）和式（4.42）轻松得出，也可以独立地按照以下方式推导。这两种方法得到的表达式相同：

$$\mathbf{v}^{\mathrm{N}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}*}}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{B}}\right) = \mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}*}}\left(\mathbf{v}^{\mathrm{B}}\right) = \mathbf{R}_{\mathrm{NB}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{B}} \;\rightarrow \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} = \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{NB}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{B}} + \mathbf{R}_{\mathrm{NB}}\,\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{R}_{\mathrm{NB}}\left(\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}}\right) \tag{4.45}$$

4.4.2.1 比力

在分析运动方程时，先补充说明一点：比力 $\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}$ 定义为给定质量 [6]相对于惯性坐标系 $\mathrm{F_I}$ 所经历的非引力加速度。这是惯性导航中的一个关键概念，因为它是加速度计测量的量值（第 5.2 节）。

$$\mathbf{f}_{\mathrm{IB}} = \frac{\mathbf{F}_{\mathrm{AER}} + \mathbf{F}_{\mathrm{PRO}}}{\mathrm{m}} = \mathbf{a}_{\mathrm{IB}} - \mathbf{g} \tag{4.46}$$

比力通常由连接到机体坐标系 $\mathrm{F_B}$ 的加速度计测量，但在 $\mathrm{F_N}$ 中观察时也会用到。利用（4.38、4.39）可得：

$$\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \frac{\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} + \mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}}}{\mathrm{m}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{EB}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{B}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}} - \mathbf{g}^{-1}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}*}}\left(\mathbf{g}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{c,REAL}} - \mathbf{a}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{cor}}\right) \tag{4.47}$$

$$\mathbf{f}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{IB}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}*}}\left(\frac{\mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{AER}} + \mathbf{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{PRO}}}{\mathrm{m}}\right) = \widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{EN}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{N}} + \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{g}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{c,REAL}} + \mathbf{a}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{cor}} \tag{4.48}$$

4.4.3 旋转方程

旋转方程给出了单位四元数 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$ 的时间导数，该四元数描述了 $\mathrm{F_B}$ 和 $\mathrm{F_N}$ 坐标系之间的旋转。其在 [1], 中推导得出，线性特性是使用单位四元数在运动方程中描述飞机姿态的主要优势。

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{q}_{\mathrm{NB}} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{B}}_{\mathbf{NB}} \tag{4.49}$$

利用第 4.2 章节中的关系， $\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}}$ 的依赖关系如下：

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}} = \mathbf{f}_{\mathrm{q,TR}}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\, \mathbf{v}^{\mathrm{B}},\, \mathbf{q}_{\mathrm{NB}},\, \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\right) \tag{4.50}$$

4.4.4 力矩方程

力矩方程根据作用于飞机（以其机体坐标系 $\mathrm{F_B}$ 表示）且相对于其质心的力矩与惯性矩阵和相对于该点的角加速度的乘积之间的平衡关系，给出惯性角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$ 的时间导数，其中上述量均在惯性坐标系 $\mathrm{F_I}$ 中表示：

$$\sum \mathbf{M}^{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}^{\mathrm{I}}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{I}}_{\mathrm{IB}})}{\mathrm{dt}} \tag{4.51}$$

(4.51) 可转换到机体坐标系 $\mathrm{F_B}$:

$$\sum \mathbf{M}^{\mathrm{B}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{IB}*}}^{-1} \left(\sum \mathbf{M}^{\mathrm{I}} \right) = \mathbf{M}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{M}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{IB}*}}^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}^{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{I}})}{\mathrm{dt}} \right) = \mathbf{R}_{\mathrm{BI}}\, \frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}^{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{I}})}{\mathrm{dt}} \tag{4.52}$$

惯性矩阵与角加速度的乘积也可以转换为 $\mathrm{F_B}$ ，然后对其求时间导数:

$$(\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{B}} = \mathbf{I}^{\mathrm{B}}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{R}_{\mathrm{BI}}\, \mathbf{I}^{\mathrm{I}}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{I}} = \mathbf{R}_{\mathrm{BI}}\, (\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}} \rightarrow \frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{B}}}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{BI}}\, (\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}} + \mathbf{R}_{\mathrm{BI}}\, \frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}}}{\mathrm{dt}} \tag{4.53}$$

将 (4.52) 与 (4.53) 合并，并考虑到 $\mathrm{F_B}$ 中惯性矩阵随时间的变化可视为准静态 ($\dot{\mathbf{I}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{0}$) [A34]:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{M}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{B}}}{\mathrm{dt}} - \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{BI}}\, (\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}} = \mathbf{I}^{\mathrm{B}}\, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} - \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{BI}}\, (\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}} \tag{4.54}$$

旋转矩阵的时间导数 $\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{BI}}$ 可替换为 ($\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BI}}\mathbf{R}_{\mathrm{BI}}$):

$$\mathbf{M}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{M}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{I}^{\mathrm{B}}\, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{BI}}^{\mathrm{B}}\, \mathbf{R}_{\mathrm{BI}}\, (\mathbf{I}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}})^{\mathrm{I}} = \mathbf{I}^{\mathrm{B}}\, \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{BI}}^{\mathrm{B}}\, \mathbf{I}^{\mathrm{B}}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} \tag{4.55}$$

注意到 ($\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{BI}} = -\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}$)，因此，$\mathrm{F_B}$ 相对于$\mathrm{F_I}$ 、在$\mathrm{F_B}$ 中观察到的角速度的时间导数的最终表达式为:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{I}^{\mathrm{B}\,-1}\, \left(\mathbf{M}_{\mathrm{AER}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{M}_{\mathrm{PRO}}^{\mathrm{B}} - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\, \mathbf{I}^{\mathrm{B}}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} \right) \tag{4.56}$$

引入第4.2章节的速度定义，以及地球模型（第2章）和飞机性能（第3章）的代数方程后， $\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\text{惯性基准}}$的依赖关系如下:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{f}_{\omega,\mathrm{TR}} \left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\, \mathbf{v}^{\mathrm{B}},\, \mathbf{q}_{\mathrm{NB}},\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}},\, \mathrm{m},\, \mathrm{t},\, \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}} \right) \tag{4.57}$$

4.4.5 质量方程

质量方程反映了由于动力装置燃烧燃料，飞机质量逐渐减少:

$$\dot{\mathrm{m}} = -\mathrm{F} \tag{4.58}$$

考虑燃油消耗的依赖关系后，结果如下:

$$\dot{\mathrm{m}} = \mathrm{f}_{\mathrm{m,TR}} \left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\, \delta_{\mathrm{T}},\, \mathrm{t} \right) \tag{4.59}$$

4.5 运动方程的积分

将表达式（4.23、4.44、4.50、4.57、4.59）相加后，状态向量时间导数 $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{TRUTH}}$ 的最终依赖关系为:

$$\dot{\mathbf{x}}\,(\mathrm{t}) = \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{TRUTH}}\,(\mathrm{t}) = \mathbf{f}_{\mathrm{TR}} \left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}},\, \mathbf{v}^{\mathrm{B}},\, \mathbf{q}_{\mathrm{NB}},\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}},\, \mathrm{m},\, \mathrm{t},\, \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}} \right) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}\,(\mathrm{t}),\, \mathrm{t},\, \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}\,(\mathrm{t}) \big) \tag{4.60}$$

给定状态向量初始值 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0,\mathrm{TRUTH}}$ 以及

第 3 章节中所述各控制参数的位置随时间的变化，便可对式（4.18）和（4.19）所示的微分方程组进行积分，从而得到状态向量随时间的变化 $\mathbf{x}_{\text{TRUTH}}(t)$，即飞机飞行的实际轨迹或真实轨迹 。不包含在状态向量中的任何变量随时间的变化，均可通过第 2、3 和 4 章节中的代数方程求得。

运动方程的积分采用 4th 阶龙格-库塔方法，以 500 Hz 的频率执行，从而获得尽可能高的结果精度。该离散积分可以通过不同方式实现：

4.5.1 欧几里得空间中的积分

实际轨迹可通过对系统 (4.60) 应用标准 4th 阶龙格-库塔积分方案 [1, 46]获得。然而请注意，单位四元数 $\mathbf{q}_{\text{NB}}$ 表示特殊正交群 $\mathbb{SO}(3)$，该群不是欧几里得空间，因此不定义加法运算。以这种方式积分意味着将单位四元数视为属于 $\mathbb{R}^4$ 而非 $\mathbb{SO}(3)$ 的 4 维向量，并在该 $\mathbb{R}^4$ 向量空间中执行加法和标量乘法。因此，传播后的 4 维向量并不表示 $\mathbb{SO}(3)$，也就是说，它们不是单位四元数，必须在每一步之后进行归一化，以消除 $\mathbb{R}^4$ 传播造成的偏离三维流形 $\mathbb{SO}(3)$ 的误差。

4.5.2 刚体旋转流形上的积分

尽管在 500 Hz 下采用 4.5.1 节方案所产生的误差相对较小，但更严谨、精确的做法是：在积分状态向量的非欧几里得分量时，遵循其所属李群或流形的约束，也就是说，确保单位四元数$\mathbf{q}_{\text{NB}}$ 在传播过程中不会偏离 $\mathbb{SO}(3)$ 流形。为此，必须采用修正的 4th 阶龙格-库塔积分方案及其针对刚体旋转的特定形式，如 [1] 中所述。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{NB}} & \mathbf{q}_{\text{NB}} \end{bmatrix}^{\text{T}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{\text{E,GDT}} & \mathbf{v}^{\text{B}} & \boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{IB}} & \text{m} \end{bmatrix}^{\text{T}} & \boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{NB}} & \mathbf{q}_{\text{NB}} \end{bmatrix}^{\text{T}} \tag{4.61}$$

该方案基于状态向量 $\mathbf{x}$，它由向量 $\mathbf{y}$、表示切空间 $\mathfrak{so}(3)$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}{}_{\text{NB}}$ ，以及表示特殊正交群 $\mathbb{SO}(3)$ 的单位四元数 $\mathbf{q}_{\text{NB}}$ 组成。为了使用 (4.20) 状态向量中包含的相同变量，必须使用$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{\text{E,GDT}} & \mathbf{v}^{\text{B}} & \boldsymbol{\omega}^{\text{B}}{}_{\text{IB}} & \text{m} \end{bmatrix}^{\text{T}}$，并在龙格-库塔方案的四个中间步骤中，分别通过 (4.11)、(4.14) 和 (4.17)，根据其余状态变量求得机体参考角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}{}_{\text{NB}}$。

请注意，此修正的龙格–库塔方案采用（4.23、4.44、4.57、4.59），但舍弃了微分方程（4.50），因为单位四元数是根据其 $\oplus$ 算子和角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}{}_{\text{NB}}$ 而非其$\dot{\mathbf{q}}_{\text{NB}}$ 时间导数进行更新的。

与欧几里得方法相比，这种方法更加优雅、稳健且精确，而且无需定期对单位四元数进行归一化。

4.5.3 刚体运动流形上的积分

与第 4.5.1 章节中所述相同或相近的欧几里得积分方案，代表了飞行科学与航空器导航中采用的方案；而如第 4.5.2 章节所示，在推进单位四元数的同时遵循其流形约束，这种做法在机器人行业更为常见。不过，这两种方法的状态向量相当相似，因为它们都包含大地坐标，并将飞机姿态（旋转）与平移（位置）分开，也将角速度与线速度分开。

[3]油门、升降舵、副翼和方向舵的位置由第 7.2 章节所述的飞机控制系统进行调整。

然而，可以采用一种更优雅且同样稳健的积分方案。作者尚未见其用于导航或飞行模拟器中。该方案将飞机（其 $\mathrm{F_B}$ 机体）视为相对于 $\mathrm{F_E}$ 地球坐标系运动的刚体，同时遵守特殊欧几里得群$\mathbb{SE}(3)$流形的约束。这种方法在处理受控环境中执行机动的机器人时更为常见，它带来了更简洁的记法，使用笛卡尔坐标而非大地坐标，并省去了微分方程 (4.23) 和 (4.50)。此方案比第 4.5.2 节所述的 $\mathbb{SO}(3)$ 积分更为简洁，但也较不直观；不过，两者同样正确，所得结果极为相似，而且在稳健性和精度方面均优于第 4.5.1 节的欧几里得积分。

该方法采用改进的 4th 阶龙格-库塔积分方案，并将其具体应用于刚体运动 [1]。状态向量包含以下成员：

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \boldsymbol{\xi}^{\text{B}}_{\text{EB}} & \boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}} \end{bmatrix}^{\text{T}} = \begin{bmatrix} \text{m} & \boldsymbol{\xi}^{\text{B}}_{\text{EB}} & \boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}} \end{bmatrix}^{\text{T}} \tag{4.62}$$

- 飞机质量m。
- 飞机机体相对于地球、在 $\mathrm{F_B}$中表示的旋量或运动速度，$\boldsymbol{\xi}_{\text{B EB}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_{\text{B EB}} & \boldsymbol{\omega}_{\text{B EB}} \end{bmatrix}^{\text{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\text{B}} & \boldsymbol{\omega}_{\text{B EB}} \end{bmatrix}^{\text{T}}$，表示刚体运动切空间 $\mathfrak{se}(3)$ [1]。其线性分量 $\boldsymbol{\nu}_{\text{B EB}}$ 与在机体坐标系中观察到的飞机绝对速度$\mathbf{v}_{\text{B EB}} = \mathbf{v}_{\text{B}}$一致；其角分量 $\boldsymbol{\omega}_{\text{B EB}}$ 表示运动角速度与飞机角速度之和，同样是在 $\mathrm{F_B}$中观察到的。
- 用于参数化 $\mathbb{SE}(3)$ 的单位双四元数$\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}}$ [1] 表示由 $\mathrm{F_B}$ 表示的飞机相对于地心地固坐标系的位姿（位置加姿态）。

（4.20）真实轨迹$\mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$ 中未包含在（4.62）里的分量可按如下方式获得：

- 大地坐标$\mathbf{T}_{\text{E 'GDT}}$。先根据单位双四元数$\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}}$ 求得笛卡尔坐标$\mathbf{T}_{\text{E 'CAR}} = \mathbf{T}_{\text{E EB}}$，然后按照章节 C.1.2.3 中的说明将其转换为大地坐标。
- 单位四元数$\mathbf{q}_{\text{NB}}$。按照章节 C.1.4 中的说明，求出地心地固坐标系与北东地坐标系之间的旋转$\mathbf{q}_{\text{NE}}$，并根据$\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}}$求出旋转$\mathbf{q}_{\text{EB}}$，然后应用$\mathbf{q}_{\text{NB}} = \mathbf{q}_{\text{NE}} \otimes \mathbf{q}_{\text{EB}}$。
- 机体地速$\mathbf{v}_{\text{B}}$ 与旋量 $\boldsymbol{\xi}_{\text{B EB}}$ [1]的线性分量 $\boldsymbol{\nu}_{\text{B EB}}$ 一致。
- 惯性角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\text{B IB}}$。根据旋量 $\boldsymbol{\xi}_{\text{B EB}}$ 的角分量求得 $\boldsymbol{\omega}_{\text{B EB}}$，然后按照章节 4.2 中所述继续处理。

飞机质量根据其（4.59）时间导数，在 4th 阶龙格-库塔积分方案中于欧几里得空间内推进。单位双四元数 $\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}}$ 则依据其 $\oplus$ 算子和旋量 $\boldsymbol{\xi}^{\text{B}}_{\text{EB}}$进行推进，而非依据其时间导数 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_{\text{EB}}$，因此无需使用（4.23）和（4.50）微分方程。如上所述，旋量 $\boldsymbol{\xi}^{\text{B}}_{\text{EB}}$ 的线性分量实际上就是飞机地速$\mathbf{v}^{\text{B}}$，可根据其（4.44）时间导数在欧几里得空间内推进。旋量角分量 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{EB}}$ 是惯性角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{IB}}$ 与地球角速度 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{IE}}$ 之差，如章节 4.2 所述，因此其时间导数取决于：

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{EB}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{IB}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{IE}} \tag{4.63}$$

这两个分量中，$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{IB}}$ 实际上是（4.57）中的时间导数，而$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{IE}}$ 则利用从地心地固坐标系观察时地球角速度为常数这一性质，通过下式（4.16）求得：

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{IE}} = \mathbf{Ad}_{\mathbf{q}^{-1}_{\text{EB}}} \boldsymbol{\omega}^{\text{E}}_{\text{IE}} = \mathbf{q}^{*}_{\text{EB}} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\text{E}}_{\text{IE}} \otimes \mathbf{q}_{\text{EB}} \tag{4.64}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{IE}} = \dot{\mathbf{q}}^{*}_{\text{EB}} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\text{E}}_{\text{IE}} \otimes \mathbf{q}_{\text{EB}} + \mathbf{q}^{*}_{\text{EB}} \otimes \boldsymbol{\omega}^{\text{E}}_{\text{IE}} \otimes \dot{\mathbf{q}}_{\text{EB}} \tag{4.65}$$

请注意，时间导数 $\dot{\mathbf{q}}^{*}_{\text{EB}}$ 和 $\dot{\mathbf{q}}_{\text{EB}}$ 可以由$\mathbf{q}_{\text{EB}}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{EB}}$ [1]求得。

4.6 实现、验证与执行

第 4.4 节和第 4.5.3 节所述运动方程的积分已通过 C++实现，并在需要时采用了第 2.7 节所述地球模型的实现，以及第 3.6 节所述飞机性能的实现。必须强调，高效实现至关重要，因为获取真实飞机轨迹需要进行大量计算。请注意， 4^{th}阶 Runge-Kutta 积分每步需要计算四次运动方程；以 500 Hz 的频率计算时，真实飞行每秒总计需要计算两千次。每次 $\dot{\mathbf{x}}_{TRUTH}$ 计算都涉及计算密集型过程，例如求取气动作用、低频和高频风以及大气特性等。获取真实飞机轨迹所需的计算成本，是仿真选择 C++ 这类高效编译型语言的主要原因之一。尽管许多过程最初已在 MatLab® 和 Python 等解释型语言中经过测试和验证，但使用这些语言对持续时间以分钟而非秒计的轨迹进行积分并不实际。

通过仅依据所得状态向量随时间的变化来验证运动方程的有效性，从而对该实现进行了验证。一方面，根据$\mathbf{x}_{TRUTH}(t)$计算运动方程的右侧；另一方面，通过对$\mathbf{x}_{TRUTH}(t)$进行数值微分，得到运动方程的左侧。两者应当一致。

第5章

传感器

本章介绍飞机配备的不同机载传感器，这些传感器用于测量飞机实际轨迹的各个方面（第4.3节），并将这些测量值提供给第7章和第8章所述的飞机制导、导航与控制系统。事实上，这些传感器的输出称为感知状态，并在下文第5.1节中进行了描述，代表了真实但未知的实际状态与负责实现尽可能少偏离制导目标的实际轨迹的制导、导航与控制系统之间的唯一联系。感测轨迹，即传感器提供给制导、导航与控制系统的信息，不仅是不完整的，也就是说，它不包含构成飞机实际轨迹的所有变量，而且还是部分不正确的，因为测量变量包含传感器自身引入的误差。因此，导航系统（第8章）的任务是通过从感知状态中提取尽可能多的信息，生成观测值或估计状态（第8.1节），并将其传递给控制系统，以便控制系统调整油门和气动控制，使其遵循制导目标。图5.1描述了传感器如何测量实际状态 $\mathbf{x}(t_t) = \mathbf{x}_{\text{TRUTH}}(t_t)$并获得感知状态 $\tilde{\mathbf{x}}(t_s) = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}(t_s)$，其中 $t_t = t \cdot \Delta t_{\text{TRUTH}}$ 和 $t_s = s \cdot \Delta t_{\text{SENSED}}$ 分别基于其500 Hz和100 Hz的频率。

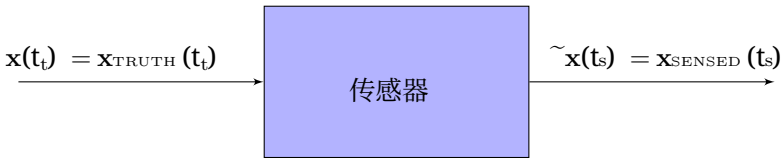

图5.1：传感器流程图

本章的主要目标是对不同传感器产生的误差源进行适当建模，重点关注惯性传感器（加速度计和陀螺仪）。本章首先在第5.1节介绍感测轨迹及其组成部分。第5.2节详细介绍惯性传感器，包括其特性、相对于飞机结构的位置和方向、误差源，并以能够恰当捕捉其随机特性的模型作为结论。第5.3节以类似但不太详细的方式介绍磁力计、大气数据系统和GNSS接收机。第5.4节描述用于视觉导航的数码相机的特性和安装方式。尽管相机与其他所有传感器不同，它不提供测量值或读数，而是提供数字图像，但在本文档中，它确实被视为一种传感器，因为它向制导、导航与控制系统提供了有关周围环境的信息，而这些信息可用于导航。最后，第5.5节重点介绍仿真中传感器模型的实现。

本章不仅为不同的飞机传感器建立了通用误差模型，还为那些如今能够安装在类似第3章所述的小型固定翼飞机上的传感器提供了模型所依赖的具体数值。此后，这种配置被称为“基准”配置。本章建立的模型假设所有传感器均固定安装在飞机结构上。

捷联配置 [A35、A47]。他们还假设测量过程是瞬时的 [A36、A49]，并且除数码相机和GNSS接收机外，所有传感器均以100 Hz的频率彼此同步，其中数码相机和GNSS接收机的工作频率分别为10 Hz和1 Hz [A37]。

5.1 感测轨迹

感测轨迹(ST) 可以定义为由不同机载传感器提供的测量值的汇总，并且构成制导、导航与控制系统所能获取的实际轨迹的唯一视图。它是一个带有时间戳的状态向量序列 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}$（感测状态）：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{GNSS ACTIVE}} = \mathbf{x}_{\text{SENSED,GNSS ACTIVE}} = \left[\tilde{\mathbf{f}}_{\text{IB}}^{\text{B}} \;\; \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IB}}^{\text{B}} \;\; \tilde{\mathbf{B}}^{\text{B}} \;\; \tilde{\text{p}} \;\; \tilde{\text{T}} \;\; \tilde{\mathbf{v}}_{\text{TAS}}^{\text{B}} \;\; \mathbf{I} \;\; \tilde{\mathbf{x}}^{\text{E,GDT}} \;\; \tilde{\mathbf{v}}^{\text{N}}\right]^{\text{T}} \tag{5.1}$$

请注意，传感器的工作频率为 100 Hz [A37]，而实际轨迹以 500 Hz 进行积分（第4章 4.5 节），因此每五个实际状态向量才对应一个感知状态向量。实际轨迹的另一个显著差异是，许多用于描述飞机状态的有用变量（例如姿态），无法通过第2、3、4章中的代数关系从感知轨迹中获得，而是需要对第4章的方程进行积分（如第8章所示），这会导致误差累积。这一事实与传感器引入的误差共同构成了需要导航系统来生成观测轨迹（第8章 8.1 节）的主要原因。观测轨迹是完整的，即包含描述飞机状态的所有相关变量；同时，由于传感器引入的相当一部分误差已被消除，其误差也较小。

表 5.1 列出了构成感知轨迹的变量，以及测量这些变量的传感器、其频率、定义所在的章节和描述其测量值的章节：

组成部分	变量	测量传感器	频率 [Hz]	章节	
比力	$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{IB}}^{\text{B}}$	加速度计	100	4.4.2.1	5.2
惯性角速度	$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IB}}^{\text{B}}$	陀螺仪	100	4.2	5.2
磁场	$\tilde{\mathbf{B}}^{\text{B}}$	磁力计	100	2.5	5.3.1
气压	$\tilde{\text{p}}$	气压计	100	2.3.1	5.3.2
空气温度	$\tilde{\text{T}}$	温度计	100	2.3.1	5.3.2
空速[1]	$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{TAS}}^{\text{B}}$	皮托管、风向标	100	4.2	5.3.2
地面位置	$\tilde{\mathbf{T}}^{\text{E,GDT}}$	GNSS接收机	1	C.1.2.3	5.3.3
地速	$\tilde{\mathbf{v}}^{\text{N}}$	GNSS接收机	1	4.2	5.3.3
图像	$\mathbf{I}$	数码相机	10	5.4	5.4

表 5.1：感测轨迹的组成部分

5.2 惯性传感器

惯性传感器包括加速度计和陀螺仪，分别测量单个坐标轴上的比力（4.46）和惯性角速度（4.10） [47]。惯性测量单元或 IMU 包含多个加速度计和陀螺仪，通常各三个，用于获取在平台坐标系 F_P 中观察到的比力和角速度的三维测量值 [5] （C.3.1节）。然而，单个加速度计和陀螺仪并未与 F_P 坐标轴对齐，而是分别与非正交 F_A 和 F_Y 坐标系的坐标轴对齐（C.3.2和C.3.3节）。因此，惯性传感器的输出必须先从 F_A 和 F_Y 坐标系转换到 F_P，然后再转换到机体坐标系 F_B，以便导航系统使用。假设加速度计和陀螺仪的尺寸无限小，且位于 IMU参考点 [A38], ，该点与这三个坐标系的原点（$O_P = O_A = O_Y$）重合。

[1]根据（4.7），由空速 $\tilde{v}_{TAS}$、迎角 $\tilde{\alpha}$和侧滑角 $\tilde{\beta}$组成。

惯性测量单元（IMU）是惯性导航的关键输入设备，通常以捷联配置的方式物理固定在飞机结构上，因此，$\mathbf{FT}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}}$ 与 $\mathrm{F_B}$ 之间的相对位置及姿态 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}} = [\psi^{\mathrm{P}} \quad \theta^{\mathrm{P}} \quad \xi^{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}}$ 保持恒定。需要指出的是，IMU 测量的比力和角速度是相对于惯性坐标系 $\mathrm{F_I}$ 而言的，而不是相对于地球坐标系 $\mathrm{F_E}$而言的。因此，对于加速度计而言，测量值包含运输加速度和科里奥利加速度等项；对于陀螺仪而言，则包含运动角速度和地球角速度等项（这些术语的含义请参阅第4章）。这些因素会妨碍惯性导航系统获取飞机相对于地球的运动信息。

按照底层技术，加速度计可分为摆式和振动梁式，而陀螺仪则分为旋转质量式、光学式（环形激光或光纤）和振动式 [6]。当前惯性传感器的研发主要集中在微机械机电系统 (MEMS)传感器[2], 上。这类传感器直接采用电子集成电路行业使用的化学蚀刻和批量加工技术，从而实现体积小、重量轻、结构坚固、功耗低、价格低、可靠性高且维护需求低的特点 [45]。另一方面，MEMS 传感器的精度仍然较低，不过过去二十年间已取得巨大进展，未来预计还会继续提升。

虽然惯性传感器没有统一的性能分类标准，但大体上可分为五个类别或等级：船用级（潜艇和航天器）、航空级（民用和军用）、中级（小型飞机和直升机）、战术级（无人驾驶飞行器和制导武器）以及汽车级（消费用途） [6]。这些等级涵盖的陀螺仪性能约跨越六个数量级，而加速度计仅跨越三个数量级；但性能越高，体积、重量和成本通常也越大。战术级惯性测量单元的性能数值范围很广，但只能独立提供持续几分钟的导航解；汽车级惯性测量单元则不适用于导航。

不同的惯性测量单元测量误差在第 5.2.1 节中进行了说明。第 5.2.2 节给出了单个惯性传感器测量值的模型，而第 5.2.3 节和第 5.2.4 节则着重介绍如何从文档中获取模型所依赖的白噪声和偏置的具体数值。三个传感器一起使用时还会产生额外误差：第 5.2.5 节对加速度计的这类误差进行建模，第 5.2.6 节则对陀螺仪的这类误差进行建模。尽管还取决于惯性测量单元相对于 $\mathrm{F_B}$ 的位置（第 5.2.7 节），第 5.2.8 节和第 5.2.9 节仍提供了全面的惯性测量单元测量误差模型，以及“基准”配置的具体数值。

5.2.1 惯性传感器误差源

除加速度计和陀螺仪外，惯性测量单元还包含处理器、用于存储校准参数的存储器、一个或多个温度传感器，以及电源。如下文所述，每个传感器都有若干误差源，而每种误差源都包含四个分量：固定贡献、随温度变化、次间变化，以及运行内变化 [6, 48]。前两个分量可以在实验室中（于不同温度下）测量，并将校准结果存储在惯性测量单元中，这样处理器之后便能根据温度传感器提供的读数对传感器输出进行补偿。不过，校准会增加制造成本，因此在廉价传感器中可能部分或完全缺失。次间变化会使某个误差源的贡献每次使用传感器时都发生变化，但在一次运行过程中保持恒定。惯性测量单元处理器无法对此进行补偿，但导航系统可以在每次启动时通过一种称为精细对准的过程进行校准，详见第 6.7 节。运行内变化对误差源的贡献会在执行过程中缓慢变化，既无法在实验室中校准，也无法由导航系统校准。

影响惯性传感器的不同误差源如下 [6, 49, 50, 51]:

- 偏置 是所有加速度计和陀螺仪都会表现出的误差，与所测量的比力或角速度无关，并且是传感器总误差的主要组成部分（参见下文第 5.2.2 章节）。当传感器输入为零时，任何非零输出都可定义为偏置。

[2] 存在摆式和振动梁式 MEMS 加速度计，但所有 MEMS 陀螺仪都是振动式的。 ry.

[48], 并可分为静态分量和动态分量。静态部分也称为固定偏置、偏置、开机偏置或偏置重复性，包含运行间变化；而动态分量则称为运行中偏置变化、偏置漂移、偏置不稳定性（或稳定性），其数值通常约为静态部分的百分之十，并在约一分钟的时间尺度内缓慢变化。由于偏置是传感器总体误差的主要来源，因此其数值可以作为衡量传感器质量的指标。表 5.2 根据惯性测量单元等级提供了惯性传感器偏置的近似数值 [6]:

惯性测量单元等级	加速度计偏置 $\left[\mathrm{m/s^2}\right]$	陀螺仪偏置 $\left[^\circ/\mathrm{hr}\right]$
船用级	10^{-4}	10^{-3}
航空	$\left[3\cdot 10^{-4},\ 10^{-3}\right]$	10^{-2}
中级	$\left[10^{-3},\ 10^{-2}\right]$	10^{-1}
战术级	$\left[10^{-2},\ 10^{-1}\right]$	$\left[1,\ 100\right]$
汽车	$> 10^{-1}$	> 100

表 5.2：不同惯性测量单元等级对应的典型惯性传感器偏置

虽然通过精细对准（第 6.7 节）可以大幅降低偏置，但偏置漂移无法确定，因此需要将其建模为随机过程。它主要是预热效应，运行几分钟后几乎应该消失，并对应于传感器阿伦曲线 [50, 52] 的最低点。通常将其建模为随机游走过程，并设置限值以表示预热过程的结束。

- 仪器的比例因子误差 是指在惯性测量单元处理器中完成单位转换后，其输入输出梯度偏离 1 的程度。它表示由老化和制造公差引起的传感器输入与输出之间关系的变化。由于它由固定分量和温度相关变化构成，大部分误差可以通过校准（第 6.1 节）消除。

- 交叉耦合误差 或非正交误差是由制造限制导致传感器敏感轴（$\mathrm{F_Y}$ 和 $\mathrm{F_A}$）相对于 $\mathrm{F_P}$ 的正交坐标轴失准而产生的固定分量，也可以通过校准大幅降低。对于大多数惯性传感器，比例因子误差和交叉耦合误差的量级分别为 10^{-4} 和 10^{-3}，不过某些低等级陀螺仪的误差可能更大。交叉耦合误差等于失准角的正弦值，一些制造商会列出该值。

- 系统噪声 或随机噪声是所有惯性传感器固有的，可由电气、机械、共振和量化噪声源组合而成。它可能产生于传感器本身，也可能来自任何干扰传感器的其他电子设备。它是一种随机过程，通常建模为白噪声（章节 5.2.2），因为其噪声谱近似为白噪声；由于过去值与未来值之间没有相关性，因此无法对其进行校准。白噪声过程的特征可用其功率谱密度 PSD [1], 表示，该数值为常数，因为它不取决于信号频率。它对应于传感器阿伦曲线 [50, 52]的 1 秒交点。

惯性测量单元等级	加速度计功率谱密度平方根 $\left[\mathrm{m/s/hr^{0.5}}\right]$	陀螺仪功率谱密度平方根 $\left[^\circ/\mathrm{hr^{0.5}}\right]$
航空	0.012	0.002
战术级	0.06	$\left[0.03,\ 0.1\right]$
汽车	0.6	1

表 5.3：不同惯性测量单元等级对应的典型惯性传感器系统噪声

系统噪声有时也称为随机游走，这可能会与偏置混淆。原因在于，惯性传感器的输出总是经过积分，以便在加速度计的情况下获得地速，在陀螺仪的情况下获得姿态。由于对白噪声过程进行积分确实会产生随机游走 [1], ，后一术语通常用于指代系统噪声。表 5.3 列出了不同传感器等级下加速度计和陀螺仪功率谱密度平方根的典型数值 [6]。

- 本文未考虑的其他次要误差源包括与 g 有关的偏置（转子质量陀螺仪和振动陀螺仪对比力的灵敏度）、比例因子非线性以及高阶误差（转子质量陀螺仪和摆式加速度计）。

5.2.2 单轴惯性传感器误差模型

由于所有传感器都需要在等间隔的离散时刻 $t_s = s \cdot \Delta t_{SENSED} = s \cdot \Delta t$ 提供测量值，本章节将建立单轴惯性传感器偏置和白噪声误差的离散模型。后续章节将利用这些结果生成完整的惯性测量单元模型。

考虑一个传感器，其在任意给定时刻 $\tilde{x}(t)$ 的测量值与同一时刻被测物理量的实数值 $x(t)$ 之差，可表示为一个均值为零、谱密度为 σ_v^2 的白噪声高斯过程 $\eta_v(t)$：

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \eta_v(t) \tag{5.2}$$

将式 (5.2) 除以 $\Delta t_{SENSED} = \Delta t$ 并进行积分，得到：

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \tilde{x}(t)\, dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [x(t) + \eta_v(t)]\, dt \tag{5.3}$$

假设测量值和实数在整个积分区间内都保持恒定[3] [53]可得

$$\tilde{x}(t_0 + \Delta t) = x(t_0 + \Delta t) + \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta_v(t)\, dt \tag{5.4}$$

该表达式得到白噪声传感器误差 $w(t)$，即传感器测量值 $\tilde{x}(t)$ 与真实值 $x(t)$ 之差。其均值和方差可直接计算：

$$w(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta_v(t)\, dt \tag{5.5}$$

$$E[w(t_0 + \Delta t)] = 0 \tag{5.6}$$

$$Var[w(t_0 + \Delta t)] = \frac{\sigma_v^2}{\Delta t} \tag{5.7}$$

根据这些结果，白噪声误差可以建模为一个离散随机变量，该变量与上述连续白噪声误差同分布，即具有相同的均值和方差：

$$w(s\,\Delta t_{SENSED}) = w(s\,\Delta t) = \frac{\sigma_v}{\Delta t^{1/2}} N_{vs} \tag{5.8}$$

其中，$N_v \sim N(0, 1)$ 是一个标准正态随机变量。现在考虑另一种模型，其中测量误差或偏置由一阶随机游走过程表示 [1], ，也就是说，该过程是对零均值白噪声高斯过程 $\eta_u(t)$ 的积分，其谱密度为 σ_u^2。同样可以计算其均值和方差：

$$\dot{b}(t) = \eta_u(t) \tag{5.9}$$

$$b(t_0 + \Delta t) = b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \eta_u(t)\, dt \tag{5.10}$$

$$E[b(t_0 + \Delta t)] = E[b(t_0)] \tag{5.11}$$

$$Var[b(t_0 + \Delta t)] = \sigma_u^2\, \Delta t \tag{5.12}$$

这些结果表明 e，即偏置可建模为一个同分布的离散随机变量（这是 ，

[3]请注意，随机过程 η_v 不能被视为在任何区间内保持恒定。

从而具有与上述连续随机游走相同的期望值和方差：

$$\mathrm{b}\left(\mathrm{t}_0+\Delta\mathrm{t}\right)=\mathrm{b}\left(\mathrm{t}_0\right)+\sigma_{\mathrm{u}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\,\mathrm{N}_{\mathrm{u}} \tag{5.13}$$

其中 $\mathrm{N_u}\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)$ 也是一个标准正态随机变量。离散偏置及其均值和方差的最终表达式如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{b}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) &= \mathrm{B}_0\,\mathrm{N}_{\mathrm{u}0}+\sigma_{\mathrm{u}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathrm{N}_{\mathrm{ui}} && (5.14)\\
\mathrm{E}\left[\mathrm{b}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\right] &= 0 && (5.15)\\
\mathrm{Var}\left[\mathrm{b}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\right] &= \mathrm{B}_0^2+\sigma_{\mathrm{u}}^2\,\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t} && (5.16)
\end{aligned}$$

因此，将 (5.8) 给出的系统噪声影响与 (5.14) [54]，给出的偏置相加，并假设标准正态随机变量 $\mathrm{N_u}$ 和 $\mathrm{N_v}$ 不相关[4]，即可构建一个不含比例因子的综合单轴传感器误差模型：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e_{BW}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) &= \widetilde{\mathrm{x}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)-\mathrm{x}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\\
&= \mathrm{B}_0\,\mathrm{N}_{\mathrm{u}0}+\sigma_{\mathrm{u}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathrm{N}_{\mathrm{ui}}+\frac{\sigma_{\mathrm{v}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\,\mathrm{N}_{\mathrm{vs}} && (5.17)\\
\mathrm{E}\left[\mathrm{e_{BW}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\right] &= 0 && (5.18)\\
\mathrm{Var}\left[\mathrm{e_{BW}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\right] &= \mathrm{B}_0^2+\sigma_{\mathrm{u}}^2\,\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}+\frac{\sigma_{\mathrm{v}}^2}{\Delta\mathrm{t}} && (5.19)
\end{aligned}$$

传感器在任意离散时刻 $\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}$ 提供的测量值 $\widetilde{\mathrm{x}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{SENSED}}\right)=\widetilde{\mathrm{x}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)$ 与同一离散时刻被测物理量的实际值 $\mathrm{x}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)$ 之间的差值，即<strong style id='1'>离散传感器误差，由偏置或一阶随机游走与白噪声过程共同构成，并取决于三个参数：偏置量 B_0，、偏置不稳定性 σ_{u}和白噪声 σ_{v}。这三种不同来源对传感器误差及其一次和二次积分[5] 的影响截然不同，并且与使用加速度计和陀螺仪进行惯性导航时遇到的许多挑战密切相关，具体说明如下。

图5.2展示了一个虚构传感器的性能，该传感器具有 $\mathrm{B}_0=1.6\cdot10^{-2}$、 $\sigma_{\mathrm{u}}=4\cdot10^{-3}$和 $\sigma_{\mathrm{v}}=1\cdot10^{-3}$，工作频率为 100 Hz（$\Delta\mathrm{t}=0.01$ s），旨在展示其三个组成部分各自不同的行为以及对总误差的相对影响。图中给出了由式（5.18）和（5.19）确定的传感器误差均值（左图）和标准差（右图）随时间的理论变化，以及五十次不同运行的平均值。此外，左图还显示了其中十次运行的结果，以展示随机变量[6], 所隐含的结果变异性；右图则显示了三个组成部分各自对标准差的理论贡献。除了理论值与多次运行的平均值几乎完全一致之外，图中还表明，偏置不稳定性是导致传感器测量值偏离其零均值的长期主导因素（偏置不稳定性的标准差随时间平方根增长，而另外两个组成部分保持恒定）。如第 5.2.1 章节所述，偏置漂移或偏置不稳定性确实是惯性传感器最重要的质量参数。

可以对时间跨度 $\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}$ 内的传感器误差进行积分，以评估其期望值和

[4]请注意，该传感器模型的两个离散分量各自的期望值和方差分别与其连续对应分量的期望值和方差一致，但由表达式（5.18）和（5.19）给出的二者组合的均值和方差，与由（5.5）和（5.10）给出的两个连续误差模型组合的均值和方差不同。即使考虑到两个零均值白噪声高斯随机过程 η_{u} 和 η_{v} 相互独立，因而不相关，情况仍然如此。不过，可以获得一种离散模型，使其离散偏置和白噪声分量不仅分别与连续对应分量同分布[53], , 还使偏置与传感器误差之间的协方差保持等价；但这样会得到一个复杂得多的模型。除传感器初始化后的最短时间采样之外，该模型在其他情况下的行为都与上述模型相似。由于本文依赖于在较长时间内以高频率获取测量值，作者选择降低模型复杂度，而几乎不损失或完全不损失真实性。[5]陀螺仪测量角速度，其输出需要积分一次才能获得姿态；而加速度计测量比力，需要积分一次才能获得速度，积分两次才能获得位置。[6]尽管数据以 100 Hz 的频率生成，但图中仅使用每 1000 个点中的 1 个点，因此看起来噪声较小。

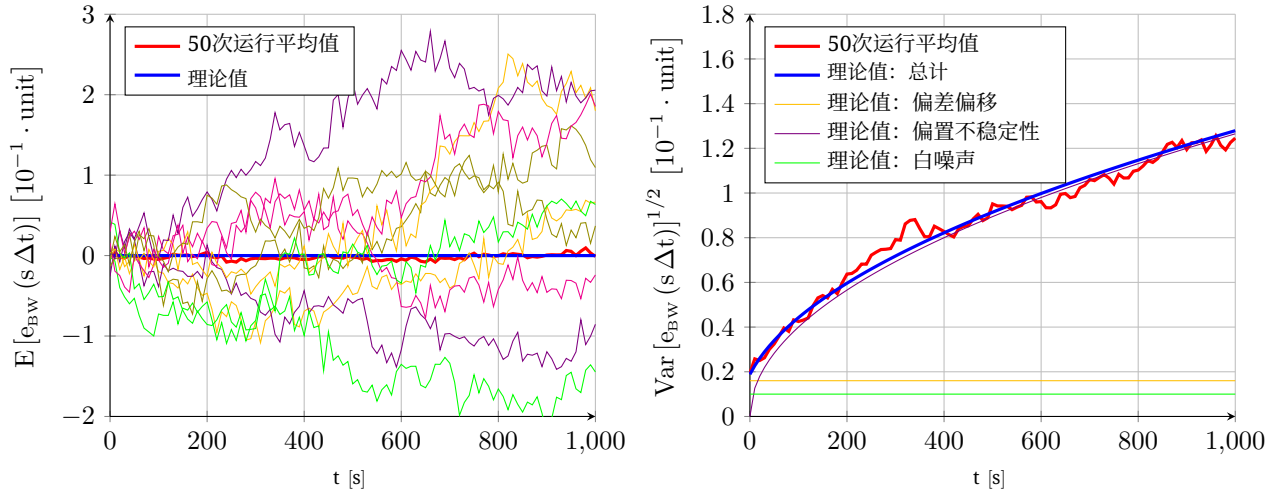

图5.2：传感器误差均值和标准差随时间的变化

方差随时间的增长情况[7]：

$$\begin{aligned}
\mathrm{f_{BW}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) &= \mathrm{f_{BW}}\left(0\right)+\int_0^{\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}}\mathrm{e_{BW}}\left(\tau\right)\,\mathrm{d}\tau=\mathrm{f_{BW}}\left(0\right)+\Delta\mathrm{t}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathrm{e_{BW}}\left(\mathrm{i}\,\Delta\mathrm{t}\right)\\
&= \mathrm{f_{BW}}\left(0\right)+\mathrm{B_0}\,\mathrm{N_{u0}}\,\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}+\sigma_\mathrm{u}\,\Delta\mathrm{t}^{3/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\left(\mathrm{s}-\mathrm{i}+1\right)\,\mathrm{N_{ui}}+\sigma_\mathrm{v}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathrm{N_{vi}} \qquad (5.20)\\
\mathrm{E}\left[\mathrm{f_{BW}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\right] &= \mathrm{f_{BW}}\left(0\right) \qquad (5.21)\\
\mathrm{Var}\left[\mathrm{f_{BW}}\left(\mathrm{s}\ \Delta\mathrm{t}\right)\right] &= \mathrm{B_0^2}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)^2+\frac{\sigma_\mathrm{u}^2}{6}\Delta\mathrm{t}^3\,\mathrm{s}\left(\mathrm{s}\ +1\right)\left(2\,\mathrm{s}\ +1\right)\ +\sigma_\mathrm{v}^2\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\\
&\approx \mathrm{B_0^2}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)^2+\frac{\sigma_\mathrm{u}^2}{3}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)^3+\sigma_\mathrm{v}^2\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

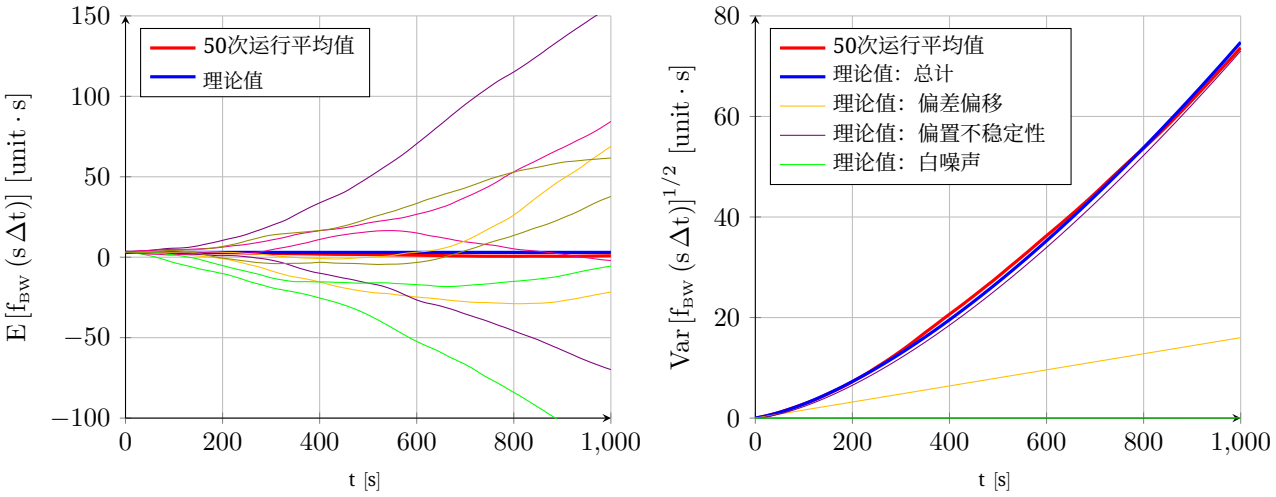

图 5.3：传感器误差均值和标准差的首次积分随时间的传播

图5.3与图5.2遵循相同的模式，但它针对的是误差积分，而不是误差本身。它表示对陀螺仪输出进行积分所产生的姿态误差，或对加速度计测得的比力进行积分时的预期速度误差。结论与之前相同，但表现得更加显著。误差的期望值不仅是常数而非零（实验中采用了 $\mathrm{f_{BW}}(0)\ =3$），而且标准差（相对于非零均值）的增长也比之前快得多。偏置不稳定性仍然是主导因素，但现在以 t 的某次幂增长

[7]由于主要关注的是 $\mathrm{s}\ \gg 1$，因此采用矩形法等简单积分方法。

，偏置和白噪声的贡献也随时间增加，尽管分别以 t 和 $t^{1/2}$ 的某次幂增长。这说明稳健的惯性导航系统必不可少，否则姿态和速度误差会随时间不断增大，从而无法进行任何有效类型的导航。误差还可以再积分一次：

$$\begin{aligned} g_{BW}(s\,\Delta t) &= g_{BW}(0) + \int_0^{s\,\Delta t} f_{BW}(\tau)\,d\tau = g_{BW}(0) + \Delta t \sum_{i=1}^{s} f_{BW}(i\,\Delta t) \\ &= g_{BW}(0) + f_{BW}(0)\,s\,\Delta t + \frac{B_0}{2} N_{u0}\,(s\,\Delta t)^2 \\ &\quad + \sigma_u\,\Delta t^{5/2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s-i+1} j\,N_{ui} + \sigma_v\,\Delta t^{3/2} \sum_{i=1}^{s} s\,(s-i+1)\,N_{vi} \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$E\left[g_{BW}(s\,\Delta t)\right] = g_{BW}(0) + f_{BW}(0)\,(s\,\Delta t) \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[g_{BW}(s\,\Delta t)\right] &= \frac{B_0^2}{4}(s\,\Delta t)^4 + \sigma_u^2\,\Delta t^5 \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{s-i+1} j \right)^2 + \frac{\sigma_v^2}{6}\,\Delta t^3\,s\,(s+1)\,(2s+1) \\ &\approx \frac{B_0^2}{4}(s\,\Delta t)^4 + \frac{\sigma_u^2}{20}(s\,\Delta t)^5 + \frac{\sigma_v^2}{3}(s\,\Delta t)^3 \end{aligned} \tag{5.25}$$

图5.4展示了相同类型的图形，但应用于误差的二次积分（实验中采用了 $g_{BW}(0) = 1.5$ ）。在这种情况下，结果随时间推移而恶化的程度更加严重，以至于测量值在极短时间后便失去了实用价值。除非通过导航系统进行校正，否则这相当于对加速度计的输出进行二次积分后所产生的位置误差。

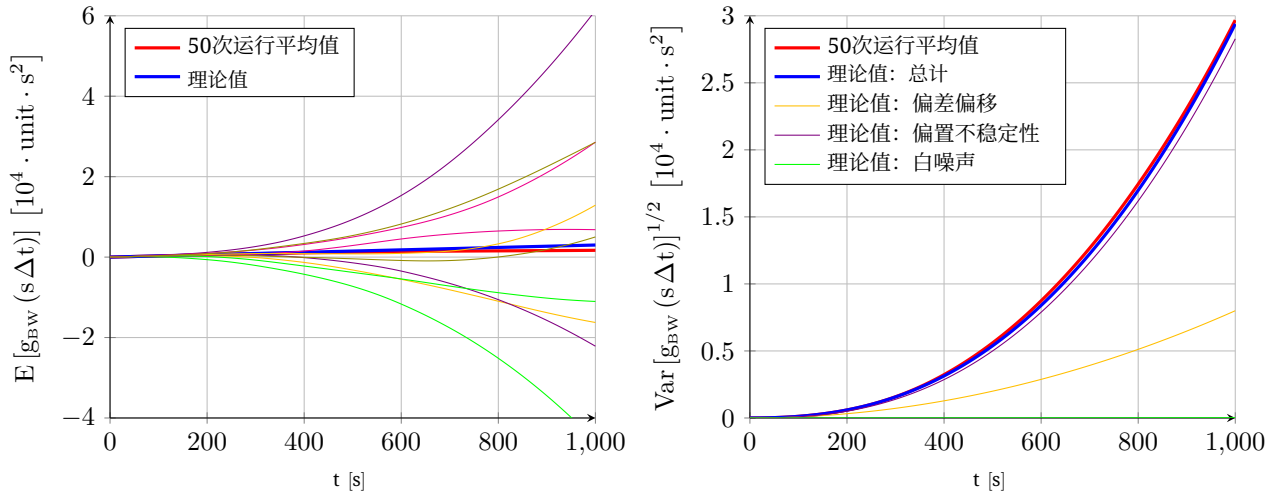

图5.4：传感器误差均值和标准差二次积分随时间的传播

本段总结了本章节所建立的单轴惯性传感器离散误差模型的要点。误差 $e_{BW}(s\,\Delta t)$，对于加速度计适用于比力，对于陀螺仪则适用于惯性角速度，取决于三个因素：偏置 B_0，、偏置漂移 σ_u 和白噪声 σ_v。其均值始终为零，但误差标准差会随时间 ($\propto t^{1/2}$) 增大，这是由于偏置漂移所致，同时偏置和白噪声带来恒定贡献。对误差进行积分以获得 $f_{BW}(s\,\Delta t)$ 时，对于加速度计该量等同于地速，对于陀螺仪则等同于姿态；此时，初始速度误差或初始姿态误差 $f_{BW}(0)$ 成为第四个贡献因素，而且确实非常重要，因为它会成为任意时刻一次积分误差的均值。标准差用于衡量围绕非零均值的离散程度，由于偏置不稳定性 ($\propto t^{3/2}$)，其会随时间迅速增大，同时还受到偏置 ($\propto t$) 和白噪声 ($\propto t^{1/2}$) 的影响。如果再次积分以获得 $g_{BW}(s\,\Delta t)$，对于加速度计而言即为位置，则初始位置误差 $g_{BW}(0)$ 转变为第五个贡献因素。由于初始速度误差的影响，位置误差的期望值会随时间线性增长，同时初始位置误差还会带来一个恒定贡献，而位置标准差（衡量围绕不断增大的平均值的离散程度）增长得极快，原因在于

偏置不稳定性 ($\propto t^{5/2}$)，同时也受到偏置 ($\propto t^2$) 和白噪声 ($\propto t^{3/2}$) 的影响。表5.4列出了加速度计和陀螺仪各类误差源的标准单位。

单位	B_0	σ_u	σ_v	f_{BW} (0)	克$_{BW}$ (0)
加速度计	m/s^2	米/秒$^{2.5}$	米/秒$^{1.5}$	m/s	m
陀螺仪	$^\circ/s$	$^\circ$/秒$^{1.5}$	$^\circ$/秒$^{0.5}$	$^\circ$	N/A

表 5.4：单轴惯性传感器误差源的单位

第5.2.3节和第5.2.4节根据传感器规格得出偏置不稳定性 σ_u 和系统噪声 σ_v，并说明图5.2（传感器误差）右侧偏置不稳定性曲线（紫色）在100 s处的数值等于十倍的 σ_u，而图5.3（传感器误差的积分）右侧白噪声曲线（绿色）在1000 s处的数值等于 $1000^{1/2} \approx 31.6$ 倍的 σ_v。

5.2.3 系统噪声值的获取

本节重点讨论系统噪声或白噪声误差 σ_v 的重要性，以及如何从传感器规格中获取该误差；传感器规格通常指输出的积分，而非输出本身。由于白噪声的积分是一个随机游走过程，陀螺仪的角度随机游走等同于角速度输出中的白噪声，而速度随机游走则指加速度计 [48]比力中的白噪声。下文讨论适用于陀螺仪；只需将角速度替换为比力，将姿态或角度替换为地速，即完全适用于加速度计。

角度随机游走，以 $[rad/s^{1/2}]$、$[^\circ/hr^{1/2}]$ 或等效单位表示，描述的是仅由系统噪声引起的传感器输出信号积分过程中产生的平均偏差或误差，而不考虑偏置或比例因子 [55] 等其他误差源。如果进行多次积分，并在给定的最终时间 s Δt 获得一个终点分布，那么该分布的标准差（包含最终时间的各个最终角度）将与白噪声水平 σ_v、积分步长 Δt 的平方根以及步数 s 的平方根成线性比例关系，如公式 (5.22) 的最后一项所示。这意味着，$1^\circ/s^{1/2}$ 的角度随机游走对应的误差标准差为：1 s 后为 1°，100 s 后为 10°，1000 s 后为 $1000^{1/2} \approx 31.6^\circ$。

制造商通常会以白噪声过程的功率谱密度表示这一信息，单位为 [$^{\circ 2}$/小时^2/赫兹]或等效单位；此时需要对其开平方以获得 σ_v，或者以 [$^\circ$/小时/赫兹$^{1/2}$] 为单位提供功率谱密度平方根，其等效于σ_v。有时，制造商甚至会提供随机游走过程（而非白噪声过程）的功率谱密度，单位为 [$^\circ$/小时]或等效单位。此时，需要将该数值乘以采样间隔 Δt 的平方根，或除以采样频率的平方根，以获得所需的 σ_v。

5.2.4 偏置漂移值的获取

本章节介绍偏置不稳定性 σ_u（也称为偏置稳定性或偏置漂移）的含义，以及如何从传感器规格中获取该值。本章节主要针对陀螺仪，但同样适用于加速度计。偏置不稳定性可以定义为传感器误差在一定时间 [56]内保持在某个范围内的可能性。一些制造商会直接提供传感器输出随时间的变化，这与式（5.19）第二项所表示的偏置不稳定性（也称为运行中偏置变化、偏置漂移或角速度随机游走）相关。如果给定角速度变化量 x [$^\circ$/s]（1σ），在 t [s], 内，则可按以下方式获得 σ_u [53, 57]:

$$\sigma_u = \frac{x}{t^{1/2}} \tag{5.26}$$

由于偏置漂移会导致传感器误差随时间增长（图5.2），制造商更常提供偏置稳定性测量值，用于描述设备偏置在指定时间段内可能发生的变化 [54], 通常约为100 s。偏置稳定性通常规定为带有单位 [$^\circ$/hr] 或 [$^\circ$/s], 的 1σ 数值，根据公式（5.17、5.18、5.19）可作如下解释。如果已知传感器误差（或偏置）在某一时间

t，那么在100 s内偏置稳定性为 1σ hr意味着，时刻 $t + 100$ [s] 的偏置是一个随机变量，其均值为时刻t 的误差，标准差为 $0.01^\circ/\text{hr}$，并且可以使用表达式（5.26）求得 σ_{u}。由于偏置随时间表现为随机游走，其标准差与时间的平方根成正比增长，因此偏置稳定性有时也称为偏置随机游走。

偏置波动在较长时间内并不表现为随机游走。如果确实如此，随着时间跨度增加，设备偏置的不确定性将无限增长，但实际情况并非如此。在实践中，偏置被限制在某个范围内，因此，随机游走模型仅在较短时间内是对真实过程的良好近似 [54]。

5.2.5 三轴加速度计传感器误差模型

一个惯性测量单元配备了由三个独立加速度计组成的加速度计三轴组件，每个加速度计都按照第 5.2.2 节所述，测量比力在其敏感轴上的投影，同时会产生误差 $\mathbf{e}_{\text{BW, ACC}}$ 该误差可建模为偏置、偏置漂移和白噪声的组合（5.17）。这三个加速度计可视为无限小的 [A38]，并位于惯性测量单元 参考点处；该参考点定义为三个加速度计敏感轴的交点。由于加速度计坐标系 F_A 以惯性测量单元参考点为中心，且其三个非正交坐标轴与加速度计的敏感轴重合，式（5.27）将三个独立加速度计的测量值联系在一起：

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{\text{A}}_{\text{IA}} = \mathbf{S}_{\text{ACC}} \left(\mathbf{f}^{\text{A}}_{\text{IA}} + \mathbf{e}^{\text{A}}_{\text{BW,ACC}} \right) \tag{5.27}$$

其中 $\mathbf{f}^{\text{A}}{}_{\text{IA}}$ 是在 F_A 中表示的比力（章节 4.4.2.1），$\widetilde{\mathbf{f}}^{\text{A}}{}_{\text{IA}}$ 表示同样在 F_A 中表示的比力测量值，$\mathbf{e}^{\text{A}}{}_{\text{BW, ACC}}$ 是每个加速度计引入的误差（5.17），而 $\mathbf{S}_{\text{ACC}}$ 是一个包含比例因子误差的方对角矩阵 $\{\text{s}_{\text{ACC, 1}},\ \text{s}_{\text{ACC, 2}},\ \text{s}_{\text{ACC, 3}}\}$ 分别对应每个加速度计（章节 5.2.1）。不过，最好得到一个表达式，使比力在正交的平台坐标系 F_P 中表示，而不是在 F_A 中表示。由于二者具有相同的原点（$\text{O}_\text{A} = \text{O}_\text{P}$），

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{\text{P}}_{\text{IP}} = \mathbf{R}^{\star}_{\text{PA}}\ \mathbf{S}_{\text{ACC}}\ \left(\mathbf{R}^{\star}_{\text{AP}}\ \mathbf{f}^{\text{P}}_{\text{IP}} + \mathbf{e}^{\text{A}}_{\text{BW,ACC}} \right) \tag{5.28}$$

其中 $\mathbf{R}^{\star}{}_{\text{PA}}$ 和 $\mathbf{R}^{\star}{}_{\text{AP}}$由（C.29）定义，包含由加速度计感测轴的失准 $\{\alpha_{\text{ACC},1},\ \alpha_{\text{ACC},2},\ \alpha_{\text{ACC},3}\}$ 所产生的交叉耦合误差。比例因子误差和交叉耦合误差包含固定误差分量及温度相关误差分量（章节 5.2.1），可将其建模为正态随机变量：

$$\text{s}_{\text{ACC,i}} = \text{N}\left(1,\ \text{s}^2_{\text{ACC}}\right) \qquad \forall\ \text{i} \in \{1,\ 2,\ 3\} \tag{5.29}$$

$$\alpha_{\text{ACC,i}} = \text{N}\left(0,\ \alpha^2_{\text{ACC}}\right) \qquad \forall\ \text{i} \in \{1,\ 2,\ 3\} \tag{5.30}$$

其中 s_{ACC} 和 α_{ACC} 可以从传感器规格中获得。通过定义加速度计比例因子与交叉耦合误差矩阵$\mathbf{M}_{\text{ACC}}$，可以对方程 (5.28) 进行变换：

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{ACC}} &= \mathbf{R}^{\star}_{\text{PA}}\ \mathbf{S}_{\text{ACC}}\ \mathbf{R}^{\star}_{\text{AP}} = \begin{bmatrix} \text{m}_{\text{ACC},11} & 0 & 0 \\ \text{m}_{\text{ACC},21} & \text{m}_{\text{ACC},22} & 0 \\ \text{m}_{\text{ACC},31} & \text{m}_{\text{ACC},32} & \text{m}_{\text{ACC},33} \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} \text{s}_{\text{ACC},1} & 0 & 0 \\ \alpha_{\text{ACC},3}\ (\text{s}_{\text{ACC},1} - \text{s}_{\text{ACC},2}) & \text{s}_{\text{ACC},2} & 0 \\ \alpha_{\text{ACC},2}\ (\text{s}_{\text{ACC},3} - \text{s}_{\text{ACC},1}) & \alpha_{\text{ACC},1}\ (\text{s}_{\text{ACC},2} - \text{s}_{\text{ACC},3}) & \text{s}_{\text{ACC},3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.31}$$

考虑到尺度误差和交叉耦合误差互不相关且非常小，并依据 [1] 中推导的两个随机变量的和与乘积的期望值和标准差表达式，可得到 $\mathbf{M}_{\text{ACC}}$ 的各个分量 $\text{m}_{\text{ACC,ij}}\ \forall\ \text{i, j} \in \{1,\ 2,\ 3\}$ 如下：

$$\text{m}_{\text{ACC,ij}} = \text{N}\left(1,\ \text{s}^2_{\text{ACC}}\right) \qquad \text{i} = \text{j} \tag{5.32}$$

$$\mathrm{m_{ACC,ij}} = \mathrm{N}\left(0,\ \left[\sqrt{2}\ \alpha_{\mathrm{ACC}}\ \mathrm{s_{ACC}}\right]^2\right) = \mathrm{N}\left(0, \mathrm{m}^2_{\mathrm{ACC}}\right) \qquad \mathrm{i} > \mathrm{j} \tag{5.33}$$

$$\mathrm{m_{ACC,ij}} = 0 \qquad \mathrm{i} < \mathrm{j} \tag{5.34}$$

加速度计误差变换矩阵 $\mathbf{N}_{\mathrm{ACC}}$ 定义如下：

$$\mathbf{N}_{\mathrm{ACC}} = \mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{PA}}\ \mathbf{S}_{\mathrm{ACC}} = \begin{bmatrix} \mathrm{n_{ACC,11}} & 0 & 0 \\ \mathrm{n_{ACC,21}} & \mathrm{n_{ACC,22}} & 0 \\ \mathrm{n_{ACC,31}} & \mathrm{n_{ACC,32}} & \mathrm{n_{ACC,33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{s_{ACC,1}} & 0 & 0 \\ \alpha_{\mathrm{ACC,3}}\ \mathrm{s_{ACC,1}} & \mathrm{s_{ACC,2}} & 0 \\ -\alpha_{\mathrm{ACC,2}}\ \mathrm{s_{ACC,1}} & \alpha_{\mathrm{ACC,1}}\ \mathrm{s_{ACC,2}} & \mathrm{s_{ACC,3}} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

采用与上述类似的过程可得：

$$\mathrm{n_{ACC,ij}} = \mathrm{N}\left(1,\ \mathrm{s}^2_{\mathrm{ACC}}\right) \qquad \mathrm{i} = \mathrm{j} \tag{5.36}$$

$$\mathrm{n_{ACC,ij}} = \mathrm{N}\left(0,\ \alpha^2_{\mathrm{ACC}}\left(1 + \mathrm{s}^2_{\mathrm{ACC}}\right)\right) \approx \mathrm{N}\left(0, \alpha^2_{\mathrm{ACC}}\right) \qquad \mathrm{i} > \mathrm{j} \tag{5.37}$$

$$\mathrm{n_{ACC,\ i}{}^{j}} = 0 \qquad \mathrm{i} < \mathrm{j} \tag{5.38}$$

已知交叉耦合误差非常小$\left(1 + \alpha^2{}_{\text{加速度计}} \approx 1\right)$，并再次依据上述使用的均值和标准差表达式，可以证明，$\mathrm{F_P}$ 中的偏置误差和白噪声误差符合与式（5.17）类似的表达式：

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,ACC}} &= \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,ACC}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t_{SENSED}}\right) = \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,ACC}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \mathbf{N}_{\mathrm{ACC}}\ \mathbf{e}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{BW,ACC}} \\ &= \mathrm{B_{0,ACC}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{u0,ACC}} + \sigma_{\mathrm{uACC}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathbf{N}_{\mathrm{ui,ACC}} + \frac{\sigma_{\mathrm{vACC}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{vs,ACC}} \end{aligned} \tag{5.39}$$

其中，每个$\mathbf{N}_{\mathrm{u,\ ACC}}$ 和$\mathbf{N}_{\mathrm{v,\ ACC}}$ 都是由三个相互独立的标准正态随机变量 N (0，1)构成的随机向量。请注意，由于偏置漂移主要是一个预热过程，在运行几分钟后便会趋于稳定，因此式（5.39）中的随机游走不能自由变化，而是被限制在宽度为 $\pm\ 100\,\sigma_{\mathrm{uACC}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}$的范围内。因此，最终的 $\mathrm{F_P}$ 加速度计模型如下：

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{M}_{\mathrm{ACC}}\ \mathbf{f}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} + \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,ACC}} \tag{5.40}$$

其中，$\mathbf{M}_{\mathrm{ACC}}$ 由式 (5.31) 至 (5.34) 描述，$\mathbf{e}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{BW,\ 加速度计}}$ 由式 (5.39) 给出。该模型所需的输入包括偏置 $\mathrm{B_{0,\ ACC}}$、偏置漂移 σ_{uACC}、白噪声 σ_{vACC}、比例因子误差 $\mathrm{s_{ACC}}$和交叉耦合误差 $\mathrm{m_{ACC}}$，这些参数取自第 5.2.9 节表 5.8 所示的加速度计规格。

5.2.6 陀螺仪三轴传感器误差模型

惯性测量单元还配备了三轴陀螺仪，每个陀螺仪都测量惯性角速度在其敏感轴上的投影，如第 5.2.2 节所述。三轴陀螺仪模型与加速度计模型类似，但存在一个额外难点：陀螺仪坐标系 $\mathrm{F_Y}$ 与 $\mathrm{F_P}$ 之间的变换依赖于六个小角度，而非三个，如 C.3.3 节所述。因此，起点为：

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{PY}}\ \mathbf{S}_{\mathrm{GYR}}\ \left(\mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{YP}}\ \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} + \mathbf{e}^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{BW,GYR}}\right) \tag{5.41}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{P}}$ IP 表示在 $\mathrm{F_P}$ 中观察到的惯性角速度（章节 4.2），$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{P}}$ IP 表示同样在 $\mathrm{F_P}$ 中观察到的其测量值，$\mathrm{e^Y}$ BW,GYR 表示每个陀螺仪引入的误差（5.17），$\mathrm{S_{GYR}}$ 是一个包含比例因子误差 $\{\mathrm{s_{GYR}}{,}1、\mathrm{s_{GYR}}{,}2、\mathrm{s_{GYR}}{,}_2\}$ 的方对角矩阵，而由（C.30）定义的 R* PY 和 R* YP 则包含由陀螺仪感测轴失准所产生的交叉耦合误差 α_{GYR},12、α_{GYR},21、α_{GYR},13、α_{GYR},31、α_{GYR},23、α_{GYR},32。

以与章节 5.2.5 相同的方式运行，可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,GYR}} &= \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,GYR}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{SENSED}}\right) = \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,GYR}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right)\\ &= \mathrm{B}_{0,\mathrm{GYR}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{u0,GYR}} + \sigma_{\mathrm{uGYR}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathbf{N}_{\mathrm{ui,GYR}} + \frac{\sigma_{\mathrm{vGYR}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{vs,GYR}} \qquad (5.42)\\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} &= \mathbf{M}_{\mathrm{GYR}}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} + \mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,GYR}} \qquad (5.43)\end{aligned}$$

其中，每个$\mathbf{N}_{\mathrm{ui,GYR}}$ 和$\mathbf{N}_{\mathrm{v,GYR}}$ 都是由三个相互独立的标准正态随机变量 N (0, 1) 组成的随机向量。与加速度计的情况一样，式 (5.42) 中表示偏置漂移的随机游走不能自由变化，而是限制在宽度为 $\pm\,100\,\sigma_{\mathrm{uGYR}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}$ 的范围内。此模型依赖于偏置 σ_{uGYR}、白噪声 σ_{vGYR}、比例因子误差 $\mathrm{s}_{\mathrm{GYR}}$ 和交叉耦合误差 $\mathrm{m}_{\mathrm{GYR}}$ 的偏置值 $\mathrm{B}_{0,\mathrm{GYR}}$，这些参数取自第 5.2.9 节表 5.7 所示的陀螺仪规格。陀螺仪比例因子和交叉耦合误差矩阵$\mathbf{M}_{\mathrm{GYR}}$ 定义为：

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\mathrm{GYR}} &= \mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{PY}}\,\mathbf{S}_{\mathrm{GYR}}\,\mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{YP}} = \begin{bmatrix}\mathrm{m}_{\mathrm{GYR},11} & \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},12} & \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},13}\\ \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},21} & \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},22} & \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},23}\\ \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},31} & \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},32} & \mathrm{m}_{\mathrm{GYR},33}\end{bmatrix}\\ &\approx \begin{bmatrix}\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},1} & \alpha_{\mathrm{GYR},23}\,\left(\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},1}-\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},2}\right) & \alpha_{\mathrm{GYR},32}\,\left(\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},3}-\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},1}\right)\\ \alpha_{\mathrm{GYR},13}\,\left(\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},1}-\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},2}\right) & \mathrm{s}_{\mathrm{GYR},2} & \alpha_{\mathrm{GYR},31}\,\left(\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},2}-\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},3}\right)\\ \alpha_{\mathrm{GYR},12}\,\left(\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},3}-\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},1}\right) & \alpha_{\mathrm{GYR},21}\,\left(\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},2}-\mathrm{s}_{\mathrm{GYR},3}\right) & \mathrm{s}_{\mathrm{GYR},3}\end{bmatrix} \qquad (5.44)\\ \mathrm{m}_{\mathrm{GYR,ij}} &= \mathrm{N}\left(1,\ \mathrm{s}^2_{\mathrm{GYR}}\right) \qquad \mathrm{i}=\mathrm{j} \qquad (5.45)\\ \mathrm{m}_{\mathrm{GYR,ij}} &= \mathrm{N}\left(0,\ 2\,\alpha^2_{\mathrm{GYR}}\,\mathrm{s}^2_{\mathrm{GYR}}\right) = \mathrm{N}\left(0,\ \mathrm{m}^2_{\mathrm{GYR}}\right) \qquad \mathrm{i}\neq\mathrm{j} \qquad (5.46)\end{aligned}$$

5.2.7 惯性传感器的安装

方程 (5.40) 和 (5.43) 给出了比力 $\mathbf{f}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{IP}}$ 和惯性角速度$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{IP}}$ 与其测量值 $\left(\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{IP}}\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{IP}}\right)$ 之间的关系，这些量是在 $\mathrm{F_P}$ 坐标系中求值和观察的。然而，从导航系统的角度来看，两个向量都需要在机体坐标系 $\mathrm{F_B}$ 中，而非 $\mathrm{F_P}$ 中求值和观察。因此，需要修改这些方程，使其分别描述 $\mathbf{f}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$与 $\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{BIB}}$，以及 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$与 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$ 之间的关系，如下文第 5.2.8 节所述。为此，需要定义 $\mathrm{F_P}$ 与 $\mathrm{F_B}$ 坐标系之间的相对位姿（位置加姿态）。

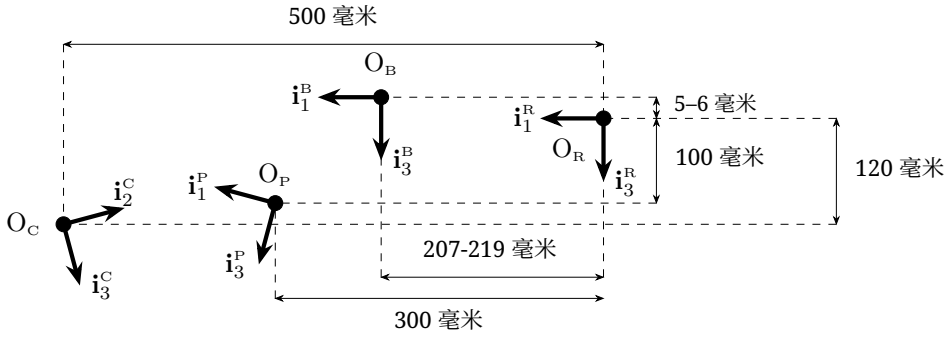

图 5.5：$\mathrm{F_B}$、$\mathrm{F_R}$、$\mathrm{F_P}$ 和 $\mathrm{F_C}$ 坐标系在飞机对称面内的相对位置

由平台坐标系 $\mathrm{F_P}$表示的惯性测量单元，应安装在飞机内部尽可能靠近其质心的位置（如 C.3.1节所述，这样可以减少误差），并与 $\mathrm{F_B}$ 坐标轴大致对准，如图5.5所示。在仿真中，惯性测量单元的位置是确定性的，但其方向是随机的。$\mathrm{F_P}$ 原点 $\mathrm{O_P}$ 位于飞行器参考点 $\mathrm{O_R}$前方300毫米、下方100毫米处。根据(3.1)、(3.2)和(3.5)，可得：

$$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP,full}} = \begin{bmatrix}0.093 & 0 & 0.105\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m} \qquad (5.47)$$

$$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP,empty}} = \begin{bmatrix} 0.081 & 0 & 0.106 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \ \mathrm{m} \tag{5.48}$$

$$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{f}_{\mathrm{P}}\left(\mathrm{m}\right) = \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP,full}} + \frac{\mathrm{m}_{\mathrm{full}} - \mathrm{m}}{\mathrm{m}_{\mathrm{full}} - \mathrm{m}_{\mathrm{empty}}} \left(\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP,empty}} - \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP,full}}\right) \tag{5.49}$$

$\mathrm{F_B}$ 与 $\mathrm{F_P}$ 坐标系之间的旋转或未完全对准，通过 C.3.1节中定义的平台欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}} = [\psi^{\mathrm{P}} \ \ \theta^{\mathrm{P}} \ \ \xi^{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}}$ 来表示。作者任意设定了由(5.50)给出的随机模型，其中每个特定的欧拉角均由表5.5中包含的标准差（$\sigma_{\psi^{\mathrm{P}}}$、 $\sigma_{\theta^{\mathrm{P}}}$、 $\sigma_{\xi^{\mathrm{P}}}$）与标准正态随机变量 N(0，1)（$\mathrm{N}_{\psi^{\mathrm{P}}}$、$\mathrm{N}_{\theta^{\mathrm{P}}}$和 $\mathrm{N}_{\xi^{\mathrm{P}}}$）的一次实现相乘得到：

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\psi^{\mathrm{P}}} \mathrm{N}_{\psi^{\mathrm{P}}} & \sigma_{\theta^{\mathrm{P}}} \mathrm{N}_{\theta^{\mathrm{P}}} & \sigma_{\xi^{\mathrm{P}}} \mathrm{N}_{\xi^{\mathrm{P}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.50}$$

概念	变量	数值	Unit
真实偏航误差	$\sigma_{\psi^{\mathrm{P}}}$	0.5	°
真实俯仰误差	$\sigma_{\theta^{\mathrm{P}}}$	2.0	°
真实滚转误差	$\sigma_{\xi^{\mathrm{P}}}$	0.1	°
平台位置估计误差	$\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}}$	0.01	m
平台角度估计误差	$\sigma_{\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}}}$	0.03	°

表5.5：IMU安装精度值

$\mathrm{F_B}$ 和 $\mathrm{F_P}$ 坐标系之间相对位姿的估计将在第6.2节中讨论。对于平移 $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}$ 和旋转 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}}$，均考虑随机模型，其数值会随着每次仿真运行而发生变化：

$$\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} + \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}} \mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP},1}} & \sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}} \mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP},2}} & \sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}} \mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP},3}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.51}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}} + \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}}} \mathrm{N}_{\hat{\psi}^{\mathrm{P}}} & \sigma_{\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}}} \mathrm{N}_{\hat{\theta}^{\mathrm{P}}} & \sigma_{\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}}} \mathrm{N}_{\hat{\xi}^{\mathrm{P}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.52}$$

其中，$\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}}$ 和$\sigma_{\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BP}}}$ 的标准差如表5.5所示，$\mathrm{N}_{\hat{\psi}^{\mathrm{P}}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\theta}^{\mathrm{P}}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\xi}^{\mathrm{P}}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP},1}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP},2}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP},3}}$是标准正态随机变量 N(0，1)的六个实现值。

$\mathrm{F_B}$ 和 $\mathrm{F_P}$ 坐标系原点之间的平移 $\mathbf{T}_{\mathrm{BP}}$ 可视为准静态，因为它会根据飞机质量（5.49）缓慢变化，而它们坐标轴的相对位置 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}}$ 保持不变，因为惯性测量单元刚性连接到飞机结构上（5.50）：

$$\dot{\mathbf{T}}_{\mathrm{BP}} = \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{BP}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{a}_{\mathrm{BP}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{BP}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{0} \tag{5.53}$$

5.2.8 综合惯性传感器误差模型

建立惯性传感器的测量方程需要考虑两点。首先，应用 [1] 中讨论的复合规则，将 $\mathrm{F_I}$ 视为 $\mathrm{F_0}$，、将 $\mathrm{F_B}$ 视为 $\mathrm{F_1}$，、将 $\mathrm{F_P}$ 视为 $\mathrm{F_2}$，，结果为：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IP}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}} \tag{5.54}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{IP}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{IB}} \tag{5.55}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{v}_{\mathrm{IB}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}} \ \mathbf{T}_{\mathrm{BP}} \tag{5.56}$$

$$\mathbf{a}_{\mathrm{IP}} = \mathbf{a}_{\mathrm{IB}} + \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathrm{IB}} \ \mathbf{T}_{\mathrm{BP}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}} \ \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}} \ \mathbf{T}_{\mathrm{BP}} \tag{5.57}$$

其次，还必须考虑到，由于$\mathbf{R}_{\mathrm{BP}} \equiv \hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{BP}}$ 中的所有行和列均为酉向量，

将$\mathbf{e}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{BW,\,ACC}}$和$\mathbf{e}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{BW,\,GYR}}$从$\mathrm{F_P}$投影到$\mathrm{F_B}$不会改变它们的随机特性：

$$\mathbf{e}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BW,ACC}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) = \mathbf{g}_{\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,ACC}}\right) = \mathrm{B}_{0,\mathrm{ACC}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{u0,ACC}} + \sigma_{\mathrm{uACC}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathbf{N}_{\mathrm{ui,ACC}} + \frac{\sigma_{\mathrm{vACC}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{vs,ACC}} \tag{5.58}$$

$$\mathbf{e}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BW,GYR}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) = \mathbf{g}_{\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{e}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{BW,GYR}}\right) = \mathrm{B}_{0,\mathrm{GYR}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{u0,GYR}} + \sigma_{\mathrm{uGYR}}\,\Delta\mathrm{t}^{1/2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{s}}\mathbf{N}_{\mathrm{ui,GYR}} + \frac{\sigma_{\mathrm{vGYR}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\,\mathbf{N}_{\mathrm{vs,GYR}} \tag{5.59}$$

由于惯性角速度在$\mathrm{F_B}$和$\mathrm{F_P}$坐标系中表示时保持不变（5.54），因此可通过以下步骤从式（5.43）推导其在$\mathrm{F_B}$中的测量值：首先根据实际姿态$\mathbf{q}_{\mathrm{BP}}$将其从$\mathrm{F_B}$投影到$\mathrm{F_P}$，然后根据估计姿态$\hat{}\mathbf{q}_{\mathrm{BP}}$将测量值投影回$\mathrm{F_B}$。偏置和白噪声误差也根据式（5.59）进行投影：

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \mathbf{Ad}_{\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{BP}}}\,\mathbf{M}_{\mathrm{GYR}}\,\mathbf{Ad}^{-1}_{\mathbf{q}_{\mathrm{BP}}}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} + \mathbf{e}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BW,GYR}} \tag{5.60}$$

比力测量值的表达式要复杂得多，因为根据式（5.57），比力在$\mathrm{F_B}$和$\mathrm{F_P}$坐标系之间来回变换时，需要考虑杆臂$\mathbf{T}_{\mathrm{BP}}$的影响。这些附加项会在测量值中引入误差，因此最好将IMU尽可能靠近飞机质心安装。

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \mathbf{g}_{\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{M}_{\mathrm{ACC}}\left(\mathbf{g}^{-1}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} + \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}\right)\right)\right) - \widehat{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} - \widehat{\dot{\boldsymbol{\omega}}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} + \mathbf{e}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BW,ACC}} \tag{5.61}$$

请注意，由于IMU尚无法获知惯性角速度和加速度的估计值（$\hat{}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$，$\hat{}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$），在惯性导航滤波器（第8章）得出这些估计值之前，无法计算此表达式。不过，IMU可以利用陀螺仪读数，直接用$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$替换$\hat{}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$，并根据当前和先前的$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$读数之差计算$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{IB}}$，结果为：

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} = \mathbf{g}_{\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{M}_{\mathrm{ACC}}\left(\mathbf{g}^{-1}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{f}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}} + \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\widehat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}\right)\right)\right) - \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} - \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}\,\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} + \mathbf{e}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BW,ACC}} \tag{5.62}$$

表5.6列出了由(5.60, 5.62) [A39, A40]表示的综合惯性传感器误差模型中包含的误差源。前两列列出不同的误差源，第三列则根据第5.2.1节第一段所确立的标准，说明其来源。最后，第四列列出了对各项误差进行描述的章节：

误差	符号	主要来源	描述
偏置	$\mathrm{B}_{0,\mathrm{ACC}}$，$\mathrm{B}_{0,\mathrm{GYR}}$	次间	5.2.2
偏置漂移	σ_{uACC}，σ_{uGYR}	运行内	5.2.2
系统噪声	σ_{vACC}，σ_{vGYR}	运行内	5.2.2
比例因子	$\mathrm{s}_{\mathrm{ACC}}$，$\mathrm{s}_{\mathrm{GYR}}$	固定与T	5.2.5 ，5.2.6
交叉耦合	$\mathrm{m}_{\mathrm{ACC}}$，$\mathrm{m}_{\mathrm{GYR}}$	固定	5.2.5、5.2.6
杆臂	$\mathbf{T}_{\mathrm{BP}}$，$\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}}$	固定	5.2.7
IMU姿态	$\sigma_{\psi^{\mathrm{P}}}$，$\sigma_{\theta^{\mathrm{P}}}$，$\sigma_{\xi^{\mathrm{P}}}$，$\sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BP}}}$	固定	5.2.7

表5.6：惯性传感器误差源

请注意，$\mathrm{B}_{0,\mathrm{ACC}}$、$\mathrm{B}_{0,\mathrm{GYR}}$、$\sigma_{\mathrm{uACC}}$、$\sigma_{\mathrm{uGYR}}$、$\sigma_{\mathrm{vACC}}$、$\sigma_{\mathrm{vGYR}}$、$\mathrm{s}_{\mathrm{ACC}}$、$\mathrm{s}_{\mathrm{GYR}}$、$\mathrm{m}_{\mathrm{ACC}}$和$\mathrm{m}_{\mathrm{GYR}}$取自表5.7和表5.8（第5.2.9节）的右列，而其余误差源取自第5.2.7节。值得指出的是，所有误差都建模为随机变量或随机过程（机体与平台坐标系之间的$\mathbf{T}_{\mathrm{BP}}$位移除外，它是确定性的），因为表达式（5.60、5.62）依赖于（5.58、5.59）给出的误差、（5.31、5.44）给出的比例和交叉耦合矩阵，以及（5.49、5.50、5.51、5.52）给出的变换。

对于加速度计三轴组件，模型中固定误差和重复运行误差贡献的随机特性依赖于正态分布的三次实现来表示偏置、三次实现来表示比例因子误差、三次实现来表示交叉耦合误差，以及九次实现来表示安装误差；而运行内误差贡献则要求在每次离散传感器测量时，分别对偏置漂移和系统噪声进行三次实现。陀螺仪三轴组件与此类似，但需要六次实现来建模交叉耦合误差，而非三次；同时，它使用与加速度计三轴组件相同的六次实现，来建模 F_B 和 F_P 坐标系之间的真实旋转和估计旋转。有关仿真过程中如何评估模型中出现的不同随机变量，请参阅第5.5节。

表达式（5.60、5.62）可以改写为以完整误差（$\mathbf{E}_{\text{ACC}}$，$\mathbf{E}_{\text{GYR}}$）为自变量的测量值函数，这些误差涵盖了惯性传感器引入的所有误差，但白噪声除外。第8章的惯性导航算法采用了这些表达式：

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\text{IB}}^{\text{B}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) = \mathbf{f}_{\text{IB}}^{\text{B}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) + \mathbf{E}_{\text{ACC}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) + \frac{\sigma_{\text{vACC}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\mathbf{N}_{\text{vs,ACC}} \tag{5.63}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IB}}^{\text{B}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) = \boldsymbol{\omega}_{\text{IB}}^{\text{B}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) + \mathbf{E}_{\text{GYR}}(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}) + \frac{\sigma_{\text{vGYR}}}{\Delta\mathrm{t}^{1/2}}\mathbf{N}_{\text{vs,GYR}} \tag{5.64}$$

5.2.9 选用的惯性传感器

仿真中默认使用的陀螺仪称为“基准型”，对应于安装在 Analog Devices ADIS16488A惯性测量单元内部的MEMS陀螺仪 [58]。表5.7列出了基准性能，这些数据尽可能取自数据手册，并对可疑数据进行了修正。假设采用第6.1节所述的校准过程，可消除95%的比例因子误差和交叉耦合误差。

陀螺仪 基准型	Spec	Unit	变量	数值	校准	Unit
运行中偏置稳定性 (1 σ)	5.10	°/hr	σ_{uGYR}	$1.42\cdot10^{-4}$	$1.42\cdot10^{-4}$	$°/\text{s}^{1.5}$
角度随机游走 (1 σ)	0.26	°/小时$^{0.5}$	σ_{vGYR}	$4.30\cdot10^{-3}$	$4.30\cdot10^{-3}$	°/秒$^{0.5}$
非线性[8]	0.01	%	s_{GYR}	$3.00\cdot10^{-4}$	$1.50\cdot10^{-5}$	-
失准	± 0.05	°	m_{GYR}	$8.70\cdot10^{-4}$	$4.35\cdot10^{-5}$	-
偏置重复性（1 σ）	± 0.2	°/s	$\text{B}_{0,\text{GYR}}$	$2.00\cdot10^{-1}$	$2.00\cdot10^{-1}$	°/s

表 5.7：“基线”陀螺仪的性能

该表包含三列数据。最左侧的列（“规格”）对应直接取自传感器规格的数据，这些数据在中间列（“数值”）中转换为第 5.2.2 节至第 5.2.8[9] 节所示的参数。右侧列（“校准”）包含校准过程后仿真中采用的规格，该过程将比例因子误差和交叉耦合误差降低了 95%。

加速度计基线	Spec	Unit	变量	数值	校准	Unit
运行中偏置稳定性（1 σ）	0.07	mg'[10]	σ_{uACC}	$6.86\cdot10^{-5}$	$6.86\cdot10^{-5}$	$\text{m/s}^{2.5}$
速度随机游走（1 σ）	0.029	$\text{m/s/hr}^{0.5}$	σ_{vACC}	$4.83\cdot10^{-4}$	$4.83\cdot10^{-4}$	$\text{m/s}^{1.5}$
非线性	0.1	%	s_{ACC}	$1.00\cdot10^{-3}$	$5.00\cdot10^{-5}$	-
失准	± 0.035	°	m_{ACC}	$6.11\cdot10^{-4}$	$3.05\cdot10^{-5}$	-
偏置重复性（1 σ）	± 16	mg'	$\text{B}_{0,\text{ACC}}$	$1.57\cdot10^{-1}$	$1.57\cdot10^{-1}$	m/s^2

表 5.8：“基准”加速度计的性能

安装在 Analog Devices ADIS16488A惯性测量单元内部的 MEMS 加速度计 [58] 也构成“基准”配置。表 5.8 的所有数值均来自数据手册，并认为如第6.1节所述的校准过程可消除 95% 的比例因子和交叉耦合误差[11]。

[8]在 [58] 中得到的 0.01 % 比例因子误差被认为过于乐观，因此修正为 0.03 % $= 3.00\cdot10^{-4}$。[9]偏置不稳定性与 σ_{u} 之间的换算采用 100 s 的周期，详见第 5.2.4 节。[10]一个 $[\text{g}']$ 表示海平面重力加速度的数值。[11]偏置不稳定性与 σ_{u} 之间的换算采用 100 s 的周期，详见第 5.2.4 节。

5.3 非惯性传感器

除了惯性测量单元外，飞机还配备了其他能够为其导航系统提供有用信息的传感器，例如用于辅助确定飞机航向的磁力计、除提供气压高度和温度外，还能测量空速的大气数据系统，以及能够获取绝对地速和位置观测值的全球导航卫星系统接收机。

5.3.1 磁力计

磁力计用于测量给定方向上的磁场强度，对于估计飞机航向非常有用。尽管还存在其他类型，但由于精度高、体积小，导航中通常采用磁感应式和磁阻式传感器 [6, 45]。与惯性传感器一样，通常采用捷联配置的三个正交磁力计，相对于 $\mathbf{F}_B$ 测量磁场。

遗憾的是，磁力计测量的不仅是地球磁场 $\mathbf{B}$ （第 2.5 节），还包括飞机永久磁体和电气设备产生的磁场（称为硬磁效应），以及飞机铁磁材料产生的磁场扰动（软磁效应）。因此，磁力计应安装在飞机内部能够最大限度减少这些误差的位置。另一方面，磁力计不会出现惯性传感器所具有的偏置不稳定性，单个传感器的误差可以用偏置和白噪声的组合恰当地建模。能够测量三个方向磁场的三轴磁力计，还会产生与惯性传感器相同的比例因子（非线性）和交叉耦合（失准）误差，以及磁轴与机体坐标轴之间的变换。

与惯性传感器相比，三轴磁力计的行为建模更为简单，但精度较低，因为固定硬磁效应的影响无法与运行间偏置区分开来，而软磁效应的固定影响也无法与比例因子和交叉耦合误差矩阵区分开来。这会带来若干后果。首先，磁力计无法像惯性传感器那样在安装到飞机上之前于实验室中进行校准（第6.1节），而是必须在安装到飞机上之后，通过一种称为摆动（第6.3节）的过程进行校准。这种方法的精度较低，因为在摆动过程中，飞机姿态无法像在实验室环境中那样被精确确定。其次，定义磁平台坐标系，再将结果转换到机体轴中毫无意义，因为磁力计读数只有在安装到飞机上之后才有效，也就是说，只有此时读数才包含硬磁效应和软磁效应的影响，因此可以直接在机体轴中进行测量。第三，从百分比来看，磁力计引入的误差大于惯性传感器引入的误差。该仿真采用以下模型：

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{B}_{0,\mathrm{MAG}} + \mathbf{B}_{\mathrm{HI,MAG}} + \mathbf{M}_{\mathrm{MAG}} \left(\mathbf{g}^{-1}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}*}} \left(\mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{REAL}} \right) \right) + \mathbf{e}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{W,MAG}} \tag{5.65}$$

其中 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}$ 是在 $\mathbf{F}_B$ 中观察到的测量值，$\mathbf{B}_{0,\mathrm{MAG}}$ 是运行间偏置，$\mathbf{B}_{\mathrm{HI,MAG}}$ 是固定的硬磁效应，$\mathbf{M}_{\mathrm{MAG}}$ 是一个固定矩阵，结合了软磁效应、比例因子和交叉耦合误差的影响，而$\mathbf{B}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{REAL}}$ 则是包含局部异常的真实磁场（第 2.6 节）。

“基准”磁力计特性如表5.9所示，其中白噪声取自 [6] ，其余参数对应于 Analog Devices ADIS16488A 惯性测量单元 [58]中的磁力计。尽管飞机中的硬磁效应和软磁效应数值相当小，但作者未能获得可信的数值。为避免排除误差源，作者决定将文献中给出的偏置、比例因子和交叉耦合误差数值增加50%，如名为“补偿”的列所示。由于二者产生的影响相似，作者预计结果的真实性不会受到不利影响。对于偏置，大部分误差被分配给 $\mathbf{B}_{\mathrm{HI,MAG}}$ ，其余分配给次间 $\mathbf{B}_{0,\mathrm{MAG}}$。

假定如第6.3节所述的摆动校准过程能够消除90%的固定误差贡献，即硬磁效应、比例因子和交叉耦合误差[12]。这一数值低于惯性传感器校准所达到的95%降幅，因为尽管磁力计偏置漂移的缺失有助于校准，但与在实验室环境中仅使用惯性测量单元相比，在完整飞机上进行校准时，机体姿态的确定本质上准确度更低。

磁力计基准值	Spec	Unit	变量	数值	补偿	摆动	Unit
输出噪声	5	纳特斯拉 $\cdot s^{0.5}$	$\sigma_{v,MAG}$	$5.00 \cdot 10^{0}$	$5.00 \cdot 10^{0}$	$5.00 \cdot 10^{0}$	纳特斯拉 $\cdot s^{0.5}$
非线性	0.5	%	s_{MAG}	$5.00 \cdot 10^{-3}$	$7.50 \cdot 10^{-3}$	$7.50 \cdot 10^{-4}$	-
失准	$\pm$ 0.35	°	m_{MAG}	$6.11 \cdot 10^{-3}$	$9.16 \cdot 10^{-3}$	$9.16 \cdot 10^{-4}$	-
偏置（1 σ）	$\pm$ 1500	nT	$B_{HI,MAG}$	$1.50 \cdot 10^{3}$	$1.75 \cdot 10^{3}$	$1.75 \cdot 10^{2}$	nT
重复性			$B_{0,MAG}$		$5.00 \cdot 10^{2}$	$5.00 \cdot 10^{2}$	nT

表5.9：“基准”磁力计的性能

因此，三轴磁力计的最终模型包括硬磁效应、偏置、系统噪声、软磁效应、比例因子和交叉耦合误差 [A41] 的贡献：

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{B}(s\,\Delta t) = B_{HI,MAG}\,\mathbf{N}_{HI,MAG} + B_{0,MAG}\,\mathbf{N}_{u0,MAG} + \mathbf{M}_{MAG}\left(\mathbf{g}^{-1}_{\boldsymbol{\zeta}_{NB*}}\left(\mathbf{B}^{N}_{REAL}\right)\right) + \frac{\sigma_{v,MAG}}{\Delta t^{1/2}}\,\mathbf{N}_{vs,MAG} \tag{5.66}$$

其中 $\mathbf{N}_{HI,MAG}$、$\mathbf{N}_{u0,MAG}$ 和 $\mathbf{N}_{vs,MAG}$ 是大小均为三、分别由三个互不相关的标准正态随机变量 N(0, 1) 组成的互不相关正态向量。软磁效应、比例因子和交叉耦合矩阵$\mathbf{M}_{MAG}$ 不随时间变化，其计算如下：

$$\mathbf{M}_{MAG} = \begin{bmatrix} 1+s_{MAG} & m_{MAG} & m_{MAG} \\ m_{MAG} & 1+s_{MAG} & m_{MAG} \\ m_{MAG} & m_{MAG} & 1+s_{MAG} \end{bmatrix} \circ \mathbf{N}_{m,MAG} \tag{5.67}$$

在此表达式中，$\mathbf{N}_{m,MAG}$ 包含标准正态随机变量 N(0, 1) 的九个输出，符号$\circ$ 表示哈达玛乘积或逐元素矩阵乘积。

表5.10列出了式（5.66） [A41], 所表示的磁力计模型中包含的误差源，并指出软磁效应同时包含在比例因子和交叉耦合误差中。前两列列出了不同的误差源，第三列则根据第5.2.1章节第一段中确立的标准，说明了它们的原点。

误差		主要来源
硬铁	$B_{HI,MAG}$	固定
偏置偏置	$B_{0,MAG}$	次间
系统噪声	$\sigma_{v,MAG}$	运行内
比例因子	s_{MAG}	固定
交叉耦合	m_{MAG}	固定

表5.10：磁力计误差源

请注意，$B_{HI,MAG}$、$B_{0,MAG}$、$\sigma_{v,MAG}$、s_{MAG} 和 m_{MAG} 取自上文所列规格的右栏，并且所有误差都建模为随机变量或随机过程。磁力计模型中固定误差和运行间误差贡献的随机性，取决于硬磁效应、偏置、比例因子误差和交叉耦合误差分别对应的三个、三个、三个和六个正态分布实现；而运行内误差贡献则要求在每次离散传感器测量时，对系统噪声进行三次实现。有关仿真期间如何评估模型中不同随机变量的说明，请参阅第5.5节。

[12]软铁效应与比例因子和交叉耦合误差相结合。

表达式 (5.66) 可改写为以磁力计总误差$\mathbf{E}_{\text{MAG}}$为自变量的测量值函数；该总误差代表磁力计引入的所有误差，但白噪声除外。第8章的惯性导航算法采用了这一表达式。

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\text{B}}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)=\mathbf{B}_{\text{REAL}}^{\text{B}}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)+\mathbf{E}_{\text{MAG}}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)+\frac{\sigma_{\text{v,MAG}}}{\Delta\text{t}^{1/2}}\mathbf{N}_{\text{vs,MAG}} \tag{5.68}$$

5.3.2 空数据系统

空数据系统大气数据系统 (ADS)的任务是通过大气压力p、外界空气温度 T 和机体空速 $\mathbf{v}^{\text{B}}$ 真空速，测量飞机的气压高度 H_{P} （章节 2.3.1）。真空速由空速 v_{TAS} 以及攻角 α 和侧滑角 β 组成（章节 4.2）。

气压计或静压传感器通常是下文所述皮托管的一部分 [45], ，用于测量大气压力，并可根据公式 (2.62) 直接换算为气压高度。下表 5.11 中所示的 σ_{OSP} 数值（其中 OSP 表示外界静压）来自 Aeroprobe 空数据系统规格中列出的 ± 10 米高度误差 [59], ，根据公式 (2.62)，该误差在 1500 米气压高度下相当于 ± 100 帕。虽然文档中没有提及，作者决定也加入偏置 $\text{B}_{0_{\text{OSP}}}$ 以增加真实感 [A42], ，因此气压计引入的误差建模为偏置和随机噪声的组合：

$$\text{e}_{\text{OSP}}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}_{\text{SENSED}}\right)=\text{e}_{\text{OSP}}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)=\widetilde{\text{p}}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)-\text{p}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)=\text{B}_{0\text{OSP}}\,\text{N}_{0,\text{OSP}}+\sigma_{\text{OSP}}\,\text{N}_{\text{s,OSP}} \tag{5.69}$$

其中 $\text{N}_{0,\ \text{OSP}}$ 和 $\text{N}_{\text{s},\ \text{OSP}}$ 是互不相关的标准正态随机变量 N (0，1)。

空速数据系统还配备了温度计，用于测量外界空气温度 T。与上文所述气压计的情况一样，Analog Devices ADT7420 温度传感器的规格 [60] 仅包含系统噪声，但作者决定也加入偏置以增加真实感 [A43]。因此，(5.70) 中的模型依赖于表 5.11 所示的偏置 $\text{B}_{0_{\text{OAT}}}$ 和系统噪声 σ_{OAT} ，其中 OAT 表示外界空气温度，此外还包含两个互不相关的标准正态随机变量 N (0，1) ($\text{N}_{0,\ \text{OAT}}$ 和 $\text{N}_{\text{s},\ \text{OAT}}$)：

$$\widetilde{\text{e}}_{\text{OAT}}\left(\text{s}\ \Delta\text{t}_{\text{SENSED}}\right)=\text{e}_{\text{OAT}}\left(\text{s}\ \Delta\text{t}\right)=\text{T}\left(\text{s}\,\Delta\text{t}\right)-\text{T}\left(\text{s}\ \Delta\text{t}\right)=\text{B}_{0\text{OAT}}\text{N}_{0,\text{OAT}}+\sigma_{\text{OAT}}\text{N}_{\text{s,OAT}} \tag{5.70}$$

OSP-OAT 基准	Spec	Unit	变量	数值	Unit
高度误差	± 10	m	σ_{OSP}	$1.00\cdot 10^{+2}$	Pa
			$\text{B}_{0\text{OSP}}$	$1.00\cdot 10^{+2}$	Pa
温度误差（3σ）	± 0.15	K	σ_{OAT}	$5.00\cdot 10^{-2}$	K
			$\text{B}_{0\text{OAT}}$	$5.00\cdot 10^{-2}$	K

表 5.11：“基准”大气传感器的性能

一根皮托探头 是一个没有出口、直接指向未受扰气流的管子，其封闭端处的空数据变量值（温度、压力和密度）与气流在皮托 [16]内减速之前的大气总量或停滞变量相似。大气总变量 （温度 T_{t}、压力 p_{t}和密度 ρ_{t}）是这样得到的：具有静态大气变量（T、p、 ρ）且速度为 v 的流体，通过一种稳态、无黏度、无重力（引力加惯性）加速度、绝热，并且为所分析控制体积设置固定边界的过程 [38, 61]，减速至速度为零。此过程保持流体的总焓及其熵不变，因此符合伯努利方程 [61]:

$$\frac{\text{d}}{\text{dt}}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{\text{p}}{\rho}+\frac{1}{2}\,\text{v}^{2}\right)=0 \tag{5.71}$$

其中，κ 为空气绝热指数（附录B）。除上文讨论的静压和温度传感器外，皮托管还配备了一个位于封闭端的动压传感器，用于测量气流总压 $\mathrm{p_t}$。随后，大气数据系统根据以下表达式估计飞机空速；该表达式是在皮托封闭端和静压口处分别应用（5.71）得到的：

$$\mathrm{v_{TAS}} = \sqrt{\frac{2\,\kappa}{\kappa-1}\frac{\mathrm{p}}{\rho}\left[\left(\frac{\mathrm{p_t}-\mathrm{p}}{\mathrm{p}}+1\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-1\right]} \tag{5.72}$$

以这种方式测量空速所产生的误差，也可以通过偏置和系统噪声的组合来建模 [A44], 其中 σ_{TAS} 是取自表 5.12 的误差标准差，$\mathrm{B_{0TAS}}$ 由作者添加以提高真实感，而 $\mathrm{N_{0,\ TAS}}$ 和 $\mathrm{N_{s,\ TAS}}$ 是两个不相关的标准正态随机变量 $\mathrm{N(0,\ 1)}$：

$$\mathrm{e_{TAS}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t_{SENSED}}\right) = \mathrm{e_{TAS}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \widetilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{TAS}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) - \mathrm{v_{TAS}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \mathrm{B_{0TAS}}\,\mathrm{N_{0,TAS}} + \sigma_{\mathrm{TAS}}\,\mathrm{N_{s,TAS}} \tag{5.73}$$

Aeroprobe 空数据系统规格 [59] 列出的最大空速误差为 1 m/s，可解释为 $3\,\sigma$，因此得到如下所示的 σ_{TAS} 数值：

TAS-AOA-AOS基线	Spec	Unit	变量	数值	Unit
空速误差（最大值）	1	m/s	σ_{TAS}	$3.33\cdot10^{-1}$	m/s
			$\mathrm{B_{0TAS}}$	$3.33\cdot10^{-1}$	m/s
流动角误差（最大值）	±1.0	°	σ_{AOA}	$3.33\cdot10^{-1}$	°
			$\mathrm{B_{0AOA}}$	$3.33\cdot10^{-1}$	°
流向角误差（最大值）	±1.0	°	σ_{AOS}	$3.33\cdot10^{-1}$	°
			$\mathrm{B_{0AOS}}$	$3.33\cdot10^{-1}$	°

表 5.12：“基准”皮托管和风向标的性能

大气数据系统还能够测量气流相对于飞机的方向，以攻角和侧滑角表示（章节 C.2.2）。为此，系统可以配备两个可与未受扰动气流对齐的风向标，也可以配备更复杂的多孔皮托管。仿真中使用的 Aeroprobe 空数据系统 [59] 采用了后者，可测量这两个角度，最大误差为 $\pm1.0°$。若将其视为 $3\,\sigma$，则会产生 σ_{AOA} 和 σ_{AOS} 的标准差，分别为 $0.33°$，其中 AOA 和 AOS 分别表示攻角和侧滑角。虽然文档中没有提及，作者还是决定加入偏置 $\mathrm{B_{0AOA}}$ 和 $\mathrm{B_{0AOS}}$，使传感器 [更45],真实，尤其是在使用风向标时。攻角和侧滑角测量误差的最终表达式如下：

$$\mathrm{e_{AOA}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t_{SENSED}}\right) = \mathrm{e_{AOA}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \widetilde{\alpha}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) - \alpha\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \mathrm{B_{0AOA}}\,\mathrm{N_{0,AOA}} + \sigma_{\mathrm{AOA}}\,\mathrm{N_{s,AOA}} \tag{5.74}$$

$$\mathrm{e_{AOS}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t_{SENSED}}\right) = \mathrm{e_{AOS}}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \widetilde{\beta}\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) - \beta\left(\mathrm{s}\,\Delta\mathrm{t}\right) = \mathrm{B_{0AOS}}\,\mathrm{N_{0,AOS}} + \sigma_{\mathrm{AOS}}\,\mathrm{N_{s,AOS}} \tag{5.75}$$

其中 $\mathrm{N_{0,\ AOA}}$，$\mathrm{N_{s,\ AOA}}$，$\mathrm{N_{0,\ AOS}}$，以及 $\mathrm{N_{s,\ AOS}}$ 均为互不相关的标准正态随机变量 $\mathrm{N\,(0,\ 1)}$.

表 5.13 列出了由（5.69、5.70、5.73、5.74、5.75）表示的空数据传感器模型中包含的误差源。具体误差列于前两列，其来源（依据第 5.2.1 章节第一段所确立的标准）列于第三列。

	误差	主要来源
偏置	$\mathrm{B_{0SP}}$, $\mathrm{B_{0AT}}$, $\mathrm{B_{0TAS}}$, $\mathrm{B_{0AOA}}$, $\mathrm{B_{0AOS}}$	次间
系统噪声	σ_{SP}, σ_{AT}, σ_{TAS}, σ_{AOA}, σ_{AOS}	运行内

表 5.13：空速数据传感器误差来源

请注意，所有误差均建模为随机变量或随机过程。模型中运行间误差贡献的随机性依赖于偏置的正态分布的五次实现，而运行内误差贡献则要求在每次离散传感器测量时对系统噪声进行五次实现。

5.3.3 全球导航卫星系统接收机

GNSS接收机通过接收来自不同卫星星座（如 GPS、格洛纳斯、北斗和伽利略）的信号，确定飞机位置和绝对速度。位置是通过三角定位获得的，定位依据是每个信号中包含的精确卫星位置和时间。GNSS接收机不会对位置求时间导数（这会引入噪声），而是通过测量卫星频率与接收机测得频率之间的多普勒频移来获得飞行器的地速。

需要注意的是，由于根据卫星信号确定位置需要大量处理，GNSS接收机无法像惯性和大气数据传感器那样以高频率工作；仿真中采用的频率为 1 Hz（$\Delta t_{GNSS} = 1$ s）。GNSS接收机的位置误差可建模为均值为零的白噪声过程与缓慢变化的电离层效应之和 [13] [A46]，后者建模为偏置与随机游走之和。此随机游走以 $1/60$ Hz 的频率建模（$\Delta t_{ION} = 60$ s），并在其间进行线性插值。地速误差仅建模为白噪声过程[A46]。

$$\mathbf{e}_{GNSS,POS}\left(g\,\Delta t_{GNSS}\right) = \widetilde{\mathbf{T}}^{E,GDT} - \mathbf{T}^{E,GDT} = \sigma_{GNSS,POS}\,\mathbf{N}_{g,GNSS,POS} + \mathbf{e}_{GNSS,ION}\left(g\,\Delta t_{GNSS}\right) \tag{5.76}$$

$$\mathbf{e}_{GNSS,VEL}\left(克\,\Delta t_{GNSS}\right) = \tilde{}\mathbf{v}^{N} - \mathbf{v}^{N} = \sigma_{GNSS,VEL}\mathbf{N}_{\text{克 GNSS,VEL}} \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{GNSS,ION}\left(g\,\Delta t_{GNSS}\right) &= \mathbf{e}_{GNSS,ION}\left(i\,\Delta t_{ION}\right)\\ &\quad + \frac{r}{f_{ION}}\Big(\mathbf{e}_{GNSS,ION}\big(\left(i+1\right)\Delta t_{ION}\big) - \mathbf{e}_{GNSS,ION}\left(i\,\Delta t_{ION}\right)\Big)\end{aligned} \tag{5.78}$$

$$g = f_{ION}\cdot i + r \qquad 0 \le r < f_{ION} \tag{5.79}$$

$$\mathbf{e}_{GNSS,ION}\left(i\,\Delta t_{ION}\right) = B_{0,GNSS,ION}\,\mathbf{N}_{u0,GNSS,ION} + \sigma_{GNSS,ION}\sum_{j=1}^{i}\mathbf{N}_{j,GNSS,ION} \tag{5.80}$$

$$f_{ION} = \Delta t_{ION}/\Delta t_{GNSS} = 60 \tag{5.81}$$

其中，$\sigma_{GNSS,POS}$, $\sigma_{GNSS,ION}$、偏置 B0、$_{GNSS,ION}$ 和 $\sigma_{GNSS,VEL}$ 取自下表，而 $N_{g,GNSS,POS}$、$N_{g,GNSS,VEL}$、$N_{u0,GNSS,ION}$ 和 $N_{j,GNSS,ION}$ 均为互不相关的三维正态向量，每个向量由三个互不相关的标准正态随机变量 N (0, 1) 组成。另请注意，由于 g 和 f_{ION} 均为整数，根据带余除法定理，存在唯一的整数 i 和 r 满足式 (5.79) [62]。

GNSS	Spec	Unit	变量	数值	Unit
水平位置精度（圆概率误差 50%）	2.50	m	$\sigma_{GNSS,POS,HOR}$	$2.12\cdot10^{0}$	m
垂向位置精度（圆概率误差 50%）	N/A		$\sigma_{GNSS,POS,VER}$	$4.25\cdot10^{0}$	m
电离层随机游走 1/60Hz	N/A		$\sigma_{GNSS,ION}$	$1.60\cdot10^{-1}$	m
电离层偏差偏移	N/A		$B_{0,GNSS,ION}$	$8.00\cdot10^{0}$	m
速度精度（50%）	0.05	m/s	$\sigma_{GNSS,\ VEL}$	$7.41\cdot10^{-2}$	m/s

表5.14：GNSS接收机的性能

表5.14中的水平位置精度对应于 U-blox NEO-M8 接收机数据手册 [63]，，其中 CEP 表示圆概率误差。由于 CEP 相当于 1.18 个标准差 [64], ，因此可以得出 $\sigma_{GNSS,\ POS,\ HOR}$。作者没有找到 GNSS 垂直精度的参考资料，但通过与几位知情人士交谈，确定其至少比水平精度高 50%。因此，选取了 $\sigma_{GNSS,\ POS,\ VER}$ ，其数值为 $\sigma_{GNSS,\ POS,\ HOR}$ 的两倍。电离层效应的数值也是通过这些交谈获得的。速度精度同样取自 U-blox NEO-M8 接收机数据手册 [63]。假设它对应的是每轴误差 ±0.05 m/s，而非 CEP，并且已知正态分布的 50% 分位点位于 0.67448 个标准差处，则可以

以获得 $\sigma_{\text{GNSS, VEL}}$。

表5.15列出了式（5.76、5.77）所表示的 GNSS接收机模型中包含的误差源。前两列列出不同的误差源，第三列则根据第5.2.1章节第一段中确立的判据，说明这些误差源的来源。

误差		主要来源
偏置	$B_{0,\text{GNSS,ION}}$	次间
系统噪声	$\sigma_{\text{GNSS,POS}}$, $\sigma_{\text{GNSS,VEL}}$, $\sigma_{\text{GNSS,ION}}$	运行内

表 5.15：GNSS接收机误差源

请注意，所有误差均建模为随机变量或随机过程。次间误差贡献需要进行三次正态分布实现；运行内误差贡献则要求在每次离散传感器测量时，分别对位置和速度各进行三次实现；若同时考虑电离层误差，还需额外进行三次实现。

5.4 相机

图像生成是一个对功率和数据要求较高的过程，无法以惯性测量单元和大气数据传感器所特有的高频率运行。尽管目前已有能够以显著更高频率工作的相机，但仿真中采用的频率为 10 Hz（$\Delta t_{\text{IMG}} = 0.1$ s）。相机被认为与飞机结构 [A47] 刚性连接。仿真假设快门速度足够高，因此所有图像都具有相同的清晰度 [A48], ，并且图像生成过程是瞬时完成的 [A49]。此外，在整个飞行过程中，相机的 ISO设置保持恒定 [A50], ，且所有生成的图像均不含噪声 [A51]。

参数	符号	数值	Unit
焦距	f	19.0	mm
图像宽度	S_H	768	px
图像高度	S_V	1024	px
像素尺寸	s_{PX}	$17 \cdot 10^{-3}$	毫米/像素
主点水平位置	c_1^{IMG}	384.5	px
主点垂向位置	c_2^{IMG}	511.5	px
水平视场	Θ_H	37.923	°
垂向视场	Θ_V	49.226	°

表 5.16：相机参数

此外，假设到达地球表面所有区域的可见光谱辐射保持恒定[A52], ，并且将地形视为朗伯体（第 5.4.1 节），因此其外观不会随给定时间的观察方向而变化 [A53]。结合使用 [A50], [A52], 和 [A53], 意味着给定的地形物体在所有图像中均以相同的亮度呈现，即使其相对于相机的相对位姿（位置和姿态）发生变化。

在几何方面，仿真采用透视投影或针孔相机模型 [A54], ，如第 5.4.1 节所述。此外，该模型经过完美标定，因此没有畸变 [A55]。表 5.16 列出了所用相机的参数，这些参数均在第 5.4.1 节中定义：

需要特别指出的是，由于第 6.4 节讨论的相机标定被视为完美的， [A55], Earth Viewer 应用程序使用 (5.84, 5.85) 提供的相机透视映射来生成图像（第 5.4.3 节），而该映射与视觉导航算法使用的估计映射一致。 $\mathbf{\Pi}$ $\mathbf{\Pi}$ 由于两种映射一致，本文档中只使用符号 $\mathbf{\Pi}$ ，无论它表示实际相机（$\mathbf{\Pi}$），还是导航系统所掌握的相机信息（$\mathbf{\Pi}$）。

5.4.1 图像生成、针孔相机模型和图像坐标系

八位单色数字图像 是一个二维亮度数组 $\{$**积分控制器** : $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_+\}$，它为定义域内的每个离散位置$\mathbf{p}^{\text{IMG}} = [\mathrm{p}_1^{\text{IMG}} \mathrm{p}_2^{\text{IMG}}]^{\mathrm{T}} \in \Omega \ | \Omega = [1, \mathrm{S_H}] \times [1, \mathrm{S_V}] \subset \mathbb{Z}^2$ 指定一个正整数$\mathbf{I}(\mathbf{p}^{\text{IMG}}) \in [0, 255] \subset \mathbb{Z}_+$，其中 $\mathrm{S_H}$ 和 $\mathrm{S_V}$ 分别表示以像素为单位测量的图像宽度和高度。在数码相机 中，图像生成过程由两个映射构成：当相机视野中出现物体时，第一个映射（即相机模型）根据物体相对于相机的几何形状确定绘制哪些像素；第二个映射（即亮度假设）确定分配给每个像素的亮度或强度 [65]。

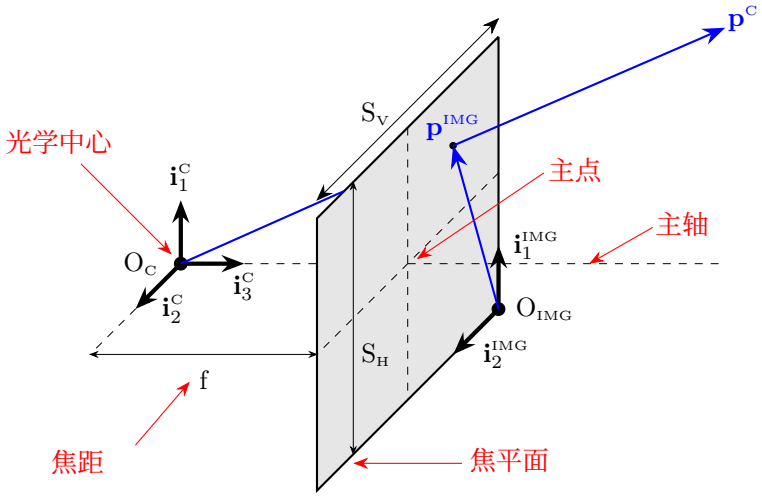

图 5.6：正面针孔相机模型

从光照强度的角度来看，通常认为相机所观察到的所有表面都是朗伯体，因此无论观察方向如何，其外观都保持不变，也就是说，它们向各个方向均匀漫射光线[13]。在这种情况下，像素测得的强度等于空间中对应点辐射出的能量，与观察位置无关。在这些条件下，图像生成过程简化为从空间点向图像点追踪光线，这是一个纯几何问题 [65]。

针孔相机模型是一种将三维物体投影到图像上的几何模型，它采用透视投影，即保持共线性（世界坐标中的直线在 $\mathbb{R}^3$中成像为直线 $\mathbb{R}^2$），但不保持直线和/或平面之间的平行关系或夹角，也不保持点与点之间的距离 [66]。如图 5.6 所示，投影 $\{\mathbf{\Pi} : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{p}^{\mathrm{C}} \to \mathbf{p}^{\text{IMG}} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{p}^{\mathrm{C}})\}$假定所有光线都是直线，并经过一个称为相机光学中心（$\mathrm{O_C}$）的点。点$\mathbf{p}^{\mathrm{C}}$ 的图像$\mathbf{p}^{\text{IMG}}$ 由连接这两点的光线与焦平面的交点确定，该焦平面距光学中心焦距 f。主点是焦平面上距离光学中心最近的点，而相机主轴连接光学中心与主点。

除了焦距之外，针孔相机还由传感器或图像域中的像素数量（水平为 $\mathrm{S_H}$ horizontally，垂向为 $\mathrm{S_V}$ vertically）、每个像素[14] $\mathrm{s_{PX}}$的尺寸，以及主点相对于图像[15], $\mathbf{c}^{\text{IMG}} = [\mathrm{c}_1^{\text{IMG}} \mathrm{c}_2^{\text{IMG}}]^{\mathrm{T}}$左上角的位置定义。由此得到的视场是从光学中心观察时传感器空间范围所张的角度，水平和垂向观察时的视场不同：

$$\tan \frac{\Theta_{\mathrm{H}}}{2} = \frac{\mathrm{S_H}}{2\,\mathrm{f}} \cdot \mathrm{s_{PX}} \tag{5.82}$$

[13]对于哑光表面，这是一个很好的近似，但对于光亮表面则不太理想。[14]本文档将像素视为正方形。[15]在完全对齐的小孔相机中，$\mathrm{c}_1^{\text{IMG}} = 0.5\mathrm{S_H} - 0.5$，且 $\mathrm{c}_2^{\text{IMG}} = 0.5\,\mathrm{S_V} - 0.5$。

$$\tan\frac{\Theta_{\mathrm{V}}}{2} = \frac{\mathrm{S_V}}{2\,\mathrm{f}}\cdot \mathrm{s_{PX}} \tag{5.83}$$

图像坐标系 是一个二维笛卡尔参考坐标系 $\mathrm{F_{IMG}} = \{\mathrm{O_{IMG}},\ \mathbf{i}_1^{\mathrm{IMG}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{IMG}}\}$ 其坐标轴与 C.3.4 节中定义的 $\mathrm{F_C}$ 相机坐标系的坐标轴平行（$\mathbf{i}_1^{\mathrm{IMG}} \parallel \mathbf{i}_1^{\mathrm{C}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{IMG}} \parallel \mathbf{i}_2^{\mathrm{C}}$），其原点 $\mathrm{O_{IMG}}$ 位于焦平面上，与主点相距$\mathbf{c}^{\mathrm{IMG}}$，因此图像域 Ω 中任意点的 $\mathrm{F_{IMG}}$ 坐标 $\mathrm{p}_1^{\mathrm{IMG}}$和 $\mathrm{p}_2^{\mathrm{IMG}}$始终为正。将 $\mathrm{F_C}$ 中观察到的点转换到 $\mathrm{F_{IMG}}$ 中的透视投影映射$\mathbf{p}^{\mathrm{IMG}} = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{p}^{\mathrm{C}})$因此如下所示：

$$\mathrm{p}_1^{\mathrm{IMG}} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{s_{PX}}}\frac{\mathrm{p}_1^{\mathrm{C}}}{\mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}} + \mathrm{c}_1^{\mathrm{IMG}} \tag{5.84}$$

$$\mathrm{p}_2^{\mathrm{IMG}} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{s_{PX}}}\frac{\mathrm{p}_2^{\mathrm{C}}}{\mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}} + \mathrm{c}_2^{\mathrm{IMG}} \tag{5.85}$$

图像坐标$\mathbf{p}^{\mathrm{IMG}}$ 和相机坐标$\mathbf{p}^{\mathrm{C}}$ 既可以用度量单位表示，也可以用像素表示，两者的比例为 $\mathrm{s_{PX}}$，不过通常前者使用像素表示，后者使用度量单位表示。请注意，三个相机坐标$\mathbf{p}^{\mathrm{C}}$ 只能根据两个图像坐标$\mathbf{p}^{\mathrm{IMG}}$按比例求得，因此逆投影$\mathbf{p}^{\mathrm{C}} = \boldsymbol{\Pi}^{-1}(\mathbf{p}^{\mathrm{IMG}}, \mathrm{p}_3^{\mathrm{C}})$为：

$$\mathrm{p}_1^{\mathrm{C}} = \mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{s_{PX}}}{\mathrm{f}}\left(\mathrm{p}_1^{\mathrm{IMG}} - \mathrm{c}_1^{\mathrm{IMG}}\right) \tag{5.86}$$

$$\mathrm{p}_2^{\mathrm{C}} = \mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}\frac{\mathrm{s_{PX}}}{\mathrm{f}}\left(\mathrm{p}_2^{\mathrm{IMG}} - \mathrm{c}_2^{\mathrm{IMG}}\right) \tag{5.87}$$

因此，通常会使用齐次相机坐标 $\bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{C}}$ 或单位相机坐标$\mathbf{p}^{1\mathrm{C}}$，这分别等同于使用单位焦距，或投影到单位半径球面而非焦平面上。齐次相机坐标和单位相机坐标包含的信息与图像坐标相同，要获得实际相机坐标$\mathbf{p}^{\mathrm{C}}$，必须将它们乘以点深度 $\mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}$ 或其距离 $\|\mathbf{p}^{\mathrm{C}}\|$。

$$\bar{\mathbf{p}}^{\mathrm{C}} = \frac{\mathbf{p}^{\mathrm{C}}}{\mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}} = \begin{bmatrix}\frac{\mathrm{p}_1^{\mathrm{C}}}{\mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}} & \frac{\mathrm{p}_2^{\mathrm{C}}}{\mathrm{p}_3^{\mathrm{C}}} & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.88}$$

$$\mathbf{p}^{1\mathrm{C}} = \frac{\mathbf{p}^{\mathrm{C}}}{\|\mathbf{p}^{\mathrm{C}}\|} \tag{5.89}$$

5.4.2 相机安装

只要数码相机的视野不被其他平台部件遮挡，它就可以安装在飞机结构的任何位置。为减小相机对准误差带来的负面影响，相机光心 $\mathrm{O_C}$ 与飞机质心 $\mathrm{O_B}$ 之间的杆臂或距离应尽可能小。就朝向而言，平飞时相机应朝下，以便均衡地呈现地面景象，但轻微偏差不会造成问题。图 5.5 示意了相机坐标系 $\mathrm{F_C}$ 与附录 C 中介绍的其他飞机相关坐标系之间的关系。

仿真假设相机的位置是确定性的，但其朝向是随机的，与第 5.2.7 节所述的惯性测量单元类似。相机坐标系原点 $\mathrm{O_C}$ 位于飞行器参考点 $\mathrm{O_R}$ 前方 500 mm 、下方 120 mm 处。根据 (3.1) 、 (3.2) 和 (3.5)，可得：

$$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC,\ 满}} = \begin{bmatrix}0.293 & 0 & 0.125\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m} \tag{5.90}$$

$$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC,\ 空}} = \begin{bmatrix}0.281 & 0 & 0.126\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\ \mathrm{m} \tag{5.91}$$

$$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{f}_{\mathrm{C}}(\mathrm{m}) = \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC,full}} + \frac{\mathrm{m_{full}} - \mathrm{m}}{\mathrm{m_{full}} - \mathrm{m_{empty}}}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC,empty}} - \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC,full}}\right) \tag{5.92}$$

$\mathrm{F_B}$ 与$\mathrm{F_C}$ 之间的旋转通过C.3.4节中定义的相机欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BC}} = [\psi^{\mathrm{C}}\ \ \theta^{\mathrm{C}}\ \ \xi^{\mathrm{C}}]^{\mathrm{T}}$ 表示。作者任意建立了由(5.93)提供的随机模型，其中每个特定的欧拉角均通过表 5.17中包含的标准差($\sigma_{\psi^{\mathrm{C}}}$、 $\sigma_{\theta^{\mathrm{C}}}$、 $\sigma_{\xi^{\mathrm{C}}}$)的乘积获得

由标准正态随机变量 N (0, 1) 的单次实现（$\mathrm{N}_{\psi^{\mathrm{C}}}$、$\mathrm{N}_{\theta^{\mathrm{C}}}$ 和 $\mathrm{N}_{\xi^{\mathrm{C}}}$）：

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BC}} = \begin{bmatrix} 90^{\circ} + \sigma_{\psi^{\mathrm{C}}} \mathrm{N}_{\psi^{\mathrm{C}}} & \sigma_{\theta^{\mathrm{C}}} \mathrm{N}_{\theta^{\mathrm{C}}} & \sigma_{\xi^{\mathrm{C}}} \mathrm{N}_{\xi^{\mathrm{C}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.93}$$

然而，问题并不在于前述方程给出的 $\mathrm{F_B}$ 与 $\mathrm{F_C}$ 之间的真实平移和旋转，而在于视觉导航系统对它们的已知精度。相机位置 $\hat{}\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BC}}$ 和旋转 $\hat{}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{BC}} = \begin{bmatrix} \hat{}\psi^{\mathrm{C}} & \hat{\theta}^{\mathrm{C}} & \hat{\xi}^{\mathrm{C}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 的确定将在 6.5 章节中讨论。与之前的情况一样，对于位置 $\hat{}\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BC}}$ 和姿态 $\hat{}\,\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{BC}}$均采用随机模型，使其数值在每次仿真运行中发生变化：

$$\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}} + \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}}} \mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC},1}} & \sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}}} \mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC},2}} & \sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}}} \mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC},3}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.94}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BC}} + \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BC}}} \mathrm{N}_{\hat{\psi}^{\mathrm{C}}} & \sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BC}}} \mathrm{N}_{\hat{\theta}^{\mathrm{C}}} & \sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BC}}} \mathrm{N}_{\hat{\xi}^{\mathrm{C}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.95}$$

其中，标准差 $\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}}}$ 和 $\sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BC}}}$ 如表 5.17 所示，而 $\mathrm{N}_{\hat{\psi}^{\mathrm{C}}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\theta}^{\mathrm{C}}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\xi}^{\mathrm{C}}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC},1}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC},2}}$、$\mathrm{N}_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC},3}}$ 是标准正态随机变量 N(0, 1) 的六个实现。

概念	变量	数值	Unit
真实偏航误差	$\sigma_{\psi^{\mathrm{C}}}$	0.1	°
真实俯仰误差	$\sigma_{\theta^{\mathrm{C}}}$	0.1	°
真实滚转误差	$\sigma_{\xi^{\mathrm{C}}}$	0.1	°
相机位置估计误差	$\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}}}$	0.002	m
相机角度估计误差	$\sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BC}}}$	0.01	°

表 5.17：相机安装精度值

$\mathrm{F_B}$ 与 $\mathrm{F_C}$ 坐标系原点之间的平移$\mathbf{T}_{\mathrm{BC}}$ 可视为准静态，因为它会根据飞机质量缓慢变化（5.92）；由于相机与飞机结构刚性连接，二者坐标轴的相对位置 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BC}}$ 保持不变（5.93）：

$$\dot{\mathbf{T}}_{\mathrm{BC}} = \dot{\mathbf{q}}_{\mathrm{BC}} = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{a}_{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{0} \tag{5.96}$$

5.4.3 Earth Viewer

相机模型与所有其他传感器模型不同：它不会返回由实数值$\mathbf{x}$ 加上传感器误差$\mathbf{E}$而构成的感知变量 $\tilde{}\mathbf{x}$，而是根据实际轨迹或真实轨迹$\mathbf{x}$ $=\mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}$（如第 4.3 节所述）给出的飞机位置和姿态，生成模拟真实相机记录内容的数字图像。时刻 $\mathrm{t_i} = \mathrm{i} \cdot \Delta \mathrm{t_{IMG}}$ 相机所见的场景取决于 $\mathrm{F_C}$相对于地心地固坐标系 $\mathrm{F_E}$的位姿：$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EC}}$

$$\mathbf{I}(\mathrm{t_i}) = \mathbf{I}(\mathrm{i}\,\Delta \mathrm{t_{IMG}}) = \mathbf{I}(\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EC}}) = \mathbf{I}(\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BC}}) = \mathbf{I}\left(\mathbf{q}_{\mathrm{EC}} + \frac{\epsilon}{2} \mathbf{T}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{EC}} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{EC}}\right) \tag{5.97}$$

当以等时间间隔提供相机位姿 $\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EC}}$ 时，仿真能够生成图像，模拟相机位于相应位姿时所拍摄的地球表面景象。为此，它依赖三个软件库：

- OpenSceneGraph [67] 是一个采用 C++ 和 OpenGL 编写的开源高性能三维图形工具包，供视觉仿真、游戏、虚拟现实、科学可视化和建模等领域的应用程序开发者使用。该库通过图数据结构实现了场景中对象的表示，可将具有某些共同属性的对象分组，从而自动管理渲染属性，例如忠实绘制场景所需的细节层次，同时避免处理会拖慢图形硬件绘制场景的不必要细节。

• osgEarth [68] 是一个动态且可扩展的地球表面三维渲染工具包，依托 OpenSceneGraph，并基于飞机飞越区域的公开可用正射影像。正射影像是经过几何校正的航空或卫星影像，其比例尺保持一致；由于它们准确地表示了地球表面，并已针对地形起伏、镜头畸变和相机倾斜进行调整，因此可用于测量真实距离。结合地形高程模型后，osgEarth 能够根据相机位置以及其偏航角和俯仰角生成逼真的图像，但不接受相机横滚角（换言之，osgEarth 图像始终与地平线对齐）。

• Earth Viewer 是作者基于 osgEarth 实现的一项修改，因此也能够接受相机相对于北东地坐标系的倾侧角。只要相机距地形的高度远高于图像中呈现的垂向起伏，Earth Viewer 就能够生成逼真的地球图像。例如，图 5.7 展示了一座火山的两个不同视角；尽管山顶圆丘的坡度非常陡峭，仍然得到了恰当的渲染。

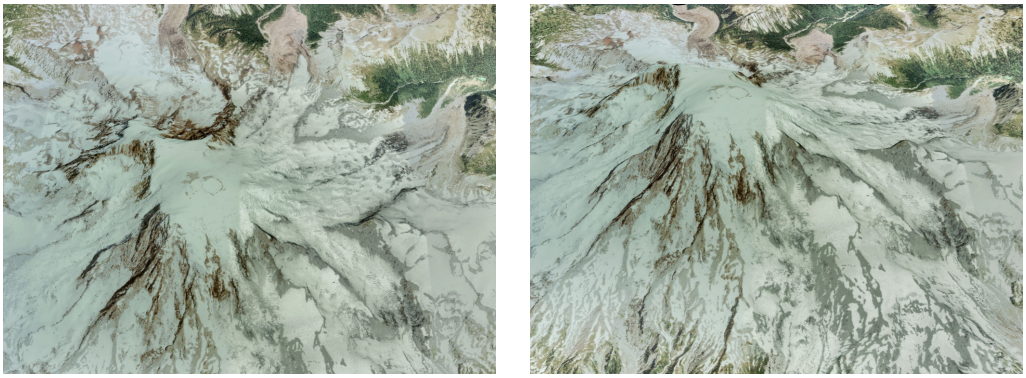

图 5.7：Earth Viewer 图像示例

5.5 实现、验证与执行

传感器模型使用 C++ 实现，目的是在保持所涉及的不同随机过程的随机特性的同时，确保在需要时能够重复不同传感器所产生误差随时间的变化。因此，实现过程遵循以下步骤：

1. 使用任意种子初始化一个离散均匀分布（种子值均有效，因此作者采用了 1），该分布生成的随机整数中，每个可能值出现的概率相同。调用该分布的次数应等于或大于用于评估导航解的最大飞行次数的两倍，然后将生成的数值分成两个大小相同的组，并存储起来以供后续使用。这些数值分别称为 $\Upsilon_{\mathrm{i,A}}$ 和 $\Upsilon_{\mathrm{j,F}}$，分别是飞机种子 和飞行种子，其中飞机i 标识固定误差的实现，而飞行j 表示次间和运行内误差的实现。存储的飞机种子和飞行种子将成为每次飞行仿真运行的初始化种子，因此无需重复此步骤。

2. 每次蒙特卡洛仿真运行都使用给定的飞机种子和飞行种子（$\Upsilon_{\mathrm{i,A}}$ 和 $\Upsilon_{\mathrm{j,F}}$）进行初始化。由于这些种子是传感器内所有随机过程所需的唯一输入，因此使用相同的种子始终可以重复得到给定运行的结果。$\Upsilon_{\mathrm{i,A}}$ 和 $\Upsilon_{\mathrm{j,F}}$ 用于初始化两个不同的离散均匀分布。一个分布执行五次，以提供固定的传感器种子（$\upsilon_{\mathrm{i,A,ACC}}$, $\upsilon_{\mathrm{i,A,GYR}}$, $\upsilon_{\mathrm{i,A,MAG}}$, $\upsilon_{\mathrm{i,A,PLAT}}$, 和$\upsilon_{\mathrm{i,A,CAM}}$）；另一个分布执行九次，以获得运行传感器种子（$\upsilon_{\mathrm{j,F,ACC}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,GYR}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,MAG}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,OSP}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,OAT}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,TAS}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,AOA}}$, $\upsilon_{\mathrm{j,F,AOS}}$, 和$\upsilon_{\mathrm{j,F,GNSS}}$）。因此，这些种子成为各个不同传感器的初始化种子。请注意，除传感器种子外，第二个分布还用于获取地球模型、精对准过程和制导参数的额外种子，如第 2.7、6.8 和 7.3 章节所述。

Type	组	误差源	种子
飞机	$\Upsilon_{i,A}$	固定	$\upsilon_{i,A,ACC}$, $\upsilon_{i,A,GYR}$, $\upsilon_{i,A,MAG}$, $\upsilon_{i,A,PLAT}$, $\upsilon_{i,A,CAM}$
飞行	$\Upsilon_{j,F}$	次间 & 运行内	$\upsilon_{j,F,ACC}$, $\upsilon_{j,F,GYR}$, $\upsilon_{j,F,MAG}$, $\upsilon_{j,F,OSP}$, $\upsilon_{j,F,OAT}$
			$\upsilon_{j,\ F.\ TAS}$, $\upsilon_{j,\ F.\ AOA}$, $\upsilon_{j,\ F.\ AOS}$, $\upsilon_{j,F.\ GNSS}$

表 5.18：传感器种子

3. 每个传感器依赖一个或两个标准正态分布 N (0，1)，具体取决于其传感器误差模型是否仅基于次间和运行内误差贡献（飞行种子），还是也包含固定误差源（飞机种子）。每个传感器的正态分布都使用该传感器对应的种子（$\upsilon_{i,\ A}$，$\upsilon_{j,\ F}$）进行初始化。

4. 初始化时，利用飞机上每个传感器的正态分布生成与比例因子、交叉耦合、硬磁效应和安装误差对应的所有数值。随后利用飞行正态分布生成所需的偏置。

5. 每次调用传感器提供测量值时，都会调用其已初始化并用于飞行的正态分布，以生成相应的随机游走增量和白噪声。

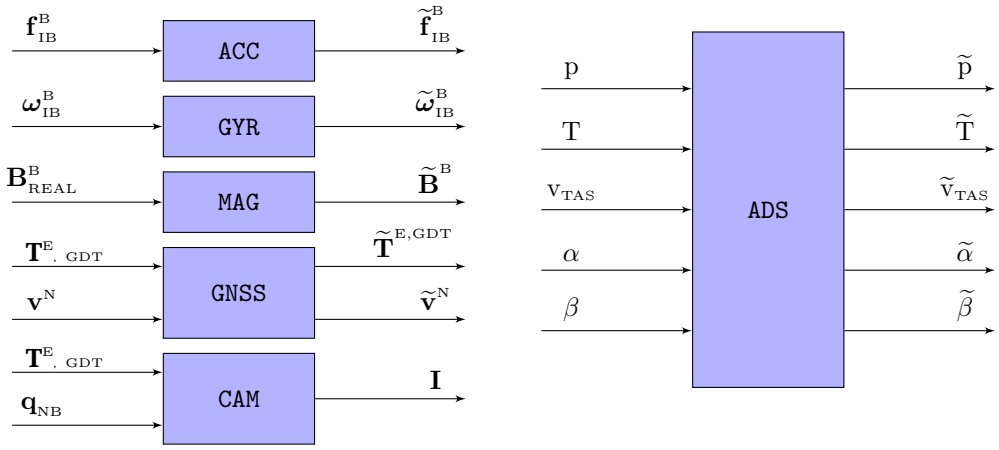

图5.8：传感器流程图

不同传感器的功能如图5.8所示。每个传感器测量真实轨迹的不同方面，并返回包含传感器误差的估计值。这些估计值构成感测轨迹（第5.1节），它是第8章所述导航系统的输入。

本章节的难点在于为每个传感器开发有效的随机模型，使其能够捕捉不同的误差源，并根据制造商提供的传感器数据规格获取这些模型所依赖的参数。由于所实现的函数都依赖于标准正态随机变量和随机游走，因此其验证并不复杂；验证方法是将它们的均值和方差与理论数值进行比较，这正如章节 5.2.2 中不同图表所采用的方法。

第 6 章

飞行前程序

本章介绍了导航所必不可少的一组活动或程序，这些活动或程序需要在飞行开始前执行，并且与确定加速度计、陀螺仪、磁力计和机载摄像机的固定误差和重复运行误差贡献密切相关（第5章）。这些活动或程序可分为两组：校准程序，只需执行一次，除非更换传感器或改变其在飞机内部的位置，否则无需重复执行[1]，；以及对准程序，每次启动飞机系统后、飞行开始前都需要执行。图6.1展示了本章所述的不同程序及其结果，并指出虚线表示被舍弃的估计值，如下文所述。

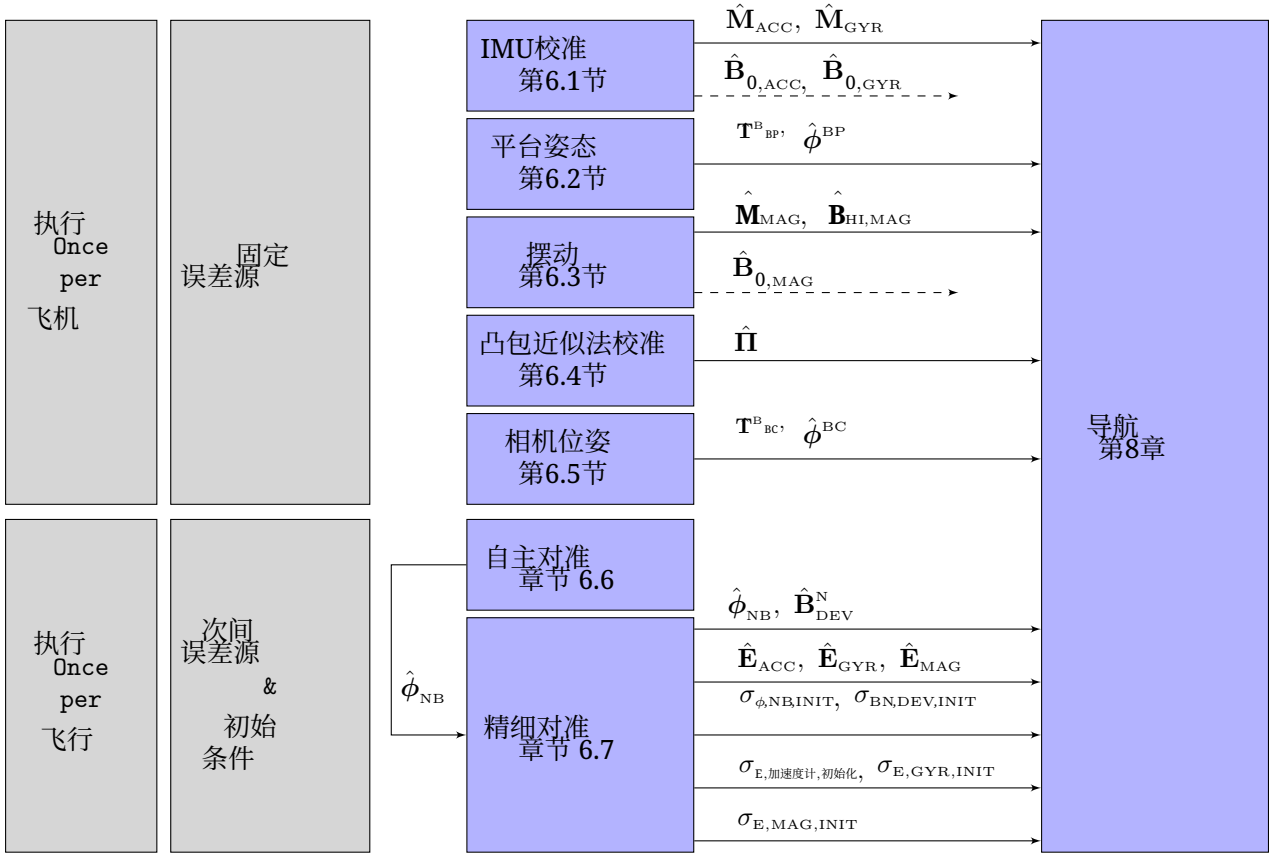

图6.1：飞行前活动摘要

校准过程 edures 包括文中所述加速度计和陀螺仪的实验室校准

[1]此外，开关改变硬铁和软铁 每次在飞机内部安装新设备时，都需要执行校准流程，因为这可能会磁学，从而影响磁力计读数。

第6.1节、在第6.2节中解释的F_P与F_B之间相对位姿的确定、第6.3节所述的磁力计校准或摆动、第6.4节讨论的相机校准，以及第6.5节中解释的F_C与F_B之间相对位姿的确定。其主要目标是获得传感器误差模型[2]，的固定贡献，即惯性传感器和磁力计的比例因子与交叉耦合误差（$\hat{\mathbf{M}}_{ACC}$、$\hat{\mathbf{M}}_{GYR}$、$\hat{\mathbf{M}}_{MAG}$）、磁力计的硬磁效应$\hat{\mathbf{B}}_{HI}$、$_{MAG}$、平台和相机位姿（$\hat{\mathbf{T}}^{B}\,BP$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{BP}$、$\hat{\mathbf{T}}^{B}\,BC$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{BC}$），以及相机投影映射（$\hat{\mathbf{\Pi}}$）。这些程序还会提供次间误差贡献的估计值（$\hat{B}0$、$_{ACC}$、$\hat{B}0$、$_{GYR}$、$\hat{B}0$、$_{MAG}$），但这些值需要舍弃，因为它们会在每次飞机系统启动时发生变化。

对准是一个分为两个阶段的过程：首先执行第 6.6 节所述的自对准过程，对飞机姿态进行粗略估计；然后将估计结果输入第 6.7 节所述的精对准过程。每次启动飞机系统后、飞机起飞前，都需要执行对准程序。除了估计飞机姿态$\hat{\mathbf{q}}_{NB} \equiv \boldsymbol{\phi}_{NB}$以及模型磁场与真实磁场之差$\hat{\mathbf{B}}^{N}{}_{DEV}$（第 2.6 节）外，精对准还会估计完整传感器误差$\hat{\mathbf{E}}$$_{ACC}$（5.63）、$\hat{}\,\hat{\mathbf{E}}_{GYR}$（5.64）和$\mathbf{E}_{MAG}$（5.68）。这些完整传感器误差估计虽然包含少量固定误差和运行中误差，但主要由传感器的运行间误差贡献构成，也就是偏置$\hat{}\,\hat{}\,\hat{\mathbf{B}}_{0,ACC}$、$\mathbf{B}_{0,GYR}$和$\mathbf{B}_{0,MAG}$。

飞行前需要执行自主对准，因为惯性导航系统（第8章）在初始化时需要对状态向量初始值进行足够准确的估计。虽然在某些情况下，例如空中数据变量、位置和地速，采用初始传感器测量值作为初始条件即可，但没有能够直接测量其他分量的传感器，例如飞机姿态、陀螺仪、加速度计和磁力计总误差，以及磁场模型偏差。

值得注意的是，除第6.6节所述的简单自主对准算法外，作者并未对本章所述的任何随机过程进行仿真。然而，作者认为，本章对于说明第5.2.9节和第5.3.1节中所列传感器规格的来源，以及第8章中惯性导航滤波器初始条件的来源是必要的。用于仿真飞行前程序输出的机制详见第6.8节。

6.1 惯性传感器校准

校准是将仪器输出与已知参考值进行比较，以确定相应系数，使输出值在一定范围内与参考值一致的过程 [7]。IMU 惯性传感器需要进行校准，以消除制造过程中产生的固定误差，并确定其温度灵敏度 [12]。校准过程需要投入大量物资和时间，但能显著降低测量误差。因此，若要在具备拒止全球卫星导航系统能力的导航系统中使用 IMU，校准便不可或缺。高等级惯性测量单元通常都经过工厂校准，而低成本惯性测量单元通常没有，因此在将 IMU 安装到飞机上之前，必须先在实验室进行校准 [6]。

校准应在已通过高精度测定位置$\mathbf{T}^{E,\,GDT}$和重力矢量$\mathbf{g}_c$（章节 2.2.2）的地点进行 [7]。校准依靠三轴转台实现，该转台能够以已知角速度将 IMU 转至预先设定且精确控制的姿态 [12, 69]。随后，将惯性测量值与参考值进行比较（加速度计的参考值为重力，陀螺仪的参考值为力矩速率加地球角速度），并利用二者之间的差值生成校正量 [7]。

在校准过程中，惯性测量单元在每个姿态下保持静止的时长，以及在两个位置之间旋转所需的时间，都需要在两种相互对立的影响之间权衡。一方面，较长的时间更理想，因为测量值中的系统噪声会趋于平稳。

[2]不同类型的传感器误差分量（包括固定误差、次间误差和运行内误差）请参阅章节 5.2.1。[3]请注意，$\hat{\mathbf{M}}_{MAG}$还包括软磁效应。

随着时间推移，在另一方面，较短的时间意味着测量值区间内偏置漂移的变化较小。

值得注意的是，由于校准是在惯性测量单元安装到飞机上之前进行的，因此依赖于 F_P 平台以及第 5.2.5 节和第 5.2.6 节中包含的模型。虽然可以采用一种校准策略：选择平台姿态，使传感器输入仅作用于单个轴（例如，只有相对于地球表面垂直放置的加速度计才能感知到重力），然后应用最小二乘法，但在实际中，更适合采用状态估计 [4] [1]来获取惯性传感器的比例因子、交叉耦合误差和偏置 [6, 12]。在不同温度下重复这一过程，以便惯性测量单元处理器之后能够根据惯性测量单元传感器温度应用校正 [6]。

估计	#	系数
$\hat{\mathbf{M}}_{\mathrm{ACC}}$	6	$\{\hat{s}_{\mathrm{ACC},i}, \hat{m}_{\mathrm{ACC},ij}\}$
$\hat{\mathbf{M}}_{\mathrm{GYR}}$	9	$\{\hat{s}_{\mathrm{GYR},i}, \hat{m}_{\mathrm{GYR},ij}\}$
$\hat{\mathbf{B}}_{0,\mathrm{ACC}}$	3	$\mathrm{B}_{0,\mathrm{ACC}}\ \hat{\mathrm{N}}_{\mathrm{u0,ACC,i}}$
$\hat{\mathbf{B}}_{0,\mathrm{GYR}}$	3	$\mathrm{B}_{0,\mathrm{GYR}}\ \hat{\mathrm{N}}_{\mathrm{u0,GYR,i}}$

表 6.1：校准过程的结果

校准过程中估计出的二十一个系数列于表 6.1 中。估计完成后，可将这些系数输入惯性测量单元处理器，使其自动执行以下校正：

$$\tilde{\tilde{\mathbf{f}}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} = \hat{\mathbf{M}}_{\mathrm{ACC}}{}^{-1}\,\tilde{\mathbf{f}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} - \hat{\mathbf{B}}_{0,\mathrm{ACC}} \tag{6.1}$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} = \hat{\mathbf{M}}_{\mathrm{GYR}}{}^{-1}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{IP}} - \hat{\mathbf{B}}_{0,\mathrm{GYR}} \tag{6.2}$$

仿真认为，偏置仅是一个次间误差源，每次$\hat{}$ $\hat{}$惯性测量单元开启时都会发生变化，因此$\mathbf{B}_{0,\ \mathrm{ACC}}$ 和$\mathbf{B}_{0,\ \mathrm{GYR}}$ 校准输出会被丢弃，因为它们与飞行期间出现的偏置无关。此外，作者决定不对惯性测量单元校准过程进行仿真，以更好地利用可用资源，而是将其结果建模为：将惯性传感器规格中发现的比例因子误差和交叉耦合误差任意降低 95% [A56]。这一降低已包含在第 5.2.9 节的表格中。总而言之，仿真不对通过（5.60、5.62）获得的测量值应用（6.1、6.2），而是直接采用第 5.2.9 节表格中的（5.60、5.62）及降低后的$\mathbf{M}_{\mathrm{GYR}}$ 和$\mathbf{M}_{\mathrm{ACC}}$ 。

6.2 平台坐标系位姿的确定

平台坐标系与机体坐标系之间的真实相对位姿由 $\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}}$ 和 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}}$ 给出，其估计值 $\hat{}\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}}$ 和 $\hat{}\,\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{BP}}$ 也同样对惯性传感器的读数起着关键作用，正如第 5.2.8 章节所述。本章节将说明如何对它们进行估计。

位置取决于 $\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{RP}} - \mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{RB}}$，其中，$\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{RP}} = \mathbf{T}^{\mathrm{R}}{}_{\mathrm{RP}}$ 表示相对于由参考系 F_R 表示的飞机结构，平台原点 O_P 的位置；根据惯性测量单元安装点在飞机上的位置，可以近乎精确地确定该位置，而 $\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{RB}} = \mathbf{T}^{\mathrm{R}}{}_{\mathrm{RB}}$ 也可通过质量分析（3.5）近乎精确地获知。因此，在（5.51）中对 $\hat{}\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}}$ 的估计所赋予的误差 $\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}}}$ 非常小，如表 5.5 所示。

姿态 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}}$ 需要简要讨论一下。请注意，在附录 C 的定义中，F_B 和 F_R 的坐标轴彼此平行，其中第一和第三坐标轴位于飞机对称面内，而 F_P 的坐标轴则与它们大致对齐。这构成了它们的正式定义；在仿真中，由于需要获得第4章所述的实际轨迹 $\mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}$，因此必须区分它们。然而，在真实飞机中，实际轨迹从来都无法获知，因此实际上可以按如下方式进行：

[4]估计滤波器不仅依赖已知的重力和角速度，还利用了惯性测量单元静止这一事实，因此其速度为零。

1. 安装惯性测量单元平台，使其两个坐标轴大致与近似飞机对称面的前向和向下方向对齐，无需特别精确。

2. 手动测量角偏差 $\hat{}\,\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{BP}}$，参考第 6.6 节的自对准程序，或者甚至假设平台坐标系的坐标轴与机体坐标轴完全对齐。

需要指出的是，从制导、导航与控制系统的角度来看，$\mathrm{F_B}$ 坐标系只是飞机机身的一种表示，只要它以飞机质心为中心且相对于机体结构不发生旋转，其选择就不会影响系统行为。估计的飞机姿态相对于实际（但未知的）姿态显然存在偏置，但这不会影响最终轨迹，除非将某个飞机欧拉角用作制导目标（第 7.1 节）；在这种情况下，结果中也会出现姿态偏置。还需注意，虽然不要求特定精度，但角度必须足够小，以确保控制系统按预期工作并保持稳定。

尽管上一段可以证明在表5.5中使用 $\sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BP}}} = 0$ 是合理的，但作者倾向于不排除任何误差源，而是采用表5.5中指定的小误差 $\sigma_{\hat{\phi}^{\mathrm{BP}}}$ 来估计(5.52)中的 $\hat{}\,\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{BP}}$ 。

6.3 摇摆校准或磁力计校准

磁力计校准本质上比惯性传感器的校准更复杂，因为必须在传感器已安装到飞机上后进行，否则无法捕捉硬铁和软磁效应所产生的固定影响（第 5.3.1 节）。这种方法称为摆动，通过将飞机置于不同姿态来获取磁力计读数，这些姿态涵盖了广泛的航向、俯仰和横滚数值 [6], ，并且必须在磁场已精确测定的位置执行。

结果的准确度很大程度上取决于摆动过程中确定不同飞机姿态的精度。这可以采用第 6.6 节所述的对准方法，或使用昂贵的静态仪器来完成。无论采用哪种方法，姿态精度总是低于使用三轴转台进行惯性传感器校准时所能达到的精度。获得磁场读数后，将其与真实磁场数值进行比较，并运用最小二乘法对表达式 (5.66) 进行处理，以估计偏置（硬磁效应之和$\mathbf{B}_{\mathrm{HI,MAG}}$ 和偏置 $\mathbf{B}_{0,\mathrm{MAG}}$）、比例因子和交叉耦合矩阵 $\mathbf{M}_{\mathrm{MAG}}$，其中还包含软磁效应。该过程可以重复多次，以分离硬磁效应（固定不变的效应）与偏置的影响；偏置是一个次间误差源，每次开启磁力计时都会发生变化。

估计	#	系数
$\hat{\mathbf{M}}_{\mathrm{MAG}}$	9	{ˆ秒$_{\mathrm{MAG,\ i}}$，ˆ米$_{\mathrm{MAG,\ ij}}$}
$\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{HI,MAG}}$	3	$\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{HI,MAG,i}}$
$\hat{\mathbf{B}}_{0,\mathrm{MAG}}$	3	$\mathrm{B}_{0,\mathrm{MAG}}$ $\hat{\mathrm{N}}_{\mathrm{u0,MAG,i}}$

表 6.2：摆动校准过程的结果

通过摆动校准过程估计出的十五个系数列于表 6.2 中。估计后，可将这些系数输入处理器，使其自动执行以下校正：

$$\tilde{\tilde{\mathbf{B}}}^{\mathrm{B}} = \hat{\mathbf{M}}_{\mathrm{MAG}}{}^{-1}\,\tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}} - \hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{HI,MAG}} - \hat{\mathbf{B}}_{0,\mathrm{MAG}} \tag{6.3}$$

仿真假设偏置偏移$\mathbf{B}_{0,\mathrm{MAG}}$ 完全是次间误差源，每次开启磁力计时都会发生变化，因此舍弃通过摆动校准获得的偏置偏移系数，因为它们与飞行过程中出现的偏置无关。此外，为了更有效地利用可用资源，作者决定不仿真摆动校准过程，而是将其结果建模为：对传感器规格中给出的硬铁偏置$\mathbf{B}_{\mathrm{HI,MAG}}$、比例因子和交叉耦合误差$\mathbf{M}_{\mathrm{MAG}}$按任意幅度进行

90% [A57]的缩减。此缩减已包含在第 5.3.1 章节的规格表中。总而言之，仿真不对通过式 (5.66) 获得的测量值应用式 (6.3)，而是直接采用经过缩减的$\mathbf{B}_{\text{HI,MAG}}$和$\mathbf{M}_{\text{MAG}}$，这些数值取自第 5.3.1 章节的表格。

6.4 相机标定

相机标定过程是一个极其重要的步骤。如果要将相机安装在飞机上并用于导航，就必须尽可能谨慎地执行该过程。这是一项成熟的程序，依赖于从不同视角拍摄棋盘格的多张图像，并利用不同图像中观察到的每个棋盘格角点的位置来运行一个最小化问题；根据应用于相机投影映射的标定模型类型，该问题可以是线性的，也可以是非线性的。 [66, 65, 70], 中对这一过程进行了详细描述，如果执行得当，可以取得出色的结果。

在本文档中，作者特别注意识别并建模所有影响安装在飞机上的传感器精度的不同因素，并将其作为随机变量纳入仿真，其数值由传感器规格或本章所述的飞行前程序给出。对由 (5.84, 5.85) 定义的相机透视映射 $\boldsymbol{\Pi}$ 采用相同的方法，将得到两个不同的映射：用于生成图像的真实映射 $\boldsymbol{\Pi}$，以及视觉导航算法所使用的估计映射 $\boldsymbol{\Pi}$。

然而，作者决定假设存在完美标定 [A55]，因此在相机和导航系统中使用相同的投影 $\boldsymbol{\Pi}$。尽管这一假设略显乐观，但它降低了计算成本，并且考虑到当前镜头存在的畸变较小、校准过程中所识别的畸变模型参数具有较高的真实性，以及校准过程的稳健性和准确性，这一假设是合理的。

6.5 相机坐标系姿态的确定

机载摄像机生成并通过第 5.4.3 章节介绍的 Earth Viewer 应用程序进行仿真的图像，不仅取决于 $\mathrm{F_E}$ 与 $\mathrm{F_B}$ 之间的相对位姿 $\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}}$，还取决于相机相对于飞机结构的位姿（$\boldsymbol{\zeta}_{\text{BC}}$），该位姿由按照第 5.4.2 章节所述安装相机时生成的位置 $\mathbf{T}^{\text{B}}{}_{\text{BC}}$ 和姿态 $\mathbf{q}_{\text{BC}} \equiv \boldsymbol{\phi}_{\text{BC}}$ 表示。

然而，视觉导航算法依赖于导航系统对该位姿的最佳估计，即 $\hat{}\mathbf{T}^{\text{B}}{}_{\text{BC}}$ 和 $\hat{}\boldsymbol{\phi}^{\text{BC}}$。相机完成校准并安装到飞机上后，需要对这两个量进行估计。这个两阶段过程需要使用与校准时相同的棋盘。

第一阶段采用一种与校准中使用的方法非常相似的优化程序，以确定相机坐标系 $\mathrm{F_C}$ 与一个刚性连接在棋盘格上的坐标系之间的相对位姿。该过程不使用不同图像中各个棋盘格角点的位置，而是仅依赖一张照片，并假设所有棋盘格方格均为正方形且尺寸相同。这样便足以获得一个存在未知尺度因子的解。棋盘格方格的尺寸提供了所需的尺度，从而能够以高精度、无歧义地解决辨识问题。

第二步是获取棋盘格坐标系与连接到飞机结构的 $\mathrm{F_R}$ 坐标系之间的位姿，然后利用式 (3.5) 提供的 $\mathbf{T}^{\text{R}}{}_{\text{RB}} = \mathbf{T}^{\text{B}}{}_{\text{RB}}$ 位移，获得所需的机体坐标系[5]下的位姿。这是一个直接的几何优化问题，其依据是棋盘格点与飞机结构点之间的距离测量值，其中这些点在 $\mathrm{F_R}$ 坐标系中的坐标已知。最终精度取决于距离测量值的精度，因此，鉴于最终估计结果对视觉导航算法成功实施的重要性，可能需要使用专用设备。

总体而言，只要执行得当，这是一个非常稳健且准确的过程，使作者能够在随机估计每个$\mathbf{T}^{\text{B}}{}_{\text{BC}}$ 和 $\hat{}\,\boldsymbol{\phi}^{\text{BC}}$ 时采用表 5.17 中指定的极小误差 $\sigma_{\hat{\mathrm{T}}^{\text{B}}_{\text{BC}}}$ 和$\sigma_{\hat{\phi}^{\text{BC}}}$。

[5] $\mathrm{F_R}$ 和 $\mathrm{F_B}$ 坐标系对齐。

通过（5.94）和（5.95）进行仿真运行。

6.6 自主对准

对准算法也称为姿态初始化，其目标是获得飞机姿态 $\hat{}\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{NB}} = \left[\hat{}\psi\ \hat{\theta}\ \hat{\xi}\right]^{\mathrm{T}}$ 的粗略估计，以供第 6.7 节所述的精对准过程使用。虽然也可以在运动中或搭载于另一辆交通工具上执行，但飞机静止时执行的效果更好；此时称为自主对准。

6.6.1 水平对准

自主对准的第一阶段称为水平对准，它通过在飞机静止时对一段时间内的加速度计输出取平均值，粗略估计机体俯仰角和倾侧角 $\hat{}\hat{}(\theta,\ \xi)$，因此容易受到加油和风引起的振动等扰动 [6]的影响。水平对准不需要预先了解飞机位置处的重力场 $\mathbf{g}_{\mathrm{c}}$，只依据重力近似垂直于椭球体这一事实。因此，结果的精度取决于加速度计误差源（第 5.2.8 节），以及局部重力场偏离垂向的程度（第 2.6 节）。

水平对准是在飞机静止时进行的，因此，式（4.47）给出的比力与式（2.75）所表示的实际重力一致，如式（6.4）所示。忽略地球角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}$（第 4.2 节）的影响，并考虑飞机静止的情况，IMU参考点与质心之间的杆臂对式（5.62）中的加速度计测量值不起任何作用，因此该式可简化为式（6.5）。

$$\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{N}} = -\mathbf{g}_{\mathrm{c,REAL}}^{\mathrm{N}} \tag{6.4}$$

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{g}_{\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{BP}*}}\left(\mathbf{M}_{\mathrm{ACC}}\left(\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BP}*}}^{-1}\left(\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}*}}^{-1}\left(\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{N}}\right)\right)\right)\right) + \mathbf{e}_{\mathrm{BW,ACC}}^{\mathrm{B}} \tag{6.5}$$

$$\bar{\widetilde{\mathbf{f}}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathrm{E}\left[\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\right] \tag{6.6}$$

水平对准过程所需的唯一输入，是在一段时间（6.6）内取平均值的加速度计输出 $\bar{\widetilde{\mathbf{f}}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}$。这段时间一方面应尽可能长，以减小系统噪声的影响；另一方面又要足够短，以降低受到外部振动干扰的风险。加速度计测量值仅在预热期结束后记录，以便使偏置漂移稳定下来。获得平均值后，通过施加垂向重力场 [6]，即可快速估计机体俯仰角和倾侧角：

$$\hat{\theta} = \arctan\frac{\bar{\widetilde{f}}_{\mathrm{IB},1}^{\mathrm{B}}}{\sqrt{\bar{\widetilde{f}}_{\mathrm{IB},2}^{\mathrm{B}\ 2} + \bar{\widetilde{f}}_{\mathrm{IB},3}^{\mathrm{B}\ 2}}} \qquad \hat{\xi} = \arctan\frac{-\bar{\widetilde{f}}_{\mathrm{IB},2}^{\mathrm{B}}}{-\bar{\widetilde{f}}_{\mathrm{IB},3}^{\mathrm{B}}} \tag{6.7}$$

6.6.2 陀螺寻北

自主对准的第二阶段称为陀螺寻北，不过其执行通常与水平对准同时进行。该阶段利用陀螺仪输出的平均值，以及水平对准提供的机体俯仰角和横滚角估计值$\hat{}$，获得飞机航向的粗略估计值 ψ。陀螺寻北的过程与水平对准相似，但水平对准依赖重力场的垂向特性，陀螺寻北则基于地球角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}$（章节 4.2）沿$\mathbf{i}_2^{\mathrm{E}}$方向的分量为零这一事实，也就是说，其东向分量为零。由于 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}$ 非常小，陀螺寻北无法使用低质量陀螺仪，因为其偏置很容易掩盖地球自转，因此需要采用其他方法估计飞机航向，详见下文章节 6.6.3。陀螺寻北的结果不仅取决于陀螺仪的误差源（章节 5.2.8），也取决于水平对准的误差源。

陀螺寻北是在飞机静止时进行的，因此飞机和运动角速度（$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}$，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}$）（章节 4.2）为零，惯性角速度与地球的角速度一致，如下所示

（6.8）。为清晰起见，现将陀螺仪测量方程（5.60）重述如下，得到（6.9）。

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{N}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}*}}^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{E}}\right) = \left[\omega_{\mathrm{E}}\ \cos\varphi \quad 0 \quad -\ \omega_{\mathrm{E}}\ \sin\varphi\right]^{\mathrm{T}} \tag{6.8}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{Ad}_{\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{BP}}}\ \mathbf{M}_{\mathrm{GYR}}\ \mathbf{Ad}_{\mathbf{q}_{\mathrm{BP}}}^{-1}\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{e}_{\mathrm{BW,GYR}}^{\mathrm{B}} \tag{6.9}$$

$$\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathrm{E}\left[\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\right] \tag{6.10}$$

该算法不仅需要对一段时间内的陀螺仪输出 $\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\mathrm{B}}{}_{\text{惯性基准}}$取平均值（6.10），还需要水平对准提供的机体俯仰角和横滚角估计值（θ, ξ）。该估计过程依据地球角速度没有东向分量这一假设，这等价于令 $\hat{}\mathbf{R}_{\mathrm{NB}}$ 的第二行与 $\bar{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}^{\mathrm{B}}{}_{\text{惯性基准}}$的内积为零。因此可得:

$$\hat{\psi} = \arctan\frac{-\bar{\widetilde{\omega}}_{\mathrm{IB},2}^{\mathrm{B}}\ \cos\hat{\xi} + \bar{\widetilde{\omega}}_{\mathrm{IB},3}^{\mathrm{B}}\ \sin\hat{\xi}}{\bar{\widetilde{\omega}}_{\mathrm{IB},1}^{\mathrm{B}}\ \cos\hat{\theta} + \bar{\widetilde{\omega}}_{\mathrm{IB},2}^{\mathrm{B}}\ \sin\hat{\xi}\ \sin\hat{\theta} + \bar{\widetilde{\omega}}_{\mathrm{IB},3}^{\mathrm{B}}\ \cos\hat{\xi}\ \sin\hat{\theta}} \tag{6.11}$$

6.6.3 磁对准

$\hat{}$ 机体航向角 ψ 也可以通过磁力计而非陀螺仪来估计，不过需先通过摆动对磁力计进行校准（第6.3节）。这一过程与陀螺寻北类似，不同之处在于，它依靠对地球磁场测量值取平均值，而不是对地球角速度测量值取平均值。根据在当前位置处计算的磁场模型所得到的磁偏差进行校正后，测得的磁场不应包含任何东向分量。因此，结果的精度不仅取决于磁力计误差源（第5.3.1节）和水平对准过程的误差源，还取决于飞机所在位置处的真实磁场与磁场模型提供的磁场之间的差异（第2.6节）。

该过程首先估计飞机所在位置的磁偏角 $\hat{}\chi_{\mathrm{MAG}}$ （6.12），这依赖于第 2.5 节所述的磁场飞机系统模型:

$$\hat{\chi}_{\mathrm{MAG}} = \mathrm{f}_{\chi}\left(\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}}\right) = \arctan\frac{\mathrm{B}_{\mathrm{MOD},2}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{B}_{\mathrm{MOD},1}^{\mathrm{N}}} \tag{6.12}$$

与陀螺寻北类似，对一段时间内的磁力计读数 $\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}$ 取平均值（6.14），以降低测量值中系统噪声的影响。为便于说明，此处重述磁力计测量方程（5.65），得到（6.13）:

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{B}_{0,\mathrm{MAG}} + \mathbf{B}_{\mathrm{HI,MAG}} + \mathbf{M}_{\mathrm{MAG}}\left(\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}*}}^{-1}\left(\mathbf{B}_{\mathrm{REAL}}^{\mathrm{N}}\right)\right) + \mathbf{e}_{\mathrm{W,MAG}}^{\mathrm{B}} \tag{6.13}$$

$$\bar{\widetilde{\mathbf{B}}}^{\mathrm{B}} = \mathrm{E}\left[\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}\right] \tag{6.14}$$

磁对准需要水平对准提供的机体俯仰角和横滚估计值（$\hat{}\theta$, ξ）。该方法依赖于这样的磁场：磁场位于一个由垂直方向（$\mathbf{i}_3^{\mathrm{N}}$）和一个水平向量构成的平面内（该水平向量属于由 $\mathbf{i}_1^{\mathrm{N}}$ 和 $\mathbf{i}_2^{\mathrm{N}}$构成的平面），且该平面与北向相差角度 χ_{MAG}。这相当于说，经过磁偏角校正后，东向分量应为零:

$$\hat{\psi} = \hat{\chi}_{\mathrm{MAG}} + \arctan\frac{-\bar{\widetilde{\mathrm{B}}}_2^{\mathrm{B}}\ \cos\hat{\xi} + \bar{\widetilde{\mathrm{B}}}_3^{\mathrm{B}}\ \sin\hat{\xi}}{\bar{\widetilde{\mathrm{B}}}_1^{\mathrm{B}}\ \cos\hat{\theta} + \bar{\widetilde{\mathrm{B}}}_2^{\mathrm{B}}\ \sin\hat{\xi}\ \sin\hat{\theta} + \bar{\widetilde{\mathrm{B}}}_3^{\mathrm{B}}\ \cos\hat{\xi}\ \sin\hat{\theta}} \tag{6.15}$$

6.6.4 自对准结果

自对准方法的主要目标是为第 6.7 章节的精对准过程初始化飞机姿态。因此，这些方法只能提供粗略估计，其精度高度依赖于不同传感器的误差源，尤其是加速度计的误差源，同时也取决于.....的精度

飞机所在位置的重力模型和磁场模型。作者使用两个不同等级的加速度计、陀螺仪和磁力计进行了测试，结果如表 6.3 所示。“基准”配置包含表 5.7、5.8 和 5.9 中描述的传感器，而“更优”配置则采用了 [71] 中列出的更高等级的惯性传感器和磁力计。

基于随机位置，该测试涉及在飞机处于 36 个不同航向时运行不同的对准算法，这些航向按 10° 等间距分布，且俯仰角和倾侧角均为零；随后计算估计角度与实际角度之差的均值和标准差。尽管表格中未显示，测试也包含陀螺寻北，但要获得可接受的结果，需要使用比基准配置中等级更高的传感器。

传感器等级	水平对准				磁对准	
	$\mu_{\Delta\theta}$	$\sigma_{\Delta\theta}$	$\mu_{\Delta\xi}$	$\sigma_{\Delta\xi}$	$\mu_{\Delta\psi}$	$\sigma_{\Delta\psi}$
基线	-0.515	$+0.003$	$+0.699$	$+0.003$	-0.309	$+2.976$
更好	-0.103	$+0.003$	$+0.083$	$+0.003$	-0.306	$+1.004$

表 6.3：对准误差指标 $[^\circ]$

结果表明，自主对准中最复杂的任务是估计飞机航向，因为陀螺寻北只有在使用极高精度陀螺仪时才能得到可接受的结果，而磁对准则固有地受到磁场模型与真实磁场之间差异的限制，同时还受到磁力计中显著误差源的影响。

6.7 精对准

精对准是一种在导航系统初始化后立即执行的姿态和惯性传感器校准过程，主要有两个目标 [5, 6, 7]:

- 减小自主对准过程遗留的姿态初始化误差。
- 减小加速度计、陀螺仪和磁力计误差中的次间差异所造成的影响。

虽然也可以在运动中或搭载于另一辆载具上进行精细对准，但此处描述的过程假设飞机在地面上相对于地球静止，并且刚刚完成了第6.6节所述的自主对准过程，从而获得了对飞机姿态 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{NB}} = \begin{bmatrix}\hat{\psi} & \hat{\theta} & \hat{\xi}\end{bmatrix}^{\text{T}}$ 的良好近似。

飞机静止在地面上时，精细对准过程采用与飞行期间（第8章）相同的惯性导航算法，但设定速度为零，且位置和姿态保持不变。请注意，在这些条件下，加速度计测得的比力（4.47）与重力加速度 $\mathbf{g}_{\text{c}}$ （第2.2.2节）方向相反，而飞机惯性角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\text{IB}}$ 则与地球角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}}$ （第4.2节）一致:

$$\mathbf{f}_{\text{IB}}^{\text{B}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{GROUND}}^{\text{B}}}{\text{m}} = -\,\mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\text{NB}*}}^{-1}\left(\mathbf{g}_{\text{C,REAL}}^{\text{N}}\right) \tag{6.16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{IB}}^{\text{B}} = \mathbf{g}_{\boldsymbol{\zeta}_{\text{NB}*}}^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_{\text{IE}}^{\text{N}}\right) \tag{6.17}$$

根据（6.16、6.17），由于传感器误差以及自主对准后残留的姿态误差，可能会错误地解算出重力或角速度。在这种情况下，导航算法会估计出与静止参考值相矛盾的虚假速度和姿态变化，可利用这些变化进一步改进飞机姿态的先前自主对准估计值 $\boldsymbol{\phi}_{\text{NB}}$ ，以及传感器误差。

像这样的完全静态校准无法彻底区分姿态误差和传感器误差，因为两者产生的影响相同，因此必须进行机动以将其区分开来。为此，准静态对准还包括航向变化。还值得注意的是，精细对准对外界

风或人为活动造成的扰动非常敏感，在这种情况下，最佳解决方案是让该过程持续数分钟，以平均掉这些扰动[6]。

在真实飞机中，通过精对准过程在地面上对观测轨迹进行的估计，与由惯性导航系统（第8章）在空中执行的估计之间并不存在实质区别，因为它们只是同一算法的两种不同称谓。飞机通电后，经过一段用于传感器预热的短暂时间，以减小惯性传感器中存在的偏置漂移的影响，便可通过第6.6章节所述的自对准过程获得飞机姿态的粗略估计。在保持飞机静止的情况下，随后对导航算法进行初始化，并将以下值作为状态向量的初始估计：线速度和角速度为零，位置取GNSS接收机输出的平均值，飞机姿态采用自对准结果，不同传感器的误差设为零。这一阶段就是精对准阶段；当其解趋于稳定后，飞机便开始滑行、起飞并执行飞行计划，但此时飞机状态的估计过程称为导航，如第8章所述。

第1.3节介绍的仿真不能用于模拟上述飞行初始化活动。要做到这一点，就需要对飞机受力（第3章）和运动方程（第4章）进行大量修改，以便正确模拟飞机静止停在停机坪上或在跑道上加速时飞机及传感器的行为。作者选择将有限的资源用于获得更逼真的飞机飞行仿真，而不是对本节所述的飞行前程序进行建模。然而，本节的全部目的，是说明第8章的惯性导航算法可以使用与实际值非常接近的姿态和传感器误差值进行初始化，因为这些值此前已通过精对准过程在静止条件下估计得出。这相当于说，飞机开始飞行时，导航系统已经拥有良好的姿态和完整传感器误差估计值，因此可以用这些估计值来初始化导航滤波算法仿真。表6.4展示了作者任意选定为基准的精对准精度结果：

初始化基准	变量	数值	Unit
姿态误差	$\sigma_{\text{qNB, 初始化}}$	0.1	°
完整加速度计误差	$\sigma_{\text{E,ACC,INIT}}$	1	%
陀螺仪总误差	$\sigma_{\text{E,GYR,INIT}}$	1	%
磁力计总误差	$\sigma_{\text{E,MAG,INIT}}$	1	%
磁场偏差	$\sigma_{\text{BN,DEV,INIT}}$	10	%

表 6.4：精细对准精度数值

根据上述数值，机体姿态、完整传感器误差以及建模磁场与真实磁场之间偏差的初始条件由以下方程得出。这些方程基本表明，真实初始条件 ($\mathbf{q}_{\text{NB}}$,0, E0,$_{\text{ACC}}$, E0,$_{\text{GYR}}$, E0,$_{\text{MAG}}$, $\mathbf{B}^{\text{N}}_{0,\text{DEV}}$) 与精对准过程估计出的初始条件 ($\mathbf{q}_{\text{NB,INIT}}$, $\mathbf{E}_{\text{ACC,INIT}}$, $\mathbf{E}_{\text{GYR,INIT}}$, $\mathbf{E}_{\text{MAG,INIT}}$, $\mathbf{B}^{\text{N}}$ DEV,INIT) 之间的差异，平均而言为表 6.4 所示的数值。注意，符号 $\circ$ 表示哈达玛积（即逐元素矩阵乘积），而式 (6.20) 使用了 $\mathbb{SO}(3)$ 旋转矢量。此外，$\mathbf{N}_{\text{qNB,INIT}}$ 是标准正态随机变量 N (0, 1) 的一次实现；$\mathbf{N}_{\text{EACC,INIT}}$、$\mathbf{N}_{\text{EGYR,INIT}}$、$\mathbf{N}_{\text{EMAG,INIT}}$ 和 $\mathbf{N}_{\text{BN,DEV,INIT}}$ 分别是大小为三的互不相关向量的一次实现，每个向量均由三个互不相关的标准正态随机变量 N (0, 1) 组成。角度 ϕ_1 和 ϕ_2 分别取自均匀分布 U (-179, 180) 和 U (-90, 90) 的一次抽样。

$$\mathbf{n}_{\text{qNB}} = [\cos\phi_1 \;\; \cos\phi_2 \quad \sin\phi_1 \;\; \cos\phi_2 \quad \sin\phi_2]^{\text{T}} \tag{6.18}$$

$$\gamma_{\text{qNB}} = \sigma_{\text{qNB,INIT}} \; \text{N}_{\text{qNB,INIT}} \tag{6.19}$$

$$\mathbf{q}_{\text{NB,INIT}} = \text{Exp}\,(\mathbf{n}_{\text{qNB}}\,\gamma_{\text{qNB}}) \otimes \mathbf{q}_{\text{NB}\,,0} \tag{6.20}$$

$$\mathbf{E}_{\text{ACC,INIT}} = \hat{\mathbf{E}}_{0,\text{ACC}} - \mathbf{E}_{0,\text{ACC}} = \sigma_{\text{E,ACC,INIT}}\;\mathbf{E}_{0,\text{ACC}} \circ \mathbf{N}_{\text{EACC,INIT}} \tag{6.21}$$

$$\mathbf{E}_{\text{GYR, INIT}} = \hat{\textbf{东}}_{0,\text{GYR}} - \textbf{东}_{0,\text{GYR}} = \sigma_{\text{E,GYR,INIT}}\;\textbf{东}_{0,\text{GYR}} \circ \textbf{北}_{\text{EGYR,INIT}} \tag{6.22}$$

$$\mathbf{E}_{\text{MAG,INIT}} = \hat{\mathbf{E}}_{0,\text{MAG}} - \mathbf{E}_{0,\text{MAG}} = \sigma_{\text{E,MAG,INIT}}\ \mathbf{E}_{0,\text{MAG}} \circ \mathbf{N}_{\text{EMAG,INIT}} \tag{6.23}$$

$$\mathbf{B}^{\text{N}}_{\text{DEV,INIT}} = \hat{\mathbf{B}}^{\text{N}}_{0,\text{DEV}} - \mathbf{B}^{\text{N}}_{0,\text{DEV}} = \sigma_{\text{BN,DEV,INIT}}\ \mathbf{B}^{\text{N}}_{0,\text{DEV}} \circ \mathbf{N}_{\text{BN,DEV,INIT}} \tag{6.24}$$

如上所述，估计值构成第8章惯性导航算法的初始条件，并且是式 (8.75,8.76) 所要求的。

6.8 实现、验证与执行

正如本章中多次提到的，各种飞行前程序并未进行仿真，因此无法验证。不过，本节将介绍第6.7节末尾所述简单算法的实现，该算法用于仿真精对准算法的结果，这些结果构成了第8章所述惯性导航滤波器的初始条件。本节可视为第5.5节的延续；事实上，这样理解更为恰当。第5.5节介绍了随机算法的实现，这些算法描述传感器的行为，同时保留了在需要时重复获得相同结果的能力。事实上，由于初始化条件会随着每次运行而变化，因此可将其视为附加传感器，这些传感器仅在轨迹开始时执行一次。

鉴于此，以飞行种子 $\Upsilon_{\text{j, F}}$ 初始化的离散均匀分布，不仅用于生成第5.5节中列出的运行传感器种子 $\upsilon_{\text{j, F}}$ 、第2.7节所述的地球模型种子以及第7.3节规定的制导参数，还会额外实现五次，以生成用于初始条件的初始化种子 $\upsilon_{\text{j, F, INIT}}$ $(\upsilon_{\text{j, F, }\phi\text{NB}},\ \upsilon_{\text{j, F, EACC}},\ \upsilon_{\text{j, F, EGYR}},\ \upsilon_{\text{j, F, EMAG}},\ \upsilon_{\text{j, F, BNDEV}})$ 。

Type	组	误差源	种子
飞行	$\Upsilon_{\text{j,F}}$	运行内	$\upsilon_{\text{j,F,}\phi\text{NB}}$, $\upsilon_{\text{j,F,EACC}}$, $\upsilon_{\text{j,F,EGYR}}$, $\upsilon_{\text{j,F,EMAG}}$, $\upsilon_{\text{j,F,BNDEV}}$

表 6.5：初始化种子

每个初始条件都依赖于一个标准正态分布 N(0, 1)，该分布使用与该条件对应的种子 $\upsilon_{\text{j,F,INIT}}$ 进行初始化。随后，每个分布均进行三次实现，以获得上述表达式 (6.18) 至 (6.24) 所需的随机值。

第7章

制导与控制

制导、导航与控制 (GNC)系统包含实现自主飞行（即无需与任何人工操作员交互）所需的算法。该系统仅根据传感器测量值和预先加载的任务目标，持续调整油门杆和气动操纵面（升降舵、副翼、方向舵）的位置。其仿真假设所有算法的执行都是瞬时完成的 [A59] ，并且三个系统不仅彼此之间，而且与传感器之间也完全实现了时间同步。导航系统会在所有测量值可用后立即对其进行处理，频率为 100 Hz [A60], ，而制导与控制系统的运行频率仅为其一半，即 50 Hz [A61]。另一个重要假设是，油门杆和气动操纵面的位置均会对控制系统发出的指令做出瞬时响应 [A62]，因此，第3章中描述的气动作用和推进作用也同样如此。

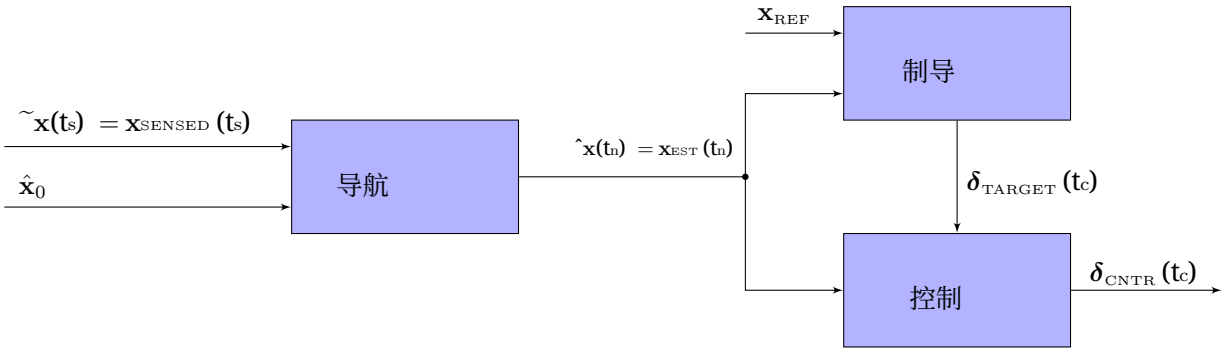

图7.1：制导、导航与控制流程图

制导、导航与控制系统的组织方式如图7.1所示。按照从传感器数据到控制目标的有序演变过程，首先是导航系统（第8章），它接收第5.1节所述的感知状态$\tilde{\mathbf{x}}(t_s) = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}(t_s)$，其中$t_s = s \cdot \Delta t_{\text{SENSED}}$，并对其进行处理，以获得第8.1节所述的观测值或估计状态$\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$，其中$t_n = n \cdot \Delta t_{\text{EST}} = t_s$，因为根据表1.2，两者的运行频率相同。与感知测量值相比，它具有两大主要优势：一方面，它更加完整，包含飞机姿态等传感器无法测量的变量；另一方面，得益于导航系统，其误差，即与飞机实际状态之间的差异，更小。

观测状态$\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$可用后，制导系统（第 7.1 节）会将其与人工操作员此前载入系统的任务目标或参考轨迹$\mathbf{x}_{\text{REF}}$（第 7.1.1 节）进行比较，以确定飞机在飞行过程中的位置，然后提取适当的制导目标$\boldsymbol{\delta}_{\text{TARGET}}(t_c)$，供控制系统跟踪，其中$t_c = c \cdot \Delta t_{\text{CNTR}}$。请注意，制导与控制系统的工作频率均为导航滤波器（表1.2）的一半。最后是控制系统的转

向（第 7.2 节），它将制导目标 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{TARGET}}(t_c)$ 与观测状态 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}(t_n)$ 进行比较，并生成控制参数位置 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}(t_c)$ 的更新。

本章重点介绍制导与控制系统（章节 7.1 和 7.2），导航系统将在下一章中介绍。仿真中的实现将在章节 7.3 中讨论。

7.1 制导系统

在自主无人驾驶飞行器中，人工操作员分配任务目标，并通过活动通信信道将其上传。在飞机一侧，制导系统会处理这些目标，并从此刻起在每个瞬间向控制系统提供适当的控制目标 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{TARGET}}(t_c)$，使得只要飞机能够成功遵循这些目标[1]，任务目标便能实现。只要数据链路保持开放，操作员就可以通过导航系统提供的估计轨迹持续监控任务进展，并可随时决定修改任务目标，例如在操作原因要求更新任务时。

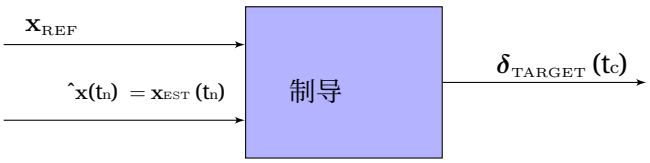

图7.2：制导系统流程图

如果通信链路中断（可能是由于技术故障、距离过远、山脉或建筑物阻挡信号，甚至第三方的恶意行为），飞机就会进入完全自主模式，并继续使用最后收到的任务目标，直至着陆或通信恢复。本文讨论的正是这种情况：假设制导系统已收到任务目标，但不能指望再收到任何校正量。

图7.2是图7.1的局部视图，展示了制导系统如何利用导航系统提供的飞机估计状态 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}(t_n)$，确定飞机在轨迹脚本上的位置，并据此生成适当的目标；该系统接收参考轨迹、轨迹脚本或第 7.1.1 节中所述的任务目标 $\mathbf{x}_{\mathrm{REF}}$，并向控制系统提供油门杆和气动操纵面的控制目标时间序列 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{TARGET}}(t_c)$。

7.1.1 参考轨迹

参考轨迹或轨迹脚本（RT）代表了任务目标的实现，其中包含一系列目标，供制导系统使用，以明确规定飞机在每一时刻应如何运行，从当前时刻（如果脚本是在飞行开始前提供的，则从发动机启动时）开始，直至飞机着陆（或到达远程驾驶员可对其进行回收的地点）。明确规定并不意味着轨迹脚本必须是确定不变的；事实上，自主飞行器需要条件脚本，以便在发生某些意外情况时提供相应的行动说明。例如，如果 GNSS 信号丢失，导致飞机无法完成主要任务，那么最好安排一项备用计划：中止主要任务，转而尝试飞往预先确定的回收地点，以便在那里远程操控飞机着陆。

对于仿真而言，目标并非重现一个灵活、稳健的制导系统及其配套轨迹脚本，以实现复杂的制导目标[2]，，而是实现一些基本制导模式，例如

[1]请注意与远程驾驶飞机的区别：在远程驾驶飞机上，人工操作员可以根据需要远程操纵油门和气动操纵面，以完成任务目标。[2]复杂但常见的制导目标示例包括：沿 WGS84 椭球体上的最短距离线或大圆飞行、最大化飞机航程、最小化燃油消耗，或在与任何居民区保持最小安全距离（出于噪声或安全方面的考虑）的同时抵达指定目的地。

保持恒定空速或恒定高度、以给定航迹角爬升或下降、沿给定航向飞行，或以给定倾侧角转弯等；这些模式仍足以完成基本任务。如有需要，也可以低成本地添加其他模式。

参考轨迹$\mathbf{x}_{\text{REF}}$分为操作 $\boldsymbol{\delta}_{\text{TARGET}}$ （7.1），每个操作由四条说明和一个触发器（7.2）组成，如图 7.3 所示。任意时刻只有一个操作处于活动状态；该操作结束时，脚本会激活下一个操作，依此类推，直至飞机着陆或由操作员接管。

$$\mathbf{x}_{\text{REF}} = \{\boldsymbol{\delta}_{\text{TARGET},1},\, \boldsymbol{\delta}_{\text{TARGET},2},\, \ldots,\, \boldsymbol{\delta}_{\text{TARGET,n}}\} \tag{7.1}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{TARGET}} = \begin{bmatrix} \delta_{\text{TARGET,T}} & \delta_{\text{TARGET,E}} & \delta_{\text{TARGET,A}} & \delta_{\text{TARGET, R}} & \delta_{\text{TRG}} \end{bmatrix}^{\text{T}} \tag{7.2}$$

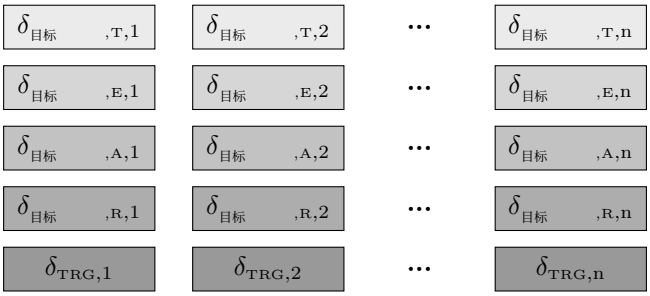

图 7.3：按操作划分的参考轨迹

操作触发是一个基于导航系统提供的观测状态向量 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$ 的布尔表达式。相应操作处于活动状态时，会持续对其进行评估，并监测其符号。一旦符号发生切换，该操作便结束，并由流程中的下一个操作取代。表 7.1 列出了每项操作可用的触发目标：时间t、操作时间 Δt_{OP}、大地高度h、气压高度 H_{P}、航迹角 γ、航向 χ或航向 ψ。例如，触发条件 $\delta_{\text{TRG}} = \{H_{\text{P}} = 2500\ \text{m}\}$ 表示飞机首次达到该气压高度（$\hat{H}_{\text{P}} = 2500\ \text{m}$）时操作结束，无论飞机正在下降还是爬升；而触发条件 $\delta_{\text{TRG}} = \{\Delta t_{\text{OP}} = 50\ \text{s}\}$ 表示操作持续时间恰好为五十秒。请注意，触发条件的评估依据的是观测或估计轨迹$\mathbf{x}_{\text{EST}}$，而不是未知的实际轨迹$\mathbf{x}_{\text{TRUTH}}$，因此，从一项操作切换到下一项操作的时刻并不会与参考轨迹规定的时刻完全一致。

触发选项
δ_{TRG} t, Δt_{OP}, h, H_{P}, γ, χ, ψ

表 7.1：可用的触发目标

说明 表示飞机控制系统在运行期间采用的目标，并根据导航系统提供的观测状态向量 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$进行评估。大多数固定翼飞机具有四种飞行控制机构（油门杆、升降舵、副翼和方向舵）；因此，这一数量与运动方程中的自由度数量一致。为使第 4.5 节的微分方程组适定，并能进行积分以得到明确的轨迹（在给定风和环境条件下），必须始终闭合该方程组。每条说明都对应一个特定的自由度，且彼此必须兼容。例如，指定某一航迹角的说明是升降舵的有效目标，因为升降舵的运动会沿$\mathbf{i}_2^{\text{B}}$ 产生纵向力矩，从而有效改变飞机的航迹角；然而，同一航迹角目标并不适用于副翼，因为副翼对航迹角的影响极小，而且远非线性。

表 7.2 显示了每种指令类型可用的目标。例如，升降舵指令 $\delta_{\text{TARGET,E}} = \{H_{\text{P}} = 2500\ \text{m}\}$ 表示控制系统应使用升降舵，使气压高度尽可能接近该目标（$\hat{H}_{\text{P}} = 2500\ \text{m}$）。油门杆 δ_{T} 通常用于控制空速 v_{TAS}，不过也可以直接设定，例如执行最大功率爬升或慢车下降。

其余纵向运动目标由升降舵 δ_{E}控制，可将机身俯仰角 θ、气压高度 $\mathrm{H_P}$、大地高度 h或气动航迹角 γ_{TAS}作为目标。对于横向运动，方向舵 δ_{R} 始终用于控制侧滑角 β，而副翼δ_{A} 有两种不同的用法：在直线段中，可以指定所需的飞机航向 ψ、气动航向 χ_{TAS}或飞机方位角 χ；转弯时，则通过指定所需的机体倾斜角 ξ 或空速倾斜角 μ_{TAS}来控制。

说明	选项	
油门	$\delta_{\text{目标}}$,T	$\mathrm{v_{TAS}}$, δ_{T}
升降舵	$\delta_{\mathrm{TARGET,E}}$	θ, $\mathrm{H_P}$, h γ_{TAS}
副翼	$\delta_{\mathrm{TARGET,A}}$	ξ, χ, ψ, μ_{TAS}, χ_{TAS}
方向舵	$\delta_{\mathrm{TARGET,R}}$	β

表 7.2：可用的指令目标

请注意，与实际$\mathbf{x}(t_t) = \mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}(t_t)$和观测值 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}(t_n)$轨迹不同，这些轨迹通过代数方程即可从状态向量中获得所有变量，因此能够完整表示飞机轨迹；参考轨迹$\mathbf{x}_{\mathrm{REF}}$ 与感测轨迹$\tilde{\mathbf{x}}(t_s) = \mathbf{x}_{\mathrm{SENSED}}(t_s)$相似，都是不完整的，也就是说，两者仅包含有限数量的变量，无法直接据此获得其他相关的飞机状态。

7.2 控制系统

飞机控制系统的任务是操纵油门杆 δ_{T} 和气动操纵面（升降舵 δ_{E}、副翼 δ_{A}和方向舵 δ_{R}），使导航系统（第8章）提供的估计轨迹 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}(t_n)$ 尽可能准确地跟随制导系统（第7.1节）提供的控制目标 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{TARGET}}(t_c)$ [14, 72]。请注意，飞机系统并不知道实际轨迹或真实轨迹 $\mathbf{x}(t_t) = \mathbf{x}_{\mathrm{TRUTH}}(t_t)$，因此必须依据观测轨迹 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}(t_n)$运行；该轨迹代表飞机系统对实际轨迹所掌握的最佳信息。图7.4对此作了说明，它是图7.1的局部视图。

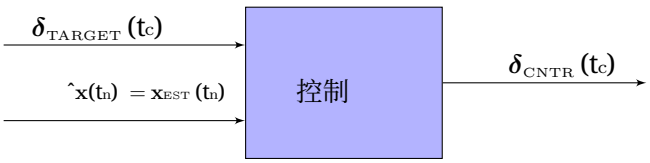

图 7.4：控制系统流程图

图 7.4 展示了实现任务目标所需的飞机成功飞行的三个要素：设计良好的控制系统、准确估计的观测状态，以及明确定义的目标。如果实现了第二个目标，那么任何设计良好的控制系统都能跟踪所需目标。事实上，如果观测轨迹与实际轨迹相差甚远，即使是现有的最佳控制系统也无法完成任务；但只要提供的观测轨迹与真实轨迹十分接近，即便是简单但实现良好的控制系统也能成功运行。

第 7.2.1 节介绍 PID 控制器，它构成了飞机控制系统实现的基础。不过，具体实现取决于各项操作所适用的目标变量（表 7.2），相关内容将在第 7.2.2 节中介绍。

7.2.1 PID 控制器

一种比例积分微分(PID)控制器是一种控制反馈机制，它接收目标或设定值$\mathbf{r}(t)$以及过程变量$\mathbf{y}(t)$的估计值（该变量是物理过程或植物的输出），并进行计算。

将位置施加到植物的控制变量 u (t)上，该控制变量由三项相加构成，每项均为给定系数或增益与误差值、误差值对时间的积分或其时间导数的乘积 [73]。误差值 e (t)定义为设定值与过程变量之差：

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(\mathrm{t}) &= \mathrm{r}(\mathrm{t}) - \mathrm{y}(\mathrm{t}) && (7.3) \\ \mathrm{u}(\mathrm{t}) &= \mathrm{K_P} \cdot \mathrm{e}(\mathrm{t}) + \mathrm{K_I} \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{K_D} \frac{\mathrm{de}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} && (7.4) \end{aligned}$$

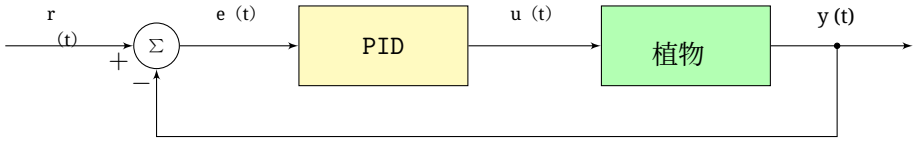

图 7.5：PID控制器流程图

比例控制 (P) 会按照一个称为比例增益 K_P的系数，针对误差值发出成比例的响应，并且应当是控制变量的主要贡献项。如果单独运行，纯 P 控制器总会产生残余误差，因为它需要依靠误差来生成响应。应谨慎调整增益：增益过高会使控制回路变得不稳定，过低则会降低响应速度或灵敏度。

积分 (I) 项旨在消除比例项造成的残余误差，使系统能够达到目标值。不过，积分增益 K_I过高可能导致超调。纯 I 控制器能够消除误差值，但对偏差的响应较慢，随后又会产生剧烈响应，因此容易出现超调和振荡。

微分控制 (D) 旨在将误差曲线平缓地降至零，减弱系统的响应速度，从而减少超调。它依赖于微分增益 K_D ，理论上能够改善系统的稳定时间和稳定性。然而在实践中，它对测量噪声相当敏感，因此通常会采用较低的增益来限制其影响，并在微分输入上应用低通滤波器以降低噪声 [74]。

控制	Gain	上升时间	超调	稳定时间	稳态误差	稳定性
比例	K_P	↓	↑	∼	↓	↓
积分	K_I	↓	↑	↑	0	↓
微分	K_D	∼	↓	↓	∼	↑

表 7.3：PID 控制器增益增大所产生的影响

表 7.3 展示了增大三个增益中每一个的数值对控制器上升时间、其超调倾向、其稳定时间、稳态误差以及稳定性的理论影响。通常，K_P 和 K_I 需要在减小超调与增加控制器稳定时间之间进行权衡。较小的 K_D 使其对实际且相对快速的误差变化响应更加灵敏，但也会对噪声更加敏感。

PID 控制器的主要优势，也是其在各种应用中广受欢迎的原因，是其简洁性。然而，这也意味着一些负面影响 [75]:

- 由于增益是恒定的，并不包含任何关于被控对象物理过程的直接知识，其性能始终是反应式的，也是一种折中。
- 微分噪声可能导致微分控制不稳定，因此应使用低通滤波器对其进行平滑处理。
- 设定值阶跃变化会导致积分项严重积分饱和，并可能造成目标超调。可能的解决方案包括：在过程变量接近新目标或设定值之前禁用积分控制，或防止积分项累积超过一定限值。

- 设定值阶跃变化还可能导致比例控制器和微分控制器响应过度。可通过以线性方式逐渐提高设定值而非采用阶跃变化来解决，也可以在这两个控制器中使用两个可调系数（通常介于 0 和 1 之间）对设定值进行加权（但不用于积分控制器，以避免稳态误差）。如式（7.5）所示，其中 $\{\mathrm{b},\ \mathrm{c}\}$ 为设定值权重，负载扰动和测量噪声引起的响应不受这些权重影响，但设定值变化引起的响应则会受到影响。通常会采用 $\mathrm{c}=0$ 和 $0 \leq \mathrm{b} \leq 1$ 来减小设定值响应中的超调。

$$\mathrm{u}(\mathrm{t})=\mathrm{K_P}\left[\mathrm{b}\cdot\mathrm{r}(\mathrm{t})-\mathrm{y}(\mathrm{t})+\frac{\mathrm{K_I}}{\mathrm{K_P}}\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{e}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\frac{\mathrm{K_D}}{\mathrm{K_P}}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{c}\cdot\mathrm{r}(\mathrm{t})-\mathrm{y}(\mathrm{t}))}{\mathrm{dt}}\right] \tag{7.5}$$

7.2.2 主回路与次级回路

飞机控制系统已实现为四个相互独立的控制机制，其中控制变量分别是第 3.3 章节中首次介绍并在此重列以便查阅的各项控制参数：

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}=\left[\delta_{\mathrm{T}}\ \ \delta_{\mathrm{E}}\ \ \delta_{\mathrm{A}}\ \ \delta_{\mathrm{R}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{7.6}$$

在每个控制周期中，系统都会更新油门杆 δ_{T}、升降舵 δ_{E}、副翼 δ_{A} 和方向舵 δ_{R} 的位置，从而更新力和力矩，进而引起过程变量的变化。

制导目标		直接输入	主回路	次级回路
油门	$\delta_{\text{目标},\mathrm{T}}$	δ_{T}	$\mathrm{v_{TAS}}$	-
升降舵	$\delta_{\mathrm{TARGET,E}}$	-	θ	$\mathrm{H_P}$，h γ_{TAS}
副翼	$\delta_{\mathrm{TARGET,A}}$	-	ξ	χ, ψ, μ_{TAS}, χ_{TAS}
方向舵	$\delta_{\mathrm{TARGET,R}}$	-	β	-

表7.4：制导目标与控制机制

请注意，四种控制机制（每个控制参数对应一种）彼此完全独立。根据制导系统在特定操作期间提供的特定目标变量，有三种特定实现会应用于某个控制机制，也可能不应用。

7.2.2.1 控制变量的直接输入

此情况仅适用于油门控制的目标变量 $\delta_{\mathrm{TARGET,\ T}}$ 本身就是油门参数 δ_{T} 的情形，如表7.4所示；它可用于表示最大功率爬升（$\delta_{\mathrm{T}}=1$）或怠速下降（$\delta_{\mathrm{T}}=0$）。在这种情况下，油门 δ_{T} 完全不受控制，而是直接取目标所指定的数值，无需任何反馈机制。

7.2.2.2 主回路

此情况适用于制导系统提供的目标变量与表7.4中针对四种控制机制分别列出的目标相对应的情形。此时，每种控制机制均按照图7.6所示的方式实现，并采用类似于第7.2.1节所述的 PID 控制器。这些主 PID 控制回路的输出就是控制参数本身。请注意，图7.6仅展示了四个主回路同时工作的情况，但每种控制机制彼此独立，且只取决于自身的目标变量。

为保留微分控制的优点，同时减轻含噪测量可能引发的不稳定影响，所有主PID回路都加入了低通滤波器，以平滑微分输入。此外，所有主PID回路还采用设定值斜坡，在设定值随运行而变化时减少超调。副翼PID回路与其他回路不同，它由两个PID回路的和构成：主回路依据目标值与估计机体倾斜角之间的差值 ξ，辅助回路则依据目标值与估计空速 $\mathrm{v_{TAS}}$。这样一来，飞机在转弯的同时改变空速时，便能减小控制误差。

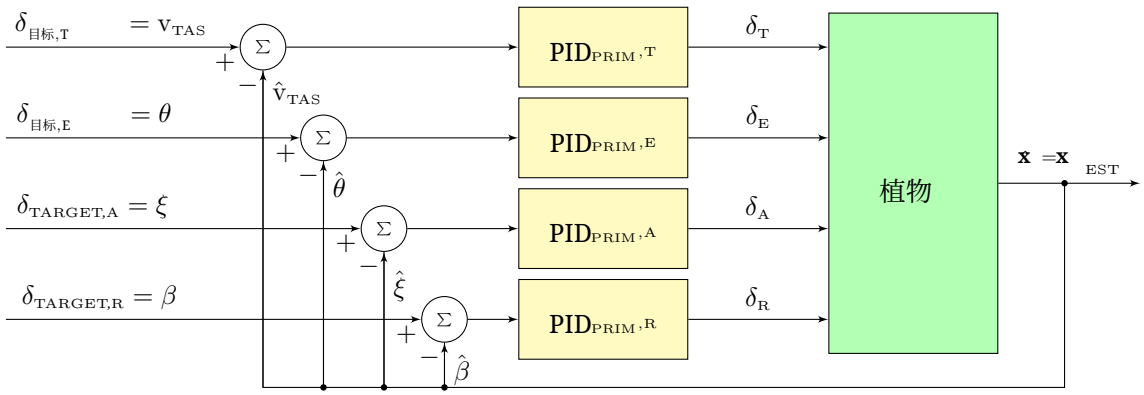

图7.6：主控制回路

7.2.2.3 次级回路

仅升降舵 δ_E 和副翼 δ_A采用了次级控制回路；当制导系统提供的相应目标变量与表7.4所示变量一致时，便会启用这些回路。

次级回路也是 PID 回路，但其输出是主回路的目标，而不是控制变量 [76], ；因此，主回路作用于次级回路提供的动态目标，而非制导目标（图 7.7）。例如，在某项操作中，如果制导系统指示$\delta_{TARGET,\ E} = \{H_P = 2500\ m\}$，则次级回路会在每个控制周期将该数值与估计的气压高度 $\hat{}\ H_P$ 进行比较，并生成一个指定的机身俯仰角目标 θ_{TARGET}作为输出。这个新目标 $\hat{}$ 会输入主回路，并与估计的机身俯仰角 θ进行比较，从而得出升降舵的位置 δ_E。次级回路还会对微分输入专门应用低通滤波器。

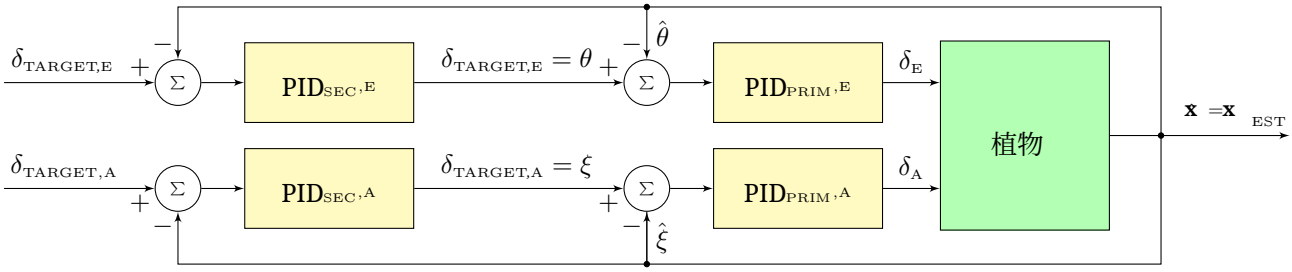

图 7.7：次级控制回路

7.2.3 控制系统目标

控制系统的目标是限制四个主动控制变量各自的飞行技术误差 FTE（章节 1.3），即观测状态与参考状态之间的差值（章节 8.1 和 7.1.1）。要使控制回路正常工作，FTE 或设定值与过程变量之间的差值（章节 7.2.1）必须有相同的概率为正或为负，也就是说，其偏置为零或均值为零，因此标准差和最大误差就成为评估其性能的主要指标。另一个必要条件是，所有控制回路的性能都不随时间变化，即没有漂移；否则，误差最终会变得足够大，影响飞行稳定性，导致平台损失这一灾难性后果。至于最大误差，它们通常出现在设定值改变之后，原因是系统响应过慢或超调目标。

7.3 实现、验证与执行

本章节所述的制导与控制系统已实现为面向对象的 C++库。制导系统的实现相对简单，因为它基于一个制导目标容器，以及一种用于评估触发条件的方法；这些触发条件决定某项操作何时结束，以及何时启动下一项操作。

控制系统建模不仅需要实现第 7.2 节所述的主回路与次回路，还需要调整不同的增益，以获得良好的性能。这一过程包括持续改进：执行一系列尽可能多样的轨迹，从直线、恒速、平飞开始，逐步加入机动（转弯、速度变化和高度变化），先分别进行，再同时进行。该过程涵盖了不同难度的情况，从无湍流、传感器完美且导航完美的开环配置，到本文所述的更贴近现实的条件。每个阶段都会进行细微的设计变更，并调整增益和低通滤波器。

如图 1.1 所示，第 7.1.1 节定义的参考轨迹 $\mathbf{x}_{\mathrm{REF}}$ 既是制导系统的必要输入，也是仿真的必要输入。其说明和触发条件可以用确定性的方式定义，使每次蒙特卡罗执行都采用相同的 $\mathbf{x}_{\mathrm{REF}}$；也可以用随机的方式定义，即根据预先设定的规则，依据某些伪随机生成的参数来确定[3]。如果采用后一种方式，那么与地球模型（第 2.7 节）、传感器误差（第 5.5 节）和精对准结果（第 6.8 节）的情况类似，每次单独的仿真运行或执行中，制导目标都会有所不同*j*，因此取决于第 5.5 节定义的飞行种子$\Upsilon_{\mathrm{j,\ F}}$。

飞行种子 $\Upsilon_{\mathrm{j,F}}$ 是所有随机变量的唯一输入，因此再次使用相同种子即可确保结果可重复。该种子用于初始化离散均匀分布，随后还会额外实现一次（除第2.7、5.5和6.8节所需的实现次数外），以获得制导种子 $\upsilon_{\mathrm{j,F,GUID}}$。制导种子将作为参考轨迹定义中每个随机参数的初始化种子。

[3]由单个操作（$\mathbf{x}_{\mathrm{REF}} = \{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{TARGET,1}}\}$）组成的参考轨迹示例如下（符号说明请参见第 7.1.1 节）：

- 随机的 $\delta_{\text{目标, T}}$ 其中 $\mathbf{v}_{\text{真空速}} = \mathrm{N}\left(29,\ \ 1.5^2\right)\mathrm{m/s}$，即每次蒙特卡罗运行中采用的恒定空速，作为油门参数 δ_{T} 的目标值；该值是均值为 29 m/s、标准差为 1.5m/s 的正态分布的一个实现值。
- 随机的 $\delta_{\text{目标, E}}$ 其中 $\mathrm{H_P} = \mathrm{N}\left(2700,\ \ 200^2\right)\mathrm{m}$，即每次蒙特卡罗运行中采用的恒定压力高度，作为升降舵 δ_{E} 的目标值；该值是均值为 2700 m、标准差为 200 m 的正态分布的一个实现值。
- 随机的 $\delta_{\text{目标, A}}$ 其中 $\chi = \mathrm{U}\left(-179,\ 180\right)^\circ$，即每次蒙特卡罗执行中采用的恒定航向，作为副翼 δ_{A} 的目标值；该值是介于 -179° 和 180° 之间的均匀分布的一个实现值。
- 确定性的 $\delta_{\text{目标, R}}$ 其中 $\beta = 0^\circ$，也就是说，方向舵 δ_{R} 的目标始终是保持对称飞行。
- 随机的 δ_{TRG} 其中 $\Delta\mathrm{t_{OP}} = \mathrm{N}\left(300,\ \ 50^2\right)\mathrm{s}$，也就是说，运行持续时间服从均值为 300 s、标准差为 60s 的正态分布。

第8章

导航

导航系统首先在第7章中作为更广泛的制导、导航与控制系统的一部分引入。它接收并处理传感器输出，然后将结果提供给第7.1和7.2节所述的制导与控制系统。这些输出称为观测轨迹，定义见第8.1节。由于其相对于实际飞机轨迹（第4.3节）的差异或误差较小，且包含飞机姿态和位置等感测轨迹中没有的变量，因此可将其视为感测轨迹的改进版本（第5.1节）。



图8.1：导航系统流程图

图8.1展示了图7.1的部分内容，并说明导航系统如何利用感知状态 $\tilde{\mathbf{x}}(t_s) = \mathbf{x}_{\text{SENSED}}(t_s)$ 以及观测状态的初始估计值 $\hat{\mathbf{x}}_0$，，向制导与控制系统提供第8.1节中定义的观测状态或估计状态 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$。

本章介绍一种标准的惯性导航系统（INS） [5, 6, 7, 12, 13, 14, 45]，，该系统使用第5章中列出的各种传感器，但不包括相机[1]。第8.2节详细介绍构成INS的两个滤波器，随后第8.3节简要说明它们在仿真中的实现。

导航系统的目标是减小导航系统误差NSE（第1.3节），即对于制导与控制系统所需的所有变量（表7.1和表7.2），以及飞行包线保护所需的$\mathbf{v}^{\text{B}}$ 真空速空速分量（第4.2节），观测轨迹与实际轨迹之间的差异。飞机姿态 $\hat{\mathbf{q}}_{\text{NB}}$ 和位置 $\hat{\mathbf{T}}^{\text{E}}$, GDT 的估计尤为重要。

8.1 观测轨迹

观测值或估计值轨迹（OT）是 INS 的输出，代表 GNC 系统对第 4.3 节所述实际轨迹所掌握的最佳信息。观测轨迹首次在第 1.3 节中引入，并表示为 $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \mathbf{x}_{\text{EST}}(t_n)$，其中 $t_n = n \cdot \Delta t_{\text{EST}}$。观测轨迹包含观测状态随时间的变化。可以将其视为第 5.1 节所述感知状态的改进版本，因为它既更完整（包含传感器未测量的变量），也更准确（滤波过程减小了它与实际轨迹之间的差异）。作为.....的输出，

[1]正如第 章中所指出的 1，该仿真经过设计，可接受使用视觉和视觉惯性导航算法的方案，使其能够利用所获取的图像的 通过机载摄像机，但目前尚未实现这些功能。

在惯性导航系统中，观测状态构成了第 7.2 章节所述控制系统的主要输入。实际轨迹与观测轨迹之间的差异会对制导、导航与控制系统的性能产生负面影响，因为控制系统可能会对观测到的、偏离制导轨迹的偏差作出反应，而这些偏差并不是真实的（观测轨迹偏离了制导目标，但实际上实际轨迹在目标上）；或者可能不会对未被观测到的真实偏差作出反应。

主要组件	变量	章节
姿态	$\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}}$	C.2.1
大地位置	$\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{E},\mathrm{GDT}}$	C.1.2.3
Pose	$\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{EB}}$	C.2.1

表 8.1：观测轨迹的主要组件

OT 的组成部分根据其与 INS 的相关性，可分为主要、次要和辅助部分。飞机位姿的估计构成了 INS 的首要目标，如表 8.1 所示。它可以通过两种等效方式表示：一种是大地坐标加上机体姿态的 $\mathbb{SO}(3)$ 表示，另一种是完整的 $\mathbb{SE}(3)$ 位姿表示。如果采用 $\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EB}}$，则 [1]描述了如何从 $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{EB}} = \hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{E},\mathrm{CAR}}$ 获取笛卡尔坐标 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{EB}}$，进而得到大地坐标 $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{E},\mathrm{GDT}}$ 并确定北东地坐标系 $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{EN}}$。随后，可根据 $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}} = \hat{\mathbf{q}}^{*}{}_{\mathrm{EN}} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{EB}}$获得姿态，其中 $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{EB}}$ 也可通过 $\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EB}}$[1]获得。如果更倾向于使用 $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}}$ 和 $\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{E},\mathrm{GDT}}$，则只需反向执行上述过程即可获得 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{EB}}$。

次要分量	变量	章节
角速度	$\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{NB}}$	4.2
地速	$\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$	4.2
旋量	$\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EB}}$	[1]

表 8.2：观测轨迹的次要分量

主要变量的时间导数构成次要分量（表 8.2）。此外，还存在两种等价的格式：欧几里得地速与角速度的 $\mathfrak{so}(3)$ 表示相结合，或采用完整的 $\mathfrak{se}(3)$ 旋量。这里采用 $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EB}}$，其后半部分构成机体地速 $\hat{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EB}} = \hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{B}}$，而 $\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$ 可通过应用 $\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}}$ 旋转作用得到。旋量的前半部分直接给出 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EB}}$，从中减去运动角速度 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EN}}$（章节 4.2）即可得到 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}$；该运动角速度可根据其他分量确定。如果更倾向于使用 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{NB}}$ 和 $\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}$，只需反向执行这一过程即可得到 $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EB}}$。

辅助组件	变量	章节	辅助组件	变量	章节
空速	$\hat{\mathrm{v}}_{\mathrm{TAS}}$	4.2	陀螺仪总误差	$\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{GYR}}$	5.2.8
迎角	$\hat{\alpha}$	C.2.2	加速度计总误差	$\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{ACC}}$	5.2.8
侧滑角	$\hat{\beta}$	C.2.2	磁力计总误差	$\hat{\mathbf{E}}_{\mathrm{MAG}}$	5.3.1
空气温度	$\hat{\mathrm{T}}$	2.3	磁场偏差	$\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{DEV}}$	2.6
气压高度	$\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{P}}$	2.3	比力	$\hat{\mathbf{f}}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{IB}}$	4.4.2.1
温度偏差	$\Delta\hat{\mathrm{T}}$	2.3	风场	$\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{WIND}}$	2.4
气压偏差	$\Delta\hat{\mathrm{p}}$	2.3	Mass	$\hat{\mathrm{m}}$	3.1

表 8.3：观测轨迹的辅助组件

T表 8.3 中列出的 INS 其余估计值构成了辅助观测轨迹变量 .

8.2 惯性导航滤波器

所提出的惯性导航系统由两个滤波器组成，二者共同估计观测值或估计状态的所有分量（第 8.1 节）。这两个滤波器依次运行，分别为空数据滤波器（1st 执行，第 8.2.1 节）和导航滤波器（2nd，第 8.2.2 节）。

使用了两个滤波器 而不是单一滤波器，因为描述飞机

相对于空气而非地面的飞机位置和运动的观测状态分量（例如空速、攻角和侧滑角、空气温度及气压高度），独立于与地球表面相关的分量（例如飞机姿态、速度和位置）。这是因为任何同时包含这两组变量的方程，也会包含 INS 未知的变量，例如风速或气压偏差。这两组变量之间缺乏关联，因此建立一个独立且规模较小的滤波器来估计空中数据变量，在计算上更高效。

根据 (4.1) 可以很好地解释这一点：地速 $\mathbf{v}$ 是空速 $\mathbf{v}_{\text{TAS}}$ 、风场 $\mathbf{v}_{\text{WIND}}$ 和湍流 $\mathbf{v}_{\text{TURB}}$之和。由于没有传感器能够直接测量风场或湍流，因此 (4.1) 不能纳入任何滤波器，只能在估计出地速和空速后，用于计算风与湍流合成速度（$\mathbf{v}_{\text{WIND}} + \mathbf{v}_{\text{TURB}}$）。

以下章节将详细介绍这两种滤波器，它们均采用扩展卡尔曼滤波器 （EKF）实现。有关 EKF 的详细说明，请参阅 [1] ，其中涵盖了状态向量变量全为欧几里得变量，以及状态向量变量还包含李群元素这两种情况。对于一个系统，若其状态可由一组变量（状态变量或状态向量变量）描述，且存在对这些变量随时间变化进行建模的一阶连续时间非线性动力学、另一组变量（观测或测量值），其数值在离散时刻给出，以及一个将观测与状态变量关联起来的离散时间非线性观测系统，则 EKF 会在每个提供测量值的时刻估计状态向量变量的均值和协方差。在本文档中，测量值以固定频率（$t_n = n \cdot \Delta t_{\text{EST}}$）提供，因此状态向量的估计值也以相同频率更新。

章节	目标
	状态向量和观测向量的介绍。
1st	状态动力学及其线性化的描述。
2nd	观测系统及其线性化的说明。
3rd	李群元素重置（仅适用于非欧几里得情形）。
4th	所采用的过程噪声和观测噪声的合理性说明。
5th	状态变量及其协方差的初始化。
6th	用于估计其他变量的额外步骤。

表 8.4：各扩展卡尔曼滤波器描述所采用的方案

两个滤波器的描述均遵循表 8.4 所示的相同结构，并根据状态向量是否完全属于欧几里得空间进行少量修改。首先介绍状态变量（即待估计的变量）以及滤波器所依据的观测或测量值。采样数据系统描述状态向量的动力学，并包括连续时间非线性状态系统的定义，以及基于系统矩阵$\mathbf{A}(t)$和过程噪声变换矩阵$\mathbf{L}(t)$的线性化。请注意，尽管修改后的输入向量 $\tilde{\mathbf{u}}(t)$属于线性化状态系统的一部分，但它并非扩展卡尔曼滤波器求解的一部分，因此不会被计算。采样观测系统描述测量向量与状态向量之间的关系，并包括初始非线性系统，以及基于输出矩阵$\mathbf{H}_n$ 和测量噪声变换矩阵$\mathbf{M}_n$的线性化。与上文相同，输入向量$\mathbf{z}_n$ 不参与求解，因此不予展示。

线性化状态系统依赖于一个均值为零的连续时间白噪声随机过程 $\tilde{\mathbf{w}}(t)$，该过程会离散化为 $\tilde{\mathbf{w}}_n$。这种离散白噪声由其协方差 $\mathbf{Q}_{dn}$表征。在少数情况下，状态系统方程是精确的，此时可直接从方程中得到该协方差；但一般而言，需要在更相信含噪测量值（协方差较大、状态估计噪声较多、能够快速检测变量变化）与更依赖状态系统方程（协方差较小、结果更平滑、检测变量变化较慢）之间进行权衡。注意，$\mathbf{Q}_{dn}$ 的非对角线项为零，因为噪声分量被视为相互独立。另一方面，线性化观测系统同样依赖于一个均值为零的离散时间白噪声随机过程 $\tilde{\mathbf{v}}_n$，其协方差 $\mathbf{R}_n$ 通常可以根据传感器

~第5章中描述的特性获得。与系统噪声的情况一样，$\mathbf{R}_n$ 的非对角线项也为零。

每个扩展卡尔曼滤波器的描述最后都会说明其如何根据状态变量$\mathbf{x}_0^+$及其协方差$\mathbf{P}_0^+$的初始估计值进行初始化，并获取观测轨迹中存在但不属于滤波器状态向量的其他变量。

8.2.1 欧几里得空间中的空数据滤波器

空数据滤波器的目标是根据观测向量 (8.2) 中的周期性测量值，估计状态向量 (8.1) 所包含的变量。

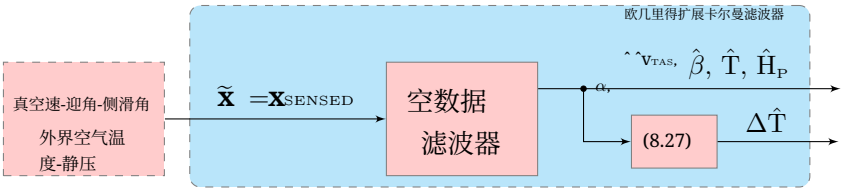

图 8.2：空数据滤波器流程图

$$\mathbf{x}(t) = \left[v_{TAS} \;\; \alpha \;\; \beta \;\; T \;\; H_P \;\; ROC \;\; \dot{v}_{TAS} \;\; \dot{\alpha} \;\; \dot{\beta}\right]^T \in \mathbb{R}^9(t) \tag{8.1}$$

$$\mathbf{y}_n = \left[\tilde{v}_{TAS} \;\; \tilde{\alpha} \;\; \tilde{\beta} \;\; \tilde{T} \;\; \tilde{p}\right]^T \in \mathbb{R}^5{}_n \tag{8.2}$$

所有测量值均由大气数据系统（章节 5.3.2）提供，而爬升率 (ROC) 是气压高度的时间导数。测量值$\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n)$按 $t_n = n \cdot \Delta t_{EST}$ 等间隔采样，如表 1.2 所述。所有 (8.1) 分量均为欧几里得量，因此适用经典扩展卡尔曼滤波方案 [1]。请注意，滤波器不会尝试估计大气数据系统的偏置 $\{B_{0TAS}, B_{0AOA}, B_{0AOS}, B_{0OAT}, B_{0OSP}\}$，因为没有足够的信息（观测）来估计这些偏置；这些偏置误差因此会累积到估计变量中。

8.2.1.1 空数据状态系统

空数据滤波器的状态方程可分为两组：一组中，某个状态变量对时间的导数与另一个变量相同；另一组中，惯性导航系统对该状态变量的动力学一无所知，因此其对时间的导数设为零[2]。章节 8.2.1.3 中描述的系统噪声规定了状态变量的估计值应在多大程度上符合含噪测量值。因此，可以建立如下线性连续时间状态系统：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{AIR}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t), t\right) \tag{8.3}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{v}_{TAS} = \mathbf{x}_7 \tag{8.4}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \dot{\alpha} = \mathbf{x}_8 \tag{8.5}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \dot{\beta} = \mathbf{x}_9 \tag{8.6}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_5 = \dot{H}_P = \mathbf{x}_6 = ROC \tag{8.7}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{OTHER} = \mathbf{0}_5 \tag{8.8}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \tag{8.9}$$

上述线性状态系统也可以写成以下形式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\tilde{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{w}}(t) \tag{8.10}$$

[2]请注意，尽管存在系统噪声$\mathbf{w}(t)$，但公式 (8.4) 至 (8.8) 中并未显示该噪声。

$$\mathbf{A}\left(\mathrm{t}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3\mathrm{x}5} & \mathbf{O}_{3\mathrm{x}1} & \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \\ \mathbf{O}_{1\mathrm{x}5} & 0 & \mathbf{O}_{1\mathrm{x}3} \\ \mathbf{O}_{1\mathrm{x}5} & 1 & \mathbf{O}_{1\mathrm{x}3} \\ \mathbf{O}_{4\mathrm{x}5} & \mathbf{O}_{4\mathrm{x}1} & \mathbf{O}_{4\mathrm{x}3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9\mathrm{x}9}\left(\mathrm{t}\right) \tag{8.11}$$

$$\widetilde{\mathbf{u}}\left(\mathrm{t}\right) = \mathbf{0} \tag{8.12}$$

由于缺乏对系统动力学的了解，空数据滤波器的唯一用途是通过减少测量值中的噪声来平滑估计值。虽然它本可以实现为低通滤波器 [74], 但作者更倾向于采用扩展卡尔曼滤波器，以便与导航滤波器保持一致（章节 8.2.2）。

8.2.1.2 空数据观测

由于压力与气压高度的比值（8.18）对应于（2.62），观测向量与状态向量之间的关系并非线性；不过，由于其他方程都很简单，这种关系仍相当简单[3]:

$$\mathbf{y}_{\mathrm{n}} = \mathbf{h}_{\mathrm{AIR}}\left(\mathbf{x}_{\mathrm{n}},\, \mathbf{v}_{\mathrm{n}},\, \mathrm{t}_{\mathrm{n}}\right) \tag{8.13}$$

$$\widetilde{\mathrm{v}}_{\mathrm{TAS}} = \mathrm{v}_{\mathrm{TAS}} \tag{8.14}$$

$$\widetilde{\alpha} = \alpha \tag{8.15}$$

$$\widetilde{\beta} = \beta \tag{8.16}$$

$$\widetilde{\mathrm{T}} = \mathrm{T} \tag{8.17}$$

$$\widetilde{\mathrm{p}} = \mathrm{p}_0 \left(1 + \frac{\beta_{\mathrm{T}}}{\mathrm{T}_0}\, \mathrm{H}_{\mathrm{P}}\right)^{-\frac{\mathrm{g}_0}{\beta_{\mathrm{T}} \mathrm{R}}} \tag{8.18}$$

对上述系统进行线性化，得到一个离散时间线性观测系统:

$$\mathbf{y}_{\mathrm{n}} \approx \mathbf{H}_{\mathrm{n}}\, \mathbf{x}_{\mathrm{n}} + \mathbf{z}_{\mathrm{n}} + \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{n}} \tag{8.19}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{4\mathrm{x}4} & \mathbf{O}_{4\mathrm{x}1} & \mathbf{O}_{4\mathrm{x}4} \\ \mathbf{O}_{1\mathrm{x}4} & \dfrac{-\mathrm{g}_0\, \mathrm{p}}{\mathrm{R}\ \left(\mathrm{T}_0 + \beta_{\mathrm{T}}\, \mathrm{H}_{\mathrm{P}}\right)} & \mathbf{O}_{1\mathrm{x}4} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\mathrm{x}9}{}_{\mathrm{n}} \tag{8.20}$$

其中，输出矩阵$\mathbf{H}_{\mathrm{n}}$ 取决于式（2.45）给出的 H_{P} 与 p 之比；由于观测输入向量$\mathbf{z}_{\mathrm{n}}$ 对求解不起作用，因此无需计算。

8.2.1.3 空数据白噪声与初始化

过程噪声 $\widetilde{\ }\mathbf{w}_{\mathrm{n}}$ 的协方差由作者设定，目的是在估计状态向量变量的数值时，确定动力学方程相对于观测的权重。对于较精确的状态方程（例如式 (8.7)），赋予较小的数值；对于不够精确的方程，则赋予较大的数值，例如第 8.2.1.1 节中的其余状态变量。在这些变量中，由于惯性导航系统不了解其动力学，时间导数被设为零:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_{9\mathrm{x}9} \tag{8.21}$$

$$\mathrm{Diag}\ \widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 10^{-15} & 10^{-15} & 10^{-15} & 10^{-4} & 10^{-15} & 10^{-3} & 10^{-4} & 10^{-6} & 10^{-6} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^9 \tag{8.22}$$

其中，Diag () 表示矩阵的对角线。对于测量噪声 $\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$，其协方差与不同大气数据传感器引入的系统噪声相一致（章节 5.3.2）。请注意，由于系统噪声和测量噪声都作用于 (8.1) 和 (8.2) 向量中包含的相同变量，因此噪声

[3]请注意，尽管存在测量噪声$\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$，但在公式 (8.14) 至 (8.18) 中并未显示。

变换矩阵 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$ 是酉矩阵。

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_{5x5} \tag{8.23}$$

$$\text{Diag}\ \widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix}\sigma^2_{\text{TAS}} & \sigma^2_{\text{AOA}} & \sigma^2_{\text{AOS}} & \sigma^2_{\text{OAT}} & \sigma^2_{\text{OSP}}\end{bmatrix}^{\text{T}} \in \mathbb{R}^5 \tag{8.24}$$

为进行初始化，空数据滤波器将初始测量值用作初始估计值 $\hat{}\mathbf{x}_0^+$，并使用空数据传感器（第 5.3.2 节）的系统噪声和偏置来确定初始估计值的协方差$\mathbf{P}_0^+$。使用方程（2.61）和（2.63）计算气压高度的协方差；若没有可用数据（例如爬升率和其他时间导数的情况），则采用零值。

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \begin{bmatrix}\widetilde{\text{v}}_{\text{TAS},0} & \widetilde{\alpha}_0 & \widetilde{\beta}_0 & \widetilde{\text{T}}_0 & \text{H}_\text{P}\left(\widetilde{\text{p}}_0\right) & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\text{T}} \in \mathbb{R}^9 \tag{8.25}$$

$$\text{Diag}\ \mathbf{P}_0^+ = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\text{TAS}} + \text{B}^2_{0,\text{TAS}} \\ \sigma^2_{\text{AOA}} + \text{B}^2_{0,\text{AOA}} \\ \sigma^2_{\text{AOS}} + \text{B}^2_{0,\text{AOS}} \\ \sigma^2_{\text{OAT}} + \text{B}^2_{0,\text{OAT}} \\ \left[\dfrac{\text{dH}_\text{P}}{\text{dp}}\left(\text{p}, \text{H}_\text{P}\left(\text{p}\right)\right)\right]^2 \left(\sigma^2_{\text{OSP}} + \text{B}^2_{0,\text{OSP}}\right) \\ \mathbf{O}_{4x1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 \tag{8.26}$$

8.2.1.4 空气数据额外步骤

空数据滤波器步骤结束后，根据（2.59）估计温度偏差 ΔT:

$$\Delta\hat{\text{T}} = \hat{\text{T}} - \text{T}_0 - \beta_\text{T}\ \hat{\text{H}}_\text{P} \tag{8.27}$$

8.2.2 刚体旋转局部流形中的导航滤波器 $\mathbf{s}$

导航滤波器的目标是基于（8.30）观测向量提供的周期性测量值，对$\mathbf{q}_{\text{NB}}$ 以及（8.29）状态向量中包含的变量进行估计。由于表示 $\mathbb{SO}(3)$ 的机体姿态$\mathbf{q}_{\text{NB}}$ 不是欧几里得的，因此对经典扩展卡尔曼滤波方案进行了修改，以确保$\mathbf{q}_{\text{NB}}$ 通过由 $\Delta\mathbf{r}^{\text{B}}{}_{\text{NB}}$ 表示的局部（机体）扰动进行更新，从而始终不会偏离其 $\mathbb{SO}(3)$ 流形 [1]。

$$\mathcal{R}\left(\text{t}\right) = \mathbf{q}_{\text{NB}} \in \mathbb{SO}(3)\left(\text{t}\right) \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\left(\text{t}\right) &= \left[\Delta\mathbf{r}^{\text{B}}_{\text{NB}} \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{NB}} \quad \mathbf{z}\right]^{\text{T}} \\ &= \left[\Delta\mathbf{r}^{\text{B}}_{\text{NB}} \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{B}}_{\text{NB}} \quad \mathbf{T}^{\text{E,GDT}} \quad \mathbf{v}^{\text{N}} \quad \mathbf{f}^{\text{B}}_{\text{IB}} \quad \mathbf{E}_{\text{GYR}} \quad \mathbf{E}_{\text{ACC}} \quad \mathbf{E}_{\text{MAG}} \quad \mathbf{B}^{\text{N}}_{\text{DEV}}\right]^{\text{T}} \in \mathbb{R}^{27}\left(\text{t}\right)\end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\mathbf{y}_\text{n} = \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^{\text{B}}_{\text{IB}} & \widetilde{\mathbf{f}}^{\text{B}}_{\text{IB}} & \widetilde{\mathbf{B}}^{\text{B}} & \widetilde{\mathbf{T}}^{\text{E,GDT}} & \widetilde{\mathbf{v}}^{\text{N}}\end{bmatrix}^{\text{T}} \in \mathbb{R}^{15}{}_\text{n} \tag{8.30}$$

请注意，$\Delta\mathbf{r}^{\text{B}}{}_{\text{NB}}$ 包含$\mathbf{q}_{\text{NB}}$的机体扰动，并且测量值以不同频率提供：陀螺仪（章节 5.2.8）提供的惯性角速度、加速度计（章节 5.2.8）提供的比力以及磁力计（章节 5.3.1）提供的磁场读数，每$\Delta\text{t}_{\text{SENSED}} = 0.01$ 秒可获取一次；而GNSS接收机提供的地速和位置测量值则每 $\Delta\text{t}_{\text{GNSS}} = 1$ 秒生成一次（章节 5.3.3）。

8.2.2.1 导航局部 $\mathbb{SO}(3)$ 状态系统

状态变量随时间的变化构成一个连续时间非线性系统[4]，该系统由三个精确方程（未作任何简化）组成，分别为旋转运动的时间导数 [1], 、大地坐标的运动学方程 (4.21)，以及飞机速度动力学方程 (4.42)；此外还有六个其他微分方程，其中惯性导航系统对状态变量的时间导数一无所知，

[4]请注意，尽管存在系统噪声 $\mathbf{w}(\text{t})$，但它并未显示在公式 (8.32) 至 (8.35) 中。

因此这些导数被设为
零：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}\left(\mathrm{t}\right) &= \left[\Delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} \quad \dot{\mathbf{z}}\right]^{\mathrm{T}} \\
&= \mathbf{f}_{\mathrm{LSO3}}\left(\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\left(\mathrm{t}\right) \oplus \Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\left(\mathrm{t}\right), \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}\left(\mathrm{t}\right), \mathbf{z}\left(\mathrm{t}\right), \mathbf{u}\left(\mathrm{t}\right), \mathbf{w}\left(\mathrm{t}\right), \mathrm{t}\right) && (8.31) \\
\dot{\mathbf{x}}_{1-3} &= \Delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{x}_{4-6} && (8.32) \\
\dot{\mathbf{x}}_{7-9} &= \dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{v}_2^{\mathrm{N}}}{\left[\mathrm{N}\left(\varphi\right)+\mathrm{h}\right]\cos\varphi} & \dfrac{\mathrm{v}_1^{\mathrm{N}}}{\mathrm{M}\left(\varphi\right)+\mathrm{h}} & -\mathrm{v}_3^{\mathrm{N}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} && (8.33) \\
\dot{\mathbf{x}}_{10-12} &= \dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} = \mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}} \oplus \Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}*}^{\mathrm{B}}}\left(\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\right) - \widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\,\mathbf{v}^{\mathrm{N}} + \mathbf{g}_{\mathrm{c,MOD}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} && (8.34) \\
\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{OTHER}} &= \left[\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} \quad \dot{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} \quad \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{GYR}} \quad \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ACC}} \quad \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{MAG}} \quad \dot{\mathbf{B}}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}}\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}_{18} && (8.35) \\
\mathbf{u}\left(\mathrm{t}\right) &= \mathbf{0} && (8.36)
\end{aligned}$$

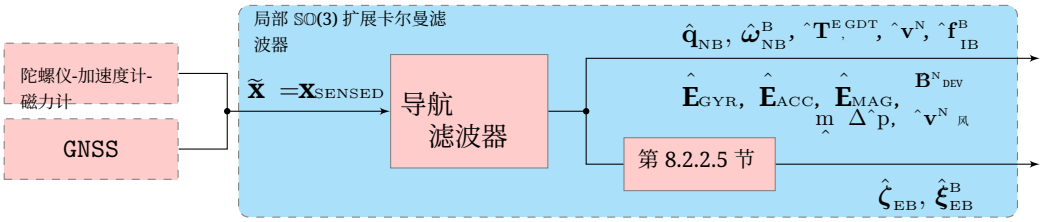

图 8.3：局部 $\mathbb{SO}(3)$ 导航滤波器流程图

其线性化得到以下系统矩阵 $\mathbf{A(t)} \in \mathbb{R}^{27\mathrm{x}27}$。该矩阵利用了相对于北东地速度的运动角速度、大地坐标和科里奥利加速度雅可比矩阵（4.15、4.22、4.35），以及 [1] 中列出的 $\mathbb{SO}(3)$ 向量旋转作用 $\mathbf{g}_{\mathcal{R}*}\mathbf{(v)}$ 的雅可比矩阵。请注意，线性化忽略了（8.31）微分方程中四个不同项（$\dot{\mathbf{T}}_{\mathrm{E,\,GDT}}$、$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{EN}}$、$\mathbf{g}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{c\,MOD}}$ 和 $\mathbf{a}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{cor}}$）对大地坐标 $\mathbf{T}^{\mathrm{E,\,GDT}}$ 的影响，但纳入了其中三项对飞机速度 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 的影响（重力不依赖于速度）。这是因为单次状态估计步骤中可能出现的 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}$ 变化量会显著影响所考虑变量的数值，而大地坐标 $\mathbf{T}^{\mathrm{E,\,GDT}}$ 的变化量则不会，因此可以忽略。

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}\left(\mathrm{t}\right) &= \mathbf{A}\left(\mathrm{t}\right)\mathbf{x}\left(\mathrm{t}\right) + \mathbf{B}\left(\mathrm{t}\right)\tilde{\mathbf{u}}\left(\mathrm{t}\right) + \tilde{\mathbf{w}}\left(\mathrm{t}\right) && (8.37) \\
\mathbf{A}_{1-3,4-6} &= \frac{\mathrm{d}\Delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \text{积分控制器}_{3\mathrm{x}3} && (8.38) \\
\mathbf{A}_{7-9,10-12} &= \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \mathbf{J}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}\dot{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} && (8.39) \\
\mathbf{A}_{10-12,1-3} &= \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{J}_{\oplus\mathcal{R}}-\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}*}\left(\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}\right) && (8.40) \\
\mathbf{A}_{10-12,10-12} &= \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = -\widehat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} + \hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}\mathbf{J}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{J}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}\mathbf{a}_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{N}} && (8.41) \\
\mathbf{A}_{10-12,13-15} &= \frac{\mathrm{d}\,\dot{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{J}_{*(\mathbf{f}_{\mathrm{B\,惯性}})}-\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB\,基准}}^{\mathrm{B}})} && (8.42) \\
\mathbf{A}_{\mathrm{ij,\ OTHER}} &= 0 && (8.43) \\
\tilde{\mathbf{u}}\left(\mathrm{t}\right) &= \mathbf{0} && (8.44)
\end{aligned}$$

8.2.2.2 导航 Local $\mathbb{SO}(3)$ 观测

(8.45)离散时间非线性观测系统[5] 分别基于陀螺仪、加速度计、磁力计和GNSS接收机提供的测量值，不包含任何简化。

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\mathrm{n}} &= \mathbf{h}_{\mathrm{LSO3}}\left(\mathbf{q}_{\mathrm{NBn}} \oplus \Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NBn}}^{\mathrm{B}}, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NBn}}^{\mathrm{B}}, \mathbf{z}_{\mathrm{n}}, \mathbf{v}_{\mathrm{n}}, \mathrm{t}_{\mathrm{n}}\right) && (8.45) \\
\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{Ad}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}} \oplus \Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}}^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}\right) + \mathbf{E}_{\mathrm{GYR}} && (8.46)
\end{aligned}$$

[5]请注意，尽管测量噪声$\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$ 存在，但在公式（8.46）至（8.50）中并未显示。

$$\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}} + \mathbf{E}_{\mathrm{ACC}} \tag{8.47}$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}} = \mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}}^{-1} \oplus \Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}*}^{\mathrm{B}} (\mathbf{B}_{\mathrm{MOD}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{B}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}}) + \mathbf{E}_{\mathrm{MAG}} \tag{8.48}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}} = \mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}} \tag{8.49}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} = \mathbf{v}^{\mathrm{N}} \tag{8.50}$$

其线性化得到以下输出矩阵 $\mathbf{H}_{\mathrm{n}} \in \mathbb{R}^{15\mathrm{x}27}$，其中使用了相对于北东地速度的运动角速度雅可比矩阵 (4.15)，以及 $\mathbb{SO}(3)$ 逆向量旋转作用 $\mathbf{g}_{\mathcal{R}*}^{-1}(\mathbf{v})$ 和逆伴随作用 $\mathbf{Ad}_{\mathcal{R}}^{-1}(\mathbf{w})$ 的雅可比矩阵（列于 [1]）。与状态系统的情况一样，线性化还忽略了 (8.45) 观测方程中三个不同项（$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{IE}}$、$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{EN}}$ 和 $\mathbf{B}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{MOD}}$）对大地坐标 $\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}}$ 的影响。请注意，无需计算观测输入向量$\mathbf{z}_{\mathrm{n}}$，因为它对求解没有作用。

$$\mathbf{y}_{\mathrm{n}} \approx \mathbf{H}_{\mathrm{n}}\,\mathbf{x}_{\mathrm{n}} + \mathbf{z}_{\mathrm{n}} + \widetilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{n}} \tag{8.51}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,1-3} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{J}_{\oplus\,\mathcal{R}}^{-\,\mathbf{Ad}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}}^{-1}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}})} \tag{8.52}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,4-6} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.53}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,10-12} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \mathbf{J}_{+\,\boldsymbol{\omega}}^{-\,\mathbf{Ad}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}}^{-1}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{IE}}^{\mathrm{N}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}})}\,\mathbf{J}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}^{\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{EN}}^{\mathrm{N}}} \tag{8.54}$$

$$\mathbf{H}_{1-3,16-18} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{GYR}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.55}$$

$$\mathbf{H}_{4-6,13-15} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{f}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.56}$$

$$\mathbf{H}_{4-6,19-21} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{ACC}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.57}$$

$$\mathbf{H}_{7-9,1-3} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}}^{\mathrm{B}}} = \mathbf{J}_{\oplus\,\mathcal{R}}^{-\,\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}*}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathrm{MOD}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{B}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}})} \tag{8.58}$$

$$\mathbf{H}_{7-9,22-24} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{E}_{\mathrm{MAG}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.59}$$

$$\mathbf{H}_{7-9,25-27} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}\mathbf{B}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}}} = -\mathbf{J}_{+\,\mathbf{v}}^{-\,\mathbf{g}_{\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}\oplus\Delta\mathbf{r}_{\mathrm{NB}*}^{\mathrm{B}}}^{-1}(\mathbf{B}_{\mathrm{MOD}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{B}_{\mathrm{DEV}}^{\mathrm{N}})} \tag{8.60}$$

$$\mathbf{H}_{10-12,7-9} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}}{\mathrm{d}\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.61}$$

$$\mathbf{H}_{13-15,10-12} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}\mathbf{v}^{\mathrm{N}}} = \mathbf{I}_{3\mathrm{x}3} \tag{8.62}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{ij,OTHER}} = 0 \tag{8.63}$$

8.2.2.3 导航局部 $\mathbb{SO}(3)$重置

如 [1], 所述，能够接受包含非欧几里得（李群）分量的状态向量的改进的扩展卡尔曼滤波方案，在每个状态估计周期中都包含一个额外步骤。在导航滤波器中，此步骤将 $\Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}+}{}_{\mathrm{NBn}}$ 扰动纳入 $\hat{\mathbf{q}}^{+}{}_{\mathrm{NBn}}\,\mathbb{SO}(3)$ 参数化中，这也意味着更新误差协方差估计 $\mathbf{P}_{\mathrm{n}}^{+}$。后者通过 $\mathbf{J}_{\ominus}\,\hat{\mathbf{q}}^{+}{}_{\mathrm{NBn}} \oplus \Delta\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{B}+}{}_{\mathrm{NBn}} \oplus\,\mathcal{R}$ 雅可比矩阵实现，前者则通过以下方式实现：

$$\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NBn}}^{+} \longleftarrow \hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NBn}}^{+} \oplus \Delta\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{NBn}}^{\mathrm{B}+} \tag{8.64}$$

$$\Delta\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{NBn}}^{\mathrm{B}+} \longleftarrow \mathbf{0}_3 \tag{8.65}$$

8.2.2.4 导航局部 $\mathbb{SO}(3)$ 白噪声与初始化

对于 (8.31) 或 (8.37) 中更精确的方程，过程噪声 $\tilde{}\mathbf{w}_{\mathrm{n}}$ 应采用较小的值进行调整，反之则采用较大的值。请注意，大地坐标的协方差采用线性单位，因此需要根据 (8.67) 将其转换为大地坐标单位，从而得到非酉变换矩阵 $\mathbf{L}$。

$$\operatorname{Diag}\mathbf{L}_{1-6,1-6} = \mathbf{I}_6 \tag{8.66}$$

$$\mathbf{L}_{7-9,7-9} = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}^{\mathrm{E,GDT}} \tag{8.67}$$

$$\operatorname{Diag}\mathbf{L}_{10-27,10-27} = \mathbf{I}_{18} \tag{8.68}$$

$$\operatorname{Diag}\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 5\cdot10^{-15}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2 & 1\cdot10^{-6}\,\mathbf{I}_3\,\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^4 & 1\cdot10^{-3}\,\mathbf{I}_2\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \\ 5\cdot10^{-6}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 & 5\cdot10^{-13}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^4 & 1\cdot10^{-4}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^6 \\ 3\cdot10^{-14}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^4 & 1\cdot10^{-3}\,\sigma^2_{\mathrm{uACC}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^6 \\ 1\cdot10^{-14}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{nT}^2/\mathrm{s}^2 & 1\cdot10^{-12}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{nT}^2/\mathrm{s}^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{27} \tag{8.69}$$

由于（8.45）或（8.51）观测方程中没有任何简化，导航滤波器可以依赖特定传感器的系统噪声。请注意，$\mathbf{M}$ 变换矩阵不是单位矩阵，这是因为线性位置误差需要转换为大地坐标（8.71）。

$$\operatorname{Diag}\mathbf{M}_{1-9,1-9} = \mathbf{I}_9 \tag{8.70}$$

$$\mathbf{M}_{10-12,10-12} = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}^{\mathrm{E,GDT}} \tag{8.71}$$

$$\operatorname{Diag}\mathbf{M}_{13-15,13-15} = \mathbf{I}_3 \tag{8.72}$$

$$\operatorname{Diag}\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mathrm{vGYR}}\cdot\Delta\mathrm{t}^{-1}_{\mathrm{EST}}\,\mathbf{I}_3\ {}^{\circ 2}/\mathrm{s}^2 & \sigma^2_{\mathrm{vACC}}\cdot\Delta\mathrm{t}^{-1}_{\mathrm{EST}}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^4 \\ \sigma^2_{\mathrm{v,MAG}}\cdot\Delta\mathrm{t}^{-1}_{\mathrm{EST}}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{nT}^2/\mathrm{s}^2 & \boldsymbol{\sigma}^2_{\mathrm{POS}}\ \mathrm{m}^2 \quad \boldsymbol{\sigma}^2_{\mathrm{VEL}}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{15} \tag{8.73}$$

导航滤波器的初始化依赖于第 6.7 章节所述精对准过程的结果与机载传感器提供的初始测量值的组合。$\mathbb{SO}(3)$ 表示 $\hat{}\mathbf{q}^+_{\mathrm{NB0}}$ 和状态变量 $\hat{}\mathbf{x}^+_0$ 的初始估计值基于初始陀螺仪、加速度计和 GNSS接收机测量值（$\tilde{\omega}^{\mathrm{B}}$ IB 0、$\tilde{}\mathrm{f}^{\mathrm{B}}$ IB 0、$\tilde{}\mathrm{T}_0^{\mathrm{E\ GDT}}$、$\tilde{}\mathrm{v}_0^{\mathrm{N}}$），并结合飞机姿态 $\mathbf{q}_{\mathrm{NB}}$、陀螺仪误差 $\mathrm{E}_{\mathrm{GYR}}$、加速度计误差 $\mathrm{E}_{\mathrm{ACC}}$、磁力计误差 $\mathrm{E}_{\mathrm{MAG}}$ 以及磁场偏差 B^{N} DEV,INIT 的精对准估计值。

对于这些初始估计的**比例**$^+_0$ 协方差，它们依赖于手动调整的姿态数值[6]，并结合第 6.4 表的精对准结果与第 2 章和第 5 章中的各种固定参数所获得的协方差。与之前的情况一样，请注意，水平位置的初始协方差在代入 (8.74) 时，会从距离单位转换为经度和纬度：

$$\operatorname{Diag}\mathbf{P}^+_0 = \begin{bmatrix} 1\cdot10^{-8}\,\mathbf{I}_3\ \mathrm{rad}^2 \\ \left(\sigma^2_{\mathrm{vGYR}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}{}^{-1} + \left(\mathrm{B}^2_{0\mathrm{GYR}} + \sigma^2_{\mathrm{uGYR}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}\right)\,\sigma^2_{\mathrm{E,GYR,INIT}}\right)\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}^{\mathrm{E,GDT}} \quad \left[\sigma^2_{\mathrm{GNSS,POS,HOR}} \quad \sigma^2_{\mathrm{GNSS,POS,HOR}} \quad \sigma^2_{\mathrm{GNSS,POS,VER}}\right]^{\mathrm{T}}\,\mathbf{J}\,\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{v}^{\mathrm{N}}}^{\mathrm{E,GDT}\ \mathrm{T}} \\ \sigma^2_{\mathrm{GNSS,VEL}}\,\mathbf{I}_3 \\ \left(\sigma^2_{\mathrm{vACC}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}{}^{-1} + \left(\mathrm{B}^2_{0\mathrm{ACC}} + \sigma^2_{\mathrm{uACC}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}\right)\,\sigma^2_{\mathrm{E,ACC,INIT}}\right)\mathbf{I}_3 \\ \left(\mathrm{B}^2_{0\mathrm{GYR}} + \sigma^2_{\mathrm{uGYR}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}\right)\,\sigma^2_{\mathrm{E,GYR,INIT}}\,\mathbf{I}_3 \\ \left(\mathrm{B}^2_{0\mathrm{ACC}} + \sigma^2_{\mathrm{uACC}}\,\Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}}\right)\,\sigma^2_{\mathrm{E,ACC,INIT}}\,\mathbf{I}_3 \left(\mathrm{B}^2_{0,\mathrm{MAG}} + \mathrm{B}^2_{\mathrm{HI,MAG}}\right)\,\sigma^2_{\mathrm{E,MAG,INIT}}\,\mathbf{I}_3 \\ \left[\sigma^2_{\mathrm{BDEV},1} \quad \sigma^2_{\mathrm{BDEV},2} \quad \sigma^3_{\mathrm{BDEV},1}\right]^{\mathrm{T}}\,\sigma^2_{\mathrm{BN,DEV,INIT}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{27} \tag{8.74}$$

$$\hat{\mathbf{q}}^+_{\mathrm{NB0}} = \mathbf{q}_{\mathrm{NB,INIT}} \in \mathbb{SO}(3) \tag{8.75}$$

[6]直接将姿态协方差设为精对准的结果会导致结果不稳定，因此作者对该数值进行了仔细调整。

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{IB},0}^{\mathrm{B}} - \mathbf{E}_{\mathrm{GYR,INIT}} & \widetilde{\mathbf{T}}_0^{\mathrm{E,GDT}} & \widetilde{\mathbf{v}}_0^{\mathrm{N}} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\mathrm{IB},0}^{\mathrm{B}} - \mathbf{E}_{\mathrm{ACC,INIT}} & \mathbf{E}_{\mathrm{GYR,INIT}} & \mathbf{E}_{\mathrm{ACC,INIT}} & \mathbf{E}_{\mathrm{MAG,INIT}} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{DEV,INIT}}^{\mathrm{N}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{27} \tag{8.76}$$

8.2.2.5 导航 Local $\mathbb{SO}(3)$ 额外步骤

只有估计出观测状态 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\mathrm{EST}}$（第 8.1 节）中尚未由滤波器估计的那些变量，每个导航步骤才算完成；这些变量包括按照第 8.1 节说明获得的飞机位姿 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_{\mathrm{EB}}$ 和局部旋量 $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{EB}}$、大气压力偏置 $\Delta\hat{\mathrm{p}}$、风场 $\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{WIND}}$以及飞机质量 $\hat{\mathrm{m}}$。

压力偏差 $\Delta\mathrm{p}$ 和风场 $\mathbf{v}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{WIND}}$ 均在滤波器执行步骤之后，根据观测轨迹剩余的 $\hat{}$ 分量计算。根据几何高度（$\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{E,GDT}}$ 的一部分）按照 (2.30) 估计位势高度 H 后，可以根据 $\mathrm{H_P}$ 以及第 8.2.1 节空数据滤波器估计的温度偏差 $\Delta\mathrm{T}$，通过迭代求解 (2.69) 估计 $\Delta\hat{\mathrm{p}}$。最后，忽略湍流，通过从地速中减去空数据滤波器得到的空速来估计风速。应使用低通滤波器 [74]对 $\Delta\hat{\mathrm{p}}$ 和 $\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}}{}_{\mathrm{WIND}}$ 进行平滑。

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{R_E} \cdot \hat{\mathrm{h}}}{\mathrm{R_E} + \hat{\mathrm{h}}} \tag{8.77}$$

$$\Delta\hat{\mathrm{p}} = \mathrm{f}_{\Delta\mathrm{p}}\left(\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{H}}, \Delta\hat{\mathrm{T}}\right) \tag{8.78}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{WIND}}^{\mathrm{N}} = \hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{g}_{\hat{\mathbf{q}}_{\mathrm{NB}*}}\left(\mathbf{v}_{\mathrm{TAS}}^{\mathrm{B}}(\hat{\mathrm{v}}_{\mathrm{TAS}}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})\right) \tag{8.79}$$

飞机质量 $\hat{\mathrm{m}}$ 也独立于滤波器[7]，进行估计，并可通过 (5.49, 5.51) 估计机体 $\mathrm{F_B}$ 与平台 $\mathrm{F_P}$ 坐标系之间的相对位置 ($\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}}$)，这是根据 (5.62) 生成加速度计测量值所必需的。如有需要，质量也是通过 (5.92, 5.94) 估计机体 $\mathrm{F_B}$ 与相机 $\mathrm{F_C}$ 坐标系之间相对位置 ($\hat{\mathbf{T}}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BC}}$) 的必要参数。

给定时间 $\mathrm{t_n}$ 时的飞机质量，可通过对式（3.31、3.32）给出的燃油消耗进行积分来估算；其中采用大气表达式（2.36、2.37、2.63、2.59），将压力比和温度比（δ, θ）转换为 $\mathrm{H_P}$ 和 $\Delta\mathrm{T}$，这两者均已由空数据滤波器估算得出。油门参数 δ_{T}可通过式（7.6），根据控制系统[8],的 $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{CNTR}}$ 输出获得。

$$\hat{\mathrm{m}} = \hat{\mathrm{m}}_{\mathrm{n-1}} - \Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}} \cdot \mathrm{F}\left(\delta_{\mathrm{T,n-1}}, \hat{\delta}_{\mathrm{n-1}}, \hat{\theta}_{\mathrm{n-1}}\right) = \hat{\mathrm{m}}_{\mathrm{n-1}} - \Delta\mathrm{t}_{\mathrm{EST}} \cdot \mathrm{F}\left(\delta_{\mathrm{T,n-1}}, \hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{P,n-1}}, \Delta\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{n-1}}\right) \tag{8.80}$$

请注意，初始化时需要一个初始质量估计值 $\hat{\mathrm{m}}_0$，该值可通过起飞前称量飞机获得，也可将飞机空重 $\mathrm{m}^{\mathrm{empty}}$（章节 3.1）与燃油载荷相加得出。

这种操作方式假设惯性导航系统精确掌握质心位置随飞机质量变化的实际关系$\mathbf{T}^{\mathrm{R}}{}_{\text{参考基准}}$（3.5） [A63], ，以及实际燃油消耗模型 [A64]。作者本可以在实际关系与惯性导航系统采用的关系之间加入一些随机差异，以模拟机载模型与实际关系永远不会完全一致的情况；但满油箱与空油箱配置之间的质心最大位移非常小（章节 3.1），因此这些假设对仿真真实性的最终影响可以忽略不计。

8.3 实现、验证与执行

本章所述的惯性导航系统（INS）已实现为面向对象的 C++ 库，采用了与控制系统（第 7.3 节）类似的流程，但实现难度显著更高。原因有二：一方面，滤波器的随机特性使其实现本身更为困难；另一方面，

[7]由于仅取决于前一周期中估计的变量（8.80），因此在执行两个滤波器中的任意一个之前，都可以估计质量。[8]请注意，图 1.1、7.1 和 8.1 中未显示惯性导航系统对油门参数的依赖关系。

必须格外注意实现效率，尽可能充分利用现有计算资源，从而缩短重复仿真运行所需的时间。该过程还包括逐步测试复杂度更高的任务，并慢慢调整滤波算法以改善结果。

参考文献

[1] E. Gallo, 《刚体旋转与运动的 SO(3) 和 SE(3) 李代数及其在离散积分、梯度下降优化和状态估计中的应用》, 2023年。arXiv:2205.12572v3[cs.RO], https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.12572.[2] 匿名, 《无人机系统》, 技术报告 CIR 328 An/190, 国际民用航空组织, 2011年。[3] M. Hassanalian 和 A. Abdelkefi, 《无人机的分类、应用与设计挑战：综述》, 《航空航天科学进展》, 2017年。https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2017.04.003.[4] H. Shakhatreh、A. H. Sawalmeh、A. Al-Fuqaha、Z. Dou、E. Almaita、I. Khalil、N. S. Othman、A. Khreishah 和 M. Guizani, 《无人驾驶飞行器（UAV）：民用应用与关键研究挑战综述》, *IEEE Access*, 2019年。https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909530.[5] J. A. Farrell, 《辅助导航：配备高采样率传感器的 GPS》。麦格劳-希尔, 2008年。ISBN 0-071-49329-8.[6] P. D. Groves, 《全球卫星导航系统、惯性与多传感器组合导航系统原理》。Artech House, 2008年。ISBN 978-1-58053-255-6.[7] A. B. Chatfield, 《高精度惯性导航基础》。美国航空航天学会, 1997年。ISBN 1-56347-243-0.[8] S. Bijjahalli、R. Sabatini 和 A. Gardi, 《小型无人机系统智能自主导航系统的进展》, 《航空航天科学进展》, 2020年。https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100617.[9] E. Gallo, 《全球卫星导航系统拒止环境下自主低尺寸、重量和功耗固定翼无人机的高保真飞行仿真》。https://github.com/edugallogithub/gnssdenied_飞行_仿真, 2022年。C++开源代码。[10] F. Corraro、U. Ciniglio、P. Canzolino、L. Garbarino、S. Gaglione 和 V. Nastro, 《基于欧洲地球静止导航覆盖服务的高可靠性飞机自动着陆导航系统》, 2009年。无可用 DOI。[11] 美国国家图像与测绘局, 《国防部*1984*年世界大地测量系统》, 3rd 版, 2000年1月。NIMA TR8350.2第1号修订。[12] R. M. Rogers, 《组合导航系统中的应用数学》。美国航空航天学会, 3rd 版, 2007年。ISBN 1-563-47927-3。[13] M. Kayton 和 W. R. Fried, 《航空电子导航系统》。John Wiley & Sons, 2nd 版, 1997年。ISBN 0-471-54795-6。[14] B. L. Stevens 和 F. L. Lewis, 《飞机控制与仿真》。John Wiley & Sons, 2nd 版, 2003年。ISBN 0.471-37145-9。[15] 美国国家航空航天局, 《*NASA*戈达德航天飞行中心与*NIMA*联合地球重力势模型*EGM96*的开发》, 3rd 版, 1998年7月。[16] M. E. Eshelby, 《飞机性能：理论与实践》。Arnold, 2000年。ISBN 0-340-75897-X。

[17] 国际民用航空组织，《国际民用航空组织国际标准大气手册》，3rd 版，2000年。ICAO DOC-7488/3。[18] 《史密森尼气象表》，6th 版，1963年。R.J. List。[19] E. Gallo，《用于飞机轨迹预测和飞行仿真的准静态大气模型》，2021年。arXiv:2101.10744v1 [eess.SY]，https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.10744。[20]美国国家海洋和大气管理局，全球预报系统。http://www.emc.ncep.noaa.gov/GFS。[21] 国防部，《有人驾驶飞机飞行品质》，1980年11月。美国军用手册 MIL-F-8785C。[22] S. Gage，《基于多种规范创建统一的图形化风湍流模型》，美国航空航天学会建模与仿真技术会议暨展览会，2003年。https://doi.org/10.2514/6.2003-5529。[23] B. Etkin，《大气飞行动力学》。John Wiley & Sons，1972年。ISBN 0-486-44522-4。[24] 美国国家地球物理数据中心，《2015—2020年美英世界磁场模型》。[25]美国国家海洋和大气管理局，磁场计算器。https://www.ngdc.noaa.gov/geomag-web/#igrfwmm。[26] M. M. Madden，《可变保真度环境中的重力建模》，美国航空航天学会建模与仿真技术会议暨展览会，2006年。https://doi.org/10.2514/6.2006-6730。[27] H. Goldstein、C. Poole 和 J. Safko，《经典力学》。Addison Wesley，3rd 版，2002年。ISBN 0-201-65702-3。[28] H. Ashley，《飞行器工程分析》。Dover，1974年。ISBN 0-201-00306-6。[29] A. Miele，《飞行动力学》。Dover，1962年。ISBN 0-486-80146-2。[30] J. Katz 和 A. Plotkin，《低速空气动力学》。剑桥大学出版社，2nd 版，2001年。https://doi.org/10.1017/CBO9780511810329。[31] J. Anderson，《空气动力学基础》。麦格劳-希尔，3rd 版，2001年。ISBN 0-072-37335-0。[32] M. Drela，《飞行器空气动力学》。麻省理工学院出版社，2014年。ISBN 978-0-262-52644-9。[33] T. Szirtes，《应用量纲分析与建模》。麦格劳-希尔，1997年。ISBN 0-07-062811-4。[34] E. Gallo 和 A. Nuic，《飞机数据基础（BADA）4系列概念文件》，技术报告，EUROCONTROL 实验中心，2012年11月。EEC技术科学报告第12/11/22-57号。限量发行。[35] M. Drela 和 H. Youngren，《Athena 涡格法》。http://web.mit.edu/drela/Public/web/avl。[36] H. Ashley 和 M. Landahl，《机翼与机体的空气动力学》。Dover，1965年。ISBN 0-486-64899-0。[37] C. F. Taylor，《内燃机：理论与实践》，第1卷和第2卷。麻省理工学院出版社，2nd 版，1985年。ISBN 0-262-70027-1。[38] G. C. Oates，《飞机推进系统技术与设计》。美国航空航天学会，1989年。ISBN 0-930403-24-X。[39] J. B. Heywood，《内燃机基础》。机械工程丛书，麦格劳-希尔，1988年。ISBN 0-070-28637-X。[40] P. Hill 和 C. Perterson，《推进的力学与热力学》。Addison Wesley Longman，2nd 版，1992年。ISBN 0-201-14659-2。

[41] F. Hitchens，《螺旋桨空气动力学：飞机螺旋桨的历史、空气动力学与运行》。Andrews UK Limited，2015年。ISBN 1-785-38125-3。[42]CRRCpro，GF55II 双缸汽油发动机。http://www.crrcpro.com/product/classic/ crrcpro-gf55ii-twin-cylinder-gasoline-engine。[43] E. Gallo，“BADA4 概念文档”，技术报告，EUROCONTROL 实验中心，2006年。限制发行。[44]M. Hepperle，《JavaProp 用户手册》。https://www.mh-aerotools.de/airfoils/java/JavaProp% 20Users%20Guide.pdf。[45] D. Titterton 和 J. Weston，《捷联惯性导航技术》。工程技术学会，2nd 版，2004年。ISBN 0-863-41358-7。[46] W. H. Press、S. A. Teukolsky、W. T. Vetterling 和 B. P. Flannery，《C 数值手册++：科学计算的艺术》。剑桥大学出版社，2nd 版，2002年。ISBN 0-521-75033-4。[47] R. C. Hibbeler，《工程力学：静力学与动力学》。Pearson，14th 版，2015年。ISBN 978-0-13391- 542-6。[48] M. Grewal 和 A. Andrews，“你的陀螺仪性能如何？”，IEEE 控制系统杂志，2010年。https: // doi.org/10.1109/MCS.2009.935122。[49] A. A. Trusov，“陀螺仪随机噪声模式的阿兰方差分析”，技术报告，加利福尼亚大学，2011年。[50] KVH 光纤陀螺仪，《陀螺仪与 IMU 技术比较指南：微机电系统与光纤陀螺仪》，2014年。[51] R. Chow，“评估惯性测量单元”，技术报告，Epson Electronics America，2011年。[52] IEEE，《单轴干涉式光纤陀螺仪标准规范格式指南与测试规程》，1998年。[53] J. L. Crassidis，“用于 GPS 与惯性导航集成的西格玛点卡尔曼滤波”，IEEE《航空航天与电子系统汇刊》，2006年。https://doi.org/10.1109/TAES.2006.1642588。[54] O. J. Woodman，“惯性导航导论”，技术报告，剑桥大学计算机实验室，2007年。[55] W. Stockwell，“角度随机游走”，技术报告，Crossbow Technology Inc.。[56] F. Renaut，“MEMS 惯性传感器技术”，技术报告，瑞士联邦理工学院，2013年。[57] R. L. Farrenkopf，“两种常见航天器姿态估计器的解析稳态精度解”，《制导与控制》，1974年。https://doi.org/10.2514/3.55779。[58] “Analog Devices ADIS16488A 十自由度惯性传感器数据手册”，2015年。http://www. analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADIS16488A.pdf。[59] “Aeroprobe Corporation 空速数据系统数据手册”。www.aeroprobe.com。[60]“Analog Devices ADT7420 温度传感器”，2012年。http://www.analog.com/media/en/ technical-documentation/data-sheets/ADT7420.pdf。[61] G. Batchelor，《流体动力学导论》。剑桥数学文库，2000年。ISBN 0-521- 66396-2。[62] C. C. Pinter，《抽象代数》。Dover Publications，2nd 版，1990年。ISBN 0-486-47417-8。

[63]“U-Blox NEO-M8 数据手册”。https://www.u-blox.com/sites/default/files/NEO-M8_DataSheet_UBX-13003366.pdf。[64] “GPS 定位精度测量”，2003年。http://www.gisresources.com/wp-content/uploads/2014/ 03/gps_book.pdf。[65] Y. Ma、S. Soatto、J. Kosecka 和 S. S. Sastry，《三维视觉导论：从图像到几何模型》。Springer，2001年。ISBN 978-1-4419-1846-8。[66] R. Hartley 和 A. Zisserman，《计算机视觉中的多视图几何》。剑桥大学出版社，2nd 版，2003年。ISBN 0-521-54051-8。[67] *OpenScene Graph*。http://openscenegraph.org。[68] *osgEarth*。http://osgearth.org。[69] D. Tedaldi、A. Pretto 和 E. Menegatti，“一种无需外部设备、稳健且易于实现的 IMU 校准方法”，*IEEE* 国际机器人与自动化会议，2014年。https://doi.org/10.1109/ICRA.2014.6907297。[70] A. Kaehler 和 G. Bradski，《学习 *OpenCV 3*：使用 *C* 进行计算机视觉++ 与 *OpenCV* 库》。O’Reilly Media，2016年。ISBN 978-1-491-93799-0。[71] E. Gallo 和 A. Barrientos，“减少固定翼自主无人飞行器在GNSS拒止环境下的惯性导航误差”，《航空航天科学与技术》，2021年。https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107237。[72] G. F. Franklin、J. D. Powell 和 M. Workman，《动态系统数字控制》。Ellis-Kagle Press，3rd 版，1998年。ISBN 0-201-82054-4。[73] K. Ogata，《现代控制工程》。Prentice Hall，4th 版，2002年。ISBN 0-13-060907-2。[74] F. Haugen，“离散时间低通滤波器的推导”，2008年。无可用 DOI。[75] T. Hagglund，“PID 控制中的信号滤波”，*IFAC* 会议论文集，2012年。https://doi.org/10.3182/20120328-3-IT-3014.00002。[76] S. Skogestad 和 I. Postlethwaite，《多变量反馈控制：分析与设计》。John Wiley & Sons，2nd 版，2005年。ISBN 0-470-01168-8。

附录 A

假设

WGS84 和重力

[A1] 地球表面是一个旋转椭球体。

[A2] 地球椭球体以地球质心为中心。

[A3] 地球以恒定速度绕椭球体对称轴旋转。

[A4] 引力场仅随地心距离和余纬变化。

[A5] 地球位表达式是采用球形地球表面、球形引力和平均离心效应得到的显式近似。

[A6] 实际重力矢量与模型重力矢量之间的差异在整个飞行过程中保持不变。

大气

[A7] 大气由纯空气组成，纯空气是一种理想气体。

[A8] 大气相对于地球是静止的，因此处于垂直流体静力平衡状态 .

[A9] 温度随高度增加而降低，其梯度由给定值决定；以气压高度表示时，该梯度为常数。

[A10] 以气压高度表示时，对流层顶高度保持不变。

[甲11] 吨空气湿度不会对任何其他大气属性的数值产生影响。 .

风与湍流

[A12] 飞机所感受到的风由低频和高频分量组成。

[A13] 空气湍流在时间和空间上均被冻结，这意味着飞机所经历的湍流完全是由其相对于冻结湍流的运动造成的，而不是由湍流本身的变化或运动造成的。

磁学

[A14] 忽略高度和时间的影响时，地球磁场可在局部近似为经度和纬度的双线性函数。

[A15] 实际磁场矢量与模型磁场矢量之间的差异在整个飞行过程中保持不变。

飞机

[A16] 飞机为刚体，不考虑气动弹性效应。

[A17] 从几何结构和质量分布的角度来看，该飞机具有对称性。

[A18] 飞机质心位置随飞机质量在空载（无燃料）和满载时的位置之间线性变化。

[A19] 飞机惯性矩阵随飞机质量在空载（无燃料）和满载时的数值之间线性变化。

[A20] 该 GNSS接收机估计的是飞机质心的位置，而不是接收机的位置 .

[A21] 气流在流经螺旋桨并绕过飞机时处于准静态状态，这意味着空气粒子与飞机相互作用期间，其自身属性和飞机构型均不会发生变化。这是因为空气粒子的驻留时间远短于飞机或螺旋桨改变其运行条件所需的特征时间。

[A22] 气流与螺旋桨及飞机结构相互作用时的雷诺数（与空速成正比）足够高，因此可以忽略空气黏度的影响。

[A23] 受螺旋桨和飞机结构共同扰动的气流是不可压缩的 e.

[A24] 螺旋桨旋转轴位于飞机对称面内，与机身对齐，并穿过其质心。

[A25] 螺旋桨产生的推力与其轴线对齐，与气流方向无关。

[A26] 活塞发动机的热力效率（表示燃料内能转化为功率的百分比）为恒定值。

[A27] 气流相对于飞机的方向不会影响活塞发动机产生的功率，因为进气口能够回收其全部动能。

[A28] 螺旋桨的性能完全取决于其轴向气流，而不考虑气流的横向和垂向分量的影响。

[A29] 动力装置轴造成的能量损失可以忽略不计。

[A30] 该 推进力和力矩不取决于飞机质心的位置 .

飞行物理学

[A31] 以太阳质心为中心、且相对于其他恒星固定坐标轴的参考系是惯性参考系。

[A32] 地球质心绕太阳平动所引起的加速度可以忽略。

[A33] 飞机质量随时间的变化足够缓慢，因此可以视为准静态。

[A34] 飞机惯性矩阵在机体坐标系中的变化随时间足够缓慢，因此可视为准静态。

传感器

[A35] 加速度计、陀螺仪和磁力计以捷联配置的方式固定在飞机结构上。

[A36] 所有传感器的测量过程都是瞬时的。

[A37] 除相机和GNSS接收机外，所有传感器的工作频率均为 100 Hz，并且彼此同步，因此它们会在完全相同的离散时刻生成输出。数码相机和GNSS接收机也与所有其他传感器同步，但其频率分别为 10 Hz 和 1 Hz。

[A38] 加速度计、陀螺仪、磁力计和全球导航卫星系统接收器的尺寸无限小，且位于IMU参考点。

[A39] 三轴加速度计引入的测量误差包括偏置、偏置漂移、系统噪声、比例因子和交叉耦合误差的影响。

[A40] 三轴陀螺仪引入的测量误差包括偏置、偏置漂移、系统噪声、比例因子和交叉耦合误差的影响。

[A41] 三轴磁力计引入的测量误差包括硬磁效应、偏置、系统噪声、软磁效应、比例因子和交叉耦合误差的影响。

[A42] 气压计引入的测量误差包括偏置和系统噪声的影响。

[A43] 温度计引入的测量误差包括偏置和系统噪声的影响。

[A44] 皮托管测量空速引入的测量误差包括偏置和系统噪声的影响。

[A45] 皮托管或风向标在测量攻角和侧滑角时引入的测量误差包括偏置和系统噪声的影响。

[A46] GNSS接收机的位置误差是系统噪声或白噪声与缓慢变化的电离层效应之和，而速度误差仅包含系统噪声。

相机

[A47] 相机以捷联配置的方式物理连接到飞机结构上。

[A48] 相机使用足够快的快门速度，使所有图像都同样清晰。

[A49] 相机的图像生成过程是瞬时的。

[A50] 相机使用恒定的ISO设置，因此记录给定光线时的亮度不会因图像而异。

[A51] 相机生成的所有图像均无噪声。

[A52] 地球表面的亮度不随时间变化。

[A53] 相机所观察到的所有物体表面均为朗伯体表面，也就是说，观察方向不会改变其外观。

[A54] 图像生成过程采用透视投影或针孔相机模型。

[A55] 相机已完成完美校准，因此投影中不存在畸变。

飞行前程序

[A56] 惯性传感器的校准使加速度计和陀螺仪的比例因子及交叉耦合误差降低了95%，而不是对传感器读数进行校正。

[A57] 校准磁力计或进行摆动，可使其比例因子误差和交叉耦合误差（也包括软磁误差）减少 90%，并降低硬磁效应，而不是对磁力计读数进行校正。

[A58] 精对准过程会导致三个机体欧拉角各自的估计误差为 0.1°，加速度计、陀螺仪和磁力计总误差的估计误差为 1%，以及实际地球磁场与建模地球磁场之间差值的估计误差为 10%。

制导、导航与控制

[A59] 制导、导航与控制系统中算法的执行是瞬时的。

[A60] 导航系统以 100 Hz 的频率运行，并与传感器完全同步，在相同的离散时刻工作。

[A61] 制导与控制系统以 50 Hz 的频率运行，在相同的离散时刻工作，并与传感器和导航系统完全同步。

[A62] 油门、升降舵、副翼和方向舵会对控制系统发出的调整指令即时作出响应。

[A63] 导航系统精确掌握飞机质量（燃油载荷）与飞机重心相对于飞机结构的位置之间的依赖关系。

[A64] 导航系统精确掌握动力装置燃料消耗与油门位置和大气特性之间的依赖关系。

[A65] 视觉导航系统以 10 Hz 的频率运行，并与相机完全同步，在相同的离散时刻工作。

附录B

物理常数

常数	定义	数值	单位	来源
$一个_{WGS84}$	WGS84椭球体长半轴	6378137.0	m	[11]
f_{WGS84}	WGS84椭球体椭球扁率	1/298.257223563	-	[11]
GM	地球引力常数（包含大气）	$3986004.418 \cdot 10^8$	米^3/秒^2	[11]
$\bar{C}_{20}$	EGM96 2nd 阶带谐	$-0.484166774985 \cdot 10^{-3}$	-	[15]
ω_E	WGS84椭球体角速度	$7.292115 \cdot 10^{-5}$	弧度/秒	[11]
$克_{cMSL,\ E}$	赤道处的理论WGS84重力	9.7803253359	米/秒^2	[11]
$克_{cMSL,\ P}$	两极的理论WGS84重力	9.8321849378	m/s^2	[11]
g_0	标准自由落体加速度	9.80665	m/s^2	[11]
R_E	地球名义半径	6356766.0	m	[18]
T_0	平均海平面标准温度	288.15	K	[17]
p_0	平均海平面标准气压	101325	千克/米 秒^2	[17]
ρ_0	平均海平面标准密度	1.225	千克/米^3	[17]
R	空气比气体常数	287.05287	m^2/开尔文 s^2	[17]
β_T	对流层顶以下的温度梯度	$-6.5 \cdot 10^{-3}$	K/m	[17]
$H_{P,\ trop}$	对流层顶气压高度	11000	m	[17]
R_{E-S}	地球与太阳之间的距离	$\sim 1.5 \cdot 10^{11}$	m	-
ω_{E-S}	地球相对于太阳的角速度	$\sim 2\pi/(365 \cdot 24 \cdot 3600)$	°/s	-
κ	空气绝热指数	1.4	-	[17]

附录 C

坐标系

“坐标系”提供一个原点和一组坐标轴，用于描述刚体的运动和位姿（位置加姿态） [6]。下表 C.1 中列出的大多数坐标系都是笛卡尔坐标系，也就是说，它们的基向量正交归一且为右手系 [1][1]。

坐标系		章节	原点	参数	主要用途
惯性	$\mathrm{F_I}$	C.1.1	地球[2]	-	运动方程
地球地心地固坐标系	$\mathrm{F_E}$	C.1.2	地球	-	地球表示
球形	$\mathrm{F_S}$	C.1.3	飞机[3]	θ, λ, r	引力
NED	$\mathrm{F_N}$	C.1.4	飞机	λ, φ,小时	飞机位置
Body	$\mathrm{F_B}$	C.2.1	飞机	ψ, θ, ξ	飞机结构姿态
Wind	$\mathrm{F_W}$	C.2.2	飞机	α, β	飞机空速姿态
地面	$\mathrm{F_G}$	C.2.3	飞机	χ, γ, μ	飞机地速姿态
湍流	$\mathrm{F_T}$	C.2.4	飞机	χ_{WIND}	风湍流
参考	$\mathrm{F_R}$	C.2.5	任意	$\mathbf{T}_{\mathrm{RB}}^{\mathrm{R}}$	气动力
平台	$\mathrm{F_P}$	C.3.1	IMU[4]	$\mathbf{T}_{\mathrm{BP}}^{\mathrm{B}}$ ψ^{P}, θ^{P}, ξ^{P}	IMU校准输出
加速度计	$\mathrm{F_A}$	C.3.2	IMU	$\alpha_{\mathrm{ACC}}{}_{,}^{1,}$ $\alpha_{\mathrm{ACC}}{}_{,}^{2,}$ $\alpha_{\mathrm{ACC}}{}_{,3}$	加速度计感测轴
陀螺仪	$\mathrm{F_Y}$	C.3.3	IMU	$\alpha_{\mathrm{GYR}}{}_{,}^{12,}$ $\alpha_{\mathrm{GYR}}{}_{,}^{21,}$ $\alpha_{\mathrm{GYR}}{}_{,13}$ $\alpha_{\mathrm{GYR}}{}_{,}^{31,}$ $\alpha_{\mathrm{GYR}}{}_{,}^{23,}$ $\alpha_{\mathrm{GYR}}{}_{,32}$	陀螺仪感测轴
相机	$\mathrm{F_C}$	C.3.4	相机[5]	$\mathbf{T}_{\mathrm{BC}}^{\mathrm{B}}$ ψ^{C}, θ^{C}, ξ^{C}	视觉

表 C.1：坐标系汇总

本章首先介绍用于描述相对于地球的位置和姿态的坐标系（C.1 节），然后重点介绍用于描述相对于飞机的位置和姿态的坐标系（C.2 节），最后介绍用于表示传感器测量值的坐标系（C.3 节）。表 C.1 总结了本文使用的不同坐标系。

[1]C.3.2 和 C.3.3 节中的加速度计和陀螺仪坐标系为非正交坐标系。 [2]指地球质心。[3]指飞机质心。[4] 指 IMU参考点（第 5.2 节）。[5]指相机光心（第 5.4.1 节）。

C.1 以地球为中心的坐标系

本节定义的坐标系用于描述任意点相对于地球的位置，以及任意向量相对于地球的姿态或方向。许多飞行动力学和导航教材都采用这些坐标系 [5, 6, 7, 12, 23, 28, 29, 45]。

C.1.1 惯性坐标系

惯性（I）坐标系是指这样一种坐标系：作用于物体的合力为零时，物体不会产生加速度，并保持静止或沿直线做匀速运动。第 4.1 节中得到的惯性坐标系 F_I 以地球质心为原点，其坐标轴相对于除太阳以外的任何恒星都不发生旋转。建立运动方程时需要这样的坐标系，因为其中不存在惯性加速度。

C.1.2 地球坐标系

第 2.1 节介绍的 WGS84 模型基于地心地固（ECEF）坐标系，也称为地球（E）坐标系，即笛卡尔坐标系 $F_E = \{O_E, \mathbf{i}_1^E, \mathbf{i}_2^E, \mathbf{i}_3^E\}$，如图 C.1 所示。该坐标系定义为：$O_E$ 位于地球质心；$\mathbf{i}_3^E$ 沿地球自转轴（极轴）指向大地北极；$\mathbf{i}_1^E$ 同时位于赤道面和格林尼治子午面内，并指向经度零度方向；$\mathbf{i}_2^E$ 与 $\mathbf{i}_1^E$ 和 $\mathbf{i}_3^E$ 正交，构成右手坐标系。

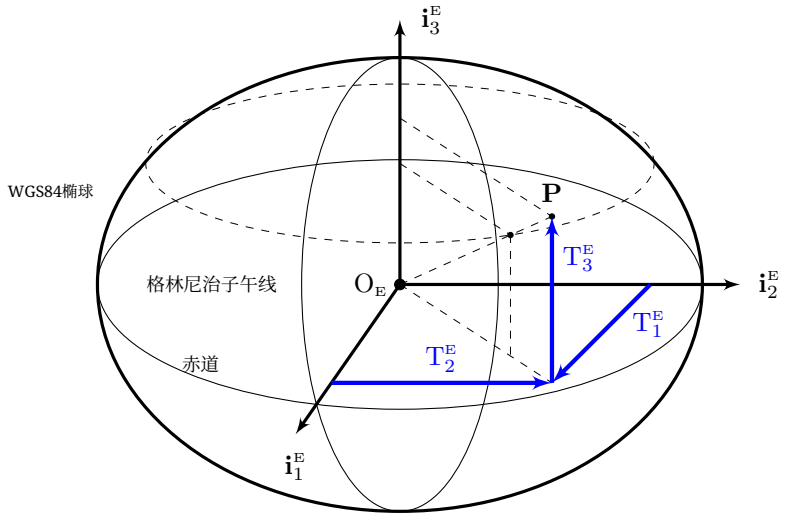

图 C.1：地球坐标系 F_E 及笛卡尔坐标 $\mathbf{T}^{E,\,CAR}$

由于 F_E 坐标系固定于地球，因此非常适合表示任意物体相对于地球表面的位置。为此可以采用三种不同的坐标组：笛卡尔坐标、地心坐标和大地坐标。任意一种坐标组都可以根据另外两种中的任意一种无歧义地求得。

C.1.2.1 笛卡尔坐标

笛卡尔坐标 $\mathbf{T}^{E}{}_{EB} = \mathbf{T}^{E}{}_{EN} = \mathbf{T}^{E,CAR} = [T_1^E\ T_2^E\ T_3^E]^T$ 是将连接 O_E 与点 $\mathbf{P}$ 的向量直接投影到 F_E 坐标轴上得到的，如图 C.1 所示。虽然容易求得，但它们并不实用，因为其数值无法直观地表示点 $\mathbf{P}$ 相对于地球表面的位置。笛卡尔坐标可以由下文定义的地心坐标或大地坐标得到[6]：

$$\mathbf{T}^{E,CAR} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\lambda & r\sin\theta\sin\lambda & r\cos\theta \end{bmatrix}^T \tag{C.1}$$

[6]请参阅章节 2.1 以及图 2.2，了解更多关于术语的信息 在 (C.1) 和 (C.2) 中。

$$\mathbf{T}^{\mathrm{E,CAR}} = \begin{bmatrix} (\mathrm{N}+\mathrm{h})\cos\varphi\cos\lambda & (\mathrm{N}+\mathrm{h})\cos\varphi\sin\lambda & \left(\mathrm{N}(1-\mathrm{e}^2)+\mathrm{h}\right)\sin\varphi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{C.2}$$

C.1.2.2 地心坐标

地理坐标_placeholder

- 地心余纬 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ 是地球自转轴（$\mathbf{i}_{\mathrm{E3}}$）与穿过点 $\mathbf{P}$ 和地球质心的直线之间形成的夹角。
- 经度 λ $(0 \leq \lambda < 2\pi)$ 是格林尼治子午面（由 $\mathbf{i}_{\mathrm{E1}}$ 和 $\mathbf{i}_{\mathrm{E3}}$形成）与点子午面[7]之间的夹角。
- 地心距离 r $(\mathrm{r} \geq 0)$是该点与地球质心之间的距离。

地心坐标可由下文定义的笛卡尔坐标或大地坐标获得。请注意，经度 λ 同时属于地心坐标和大地坐标：

$$\mathbf{T}^{\mathrm{E,GCT}} = \begin{bmatrix} \arctan\dfrac{\sqrt{\mathrm{T}_1^{\mathrm{E}2}+\mathrm{T}_2^{\mathrm{E}2}}}{\mathrm{T}_3^{\mathrm{E}}} & \arctan\dfrac{\mathrm{T}_2^{\mathrm{E}}}{\mathrm{T}_1^{\mathrm{E}}} & \sqrt{\mathrm{T}_1^{\mathrm{E}2}+\mathrm{T}_2^{\mathrm{E}2}+\mathrm{T}_3^{\mathrm{E}2}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{C.3}$$

$$\mathbf{T}^{\mathrm{E,GCT}} = \begin{bmatrix} \arctan\dfrac{(\mathrm{N}+\mathrm{h})\cos\varphi}{[\mathrm{N}(1-\mathrm{e}^2)+\mathrm{h}]\sin\varphi} & \lambda & \sqrt{(\mathrm{N}+\mathrm{h})^2\cos^2\varphi+[\mathrm{N}(1-\mathrm{e}^2)+\mathrm{h}]^2\sin^2\varphi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{C.4}$$

C.1.2.3 大地坐标

大地坐标$\mathbf{T}^{\mathrm{E,GDT}} = [\lambda \quad \varphi \quad \mathrm{h}]^{\mathrm{T}}$ 代表相对于 $\mathrm{F_E}$ 指定位置最常用的方法。如图 C.3 所示，其定义如下：

- 经度 λ $(0 \leq \lambda < 2\pi)$是格林尼治子午面（由$\mathbf{i}_{\mathrm{E1}}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{E3}}$构成）与点子午面[8]之间形成的夹角。
- 纬度 φ $(-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$ 是赤道平面与一条穿过该点的直线之间形成的夹角，该直线在与椭球面相交处垂直于椭球面。
- 大地高度 h 是沿着一条在交点处垂直于椭球面的直线测量的椭球面与该点之间的距离。

对于地理定位而言，大地坐标比笛卡尔坐标或地心坐标更直观。大地坐标利用一个距离（h）和两个角度（λ 和 φ），并借助第 2.1 章节所述的地球椭球面（该椭球面代表大地高度 h 为零的表面），通过三个具有明确物理含义的坐标来定义相对于地球的位置。使用大地坐标非常便于表示地球表面附近任意点的位置。

由于卯酉圈的椭球曲率半径 N 根据式 (2.4) 取决于纬度，因此无法对式 (C.2) 或 (C.4) 求逆，从而得到基于笛卡尔坐标或地心坐标的显式大地坐标表达式。不过，可以通过迭代唯一确定这些坐标。

C.1.3 球坐标系

球形（S）坐标系是笛卡尔坐标系 $\mathrm{F_S} = \{\mathrm{O_S},\ \mathbf{i}^{\mathrm{S}}_{\theta},\ \mathbf{i}^{\mathrm{S}}_{\lambda},\ \mathbf{i}^{\mathrm{S_r}}\}$（图 C.2），其主要用途是表示重力加速度（章节 2.2.1）。该坐标系定义如下：$\mathrm{O_S}$ 位于飞机质心处，$\mathbf{i}^{\mathrm{S_r}}$ 平行于连接原点与地球质心的直线，并指向远离地球的方向；$\mathbf{i}^{\mathrm{S}}_{\lambda}$与$\mathbf{i}^{\mathrm{S_r}}$ 正交，且平行于赤道平面，指向大地东向；$\mathbf{i}^{\mathrm{S}}_{\theta}$ 与$\mathbf{i}^{\mathrm{S_r}}$ 和$\mathbf{i}^{\mathrm{S}}_{\lambda}$正交，共同构成右手坐标系。

[7]它与 C.1.2.3 章节中定义的大地经度一致。[8]它与 C.1.2.2 章节中定义的地心经度一致。

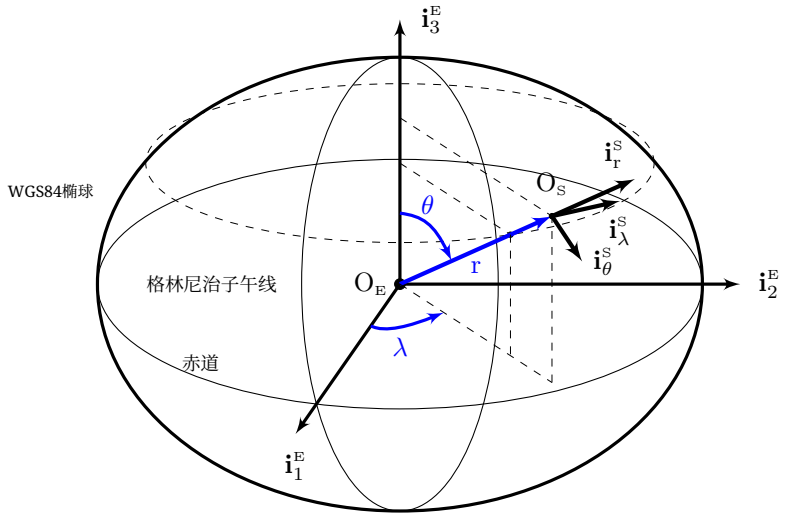

图 C.2：球坐标系 $\mathrm{F_S}$ 和地心坐标 $\mathbf{T}^{\mathrm{E,\,GCT}}$

如果$\mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{ES}}=\mathbf{T}^{\mathrm{E,\,CAR}}$ 包含 $\mathrm{O_S}$ 相对于地心地固坐标系的笛卡尔坐标，则可以先执行两次连续旋转，再进行$\mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{ES}}$ 平移，从而由 $\mathrm{F_E}$ 得到 $\mathrm{F_S}$ 坐标系。这两次旋转如下：

1. 绕$\mathbf{i}_3^{\mathrm{E}}$旋转角度 λ （经度）。
2. 绕$\mathbf{i}_\lambda^{\mathrm{S}}$ 旋转角度 θ （余纬）（上一次旋转后$\mathbf{i}_2^{\mathrm{E}}$ 的方向）。

$$\mathbf{q}_{\mathrm{ES}} \equiv \mathbf{R}_{\mathrm{ES}}=\mathbf{R}_3(\lambda)\,\mathbf{R}_2(\theta) \tag{C.5}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{ES}} = \mathbf{q}_{\mathrm{ES}}+\frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{ES}}\otimes\mathbf{q}_{\mathrm{ES}} \tag{C.6}$$

C.1.4 北东地坐标系

北东地（NED 或 N）坐标系是笛卡尔坐标系 $\mathrm{F_N}=\{\mathrm{O_N},\ \mathbf{i}_1^{\mathrm{N}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{N}},\ \mathbf{i}_3^{\mathrm{N}}\}$（图 C.3），非常适用于导航，因为它的三个坐标轴沿着容易理解的方向定向。该坐标系定义为：$\mathrm{O_N}$ 位于飞机质心处；$\mathbf{i}_3^{\mathrm{N}}$ 垂直于椭球面并指向天底；$\mathbf{i}_2^{\mathrm{N}}$ 垂直于$\mathbf{i}_3^{\mathrm{N}}$ 且平行于赤道平面，并指向大地东向；$\mathbf{i}_1^{\mathrm{N}}$ 垂直于前两个坐标轴并指向大地北向，使它们构成右手坐标系。

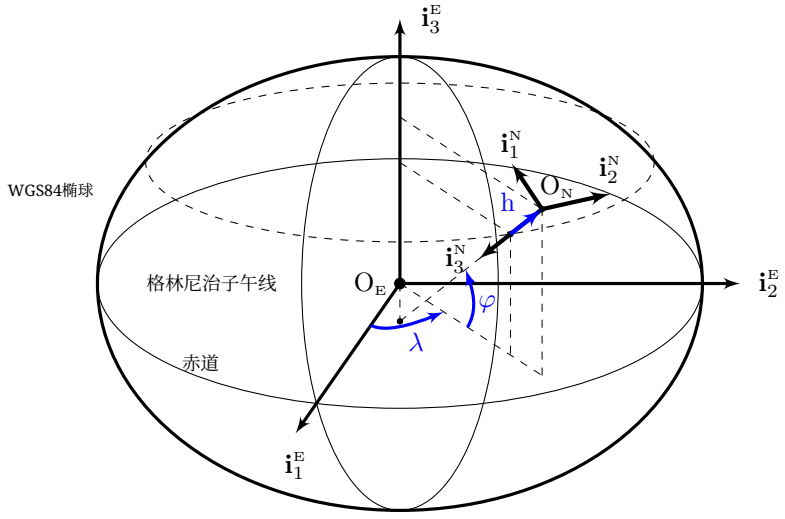

图 C.3：北东地坐标系 $\mathrm{F_E}$ 和大地坐标$\mathbf{T}^{\mathrm{E,\,GDT}}$

如果$\mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{EN}}=\mathbf{T}^{\mathrm{E,CAR}}$ 包含 $\mathrm{O_N}$ 相对于地心地固坐标系的笛卡尔坐标，那么 $\mathrm{F_N}$ 坐标系可以

通过先连续执行两次旋转，再进行$\mathbf{T}^{\mathrm{E}}{}_{\mathrm{EN}}$平移，从$\mathrm{F_E}$坐标系得到。两次旋转如下：

1. 绕$\mathbf{i}_3^{\mathrm{E}}$旋转角度$\lambda$。
2. 绕$\mathbf{i}_2^{\mathrm{N}}$旋转角度$-\pi/2-\varphi$（即上一次旋转后$\mathbf{i}_2^{\mathrm{E}}$的方向）。

$$\mathbf{q}_{\mathrm{EN}} \equiv \mathbf{R}_{\mathrm{EN}} = \mathbf{R}_3(\lambda)\,\mathbf{R}_2(-\frac{\pi}{2}-\varphi) \tag{C.7}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}} = \mathbf{q}_{\mathrm{EN}} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{EN}} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{EN}} \tag{C.8}$$

由于它们共享同一原点（$\mathbf{T}^{\mathrm{S}}{}_{\mathrm{SN}} = \mathbf{0}_3$），也可以通过绕$\mathbf{i}_\lambda^{\mathrm{S}}$旋转$-\theta-\pi/2-\varphi$一次，从$\mathrm{F_S}$得到$\mathrm{F_N}$：

$$\mathbf{q}_{\mathrm{SN}} \equiv \mathbf{R}_{\mathrm{SN}} = \mathbf{R}_2(-\theta-\frac{\pi}{2}-\varphi) \tag{C.9}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{SN}} = \mathbf{q}_{\mathrm{SN}} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{SN}} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{SN}} = \mathbf{q}_{\mathrm{SN}} \tag{C.10}$$

C.2 以飞机为中心的坐标系

本章节定义的坐标系用于描述任意点的位置，以及相对于飞机的任意向量的姿态或方向。

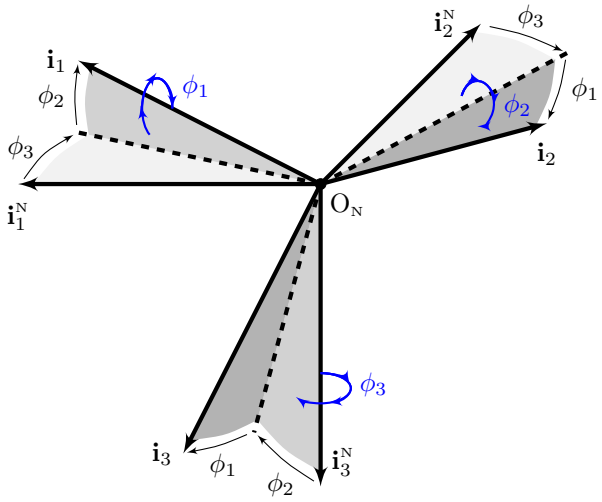

图 C.4：相对于北东地坐标系的欧拉角 $3-2-1$

除参考系（章节 C.2.5）外，这些坐标系均以飞机质心为中心，因此它们相对于北东地坐标系$\mathrm{F_N}$的位姿完全可以用旋转运动[1]来定义。按照惯例，采用欧拉角$\boldsymbol{\phi} = [\phi_3 \;\; \phi_2 \;\; \phi_1]^{\mathrm{T}}$来表示这些坐标系相对于$\mathrm{F_N}$的姿态，也就是说，采用图 C.4 所示的三个连续旋转，并且始终按以下顺序执行：

1. 绕$\mathbf{i}_3^{\mathrm{N}}$旋转角度$\phi_3$（偏航）。2. 绕$\mathbf{i}_2'$旋转角度$\phi_2$（俯仰）（$\mathbf{i}_2^{\mathrm{N}}$经过前一次旋转后的方向）。
3. 绕$\mathbf{i}_1$旋转角度ϕ_1（倾斜或横滚）（$\mathbf{i}_1^{\mathrm{N}}$经过前几次旋转后的方向）

.

C.2.1 机体坐标系

机体（B）坐标系 [5, 6, 7, 12, 23, 28, 29, 45]是一个笛卡尔坐标系$\mathrm{F_B} = \{\mathrm{O_B},\ \mathbf{i}_1^{\mathrm{B}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{B}},\ \mathbf{i}_3^{\mathrm{B}}\}$，固定于飞机上，其定义为：$\mathrm{O_B}$位于飞机质心，$\mathbf{i}_1^{\mathrm{B}}$位于飞机的对称平面内

沿固定方向指向前方，$\mathbf{i}_3^{\text{B}}$ 位于飞机的对称平面内，垂直于$\mathbf{i}_1^{\text{B}}$并向下指向，而$\mathbf{i}_2^{\text{B}}$ 正交于$\mathbf{i}_1^{\text{B}}$ 和$\mathbf{i}_3^{\text{B}}$，从而三者构成一个右手坐标系。

机体欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{\text{NB}} = [\psi \;\; \theta \;\; \xi]^{\text{T}}$ 遵循 C.2 章节所示的旋转顺序，并描述 F_{B}相对于 F_{N}的姿态。其物理意义如下：

- 飞机的航向或机体偏航角 ψ 表示大地北向（由$\mathbf{i}_{\text{N}1}$ 表示）与$\mathbf{i}_{\text{B}1}$ （机身）在由$\mathbf{i}_{\text{N}1}$ 和$\mathbf{i}_{\text{N}2}$定义的水平面上的投影之间的夹角。
- 机身俯仰角 θ 表示$\mathbf{i}_{\text{B}1}$ （飞机机身）与其在水平面上的投影之间的夹角。
- 机体倾斜角 ξ 表示$\mathbf{i}_{\text{B}2}$ （垂直于飞机对称面）与由$\mathbf{i}_{\text{B}2}$ 和$\mathbf{i}_{\text{B}3}$ （垂直于机身）定义的平面与水平面的交线之间的夹角。

由于 F_{B} 和 F_{N} 共享同一原点（$\mathbf{T}^{\text{N}}{}_{\text{NB}} = \mathbf{0}_3$），因此 F_{B} 可由 F_{N} 按如下方式获得：

$$\mathbf{q}_{\text{NB}} \equiv \mathbf{R}_{\text{NB}} = \mathbf{R}_3(\psi)\,\mathbf{R}_2(\theta)\,\mathbf{R}_1(\xi) \equiv \boldsymbol{\phi}_{\text{NB}} \tag{C.11}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{NB}} = \mathbf{q}_{\text{NB}} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\text{N}}_{\text{NB}} \otimes \mathbf{q}_{\text{NB}} = \mathbf{q}_{\text{NB}} \tag{C.12}$$

F_{E} 与 F_{B} 之间的相对位姿为：

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{EB}} = \boldsymbol{\zeta}_{\text{EN}} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{\text{NB}} \tag{C.13}$$

C.2.2 风轴坐标系

风（W）坐标系 [23, 28, 29] 是笛卡尔坐标系 $\text{F}_{\text{W}} = \{\text{O}_{\text{W}},\ \mathbf{i}_1^{\text{W}},\ \mathbf{i}_2^{\text{W}},\ \mathbf{i}_3^{\text{W}}\}$，其 O_{W} 位于飞机质心处，$\mathbf{i}_1^{\text{W}}$始终沿飞机空速方向并指向前方，$\mathbf{i}_3^{\text{W}}$位于飞机对称平面内，与$\mathbf{i}_1^{\text{W}}$正交且指向下方，而$\mathbf{i}_2^{\text{W}}$垂直于$\mathbf{i}_1^{\text{W}}$和$\mathbf{i}_3^{\text{W}}$，使它们构成右手坐标系。

风轴坐标系对于正确表示气动力是必不可少的，因为飞机的阻力方向与$\mathbf{i}_1^{\text{W}}$(空速)相反，而飞机的升力方向与$\mathbf{i}_3^{\text{W}}$相反。如上文定义所述，空速$\mathbf{v}_{\text{TAS}}$ (章节 4.2)在 2nd 和 3rd 坐标轴方向上均没有分量。如果说机体坐标系因与飞机结构刚性连接，可视为飞机结构的几何表示，那么风轴坐标系则从气动角度表示飞机，描述气流到达飞机的方向。

空速欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{\text{NW}} = [\chi_{\text{TAS}} \;\; \gamma_{\text{TAS}} \;\; \mu_{\text{TAS}}]^{\text{T}}$ 遵循 C.2 章节中所述的旋转顺序，其物理含义如下：

- 气动航向 或空速偏航角 $\chi_{\text{真空速}}$ 表示$\mathbf{i}_{\text{N}1}$ （大地北向）与$\mathbf{i}_{\text{W}1}$ （空速）在水平面（由$\mathbf{i}_{\text{N}1}$ 和$\mathbf{i}_{\text{N}2}$定义）上的投影之间的夹角。
- 气动航迹角 或空速俯仰角 $\gamma_{\text{真空速}}$ 表示$\mathbf{i}_{\text{W}1}$ （空速）与其在水平面上的投影之间的夹角。
- 空速倾侧角 $\mu_{\text{真空速}}$ 表示$\mathbf{i}_{\text{W}2}$ 与由$\mathbf{i}_{\text{W}2}$ 和$\mathbf{i}_{\text{W}3}$ （垂直于空速）所定义的平面与水平面的交线之间的夹角。

由于 F_{W} 和 F_{N} 共享相同的原点（$\mathbf{T}^{\text{N}}{}_{\text{NW}} = \mathbf{0}_3$），因此 F_{W} 可以由 F_{N} 按如下方式得到：

$$\mathbf{q}_{\text{NW}} \equiv \mathbf{R}_{\text{NW}} = \mathbf{R}_3(\chi_{\text{TAS}})\,\mathbf{R}_2(\gamma_{\text{TAS}})\,\mathbf{R}_1(\mu_{\text{TAS}}) \equiv \boldsymbol{\phi}_{\text{NW}} \tag{C.14}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\text{NW}} = \mathbf{q}_{\text{NW}} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\text{N}}_{\text{NW}} \otimes \mathbf{q}_{\text{NW}} = \mathbf{q}_{\text{NW}} \tag{C.15}$$

$\mathcal{F}_E$ 与$\mathcal{F}_W$ 之间的相对位姿得出：

$$\boldsymbol{\zeta}_{EW} = \boldsymbol{\zeta}_{EN} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{NW} \tag{C.16}$$

从 $\mathcal{F}_B$ 获取 $\mathcal{F}_W$，如图 C.5 所示，只需要进行两次旋转，因为 $\mathbf{i}_1^B$、$\mathbf{i}_3^B$ 和 $\mathbf{i}_3^W$ 均位于飞机对称面内：

1. 绕 $\mathbf{i}_3^W$ 旋转角度 $-\beta$（侧滑角）。
2. 绕 $\mathbf{i}_2^B$ 旋转角度 α（迎角）。

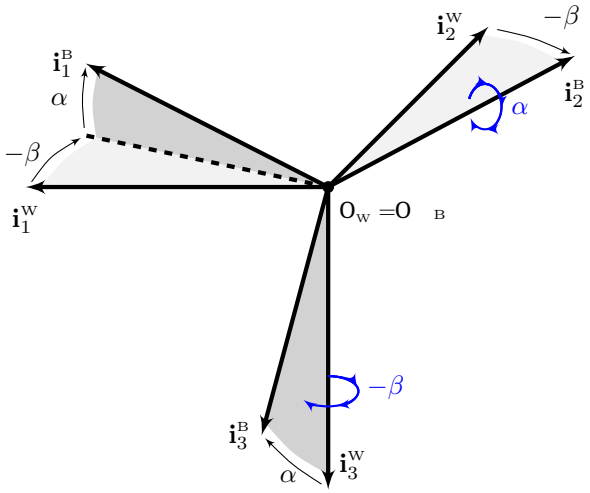

图 C.5：风到机体的转换

攻角和侧滑角 $\boldsymbol{\phi}_{WB} = [-\beta \;\; \alpha \;\; 0]^T$ 表示气流相对于飞机结构的方向，因此在第 3.4 章节所述的气动力中发挥着重要作用：

- 侧滑角 β 表示$\mathbf{i}_{W1}$（空速）与其在飞机对称面（由$\mathbf{i}_{B1}$、$\mathbf{i}_{B3}$和$\mathbf{i}_{W3}$定义）上的投影之间的夹角。
- 迎角 α 表示$\mathbf{i}_{W1}$（空速）在飞机对称面上的投影与$\mathbf{i}_{B1}$（飞机机身）之间的夹角。

由于 $\mathcal{F}_B$ 和 $\mathcal{F}_W$ 共享同一原点（$\mathbf{T}^{W}{}_{WB} = \mathbf{0}_3$），因此可以通过以下方式从 $\mathcal{F}_W$ 得到 $\mathcal{F}_B$：

$$\mathbf{q}_{WB} \equiv \mathbf{R}_{WB} = \mathbf{R}_3(-\beta)\,\mathbf{R}_2(\alpha) \equiv \boldsymbol{\phi}_{WB} \tag{C.17}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{WB} = \mathbf{q}_{WB} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{W}_{WB} \otimes \mathbf{q}_{WB} = \mathbf{q}_{WB} \tag{C.18}$$

C.2.3 地面速度坐标系

地速（G）坐标系是一个笛卡尔坐标系 $\mathcal{F}_G = \{O_G, \mathbf{i}_1^G, \mathbf{i}_2^G, \mathbf{i}_3^G\}$，其定义如下：$O_G$ 位于飞机质心处，$\mathbf{i}_1^G$ 始终沿飞机地速方向并朝向前方，$\mathbf{i}_3^G$位于飞机的对称平面内，垂直于$\mathbf{i}_1^G$且指向下方，而$\mathbf{i}_2^G$ 与$\mathbf{i}_1^G$ 和$\mathbf{i}_3^G$ 正交，使它们构成一个右手坐标系。

虽然文献中通常不会出现 $\mathcal{F}_G$，但作者仍选择将其纳入，因为这是定义下文地速欧拉角的最佳方式。另一个特点是，在 $\mathcal{F}_G$ 中观察时，地速 $\mathbf{v}^G$（章节 4.2）仅包含一个分量。

地速欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{NG} = [\chi \;\; \gamma \;\; \mu]^T$ 遵循章节 C.2 中描述的旋转顺序，其物理意义如下：

- 该航向 或地速偏航角 χ 表示$\mathbf{i}_{N1}$ （大地北向）与$\mathbf{i}_{G1}$ （地速）在水平面（由$\mathbf{i}_{N1}$ 和$\mathbf{i}_{N2}$定义）上的投影之间的夹角。
- 航迹角或地速俯仰角 γ 表示$\mathbf{i}_{G1}$ （地速）与其在水平面上的投影之间的夹角。
- “地速倾侧角 μ ”表示$\mathbf{i}_{G2}$ 与$\mathbf{i}_{G3}$ （垂直于地速）所定义的平面和水平面的交线之间的夹角。

由于 F_G 和 F_N 具有相同的原点（$\mathbf{T}^{N}{}_{NG} = \mathbf{0}_3$），因此可以通过以下方式从 F_N 得到 F_G：

$$\mathbf{q}_{NG} \equiv \mathbf{R}_{NG} = \mathbf{R}_3(\chi)\,\mathbf{R}_2(\gamma)\,\mathbf{R}_1(\mu) \equiv \boldsymbol{\phi}_{NG} \tag{C.19}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{NG} = \mathbf{q}_{NG} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{N}_{NG} \otimes \mathbf{q}_{NG} = \mathbf{q}_{NG} \tag{C.20}$$

F_E 与 F_G 之间的相对位姿为：

$$\boldsymbol{\zeta}_{EG} = \boldsymbol{\zeta}_{EN} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{NG} \tag{C.21}$$

C.2.4 湍流坐标系

湍流（T）坐标系是一个笛卡尔坐标系 $F_T = \{O_T,\ \mathbf{i}_1^T,\ \mathbf{i}_2^T,\ \mathbf{i}_3^T\}$，其原点位于飞机质心，$\mathbf{i}_1^T$ 位于水平面上（由$\mathbf{i}_1^N$ 和$\mathbf{i}_2^N$定义），并与风向角 χ_{WIND} （章节 2.4）所提供的无湍流风场水平风向对齐；$\mathbf{i}_3^T$ 与$\mathbf{i}_3^N$平行，且$\mathbf{i}_2^T$ 构成右手坐标系。

湍流坐标系 F_T 的唯一用途是便于按照章节 2.4 中所述计算湍流风。由于 F_T 和 F_N 具有相同的原点（$\mathbf{T}^{N}{}_{NT} = \mathbf{0}_3$），因此 F_T 可通过绕$\mathbf{i}_3^N$进行一次旋转由 F_N 得到：

$$\mathbf{q}_{NT} \equiv \mathbf{R}_{NT} = \mathbf{R}_3(\chi_{WIND}) \tag{C.22}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{NT} = \mathbf{q}_{NT} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{N}_{NT} \otimes \mathbf{q}_{NT} = \mathbf{q}_{NT} \tag{C.23}$$

F_E 与 F_T 之间的相对位姿为：

$$\boldsymbol{\zeta}_{ET} = \boldsymbol{\zeta}_{EN} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{NT} \tag{C.24}$$

C.2.5 参考系

参考（R）坐标系是一个笛卡尔坐标系 $F_R = \{O_R,\ \mathbf{i}_1^R,\ \mathbf{i}_2^R,\ \mathbf{i}_3^R\}$，在第3章中作为中间步骤，用于获得飞机的气动力和推进力及力矩。其坐标轴与机体坐标系的坐标轴平行（$\mathbf{i}_1^R \parallel \mathbf{i}_1^B,\ \mathbf{i}_2^R \parallel \mathbf{i}_2^B,\ \mathbf{i}_3^R \parallel \mathbf{i}_3^B$），但其原点位于一个参考点（因此得名）；作者将该点任意设置在飞机对称面上、机翼后缘与该对称面的交点下方。从 O_R 到飞机质心 O_B 的平移由$\mathbf{T}^{R}{}_{RB}$给出，其定义见章节 3.1。

$$\mathbf{q}_{RB} = \mathbf{q_1} \equiv \mathbf{R}_{RB} = \mathbf{I}_3 \tag{C.25}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{RB} = \mathbf{q}_{RB} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{R}_{RB} \otimes \mathbf{q}_{RB} = \mathbf{q_1} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{R}_{RB} \otimes \mathbf{q_1} = \mathbf{q_1} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{R}_{RB} \tag{C.26}$$

F_B 和 F_R 均表示飞机结构并描述其姿态。然而，随着不断消耗的燃油载荷改变飞机的质量分布，飞机质心 O_B相对于 O_R 缓慢移动。飞机螺旋桨和气动舵面固定在飞机结构上，因此，最好在 F_R中观察它们产生的力和力矩。由于飞机运动取决于这些力和力矩作用于飞机质心的情况，因此在第4章的运动方程中使用时，最好将它们转换到 F_B 。

C.3 传感器相关坐标系

这些坐标系对于解读第5章所述某些传感器的测量值是必不可少的，例如加速度计、陀螺仪和数码相机。请注意，这些传感器均不以飞机质心为中心，而是位于相对于 $\mathrm{F_R}$ 固定的其他机身点上，因此相对于 $\mathrm{F_B}$ 缓慢移动。

C.3.1 平台坐标系

平台（P）坐标系 [5, 7, 12] 是一个笛卡尔坐标系 $\mathrm{F_P} = \{\mathrm{O_P},\ \mathbf{i}_1^{\mathrm{P}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{P}},\ \mathbf{i}_3^{\mathrm{P}}\}$ 其定义为 $\mathrm{O_P}$ 位于 IMU 参考点（第 5.2.7 节）；其坐标轴 $\mathbf{i}_1^{\mathrm{P}}$、$\mathbf{i}_2^{\mathrm{P}}$、$\mathbf{i}_3^{\mathrm{P}}$构成一个右手坐标系，与 $\mathrm{F_B}$ 机体轴大致对齐，也就是说，它们分别大致指向飞机机身（前方）、飞机机翼（右方）和下方。

要进行惯性导航，必须正确定义 $\mathrm{F_P}$ ，因为加速度计和陀螺仪的校准输出均以该坐标系为基准（第 5.2.5 节和第 5.2.6 节）。$\mathrm{F_P}$ 坐标系可由 $\mathrm{F_B}$ 通过旋转得到，该旋转可用欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}} = [\psi^{\mathrm{P}} \ \ \theta^{\mathrm{P}} \ \ \xi^{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}}$ 描述；随后从飞机质心 $\mathrm{O_B}$ 平移至 IMU 参考点 $\mathrm{O_P}$，平移量为 $\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BP}}$ （第 5.2.7 节）：

- 平台航向角或平台偏航角 $\psi_{\text{实际轨迹}}$表示$\mathbf{i}_{\mathrm{B}1}$ （机身前向）与$\mathbf{i}_{\mathrm{P}1}$ 在由$\mathbf{i}_{\mathrm{B}1}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{B}2}$定义的平面上的投影之间的夹角。
- 该平台俯仰角 $\theta_{\text{比例}}$表示$\mathbf{i}_{\mathrm{P}1}$ 与其在由$\mathbf{i}_{\mathrm{B}1}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{B}2}$所定义的平面上的投影之间形成的夹角。
- 平台倾斜角 ξ比例表示存在于i比例2与由i比例2和i比例3定义的平面同由iB1和iB2定义的平面之间交线的夹角。

$$\mathbf{q}_{\mathrm{BP}} \equiv \mathbf{R}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{R}_3(\psi^{\mathrm{P}})\ \mathbf{R}_2(\theta^{\mathrm{P}})\ \mathbf{R}_1(\xi^{\mathrm{P}}) \equiv \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BP}} \tag{C.27}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BP}} = \mathbf{q}_{\mathrm{BP}} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BP}} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{BP}} \tag{C.28}$$

C.3.2 加速度计坐标系

加速度计（A）坐标系 [5, 7, 12] 是一个非正交坐标系 $\mathrm{F_A} = \{\mathrm{O_A}, \mathbf{i}_1^{\mathrm{A}}, \mathbf{i}_2^{\mathrm{A}}, \mathbf{i}_3^{\mathrm{A}}\}$，其原点位于惯性测量单元参考点（$\mathbf{T}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{PA}} = \mathbf{0}_3$）。基向量 $\{\mathbf{i}_1^{\mathrm{A}}, \mathbf{i}_2^{\mathrm{A}}, \mathbf{i}_3^{\mathrm{A}}\}$ 分别与三个加速度计的感测轴[9] （章节 5.2.5）对齐，但由于制造误差，这些基向量彼此之间并不正交，这意味着 $\mathrm{F_A}$ 轴与 $\mathrm{F_P}$ 轴之间的夹角非常小。

在不失一般性的前提下，始终可以设定$\mathbf{i}_1^{\mathrm{P}}$ 与$\mathbf{i}_1^{\mathrm{A}}$ 重合，并且$\mathbf{i}_2^{\mathrm{P}}$ 位于由$\mathbf{i}_1^{\mathrm{A}}$和$\mathbf{i}_2^{\mathrm{A}}$所确定的平面内。若如此，则$\mathbf{i}_1^{\mathrm{A}} \perp \mathbf{i}_2^{\mathrm{P}}$、$\mathbf{i}_1^{\mathrm{A}} \perp \mathbf{i}_3^{\mathrm{P}}$和$\mathbf{i}_2^{\mathrm{A}} \perp \mathbf{i}_3^{\mathrm{P}}$，$\mathrm{F_P}$ 与$\mathrm{F_A}$ 坐标系之间的相对姿态可由三个相互独立的小角度旋转定义。

- $\mathbf{i}_{\mathrm{A}2}$ 轴可通过绕$\mathbf{i}_{\mathrm{P}3}$轴的小角度旋转 $\alpha_{\text{加速度计},3}$ 由$\mathbf{i}_{\mathrm{P}2}$ 轴得到。
- 该$\mathbf{i}_{\text{微分}3}$ 轴可通过两次小角度旋转由$\mathbf{i}_3^{\mathrm{P}}$ 得到：$\alpha_{\mathrm{ACC},1}$ 绕$\mathbf{i}_1^{\mathrm{P}}$ ，以及$\alpha_{\mathrm{ACC},2}$ 绕$\mathbf{i}$ $^{\mathrm{P}}_{2}$.

尽管可以得到精确关系 [7], , 且鉴于这些角度非常小，可以认为 $\cos\alpha_{\mathrm{ACC,i}} = 1, \sin\alpha_{\mathrm{ACC,i}} = \alpha_{\mathrm{ACC,i}}$，以及$\alpha_{\mathrm{ACC,i}} \cdot \alpha_{\mathrm{ACC,j}} = 0\ \forall \mathrm{i}, \mathrm{j} \in \{1,\ 2,\ 3\}, \mathrm{i} \neq \mathrm{j}$，从而得到 $\mathrm{F_P}$ 与 $\mathrm{F_A}$[10]坐标系之间的变换矩阵：

$$\mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{PA}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{\mathrm{ACC},3} & 1 & 0 \\ -\alpha_{\mathrm{ACC},2} & \alpha_{\mathrm{ACC},1} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{AP}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_{\mathrm{ACC},3} & 1 & 0 \\ \alpha_{\mathrm{ACC},2} & -\alpha_{\mathrm{ACC},1} & 1 \end{bmatrix} \tag{C.29}$$

[9]因此，每个加速度计只能感测平行于其感测轴的比力分量。[10]由于 $\mathrm{F_A}$ 非正交，变换矩阵用 $\star$ 表示，以表明它们并非 [1]中定义的正规旋转矩阵。因此，这些矩阵无法转换为单位四元数。

C.3.3 陀螺仪坐标系

陀螺仪（Y）坐标系 [5, 7, 12] 与 $\mathrm{F_A}$类似，但其方向与陀螺仪的感测轴对齐，而非与加速度计的感测轴对齐。它也是一个非正交坐标系 $\mathrm{F_Y} = \{\mathrm{O_Y},\ \mathbf{i}_1^{\mathrm{Y}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{Y}},\ \mathbf{i}_3^{\mathrm{Y}}\}$，其原点位于 IMU参考点（$\mathbf{T}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{PY}} = \mathbf{0}_3$）。但无法对 $\mathrm{F_Y}$ 坐标轴相对于 $\mathrm{F_P}$坐标轴的位置关系作出任何简化假设，因此两者的相对姿态由六个小角度旋转 $\alpha_{\mathrm{GYR,\ ij}}\,\forall \mathrm{i},\ \mathrm{j} \in \{1,\ 2,\ 3\}$，$\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ 定义，其中 $\alpha_{\mathrm{GYR,\ ij}}$ 表示$\mathbf{i}^{\mathrm{Y}}{}_{\mathrm{i}}$ 绕$\mathbf{i}^{\mathrm{P}}{}_{\mathrm{j}}$的旋转。

采用与章节 C.3.2 类似的方法，可得到以下变换:

$$\mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{PY}} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{\mathrm{GYR},23} & \alpha_{\mathrm{GYR},32} \\ \alpha_{\mathrm{GYR},13} & 1 & -\alpha_{\mathrm{GYR},31} \\ -\alpha_{\mathrm{GYR},12} & \alpha_{\mathrm{GYR},21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}^{\star}_{\mathrm{YP}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{\mathrm{GYR},23} & -\alpha_{\mathrm{GYR},32} \\ -\alpha_{\mathrm{GYR},13} & 1 & \alpha_{\mathrm{GYR},31} \\ \alpha_{\mathrm{GYR},12} & -\alpha_{\mathrm{GYR},21} & 1 \end{bmatrix} \tag{C.30}$$

C.3.4 相机坐标系

相机坐标系 (C) [65] 是一个笛卡尔坐标系 $\mathrm{F_C} = \{\mathrm{O_C},\ \mathbf{i}_1^{\mathrm{C}},\ \mathbf{i}_2^{\mathrm{C}},\ \mathbf{i}_3^{\mathrm{C}}\}$ 其原点 $\mathrm{O_C}$ 位于相机光心（章节 5.4），$\mathbf{i}_1^{\mathrm{C}}$ 平行于相机焦平面，指向图像右侧，$\mathbf{i}_3^{\mathrm{C}}$ 沿相机主轴向前，且$\mathbf{i}_2^{\mathrm{C}}$ 与$\mathbf{i}_1^{\mathrm{C}}$ 及$\mathbf{i}_3^{\mathrm{C}}$ 正交，使它们构成一个右手坐标系。

$\mathrm{F_C}$ 对于视觉导航至关重要。它可由 $\mathrm{F_B}$ 经旋转得到，该旋转可用欧拉角 $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BC}} = [\psi^{\mathrm{C}}\ \ \theta^{\mathrm{C}}\ \ \xi^{\mathrm{C}}]^{\mathrm{T}}$ 最佳描述；随后再从飞机质心 $\mathrm{O_B}$ 平移 $\mathbf{T}^{\mathrm{B}}{}_{\mathrm{BC}}$（章节 5.4）至相机光心 $\mathrm{O_C}$:

- 相机航向或相机偏航角 ψ_{C} 表示$\mathbf{i}_{\mathrm{B1}}$（机身前向）与$\mathbf{i}_{\mathrm{C1}}$ 在由$\mathbf{i}_{\mathrm{B1}}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{B2}}$定义的平面上的投影之间的夹角。
- 相机俯仰角 θ_{C} 表示$\mathbf{i}_{\mathrm{C1}}$ 与其在由$\mathbf{i}_{\mathrm{B1}}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{B2}}$定义的平面上的投影之间的夹角。
- 相机倾侧角 ξ_{C} 表示$\mathbf{i}_{\mathrm{C2}}$ 与由$\mathbf{i}_{\mathrm{C2}}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{C3}}$ 定义的平面与由$\mathbf{i}_{\mathrm{B1}}$ 和$\mathbf{i}_{\mathrm{B2}}$定义的平面的交线之间的夹角。

$$\mathbf{q}_{\mathrm{BC}} \equiv \mathbf{R}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{R}_3(\psi^{\mathrm{C}})\ \mathbf{R}_2(\theta^{\mathrm{C}})\ \mathbf{R}_1(\xi^{\mathrm{C}}) \equiv \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{BC}} \tag{C.31}$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BC}} = \mathbf{q}_{\mathrm{BC}} + \frac{\epsilon}{2}\,\mathbf{T}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{BC}} \otimes \mathbf{q}_{\mathrm{BC}} \tag{C.32}$$

$\mathrm{F_E}$ 与 $\mathrm{F_C}$ 之间的相对位姿为:

$$\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EC}} = \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{EN}} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{NB}} \otimes \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{BC}} \tag{C.33}$$

仿真还采用图像坐标系 $\mathrm{F_{IMG}}$，这是一个与 $\mathrm{F_C}$ 关联的二维笛卡尔坐标系，关于相机传感器的详细说明见章节 5.4。