arXiv:2305.02020v1 [math.LO] 3 May 2023

严格稳定 SH1238 的抽象初等类

Saharon Shelah

Abstract. 良好框架最初由 [She09d] 提出，作为超稳定理论（在初等类中）的（基本）对应物，适用于抽象初等类的背景下。本文将考察 (μ, λ, κ)-框架，探讨它们是否是严格稳定理论的 $|T|^+$-饱和模型类（在初等类中）在抽象初等类背景下的恰当对应物。与超稳定情形相比，我们失去的一点是，按基数归纳向上推进会遇到困难（对于余终性较小的阶段）。但只有在尝试将此类提升到更高基数时，才会出现这一问题。此外，我们可以用递增链之并上的素模型的存在性作为替代方案。针对这一背景，我们将研究维数。

带注释的内容

§0 引言 第2页 §1 在不具备完全连续性的情况下公理化抽象初等类（标签 f）第3页[平滑化：推广 [She09b，第1节。]§(1A) 抽象初等类 第3页 §(1B) 基本概念（从 1.18 起）第9页 §(1C) 将这类提升到更大的基数（从 1.24 起）第11页 §2 PR 框架（标签 g）第16页 §3 关于主间隙的思考（标签 h）第23页

版本 2023-04-24 2。请参见 https://shelah.logic.at/papers/1238/ 以获取可能的更新。*Date*：2023 年 4 月 23 日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 03C48；次要分类号 03C45。*Key words and phrases.* 模型论、分类理论、稳定性、抽象初等类、正交性、权、主间隙。对于较早的版本，作者感谢 Alice Leonhardt 截至 2019 年完成了精美的打字工作。作者感谢以色列科学基金会为本研究提供部分资助（资助编号：242/03）。最初于 2002 年 9 月 10 日打字，作为 [Sheb] 的第 4–7 节；原论文的第 8–11 节可见于 [Shea]。对于后续版本，作者感谢美国国家科学基金会和美以双边科学基金会对本研究的部分资助——美国国家科学基金会—美以双边科学基金会 2021：与 M. Malliaris 的资助项目，美国国家科学基金会 2051825，美以双边科学基金会 3013005232（2021/10–2026/09）。作者还感谢一位希望保持匿名的人士慷慨资助打字服务，并感谢 Matt Grimes 细致而精美的打字工作。诸如 [Sh:950, Th0.2=Ly5] 这样的引用，表示 Th0.2 的内部标签是 Sh:950 中的 y5。读者请注意，我网站上的版本通常比 arXiv 上的版本更新。

§ 0. Introduction

在抽象初等类框架下，我们试图处理诸如“$\aleph_1$一阶理论 T 的饱和模型，甚至是严格稳定的模型”这样的类，而不是“ T一个模型”。“ T的模型，甚至是超稳定的模型”这一平行问题，则是 [She09d]的主题。

现在，有些构造可以通过对基数作归纳顺利进行（例如，处理一个由模型构成的 $(\lambda, \mathcal{P}(n))$-系统），但并非所有构造都如此。例如，从 $\aleph_0$ 出发，我们可以考虑$\lambda > \aleph_0$，因此可以找到 $F : [\lambda]^{\aleph_0} \to \lambda$ ，使得不存在 λ的无限递减序列，其中每个成员都是 F-闭子集，并且满足 $u \in [\lambda]^{<\aleph_0} \Rightarrow F(u) = \varnothing$，但也许可以满足 $u \in [\lambda]^{\leq \aleph_0} \Rightarrow |c\ell_F(u)| \leq \aleph_0$。令 $\langle u_\alpha : \alpha < \alpha_* \rangle$ 列出 $\{c\ell_F(u) : u \in [\lambda]^{\leq \aleph_0}\}$，使得 $c\ell_F(u_\alpha) \subseteq c\ell_F(u_\beta) \Rightarrow \alpha \leq \beta$。我们尝试对 α 作归纳来选择 M_{u_α}。

另一种方法是考虑类型理论“足够良好”的严格稳定理论，例如超稳定理论。参见 [PS 18] ，其中讨论了所谓的“平坦”一阶理论。

* * *

这是 [Sheb] 的中间部分，应编辑要求分成了几部分；第三部分是 [Shea]。完整的原论文自 2002 年起便已存在（并且在一定程度上已广为流传）。

记号 0.1. 设 $\lambda^{<\kappa} \mathrel{..=} \sum\{\lambda^\sigma : \sigma < \kappa\}$；在下标中我们可以使用 $\lambda[< \kappa]$。

我们将自由使用以下内容。

断言 0.2. 如果 $\lambda = \lambda^{<\kappa}$ ，则 $\chi \geq \lambda \Rightarrow (\chi^{<\kappa})^{<\kappa} = \chi^{<\kappa}$。

§1. Axiomatizing AEC without full continuity

§ 1(A). DAEC。诸如“一阶 T （非超稳定）的 $\aleph_1$-饱和模型”这样的类，并不属于抽象初等类（AEC）——但它们与之非常接近，下面我们将为其提出一个框架。因此，对于较短长度的递增序列，其并集不一定属于该类，但我们提出了较弱的要求。在主要情形下，作为一种“补偿”，我们有素模型存在；特别是，在较短的递增模型链之上，素模型也存在。

我们将把一个 (μ,λ,κ)-抽象初等类提升为 (∞,λ,κ)-抽象初等类（见下文），因此实际上 $\mathfrak{k}_\lambda$ 就足够了。但对于我们的主要对象——良好框架——情况要复杂得多，因为提升不一定能保留它们的性质（例如摊并性质）。

本节推广了 [She09b，第1]节；在某些情况下，差异很小，而有时差异恰恰是关键所在。

约定 1.1. 在本节中，除非另有说明，$\mathfrak{k}$ 将表示一个 1-DAEC（即有向抽象初等类；见定义 1.2）。我们也可以写作 DAEC（其中 D 表示有向）。

定义 1.2. 假设 $\lambda<\mu$、$\lambda^{<\kappa}=\lambda$ （为简化记号）、$\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{<\kappa}<\mu$ 和 κ 是正则的。

当 $\boxplus$ 且以下所有公理均成立时，我们称 $\mathfrak{k}$ 是一个（μ，λ，κ）-1-DAEC。

（根据下面的公理 $\boxplus$(a)，我们可以省略或添加“1”和/或“（μ，λ，κ）”；类似地，类似定义也如此。我们也可以将 $\mu=\mu_1^+$ 写作 $\leq\mu_1$。）当省略公理 III(b)、IV(b) 时，我们称其为 pre-DAEC 或 0-DAEC。

$\boxplus$ （=公理 O）由条款 (a)-(d) 中的对象组成，并具有 (e)-(g) 中列出的性质。

(a) 基数 $\mu=\mu_{\mathfrak{k}}=\mu(\mathfrak{k})$、$\lambda=\lambda_{\mathfrak{k}}=\lambda(\mathfrak{k})$ 和 $\kappa=\kappa_{\mathfrak{k}}=\kappa(\mathfrak{k})$，满足 $\mu>\lambda=\lambda^{<\kappa}\geq\kappa=$ 共尾性(κ) 和 $\alpha<\mu\Rightarrow|\alpha|^{<\kappa}<\mu$ （但可能 $\mu=\infty$）。(b) $\tau_{\mathfrak{k}}$，一个词汇表，其中每个谓词和函数符号的元数均为 $\leq\lambda$。(c) K 一个 τ-模型的类。(d) K 上的一个二元关系 $\leq_{\mathfrak{k}}$。(e) 如果 $M_1\cong M_2$，则 $M_1\in K\Leftrightarrow M_2\in K$。(f) 如果 $(N_1,M_1)\cong(N_2,M_2)$，则 $M_1\leq_{\mathfrak{k}}N_1\Rightarrow M_2\leq_{\mathfrak{k}}N_2$。(g) 每个 $M\in K$ 的基数均为 $\lambda\leq\|M\|<\mu$。

公理 I(a) $M\leq_{\mathfrak{k}}N\Rightarrow M\subseteq N$

公理 II(a) $\leq_{\mathfrak{k}}$ 是一个偏序。

公理 III 假设 $\langle M_i:i<\delta\rangle$ 是一个 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增序列，并且 $\|\bigcup\{M_i:i<\delta\}\|<\mu$。那么：

(a) 并集的存在性

如果 cf(δ) $\geq\kappa$，那么存在 $M\in K$ 使得 $i<\delta\Rightarrow M_i\leq_{\mathfrak{k}}M$ 并且 $|M|=\bigcup\{|M_i|:i<\delta\}$ （但不一定 $M=\bigcup\limits_{i<\delta}M_i$）.

(b) 极限的存在性

存在 $M\in K$ 使得 $i<\delta\Rightarrow M_i\leq_{\mathfrak{k}}M$。

公理 IV(a) 极限的弱唯一性（= 弱光滑性）

对于上述的 $\langle M_i:i<\delta\rangle$，

(a) 若 cf(δ) $\geq\kappa$，M 如公理 III(a) 中所述，且 $i<\delta\Rightarrow M_i\leq_{\mathfrak{k}}N$，则 $M\leq_{\mathfrak{k}}N$。（这意味着 M的唯一性。）

(b) 如果对于 $\ell=1,\ 2,\ N_\ell\in K$ 和 $i<\delta\Rightarrow M_i\le_{\mathfrak{k}}N_\ell$，那么存在 $N\in K$和 f_1，f_2，使得对于 $\ell=1,\ 2$ 和 $i<\delta\Rightarrow f_1\restriction M_i=f_2\restriction M_i,\ f_\ell$是一个将 N_ℓ嵌入到 N 中的 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入。

Ax.V 若 $N_\ell\le_{\mathfrak{k}}M$ 对于 $\ell=1,2$ 和 $N_1\subseteq N_2$，则 $N_1\le_{\mathfrak{k}}N_2$。

公理 VI 向下 Löwenheim–Skolem 性质

若 $A\subseteq M\in K$ 和 $|A|\le\lambda$，则存在一个基数为 λ 的 $M\le_{\mathfrak{k}}N$，使得 $A\subseteq M$。

注 1.3。1.4(5) 中还列出了一些其他公理，但我们会在使用它们的断言中提及，因此无需记忆。注意，1.4(1)-(4) 假设了其中一些公理。

定义 1.4。1）我们称 $\mathfrak{k}$ 为 4-DAEC 或 DAEC$^+$，如果它是一个 (λ,μ,κ)-1-DAEC，并且满足下文的 Ax.III(d)、公理 IV(e)。

2) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 2-DAEC 或 DAEC$^\pm$，则称其为 (λ,μ,κ)-0-DAEC，且满足下文的 Ax.III(d)、Ax.IV(d)。

3) 若 $\mathfrak{k}$ 是 1-DAEC，且满足 Ax.III(d)、(f)，则称其为 5-DAEC。

4) 若 $\mathfrak{k}$ 是 1-DAEC，且满足 Ax.III(d)、(f) + Ax.IV(f)，则称其为 6-DAEC。

5) 关于定义 1.2，我们考虑以下公理:

Ax.III (c) 若 I 是 κ-有向的，且 $\overline{M}=\langle M_s:\ s\in I\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的（即 $s\le_I t\Rightarrow M_s\le_{\mathfrak{k}}M_s$），并且 $\sum\{\|M_s\|:\ s\in I\}<\mu$，则 $\overline{M}$ ~~有一~~个$\le_{\mathfrak{k}}$-上界 M（即 $s\in I\Rightarrow M_s\le_{\mathfrak{k}}M$）。(d) 有向系统的并 若 I 是 κ-有向的，$|I|<\mu$，$\langle M_t:\ t\in I\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，且$\left\|\bigcup\{M_t:t\in I\}\right\|<\mu$，则存在唯一一个 M，其论域为$\bigcup\{|M_t|:\ t\in I\}$，使得对每个 $s\in I$ 都有 $M_s\le_{\mathfrak{k}}M$。（我们称其为 $\langle M_t:\ t\in I\rangle$的$\le_{\mathfrak{k}}$- 并。） (e) 类似于 Ax.III(c)，但 I 仅为有向的。(f) 若 $\overline{M}=\langle M_i:\ i<\delta\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，cf(δ) $<\kappa$，并且，则存在 M，它在 $\overline{M}$ 上 $\le_{\mathfrak{k}}$-素；即

$$\left|\bigcup\{M_i:i<\delta\}\right|<\mu$$

- 如果 $N\in K_{\mathfrak{k}}$ 且 $i<\delta\Rightarrow M_i\le_{\mathfrak{k}}N$，那么存在一个从 M 到其自身、在 $\bigcup\{|M_i|$上且满足 $\le_{\mathfrak{k}}$ 的嵌入：$i<\delta\}$。

公理 IV (c) 如果 I 是 κ-有向的，且 $\overline{M}=\langle M_s:\ s\in I\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，并且 N_1、N_2是 $\overline{M}$的 $\le_{\mathfrak{k}}$-上界，那么对于某个 $(N_2',$ ~~f~~$)$，我们有 $N_2\le_{\mathfrak{k}}N_2'$，且 f 是一个从 N_1 到 N_2 的 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入；对于每个 $s\in I$，该嵌入在 M_s上都是恒等映射。（这是唯一性的一种弱形式。）(d) 如果 I 是一个 κ-有向偏序，$\overline{M}=\langle M_s:\ s\in I\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$- 递增的，$s\in I\Rightarrow M_s\le_{\mathfrak{k}}M$ 且 $|M|=\bigcup\{|M_s|:\ s\in I\}$，那么 $\bigwedge M_s\le_{\mathfrak{k}}N\Rightarrow_s M\le_{\mathfrak{k}}N$。(e) 与公理 IV(c)类似，但 I 只是有向的。(f) 如果 I 是有向的，且 $\overline{M}=\langle M_s:\ s\in I\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，那么存在 M，它是在 $\overline{M}$上素的 $\le_{\mathfrak{k}}$，其定义同公理 III(f)。

断言 1.5. 假设[1] $\mathfrak{k}$ 是一个 DAEC。

1) Ax.III(d) 蕴含 Ax.III(c)。此外，Ax.III(c) 蕴含公理 III(a)。

2) 公理 III(e) 蕴含 Ax.III(c)，也蕴含公理 III(b)。此外，公理 III(b) 蕴含公理 III(a)。

3) Ax.IV(d) 蕴含 Ax.IV(a)。

[1]根据 1.1，无需说明这一点。

4) 公理 IV(e) 蕴含公理 IV(c)，也蕴含公理 III(b)。5) 在定义 1.4 中的所有公理里，都必须满足$\left|\bigcup\{M_s: s\in I\}\right|<\mu_{\mathfrak{k}}$。6) 公理 IV(b) 蕴含 $\mathfrak{k}$ 具有 amalgamation。

证明。显然。 $\square_{1.5}$

例 1.6。一阶情形

设 T 是一个稳定完备一阶理论 T，且 $\kappa=\kappa_r(T)\in\left[\aleph_1,|T|^+\right]$。（等价地，$\kappa$ 是使得 $\lambda=\lambda^{<\kappa}\geq 2^{|T|}\Rightarrow T$ 在 λ 中稳定的极小正则基数。）我们将定义 $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_T$:

⊞ (a) $K=K_{\mathfrak{k}}$ 是 T 的 κ-饱和模型类（等价地，F^a_κ-饱和）。(b) $\leq=\leq_{\mathfrak{k}}$ 意为 " 是 ..... 的初等子模型 "。

例 1.7. 存在闭

令 T 是一个具有联合嵌入性质的全称一阶理论，为了表述清楚。[2] 我们将定义 $\mathfrak{k}$:

⊞ (a) $K=K_{\mathfrak{k}}$ 是 T 的存在闭模型类。(b) $\leq=\leq_{\mathfrak{k}}$ 表示"是..... 的子模型"。

参见 [She75]，中所谓的"III 类语境"；回想一下，II 类语境针对的是具有 amalgamation 和联合嵌入性质的这类 T。Hrushovski 做了更多相关工作。

例 1.8. 度量空间

1) (a) 若 τ 具有指定的二元谓词 R_q（q 为正有理数）以及 nmet:[3] let，则称其为度量词汇表

$$\mathrm{nmet}(\tau)=\tau\setminus\{R_q: q\in\mathbb{Q}^+\}$$

且 τ 是有限元的。也就是说，每个谓词和函数符号都有有限个位置。

(b) M 是一个度量模型，当其词汇表 τ_M 是一个度量词汇表，且存在一个定义在 M 上的度量 $\mathrm{d}_M(-,-)$，使得

- $\bullet_1\ \mathrm{d}_M(a,b)=\inf\{q\in\mathbb{Q}^+:(a,b)\in R_q^+\}$
- $\bullet_2$ 对于任意谓词 $R\in\tau$，R^M 是闭的。
- $\bullet_3$ 对于任意函数符号 F，F^M 是一个连续函数。
- $\bullet_4$ M 作为度量空间是完备的。

(c) 不考虑条件 $\bullet_4$ 时，我们称 M 为几乎度量模型。(d) 若存在一个 π，使得度量模型 M_1、M_2 拓扑同构，则称它们拓扑同构：

$\bullet_1$ π 是从 $M_1\restriction\mathrm{nmet}(\tau)$ 到 $M_2\restriction\mathrm{nmet}(\tau)$ 的同构。$\bullet_2$ $\mathrm{dist}_\pi(M_1,M_2)=\sup\Big\{\mathrm{d}_{M_2}\big(\pi(a),\pi(b)\big)\,\mathrm{d}_{M_1}(a,b)^{-1},\mathrm{d}_{M_1}(a,b)\,\mathrm{d}_{M_2}\big(\pi(a),\pi(b)\big): a\neq b\in M_1\Big\}$ 是有限的。

(请注意，这就是巴拿赫空间理论家所说的同构的含义；他们会把我们所说的同构称为等距同构。)

2) (a) 当满足以下条件时，我们称 $\mathfrak{k}$ 为度量 AEC（或 MAEC）：

- $\bullet_1$ $\tau_{\mathfrak{k}}$ is a metric vocabulary.
- $\bullet_2$ $\mathfrak{k}$ is a DAEC with $\mu_{\mathfrak{k}}=\infty$, $\kappa=\aleph_1$, and $\lambda=\lambda^{\aleph_0}$ (and for convenience $|\tau_{\mathfrak{k}}|\leq\lambda$).
- $\bullet_3$ Each $M\in K_{\mathfrak{k}}$ is a metric model.

[2] 否则，T 的存在闭模型类将分成 $\leq 2^{|T|}$ 个子类，每个子类都具有这种形式。[3] nmet 代表"非度量"。

$\bullet_4$ 如果 I 是有向偏序，且 $\overline{M} = \langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，那么自然定义的 $\bigcup\{M_s : s \in I\}$的完备化 M 是$\overline{M}$的 $\le_{\mathfrak{k}}$-最小上界。

(b) 当我们省略 (1)(b) 中的完备性要求，并添加.....时，我们称 $\mathfrak{k}$ 为几乎度量 AEC。

- 如果 N 是 $M \in K_{\mathfrak{k}}$ 的完备化（因此必然有 $N \in K_{\mathfrak{k}}$、$M \le_{\mathfrak{k}} N$），那么 $M \subseteq M' \subseteq N \Rightarrow M \le_{\mathfrak{k}} M' \le_{\mathfrak{k}} N$。

3) (a) 如果 $\mathfrak{k}$ 是度量 AEC，那么定义 1.2、1.4 中的所有公理都成立。(b) 如果 $\mathfrak{k}$ 是几乎度量 AEC，那么

$$\operatorname{comp}(\mathfrak{k}) := \mathfrak{k} \restriction \{M \in K_{\mathfrak{k}} : (|M|, \mathbf{d}_M) \text{ is complete}\}$$

是一个度量 AEC；此外，$\mathfrak{k}$ 是一个 AEC。在这种情况下，“$M \in K_{\mathfrak{k}}$的完备化”可自然地定义。

(c) 表示定理。

如果 $\mathfrak{k}$是一个度量 AEC，那么对于某些 τ_1、T_1、Γ，我们有：

- $\bullet_1$ $\tau_1 \supseteq \tau_{\mathfrak{k}}$ 和 $|\tau_1| \le \lambda_{\mathfrak{k}}$。
- $\bullet_2$ T_1 是 $\mathbb{L}(\tau_1)$ 中的一个全称一阶理论。
- $\bullet_3$ Γ 是由公式组成的 $\mathbb{L}(\tau_1)$-型的集合（因此，对于某个 m，它们是 m-型）。
- $\bullet_4$ 每个 $M \in \mathrm{EC}(T_1, \Gamma)$ 都是一个弱度量模型。
- $\bullet_5$ $K_{\mathfrak{k}} = \{M : M$ 是某个 $M_1 \in \mathrm{EC}(T_1, \Gamma)$ 的 $M_1 \restriction \tau_{\mathfrak{k}}$ 的完备化$\}$
- $\bullet_6$ $\le_{\mathfrak{k}}$ 定义为

$\{(M, N)$：存在来自 $\mathrm{EC}(T_1, \Gamma)$ 的 $M_1 \subseteq N_1$，使得

$M \subseteq N$ 分别是 $M_1 \restriction \tau_{\mathfrak{k}}$，$N_1 \restriction \tau_{\mathfrak{k}}$ 的完备化。$\}$

[为什么这是真的？与抽象初等类的情形相同。]

关于度量模型论和拓扑模型论，该领域由 Chang 和 Keisler 于 [CK66] 开创；入门介绍可参见近期综述 [Kei20]。

定义 1.9。我们称 $\langle M_i : i < \alpha \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的（$\ge \kappa$）-连续的，当且仅当它是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，且 $\delta < \alpha$，并且 $\mathrm{cf}(\delta) \ge \kappa \Rightarrow |M_\delta| = \bigcup\{|M_j| : j < \delta\}$。

作为练习，我们考虑带映射的有向系统。

定义 1.10. 1) 如果 $\overline{M} = \langle M_t, h_{t,s} : s \le_I t \rangle$ 是一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统，当且仅当

(A) I 是一个有向偏序。(B) 如果 $s \le_I t$，那么 $h_{t,s}$ 是从 M_s 到某个 $M' \le_{\mathfrak{k}} M_t$ 的同构。(C) 如果 $t_0 \le_I t_1 \le_I t_2$，那么 $h_{t_2,t_0} = h_{t_2,t_1} \circ h_{t_1,t_0}$。

1A) 如果 $\overline{M} = \langle M_t, h_{t,s} : s \le_I t \rangle$ 是一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-θ-有向系统，并且 I 是 θ-有向的，我们称之为 $\le_{\mathfrak{k}}$-θ-有向系统。

2) 当 $s \le_I t \Rightarrow h_{t,s} = \mathrm{id}_{M_s}$ 时，我们可以省略 $h_{t,s}$，并记作 $\overline{M} = \langle M_t : t \in I \rangle$。

3) 当 $h = \langle h_s : s \in I \rangle$、$h_s$ 是从 M_s 到 M 的 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入，且 $s \le_I t \Rightarrow h_s = h_t \circ h_{t,s}$ 时，我们称 (M, h) 是 M 的一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-极限。

4) 我们称 $\overline{M} = \langle M_\alpha : \alpha < \alpha^* \rangle$ 为 $\le_{\mathfrak{k}}$-半连续的，当且仅当：（参见 1.4 中的公理 III(f)）

(A) $\overline{M}$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的。(B) 若 $\alpha < \alpha^*$ 的余终性为 $\ge \kappa$，则 $M_\alpha = \bigcup\{M_\beta : \beta < \alpha\}$。(C) 若 $\alpha < \alpha^*$ 的余终性为 $< \kappa$，则 M_δ 在 $\overline{M} \restriction \alpha$上是 $\le_{\mathfrak{k}}$-素的。

观察 1.11。[$\mathfrak{k}$ 是一个 DAEC。]

1) 如果 $\overline{M} = \langle M_t, h_{t,s} : s \le_I t \rangle$ 是一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统，那么我们可以找到一个 $\le_{\mathfrak{k}}$-有向系统 $\langle M'_t : t \in I \rangle$（因此 $s \le_I t \Rightarrow M'_s \le_{\mathfrak{k}} M'_t$）以及 $\bar{g} = \langle g_t : t \in I \rangle$，使得：

(*a*) g_t 是从 M_t 到 M'_t 的同构。(*b*) 如果 $s \leq_I t$，那么 $g_s = g_t \circ h_{t,\ s}$。

2) 因此，在定义 1.2 中的公理 III(a)、(b)、IV(a) 以及 1.4 的公理中，我们可以使用 $\leq_{\mathfrak{k}}$-有向系统 $\langle M_s, h_{t,s} : s \leq_I t\rangle$，其中 I 与那里相同。

3) 如果 $\mathfrak{k}$ 是一个 ess-(μ,λ)-抽象初等类（参见 [Sheb，第 1] 节），那么 $\mathfrak{k}$ 是一个 $(\mu,\lambda,\aleph_0)$-DAEC，并满足 1.4 中的所有公理。

4) 如果（M，h）在 $\overline{M} = \langle M_t, h_{t上素s} : s \leq_I t\rangle$ 且 $\chi = \sum\{\|M_t\| : t \in I\}$，则 $\|M\| \leq \chi^{<\kappa}$。

证明。显然；例如，我们可以使用“$\mathfrak{k}$ 具有（$\chi^{<\kappa}$）-LST”（即下文的观察 1.12）。 $\square_{1.11}$

更严峻的问题是在我们的语境中证明 LST 定理（请回想公理中的要求，见公理 VI：我们只要求它适用于 λ 以下的情形）。

断言 1.12. 1) $\mathfrak{k}$ 是一个(μ,λ,κ)-2-DAEC——见定义 1.4(2)。

如果 $\lambda_{\mathfrak{k}} \leq \chi = \chi^{<\kappa} < \mu_{\mathfrak{k}}$、$A \subseteq N \in \mathfrak{k}$ 和 $|A| \leq \chi \leq \|N\|$，那么存在一个基数为 χ 的 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$，使得 $\|M\| = \chi$ 和 $A \subseteq M$。

2) 如果 $\mathfrak{k}$ 满足公理 III(e)、公理 IV(e)，那么在第 (1) 部分中，我们不需要假设“$\chi = \chi^{<\kappa}$.”

证明。1) 由于 $\chi \leq \|N\|$，

$(*)_0$ 不失一般性 $|A| = \chi$。

令 $\langle u_\alpha : \alpha < \alpha(*)\rangle$ list $[A]^{<\kappa(\mathfrak{k})}$，并令 I 为如下偏序：

$(*)_1$ (a) 元素集为 $\{\alpha < \chi :$ 不存在 $\beta < \alpha$ 使得 $u_\alpha \subseteq u_\beta\}$。(b) $\alpha \leq_I \beta$ 当且仅当 $u_\alpha \subseteq u_\beta$（因此 $\alpha \leq \beta$）。

显然

$(*)_2$ (a) I is κ-directed.
(b) For every $\alpha < \alpha(*)$, for some $\beta < \alpha(*)$, we have $u_\alpha \subseteq u_\beta \wedge \beta \in I$.
(c) $\bigcup\{u_\alpha : \alpha \in I\} = A$.

现在，我们通过对 $\alpha < \chi$ 作归纳来选取 M_α，使得

$(*)_3$ (a) $M_\alpha \leq_{\mathfrak{k}} N$
(b) $\|M_\alpha\| = \lambda_{\mathfrak{k}}$
(c) M_α includes $\bigcup\{M_\beta : \beta <_I \alpha\} \cup u_\alpha$.

注意

$$\big|\{\beta \in I : \beta <_I \alpha\}\big| \leq \big|\{u : u \subseteq u_\alpha\}\big| = 2^{|u_\alpha|} \leq 2^{<\kappa(\mathfrak{k})} \leq \lambda_{\mathfrak{k}},$$

并且根据归纳假设 $\beta < \alpha \Rightarrow \|M_\beta\| \leq \lambda_{\mathfrak{k}}$。回想 $|u_\alpha| < \kappa(\mathfrak{k}) \leq \lambda_{\mathfrak{k}}$，因此集合 $\bigcup\{M_\beta : \beta < \alpha\} \cup u_\alpha$ 是 N 的一个子集，其基数为 $\leq \lambda$；由公理 VI，存在所需的 M_α。

选定 $\langle M_\alpha : \alpha \in I\rangle$ 后，由 Ax.V 显然它是一个 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增的（$< \kappa$）-有向系统；因此根据 Ax.III(d)，$M = \bigcup\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ 在论域 $\bigcup\{|M_\alpha| : \alpha \in I\}$ 上定义良好，并且根据 Ax.IV(d) 我们有 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$。

显然 $\|M\| \leq \sum\{\|M_\alpha\| : \alpha \in I\} \leq |I| \cdot \lambda_{\mathfrak{k}} = \chi$，并且由 $(*)_2(c)$ + $(*)_3(c)$ 可得

$$A \subseteq \bigcup\{u_\alpha : \alpha < \chi\} = \bigcup\{u_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \bigcup\{|M_\alpha| : \alpha \in I\} = M$$

因此，M 符合要求。

2）同理。 $\square_{1.12}$

记号 1.13。1）对于 $\chi \in [\lambda_{\mathfrak{k}}, \mu_{\mathfrak{k}})$，令 $K_\chi = K^{\mathfrak{k}}_\chi = \{M \in K\colon \|M\| = \chi\}$ and$K_{<\chi} = \bigcup\limits_{\mu<\chi} K_\mu$。

2) $\mathfrak{k}_\chi = (K_\chi, \leq_{\mathfrak{k}} \restriction K_\chi)$。

3）如果 $\lambda_{\mathfrak{k}} \leq \lambda_1 < \mu_1 \leq \mu_{\mathfrak{k}}$、$\lambda_1 = \lambda_1^{<\kappa}$，且 $(\forall \alpha < \mu_1)\big[|\alpha|^{<\kappa} < \mu_1\big]$，那么我们定义$K_{[\lambda_1,\mu_1]} = K^{\mathfrak{k}}_{[\lambda_1,\mu_1]}$，$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu_1]}$ 同理:

(A) $K_{\mathfrak{k}_1} = \big\{M \in K_{\mathfrak{k}}\colon \|M\| \in [\lambda_1, \mu_1)\big\}$(B) $\leq_{\mathfrak{k}_1} = \leq_{\mathfrak{k}} \restriction K_{\mathfrak{k}_1}$(C) $\lambda_{\mathfrak{k}_1} = \lambda_1$, $\mu_{\mathfrak{k}_1} = \mu_1$, $\kappa_{\mathfrak{k}_1} = \kappa_{\mathfrak{k}}$.

4) 设 $\mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu_1]} := \mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu_1^+)}$.

定义 1.14. 当嵌入 $f\colon N \to M$ 的值域是某个模型 $N' \leq_{\mathfrak{k}} M$ 的论域时，它称为 $\mathfrak{k}$-~~嵌入~~或 $\leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入（因此 $f\colon N \to N'$ 是一个同构，故它是满射）。

断言 1.15. [$\mathfrak{k}$ 是一个 2-DAEC。]

1) 对于每个 $N \in K$，都存在一个基数为 $\leq \|N\| < \kappa$ 的 $\kappa_{\mathfrak{k}}$-有向偏序 I，且 $\overline{M} = \langle M_t\colon t \in I\rangle$，使得 $t \in I \Rightarrow M_t \leq_{\mathfrak{k}} N$，$\|M_t\| \leq \mathrm{LST}(\mathfrak{k}) = \lambda_{\mathfrak{k}}$，

$$I \models \text{“}s < t\text{”} \Rightarrow M_s \leq_{\mathfrak{k}} M_t,$$

以及 $N = \bigcup\limits_{t\in I} M_t$。

1A) 如果 $\mathfrak{k}$ 满足公理 III(e)、公理 IV(e)，那么在第 (1) 部分中，我们可以添加 $|I| \leq \|M\|$。

2) 对于每个 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}} N_2$，我们都可以找到 $\langle M^\ell_t\colon t \in I^*\rangle$，如第 (1) 部分中针对 N_ℓ 的情形，使得 $I_1 \subseteq I_2$ 且 $t \in I_1 \Rightarrow M^2_t = M^1_t$。

证明。1)、1A) 与 1.12 的证明相同。

2) 同理。 $\square_{1.15}$

断言 1.16。假设 $\lambda_{\mathfrak{k}} \leq \lambda_1 = \lambda_1^{<\kappa} < \mu_1 \leq \mu_{\mathfrak{k}}$ 和 $(\forall \alpha < \mu_1)\big[|\alpha|^{<\kappa} < \mu_1\big]$。

1) 那么，按 1.13(3) 的定义，$\mathfrak{k}^*_1 := \mathfrak{k}_{[\lambda_1,\mu_1)}$ 是一个 $(\lambda_1, \mu_1, \kappa_{\mathfrak{k}})$-DAEC。

2) 对于以下各公理，若 $\mathfrak{k}$ 满足该公理，则 $\mathfrak{k}_1$也满足：Ax.III(d),(e)、公理 IV(c),(d),(e)。

3) 对于第 (2) 部分，结论也适用于 Ax.III(f)、公理 IV(f)。

证明。请阅读定义。 $\square_{1.16}$

断言 1.17. 1）如果 $\mathfrak{k}$ 满足公理 IV(e)，那么只要 $\mu_{\mathfrak{k}}$是正则的，或者至少相关的 I 具有基数 $<\mathrm{cf}(\mu_{\mathfrak{k}})$，$\mathfrak{k}$ 就满足公理 III(e)。

2）如果 Ax.III(d),IV(d) 成立，我们可以不要求“$\mu_{\mathfrak{k}}$ 是正则的”。

证明。回忆一下，$\mathfrak{k}$ 是一个 DAEC。我们对 $\theta = |I|$ 作归纳来证明这一点 .

令 $\chi = \lambda + \theta + \sum \big\{\|M_s\|\colon s \in I\big\}$，它属于 $[\lambda, \mu)$ 。

情形 1：I 是有限的。

因此存在 $t^* \in I$ 使得 $t \in I \Rightarrow t \leq_I t^*$，所以这是平凡的。

情形 2：I 是可数的。

因此我们可以找到一个序列 $\langle t_n\colon n < \omega\rangle$ 使得 $t_n \in I$、$t_n \leq_I t_{n+1}$，并且 $s \in I \Rightarrow \bigvee\limits_{n<\omega} s \leq_I t_n$。现在我们可以将公理 III(b) 应用于 $\langle M_{t_n}\colon n < \omega\rangle$。

情形3：I 不可数。

首先，我们可以找到一个递增连续序列 $\langle I_\alpha\colon \alpha < |I|\rangle$ 使得 $I_\alpha \subseteq I$ 是基数为 $\leq |\alpha| + \aleph_0$ 的有向集，并且 $I_{|I|} = I = \bigcup\{I_\alpha\colon \alpha < |I|\}$。

其次，根据归纳假设，对每个 $\alpha < |I|$，我们选取 N_α 和 $h^\alpha = \langle h_{\alpha,\, t}\colon t \in I_\alpha\rangle$，使得:

(A) $N_\alpha \in \mathfrak{k}^{\mathfrak{s}}_{\leq\chi} \subseteq \mathfrak{k}$(B) $h_{\alpha,t}$ 是一个从 M_t 到 N_α的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入。(C) 如果 $s <_I t$ 属于 I_α，那么$h_{\alpha,s} = h_{\alpha,t} \circ h_{t,s}$。

(D) 如果 $\beta < \alpha$，那么 $N_\beta \leq_{\mathfrak{k}} N_\alpha$ 且$t \in I_\beta \Rightarrow h_{\alpha,}$

$_t = h_{\beta,t}$。

对于 $\alpha = 0$，使用归纳假设。

对于 α 极限序数，根据公理 III(a)，存在所需的 N_α；由于 $I_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$，

没有新的 h_t。（嗯，我们必须检查 $\sum\{\|N_\beta\|: \beta < \alpha\} < \mu_{\mathfrak{k}}$，但由于我们假设 $\mu_{\mathfrak{k}}$ 是正则的，因此成立。）

对于 $\alpha = \beta + 1$，根据归纳假设，存在 $(N'_\alpha, \bar{g}^\alpha)$，它是$\langle M_s, h_{t,s}$ 的极限：$s \leq_{I_\alpha} t\rangle$。现在应用公理 IV(e)：嗯，应用有向系统版本，其中 $\langle M_s, h_{t,s}: s \leq_{I_\beta} t\rangle$、$(N'_\alpha, \bar{g}_\alpha)$、$(N_\beta, \langle h_s: s \in I_\beta\rangle)$分别对应那里所说的 $\overline{M}, N_1, N_2$。

因此，存在 N_α、f^α_s（其中 $s \in I_\beta$），使得 $N_\beta \leq_{\mathfrak{k}} N_\alpha$ 且 $s \in I_\beta \Rightarrow f^\alpha_s \circ g_s = h_s$。最后，对于 $s \in I_\alpha \setminus I_\beta$，我们选择 $h_s = f^\alpha_s \circ g_s$，于是显然得证。

2) 同样地，注意在最后一种情况下，根据 1.12(2) 或 1.16，结果的基数为 $\leq \chi$。

□1.17

§ 1(B). 基本概念。

与 [She09b 中一样，§1], 我们现在回顾轨道类型的定义（请注意，只考察以 amalgamation 基为底的模型上的型是很自然的；回顾一下，公理 IV(b) 蕴含每个 $M \in K_{\mathfrak{k}}$ 都是这样的模型）。

定义 1.18. 1) 对于 $\chi \in [\lambda_{\mathfrak{k}}, \mu_{\mathfrak{k}})$ 和 $M \in K_\chi$，我们将 $\mathcal{S}(M)$ 定义为

$$\{\mathrm{ortp}(a, M, N) : M \leq_{\mathfrak{k}} N \in K_{\leq\chi^{<\kappa}} \text{ and } a \in N\},$$

其中 ortp$(a, M, N) = (M, N, a)/\mathscr{E}_M$，其中 $\mathscr{E}_M$ 是 $\mathscr{E}_{\text{处}M}$ 的传递闭包，而二元关系 $\mathscr{E}^{\mathrm{at}}_M$ 定义如下。

$\circledast$ (M, N_1, a_1) $\mathscr{E}_{\text{在}M}$ (M, N_2, a_2) 当且仅当：(a) $M \leq_{\mathfrak{k}} N_\ell$ 且 $a_\ell \in N_\ell$ 对于 $\ell = 1, 2$。(b) $\|M\| \leq \|N_\ell\| \leq \chi^{<\kappa}$ 对于 $\ell = 1, 2$。(c) 存在一个 $N \in K_{\leq\chi^{<\kappa}}$ 和 $\leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入 $f_\ell: N_\ell \to N$ 对于$\ell = 1, 2$，使得 $f_1 \restriction M = \mathrm{id}_M = f_2 \restriction M$ 且 $f_1(a_1) = f_2(a_2)$。

2）对于 $a \in N$ 和 $p \in \mathcal{S}(M)$，当（令 $\chi = \|M\|$）存在某个 N'，使得 $M \leq_{\mathfrak{k}} N' \leq_{\mathfrak{k}} N$、$a \in N'$，且 $p =$正交类型(a, M, N') 时，我们称“a 在 N 中实现 p”。因此必有 M、$N' \in K_{\chi^{<\kappa}}$，但也可能有 $N \notin K_{\leq\chi^{<\kappa}}$。

3) 当存在某个 N^2，使得 $M \leq_{\mathfrak{k}} N^2 \leq_{\mathfrak{k}} N$，且 $a_2 \in N^2$，并且 (M, N^1, a_1) $\mathscr{E}_{\text{在}M}$$(M, N^2, a_2)$ 时，我们称“a_2强[4]实现 $(M, N^1, a_1)/\mathscr{E}_{\text{在}M}$中”。

4) 如果此性质在 $\mathfrak{k}_{[\chi_0,\chi_1)}$ 中成立，我们称 M_0 是一个 $\leq_{\mathfrak{k}[\chi_0,\chi_1)}$-amalgamation 基；见下文。

4A) 对每个 M_1、$M_2 \in \mathfrak{k}$ 以及 $\leq_{\mathfrak{k}}$-嵌入 $f_\ell: M_0 \to M_\ell$（对于 $\ell = 1, 2$），若存在 $M_3 \in \mathfrak{k}_\lambda$ 和 $\leq_{\mathfrak{k}}$- 嵌入 $g_\ell: M_\ell \to M_3$（对于 $\ell = 1, 2$），使得 $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$，则称 $M_0 \in \mathfrak{k}$ 是 amalgamation 基或 $\leq_{\mathfrak{k}}$-amalgamation 基。

5) 我们称 $\mathfrak{k}$ 在 χ 中稳定，当且仅当：

(a) $\lambda_{\mathfrak{k}} \leq \chi < \mu_{\mathfrak{k}}$(b) $M \in K_\chi \Rightarrow |\mathcal{S}(M)| \leq \chi$

(c) $\chi = \chi^{<\kappa}$(d) $\mathfrak{k}_\chi$ 具有 amalgamation。

[4]请注意，$\mathscr{E}^{\mathrm{at}}_M$ 不是等价关系，而且一般而言，$\mathscr{E}_M$ 当然也不是。

6) 如果 $p \in \mathcal{S}(M)$、$q \in \mathcal{S}(N)$、$M \le_{\mathfrak{k}} N$，并且存在某个 N^+ 使得 $N \le_{\mathfrak{k}} N^+$ 且 $a \in N^+$，那么我们称 $p = q \restriction M$ 为 $p = \text{ortp}(a, M, N^+)$ 和 $q = \text{ortp}(a, N, N^+)$。注意，如果 $M \le_{\mathfrak{k}} N$ 且 $p \in \mathcal{S}(N)$，那么 $p \restriction M$ 是良定义的。

7) 对于有限的 m，对于 $M \le_{\mathfrak{k}} N$和 $\bar{a} \in {}^m N$，我们可以类似地定义正交类型$(\bar{a}, N, N)$ 和 $\mathcal{S}^m(M)$，并令 $\mathcal{S}^{<\omega}(M) = \bigcup\limits_{m<\omega} \mathcal{S}^m(M)$。（但我们不会在任何实质性的方式上使用这一点，因此我们选择 $\mathcal{S}(M) = \mathcal{S}^1(M)$。）

注 1.19。我们可以将 1.18(5)(c) 替换为

(c)′ $\chi \in \text{Car}_{\mathfrak{k}}$，这意味着 $\chi = \chi^{<\kappa}$，或者至少 1.12 的结论成立。在 1.20(1) 中，我们将 χ 的默认值改为 $\chi = \text{rnd}_{\mathfrak{k}}(\|N\|)$（其中 $\text{rnd}_{\mathfrak{k}}(\theta) = \min(\text{Car}_{\mathfrak{k}} \setminus \theta)$），这样它就是 $\le \|N\|^{<\kappa(\mathfrak{k})}$（1.21(1) 中也类似）。

定义 1.20。1) 当 $\chi \in [\lambda_{\mathfrak{k}}, \mu_{\mathfrak{k}})$、$M \in K_{\le \chi}$，并且对于每个满足 $M \le_{\mathfrak{k}} M' \in K^{\mathfrak{k}}_{\chi}$的 M'，都存在一个将 M'嵌入到 N中且在 M之上的 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入时，我们称 N 在 M 之上或之上是 χ-普遍的。若省略 χ，则表示 $\|N\|^{<\kappa(\mathfrak{k})}$；显然，这意味着 M是一个$\le_{\mathfrak{k}_{[\chi_0,\chi_1]}}$-amalgamation基，其中 $\chi_0 = \|M\|$ 且 $\chi_1 = \|N\|^{<\kappa}$。

2) $K^3_{\mathfrak{k}} = \{(M, N, a)$: $M \le_{\mathfrak{k}} N$, $a \in N \setminus M$和 $M, N \in K_{\mathfrak{k}}\}$，其中偏序$\le = \le_{\mathfrak{k}}$由以下关系定义：$(M, N, a) \le (M', N', a')$ 当且仅当 $a = a'$, $M \le_{\mathfrak{k}} M'$和 $N \le_{\mathfrak{k}} N'$。

3) 如果 (M, N, a) 是极小的，则 $(M, N, a) \le (M', N_\ell, a) \in K^3_{\mathfrak{k}}$对于 $\ell = 1$，2 意味着 $\text{ortp}(a, M', N_1) = $正交类型$(a, M', N_2)$，并且还有 (M', N_1, a) $\mathscr{E}_{\text{次}\lambda}(M', N_2, a)$（若每个 $M' \in K_\lambda$ 都是 amalgamation 基底，则不需要这一点）。

4) $K^3_{,\lambda}{}^{\mathfrak{k}}$ 的定义类似，使用 $\mathfrak{k}_{[\lambda, \text{rnd}_{\mathfrak{k}}(\lambda)]}$。

推广超极限时，有不止一种合理的选择。

定义 1.21. 1) 对于 $\ell = 1$、2 和 $\chi = \chi^{<\kappa} \in [\lambda_{\mathfrak{k}}, \mu_{\mathfrak{k}})$，当满足以下条件时，我们称 $M^* \in K^{\mathfrak{k}}_{\chi}$为超极限$_\ell$（或（$\chi, \ge \kappa$）-超极限$_\ell$）：（在情形 $\ell = 2$ 中，我们可以省略 ℓ）

（a）它是普遍的（即每个 $M \in K^{\mathfrak{k}}_{\chi}$ 都可以适当地嵌入到 M^* 中），并且

（b）情形 1：$\ell = 1$。若 $\langle M_i : i \le \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，$\text{cf}(\delta) \ge \kappa$, $\delta < \chi^+$，且$i < \delta \Rightarrow M_i \cong M^*$，则 $M_\delta \cong M^*$。情形 2：$\ell = 2$。若 I 是基数为 $\le \chi$ 的（$<\kappa$）-有向偏序，$\langle M_t : t \in I \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，且 $t \in I \Rightarrow M_t \cong M^*$，则 $\bigcup \{M_t : t \in I\} \cong M^*$。

2) 如果 M χ在 θ 之上是饱和的，那么$\|M\| \ge \chi > \theta \ge \text{LST}(\mathfrak{k})$，并且 $N \le_{\mathfrak{k}} M$、$\theta \le \|N\| < \chi$、$p \in \mathcal{S}_{\mathfrak{k}}(N)$ 蕴含 p 在 M 中被强实现。令“M 是 χ^+-饱和的”表示“M 在 χ之上是 χ^+-饱和的”。令

$$K(\chi^+\text{-saturated}) = \{M \in K : M \text{ is } \chi^+\text{-saturated}\}$$

并设“M 是饱和的”表示“M 在某个 $\theta < \|M\|$之上是 $\|M\|$-饱和的”。

定义 1.22. 1) 我们称 N 在 M 上方是 (χ, σ)-丰满的，当且仅当我们可以找到一个序列 $\langle M_i : i < \sigma \rangle$，该序列是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增半连续的，$M_i \in K_\chi$, $M_0 = M$,M_{i+1} 在 M_i 上方是 $\le_{\mathfrak{k}}$-普遍的，并且 $\bigcup M_i = N$。我们称 N 在 $_{i<\sigma}$ 上方是 (χ, σ)-丰满的。

A 如果 $A \subseteq N \in K_\chi$ 且我们可以找到 $\langle M_i :$ 如第 (1) 部分所示的 $i < \sigma \rangle$，使得 $A \subseteq M_0$；如果$A = \varnothing$，则可以省略“在 A 上”。

2) 若对每个 $\sigma \in [\kappa, \chi)$，$N$ 都在 M 之上是 (χ, σ)-丰满的，则称 N 在 M 之上是 $(\chi, *)$-丰满的。若存在某个 M，使得 N 在 M 之上是 $(\chi, *)$-丰满的，则称 N 是 $(\chi, *)$-丰满的。

3) 如果 $\alpha < \chi^+$，令“N 在 M 上是 (χ, α)-丰满的”表示 $M \le_{\mathfrak{k}} N$ 来自 K_χ，且 $\text{cf}(\alpha) \ge \kappa \Rightarrow N$ 在 M 上是 $(\chi, \text{cf}(\alpha))$-丰满的。

回忆

断言 1.23. 1) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 DAEC（或仅是具有 amalgamation 的 0-DAEC），在 χ中稳定，且 $\sigma = \mathrm{cf}(\sigma)$（因此 $\chi \in [\lambda_{\mathfrak{k}}, \mu_{\mathfrak{k}})$），那么对每个 $M \in K^{\mathfrak{k}}_{\chi}$，都存在一个 $N \in K^{\mathfrak{k}}_{\chi}$，它在 M之上普遍（相对于 M是 (χ,σ)-丰满的（因此是 S^{χ}_{σ}-极限：见 [She09a],，未使用）。2) 若 N_ℓ在 M之上是 (χ,θ)-丰满的，对 $\ell = 1$而言，2 且 $\kappa \le \theta = \mathrm{cf}(\theta) \le \chi^+$，那么 N_1, N_2在 M之上同构。

3) 若 M_2 在 M 和 $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_1$ 之上是 (χ,θ)-丰满的，那么 M_2 在 M_0之上是 (χ,θ)-丰满的。

证明。第 (1) 部分显然：回顾定义 1.23(5) 的子句 (c)。

2)、3) 同 [She09b] 中一样。 $\square_{1.23}$

* * *

§ 1(C). 将此类提升到更高基数。这里我们讨论提升；这包含两个方面。首先，如果 $\mathfrak{k}^1$、$\mathfrak{k}^2$ 在 λ 中相同，那么它们在每个更高基数上都相同。其次，给定 $\mathfrak{k}$，我们可以找到 $\mathfrak{k}_1$，使得 $\mu_{\mathfrak{k}_1} = \infty$ 且 $(\mathfrak{k}_1)_\lambda = \mathfrak{k}_\lambda$。

定理 1.24。1) 如果 $\mathfrak{k}^\ell$ 是针对 $\ell = 1$ 的 (μ,λ,κ)-抽象初等类，2 且 $\mathfrak{k}^1_\lambda = \mathfrak{k}^2_\lambda$，那么 $\mathfrak{k}^1 = \mathfrak{k}^2$。2) 如果 $\mathfrak{k}_\ell$ 是针对 $\ell = 1$ 的 $(\mu_\ell,\lambda,\kappa)$-DAEC，2 且 $\mathfrak{k}^1$ 满足 Ax.IV(d)、$\mu_1 \le \mu_2$和 $\mathfrak{k}^1_\lambda = \mathfrak{k}^2_\lambda$，那么 $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2[\lambda,\mu_1)$。

证明。根据 1.15。 $\square_{1.24}$

定理 1.25. 提升定理

1) 若 $\mathfrak{k}_\lambda$ 是一个 $(\lambda^+,\lambda,\kappa)$-DAEC$^{\pm}$，则下文定义的有序对 $\mathfrak{k}' = (K',\le_{\mathfrak{k}'})$ 是一个 (∞,λ,κ)-DAEC$^{\pm}$，其中

(A) K' 是满足以下条件的 M 类：M 是一个 $\tau_{\mathfrak{k}_\lambda}$-模型，并且对于某些 I 和 $\overline{M}$，有：

(a) I 是一个 κ-有向偏序，(b) $\overline{M} = \langle M_s : s \in I\rangle$，($c$) $M_s \in K_\lambda$，(d) $I \models$ "$s < t$" $\Rightarrow M_s \le_{\mathfrak{k}_\lambda} M_t$。($e$) 若 $J \subseteq I$ 的基数为 $\le \lambda$ 且是 κ-有向的，并且 M_J 是$\langle M_t : t \in J\rangle$ 的并（按照定义 1.4 中 Ax.III(d) 的含义），则 M_J 是 M 的子模型。(f) $M = \bigcup\{M_J : J \subseteq I$ 是基数为 $\le \lambda\}$ 的 κ-有向偏序（按照定义 1.4 中 Ax.IV(d) 的含义）。

(A)′ 我们称这样的 $\langle M_s$ 为 $s \in I\rangle$ $M \in K'$ 的见证，并称其合理，如果 $|I| \le \|M\|^{<\kappa}$。

(B) $M \le_{\mathfrak{k}'} N$当且仅当对于某些 I、J、$\overline{M}$，我们有：

(a) J 是一个 κ有向偏序，

(b) $I \subseteq J$ 是 κ-有向的，

(c) $\overline{M} = \langle M_s : s \in J\rangle$ 且是$\le_{\mathfrak{k}_\lambda}$-递增的，

(d) $\langle M_s : s \in J\rangle$ 是 $N \in K'$的见证者，

(e) $\langle M_s : s \in I\rangle$ 是 $M \in K'$的见证。

(B)′ 我们称这样的 $I, \langle M_s$ 为 $M \le_{\mathfrak{k}'} N$ 的 $s \in J\rangle$ 见证，或者称 $\big(I, J, \langle M_s$ 为 $s \in J\rangle\big)$ 见证 $M \le_{\mathfrak{k}'} N$。

2) 如果 $\mathfrak{k}_\lambda$ 满足公理 III(a)，那么 $\mathfrak{k}'$ 也满足。

证明。1）让我们逐一检查这些公理。

公理 O(a)、(b)、(c) 和 (d)： K' 是一个由 $\tau_{\mathfrak{k}_\lambda}$模型构成的类， $\leq_{\mathfrak{k}'}$ 是K上的一个二元关系，K' 和 $\leq_{\mathfrak{k}'}$ 在同构下封闭，并且 $M \in K' \Rightarrow \|M\| \geq \lambda$，等等。[为什么？显然如此。]

公理 I(a)：如果 $M \leq_{\mathfrak{k}'} N$，那么 $M \subseteq N$。

[为什么？我们对 κ有向并使用光滑性；也就是说，公理 IV(x)。]

公理 II(a)：$M_0 \leq_{\mathfrak{k}'} M_1 \leq_{\mathfrak{k}'} M_2$ 蕴含$M_0 \leq_{\mathfrak{k}'} M_2$ 和$M \in K' \Rightarrow M \leq_{\mathfrak{k}'} M$。为什么？第二个短语显然成立。对于第一个短语，令 $\ell \in \{1,2\}$ 的κ有向偏序为 $I_\ell \subseteq J_\ell$和 $\overline{M}^\ell = \langle M^\ell_s : s \in J_\ell \rangle$见证 $M_{\ell-1} \leq_{\mathfrak{k}'} M_\ell$。

我们首先注意到

⊙ 在本定理的条款 (A)(f) 中，如果 $J_\bullet \subseteq J_{\bullet\bullet} \subseteq J$ 是 ($<\kappa$)-有向的，那么 $M_{J_\bullet} \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M_{J_{\bullet\bullet}}$。[为什么？根据公理 VI(d)。□ 如果 I 是一个 κ-有向偏序，$\langle M^\ell_t : t \in I \rangle$ 是一个见证 $M_\ell \in K'$的 $\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-递增序列，对于 $\ell = 1$、2 和 $t \in I \Rightarrow M^1_t \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M^2_t$，那么 $M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_2$。

[为什么？设 I_1 为元素集为 $I \times \{1\}$、由 $(s,1) \leq_{I_1} (t,1) \Leftrightarrow s \leq_I t$ 排序的偏序。设 I_2 为元素集为 $I \times \{1,2\}$、由 $(s_1,\ell_1) \leq_{I_2} (s_2,\ell_2) \Leftrightarrow s_1 \leq_I s_2 \wedge \ell_1 \leq \ell_2$ 排序的偏序。显然，$I_1 \subseteq I_2$ 都是 κ-有向的。

令 $M_{(s,1)} = M^1_s$和 $M_{(s,2)} = M^2_s$，因此显然 $\overline{M} = \langle M_t : t \in I_2 \rangle$是一个 $\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-递增的、$I$-有向的序列，它见证了 $M_2 \in K'$，而 $(I_1, I_2, \overline{M})$ 见证了$M_1 \leq_{\mathfrak{k}'} M_2$，因此我们已经证明了 ⊡。]

不失一般性，J_1、J_2互不相交。令 $\chi = \big(|J_1| + |J_2|\big)^{<\kappa}$，于是 $\lambda \leq \chi < \mu_{\mathfrak{k}} = \infty$，并令

$$\mathscr{U} := \Big\{ u \subseteq J_1 \cup J_2 : |u| \leq \lambda,\ u \cap I_\ell \text{ is } \kappa\text{-directed under } \leq_{I_\ell} \text{ for } \ell = 1,2,\\ u \cap J_\ell \text{ is } \kappa\text{-directed under } \leq_{I_\ell} \text{ for } \ell = 1,2,\\ \text{and } \bigcup \big\{ |M^2_t| : t \in u \cap I_2 \big\} = \bigcup \big\{ |M^1_t| : t \in u \cap J_1 \big\} \Big\}.$$

令 $\langle u_\alpha : \alpha < \alpha^* \rangle$ list $\mathscr{U}$，并定义偏序 I 如下：

(a)′ 其元素集为 $\{\alpha < \alpha^* :$ 对于任何 $\beta < \alpha$，我们都有 $u_\beta \subseteq u_\alpha\}$。

(b)′ 对于 α，$\beta \in I$，当且仅当 $\alpha \leq_I \beta$ 时，$u_\alpha \subseteq u_\beta$。

注意，集合 I 的基数可能是 $\big(\sum \|M_i\|\big)^{<\kappa}$，而 $\big(\sum \|M_i\|\big)^{<\kappa}$ 可能是 $> \lambda$。$_{i<\delta}$

与 1.12 的证明中一样，I 是 κ-有向的。

对于 $\ell = 0$、1、2 和 $\alpha \in I$，令 $M_{\ell,\alpha}$ 为

(A) $\langle M^0_t$的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-并：若 $\ell = 0$，则为 $t \in u_\alpha \cap I_1 \rangle$。(B) $\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-有向序列 $\langle M^1_t$的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-并：当 $\ell = 1$时为 $t \in J_1 \rangle$。(C)$\leq_{\mathfrak{k}_\lambda}$-有向序列 $\langle M^2_t$的 $\leq_{\mathfrak{k}}$-并：当 $\ell = 2$时为 $t \in J_2 \rangle$。现在

$(*)_1$若 $\ell = 0$，则 $\alpha \leq_I \beta$为 1、2，且 $M^\ell_\alpha \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M^\ell_\beta$。

$(*)_2$若 $\alpha \in I$，则 $M^0_\alpha \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M^1_\alpha \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M^2_\alpha$。$(*)_3$ $\langle M_{\ell,\alpha} : \alpha \in I \rangle$ 是 $M_\ell \in K'$的一个见证。

$(*)_4$ $M_{0,\,\alpha} \leq_{\mathfrak{k}_\lambda} M_{2,\,\alpha}$ 对于 $\alpha \in I$。

结合 $\boxdot$，我们得到 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}'} M_2$，这正是所要求的。

公理 III(a)：一般情况下。

设 $(I_{i,j}, J_{i,j}, \overline{M}^{i,j})$ 在 $i \leq j < \delta$ 时见证 $M_i \leq_{\mathfrak{k}'} M_j$，且不失一般性地假设 $\langle J_{i,j} : i < j < \delta \rangle$ 两两不相交。令 $\mathscr{U}$ 为满足存在某个 $v \in [\delta]^{\leq \lambda}$ 的集合族 u，使得.....

(A) $v \subseteq \delta$ 的基数为 $\leq \lambda$，其序型的余终性为 $\geq \kappa$。(B) $u \subseteq \bigcup\{J_{i,j} : i < j$ 来自 $v\}$，其基数为 $\leq \lambda$。(C) 对于来自 v的 $i \leq j$，集合 $u \cap J_{i,j}$ 在 $\leq_{J_{i,j}}$ 下是 κ-有向的，而 $u \cap I_{i,j}$ 在 $\leq_{I_{i,j}}$下是κ-有向的。

(D) 如果 $i(0) \leq i(1) \leq i(2)$ 来自 v，那么

$$\bigcup\{M_s^{i(0),i(1)} : s \in u \cap J_{i(0),i(1)}\} = \bigcup\{M_s^{i(1),i(2)} : s \in u \cap I_{i(1),i(2)}\}.$$

(E) 如果 $i(0) \leq j(1)$ 和 $i(1) \leq j(1)$ 来自 v，那么

$$\bigcup\{M_s^{i(0),j(1)} : s \in u \cap J_{i(0),j(1)}\} = \bigcup\{M_s^{i(1),j(1)} : s \in u \cap J_{i(1),j(1)}\}.$$

证明的其余部分与公理 II(a) 的证明相同。

公理 IV(a)：

类似地，但 $\mathscr{U} = \{u \subseteq I : u$ 的基数为 $\leq \lambda$，且是 κ-有向$\}$。

Ax.III(d)：

回顾一下，我们假设 $\mathfrak{k}$ 满足 Ax.III(d)。类似的证明。

Ax.IV(d)：

同样，我们假设 $\mathfrak{k}$ 满足 Ax.IV(d)。

Ax.V：假设 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}'} M$ 和 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}'} M$。

如果 $N_0 \subseteq N_1$，那么 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}'} N_1$。

[为什么？令 $\big(I_\ell$、J_ℓ、$\langle M_s^\ell : s \in J_\ell\rangle\big)$ 是 $\ell = 0$、1 的见证；不失一般性，J_0、J_1 不相交。

Let

$$\mathscr{U} := \Big\{u \subseteq J_0 \cup J_1 : |u| \leq \lambda,\ u \cap J_\ell \text{ and } u \cap I_\ell \text{ are } \kappa\text{-directed for } \ell = 0, 1,$$
$$\text{and } \bigcup\{|M_s^0| : s \in u \cap J_0\} = \bigcup\{|M_s^0| : s \in u \in J_1\}\Big\}.$$

对于 $u \in \mathscr{U}$，令

- $M_u = M \restriction \bigcup\{M_s^\ell : s \in u \cap J_\ell\}$ for $i = 0, 1$.
- $N_{\ell,u} = N_\ell \restriction \{M_s^\ell : s \in u \cap I_\ell\}$.

Let

(*) (a) $(\mathscr{U}, \subseteq)$ 是 κ-有向的。(b) $N_{\ell,u} \leq_{\mathfrak{k}} M$(c) $M_{\ell,u} \leq_{\mathfrak{k}} M_{\ell,v}$

当 $u \subseteq v$ 来自 $\mathscr{U}$ 和 $\ell = 0$,1 时。(d) $M_{0,u} \leq_{\mathfrak{k}} M_{1,u}$(e)

$N_\ell = \bigcup\{N_{\ell,u} : u \in \mathscr{U}\}$

根据上述 ⊡，我们就完成了。

公理 VI: LST($\mathfrak{k}'$) $= \lambda$。
[为什么？令 $M \in K'$, $A \subseteq M$, $|A| + \lambda \leq \chi < \|M\|$，并令 $\langle M_s : s \in I\rangle$ 见证 $M \in K'$。不失一般性，$|A| = \chi^{<\kappa}$。现在选取一个基数为 $\leq |A| = \chi^{<\kappa}$ 的有向 $I \subseteq J$，使得 $A \subseteq M' := \bigcup M_s$，因此 $(I, J, \langle M_s : s \in J\rangle)_{s\in I}$。
见证者 $M' \leq_{\mathfrak{k}'} M$。因此，作为 $A \subseteq M'$和 $\|M'\| \leq |A| + \mu$我们完成了。]

2) 公理 III(b)：假设 $\langle M_i : i < \delta\rangle$ 是一个 $\leq_{\mathfrak{k}}$-递增序列，并且

$$\left\|\bigcup\{M_i : i < \delta\}\right\| < \mu.$$

我们必须证明存在 $M \in K$，使得 $i < \delta \Rightarrow M_i \leq_{\mathfrak{k}'} M$（与往常一样，假设 $\mathfrak{k}_\lambda$ 满足公理 III(b)）。

若 cf(δ) $\geq \kappa$，则使用公理 III(a)（已在上文证明），因此可假设 cf(δ) $< \kappa$。通过重新命名，不失一般性地设 $\delta < \kappa$，然后继续证明公理 II(a)。$\square_{1.25}$

此外，如果两个这样的 DAEC 有某个共同的基数，那么我们可以将它们合并起来。

断言1.26。令 $\iota \in \{0, 1, 2, 4\}$，假设 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$，并且

(a) $\mathfrak{k}^1$ 是一个 $(\lambda_2^+, \lambda_1, \kappa)$-2-DAEC，且 $K^1 = K_{\mathfrak{k}^1}$。(b) $\mathfrak{k}^2$ 是一个 $(\lambda_3, \lambda_2, \kappa)$-$\iota$-DAEC。($c$) $K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2} = K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_2}$ 且 $\leq_{\mathfrak{k}^2} \restriction K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_2} = \leq_{\mathfrak{k}^1} \restriction K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2}$。($d$) 我们如下定义 $\mathfrak{k}$：$K_{\mathfrak{k}} = K_{\mathfrak{k}^1} \cup K_{\mathfrak{k}^2}$, $M \leq_{\mathfrak{k}} N$ 当且仅当 $M \leq_{\mathfrak{k}^1} N$ 或 $M \leq_{\mathfrak{k}^2} N$，或者存在某个 M' 使得 $M \leq_{\mathfrak{k}^1} M' \leq_{\mathfrak{k}^2} N$。

那么 $\mathfrak{k}$ 是一个 $(\lambda_3, \lambda_1, \kappa)$-$\iota$-DAEC。

证明。显而易见。例如：

Ax.III(d)：$\langle M_s : s \in I\rangle$ 是一个 $\leq_{\mathfrak{s}}$-κ-有向系统。

若对于某个 s，$\|M_s\| \geq \lambda_2$，则使用 $\langle M_t : s \leq t \in I\rangle$ 以及假设的条款 (b)。若 $\bigcup\{M_s : s \in I\}$ 的基数为 $\leq \lambda_2$，则使用假设的条款 (a)。若两者皆不成立，回想由假设的条款 (b)可得 $\lambda_2 = \lambda_2^{<\kappa}$，并令

$$\mathscr{U} = \left\{u \subseteq I : |u| \leq \lambda_2,\ u \text{ is } \kappa\text{-directed (in I), and } \bigcup\{M_s : s \in u\} \text{ has cardinality } \lambda\right\}.$$

容易验证，$(\mathscr{U}, \subseteq)$ 是 λ_2-有向的。对于 $u \in J$，令 M_u 为 $\langle M_s : s \in u\rangle$的 $\leq_{\mathfrak{s}}$-并。现在由假设的条款 (a)

$(*)_1$ $M_u \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2} = K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_2}$
$(*)_2$ If $u_1 \subseteq v$ are from $\mathscr{U}$ then $M_u \leq_{\mathfrak{k}^1} M_v$, $M_u \leq_{\mathfrak{k}^2} M_v$.

现在使用假设的条款 (b)。

公理 V：我们将自由地使用

$(*)$ $\mathfrak{k}^2_{\lambda_2} = \mathfrak{k}^1_{\lambda_2} = \mathfrak{k}_{\lambda_2}$

因此，假设 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M$, $N_1 \leq_{\mathfrak{k}} M$, $N_0 \subseteq N_1$。

现在，如果 $\|N_0\| \geq \lambda_2$ 使用假设 (b)，那么我们可以假设 $\|N_0\| < \lambda_2$。如果 $\|M\| \leq \lambda_2$，我们可以使用假设 (a)，因此假设 $\|M\| > \lambda_2$；根据 $\leq_{\mathfrak{k}}$ 的定义，存在$M'_0 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2} = K^{\mathfrak{k}^2}_{\lambda_2}$使得 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}^1} M'_0 \leq_{\mathfrak{k}^2} M$。首先假设 $\|N_1\| \leq \lambda_2$，于是我们可以找到 $M'_1 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2}$使得 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}^1} M'_1 \leq_{\mathfrak{k}^2} M$。
[为什么？如果 $N_1 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{<\lambda_2}$根据 $\leq_{\mathfrak{k}}$的定义成立，并且如果 $N_1 \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2}$，只需选择 $M'_1 = N_1$。]

现在，根据假设 (b)，我们可以找到 $M'' \in K^{\mathfrak{k}^1}_{\lambda_2}$ 使得 $M'_0 \cup M'_1 \subseteq M'' \leq_{\mathfrak{k}} M$，因此根据假设 (b)（即 $\mathfrak{k}^2$的 Ax.V），我们有 $M'_0 \leq_{\mathfrak{k}} M''$, $M'_1 \leq_{\mathfrak{k}} M''$。由于 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'' \in K^{\mathfrak{k}}_{\leq \lambda_2}$ 根据假设 (a)，我们有 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M''$，同理可得 $N_1 \leq_{\mathfrak{k}} M''$。所以 $N_0 \subseteq N_1$, $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} M''$, $N_1 \leq_{\mathfrak{k}} M'$，因此根据假设 (b)，我们有 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} N_1$。

我们现在只剩下 $\|N_1\| > \lambda$ 这一种情况。根据假设 (b)，存在 $N'_1 \in K_{\lambda_2}$，使得 $N_0 \subseteq N'_1 \leq_{\mathfrak{k}^2} N_2$。同样根据假设 (b)，我们有 $N'_1 \leq_{\mathfrak{k}} M$，因此由上一段可得 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}} N'_1$; 结合前一句，我们得到 $N_0 \leq_{\mathfrak{k}^1} N'_1 \leq_{\mathfrak{k}^2} N_1$，所以根据 $\leq_{\mathfrak{k}}$ 的定义，结论得证。$\square_{1.26}$

定义 1.27. 如果 $M \in K_\chi$ 是 $(\chi, \geq \kappa)$-超极限$_1$ 则

$$K^{[M]}_\chi = \{N \in K_\chi : N \cong M\}$$

以及 $\mathfrak{k}^{[M]}_\chi = (K^{[M]}_\chi, \leq_{\mathfrak{k}} \restriction K^{[M]}_\chi)$，而且 $\mathfrak{k}^{[M]}$ 是我们在 1.25(1) 中得到的 $\mathfrak{k}'$，此处的 $(\mathfrak{k}^{[M]}, \mathfrak{k})$ 对应那里的 $(\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{k}')$。

断言 1.28. 1) 若 $\mathfrak{k}$ 是一个 (μ, λ, κ)-抽象初等类，且 $\lambda \leq \chi < \mu$, $M \in K_\chi$ 是 $(\chi, \geq \kappa)$-超极限$_1$（见定义 1.21），则 $\mathfrak{k}^{[M]}_\chi$ 是一个 (χ^+, χ, κ)-DAEC。

2) 此外，若 $\mathfrak{k}$ 是一个 (μ, λ, κ)-DAEC$^{\pm}$，则 $\mathfrak{k}^{[M]}_\chi$ 是一个 (χ^+, χ, κ)-DAEC$^{\pm}$。

3) [$\mathfrak{k}$满足 Ax.IV(d)。]

M 是 $(\chi, \geq \kappa)$-超极限$_1$，当且仅当 M 是 $(\chi, \geq \kappa)$-超极限$_2$。

证明。很简单。 $\square_{1.28}$

§2. PR FRAMES

下面，主要情况是 $\iota = 4$。

定义 2.1. 这里 $\iota = 0$，1、2、3、4。我们称 $\mathfrak{s}$ 是一个良好的（μ，λ，κ）-ι-框架，当 $\mathfrak{s}$ 由满足以下条件的对象组成时：μ，λ，κ（因此我们应写作 $\mu_{\mathfrak{s}}$，$\lambda_{\mathfrak{s}}$，$\kappa_{\mathfrak{s}}$，但定义 $\mathfrak{s}$ 时可以忽略它们），并且

(A) $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 是一个（μ，λ，κ）-4-DAEC（见 1.4(4)），因此我们可以用 $\mathfrak{s}$ 代替 $\mathfrak{k}$，例如 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增等，并且 $\chi \in [\lambda, \mu) \Rightarrow \mathrm{LST}(\chi^{<\kappa})$。（B） $\mathfrak{k}$ 有一个（λ，$\geq \kappa$）-超极限模型 M^*，其中[5] 不是 $<_{\mathfrak{k}}$-极大的——即：(a) $M^* \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}$ (b) 若 $M_1 \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}$，则存在某个 M_2，使得 $M_1 <_{\mathfrak{s}} M_2 \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda}$，且 M_2 与 M^* 同构。(c) 若 $\langle M_i : i < \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增的，$i < \delta \Rightarrow M_i \cong M$，且共尾性 $(\mathrm{cf}(\delta)) \geq \kappa$，$\delta < \lambda^+$，则 $\bigcup\{M_i : i < \delta\}$ 与 M^* 同构。

(C) $\mathfrak{k}$ 具有摊并性质、JEP（联合嵌入性质），且没有 $\leq_{\mathfrak{k}}$-极大成员。若 $\iota \geq 1$，则 $\mathfrak{k}$ 在链上有素对象（即 Ax.III(f)）；若 $\iota \geq 4$，则 $\mathfrak{k}$ 在 $\leq_{\mathfrak{s}}$-有向序列上有素对象（即 Ax.IV(f)）。

(D) (a) $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}} = \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$（$\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$的基本类型类）包含于 $\bigcup\{\mathcal{S}(M) : M \in K_{\mathfrak{s}}\}$，且在同构（包括自同构）下闭。对于 $M \in K_{\lambda}$，令 $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}} \cap \mathcal{S}(M)$；允许有限序列的类型也无妨。(b) 若 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M)$，则 p是非代数的（即不由任何 $a \in M$实现）。(c) 稠密性：若 $M \leq_{\mathfrak{k}} N$来自 $K_{\mathfrak{s}}$且 $M \neq N$，则存在某个 $a \in N \setminus M$，使得 $\mathrm{ortp}(a, M, N) \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}$。这里预期的例子是 [She01] 中的极小类型（即 [She09c]）以及超稳定理论的正则类型。

(d) bs-稳定性：$\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M)$ 的基数为 $\leq \|M\|^{<\kappa}$，适用于 $M \in K_{\mathfrak{s}}$。

(E) (a) $\bigcup\!\!\!\!\!\!+ = \bigcup\!\!\!\!\!\!+_{\mathfrak{s}}$ 是一个称为不分叉的四元关系，其中 $\bigcup\!\!\!\!\!\!+(M_0, M_1, a, M_3)_{\mathfrak{s}}$蕴含 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_3$来自 $K_{\mathfrak{s}}, a \in M_3 \setminus M_1$，且 $\mathrm{ortp}(a, M_0, M_3) \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M_0)$，并且 $\mathrm{ortp}(a, M_1, M_3) \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M_1)$。此外，$\bigcup\!\!\!\!\!\!+$在同构下保持不变。$M_3$我们也可以写作 $M_1 \bigcup\!\!\!\!\!\!+\, a$，并要求：如果 $M_0 = M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_3$ 都M_0属于 K_{λ}，M_3那么 $\bigcup\!\!\!\!\!\!+(M_0, M_1, a, M_3)$ 等价于“$\mathrm{ortp}(a, M_0, M_3) \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M_0)$”。我们可以将 $M_1 \bigcup\!\!\!\!\!\!+\, a$ 表述为：“$\mathrm{ortp}(a, M_1, M_3)$ 在 M_0 上不分叉M_0（在 M_3内部）。”（这可由下文的条款 (b) 得到证明。）[说明：我们的意图是公理化类型的不分叉，但我们只处理基本类型。请注意，在 [She01]（即 [She09c]）中，我们对极小类型有所了解，但其他类型则另当别论。]

(b) 单调性：

$$\text{If } M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'_0 \leq_{\mathfrak{k}} M'_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_1 \leq_{\mathfrak{k}} M_3 \leq_{\mathfrak{k}} M'_3$$

[5] 事实上，由 (C) 可得。

以及 $M_1 \cup \{a\} \subseteq M_3'' \leq_{\mathfrak{k}} M_3'$，它们全部位于 K_λ 中，然后

$$\bigcup(M_0, M_1, a, M_3) \Rightarrow \bigcup(M_0', M_1', a, M_3') \Leftrightarrow \bigcup(M_0', M_1', a, M_3'')$$

因此，直接说“ortp(a, M_1, M_3)在 M_0上不分叉”是合理的。[解释：缩小类型、增大基底（即不分叉所依据的集合），以及增大或缩小这一切发生于其中的模型，都会保持不分叉。稳定理论也同样如此，只不过在这里我们将自己限制在“合理”的类型上。]

(c) 局部特征：

情形 1：$\iota = 1, 2, 3$.

如果 $\langle M_i : i \leq \delta \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-半连续的，$p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M_\delta)$，并且cf$(\delta) \geq \kappa$，那么对于每个足够大的 $\alpha < \delta$，p 都不在 M_α上分叉。

情形 2：$\iota = 4$。

如果 I 是一个 κ-有向偏序，$\overline{M} = \langle M_t : t \in I \rangle$ 是一个 $\leq_{\mathfrak{s}}$-有向系统，M是其 $\leq_{\mathfrak{k}}$-并，$M \leq_{\mathfrak{s}} N$，且正交类型$(a, M, N) \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M_\delta)$，~~那么~~对于每个足够大的 $s \in I$，正交类型(a, M, N)在 M_s 上不分叉。

情形3：$\iota = 0$。

类似情形 1，利用（$\geq \kappa$）-连续性。

[说明：这是对 $\kappa \geq \kappa_r(T)$ 的替代：如果 $p \in \mathcal{S}(A)$，那么存在一个基数为 $< \kappa$ 的 $B \subseteq A$，使得 p 不在 A 上分叉。]

(d) 传递性：

如果 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_0' \leq_{\mathfrak{k}} M_0'' \leq_{\mathfrak{k}} M_3$ 和 $a \in M_3$，且 ortp(a, M_0'', M_3) 在 M_0' 上不分叉，并且 ortp(a, M_0', M_3) 在 M_0 上不分叉（当然，所有模型都属于 K_λ，且这三个相关类型必然属于 $\mathcal{S}^{\mathrm{bs}}$），那么 ortp$(a, M_0'', M_3)$ 在 M_0 上不分叉。

(e) 唯一性：如果 $p, q \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M_1)$ 在 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_1$（均属于 $K_{\mathfrak{s}}$）上不分叉，且 $p \restriction M_0 = q \restriction M_0$，则 $p = q$。

(f) 对称性：

情形 1：$\iota \geq 3$。

若 $M_0 \leq_{\mathfrak{s}} M_\ell \leq_{\mathfrak{s}} M_3$ 且 $(M_0, M_\ell, a_\ell) \in K^{3,\ \mathfrak{s}^{\mathrm{pr}}}$（见下文第 (j) 条）对于 $\ell = 1, 2$ 则正交类型$_{\mathfrak{s}}(a_2, M_1, M_3)$ 在 M_0 上不分叉，当且仅当正交类型$_{\mathfrak{s}}(a_1, M_2, M_3)$ 在 M_0 上不分叉。

情形 2：$\iota = 0, 1, 2$.

如果 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_3$ 在 $\mathfrak{k}_\lambda$中，并且对于 $\ell = 1, 2$，我们有 $a_\ell \in M_3$，且正交类型$(a_\ell, M_0, M_3) \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M_0)$，那么以下各项等价：

(α) 存在 M_1, M_3' 属于 $K_{\mathfrak{s}}$，使得 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_1 \leq_{\mathfrak{K}} M_3'$, $a_1 \in M_1$, $M_3 \leq_{\mathfrak{k}} M_3'$，且正交类型$(a_2, M_1, M_3')$ 在 M_0 上不分叉。(β) 存在 M_2, M_3' 属于 K_λ，使得 $M_0 \leq_{\mathfrak{k}} M_2 \leq_{\mathfrak{k}} M_3'$, $a_2 \in M_2$,$M_3 \leq_{\mathfrak{k}} M_3'$，且正交类型$(a_1, M_2, M_3')$ 在 M_0 上不分叉。[解释：这是对“正交类型$(a_1, M_0 \cup \{a_2\}, M_3)$ 在 M_0 上分叉，当且仅当正交类型$(a_2, M_0 \cup \{a_1\}, M_3)$ 在 M_0 上分叉”的替换，因为该表述在我们的语境中定义不明确。]

(g) 存在性：

如果 $M \leq_{\mathfrak{s}} N$和 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(M)$，那么存在 $q \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}(N)$，它是 p 的不分叉扩展。

(h) 连续性：

情形 1：$\iota = 1$、2、3。

如果 $\langle M_\alpha : \alpha \le \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增且 $\le_{\mathfrak{s}}$-半连续的，$M_\delta = \bigcup M_\alpha$（当共尾性($\delta$) $\ge \kappa$时成立），$p \in \mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(M_\delta)$，并且 $p \restriction M_\alpha$ 对 M_0 不分叉 $_{\alpha<\delta}$，对于 $\alpha < \delta$，那么 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_\delta)$，且它对$M_0$不分叉。

情形 2：$\iota = 4$。同理，对于 $\overline{M} = \langle M_t : t \in I \rangle$, I 有向，且$M = \bigcup \{M_t : t \in I\}$ 是 $\overline{M}$的一个 $\le_{\mathfrak{s}}$-上界。

情形3：$\iota = 0$。

如情形 1，适用于 $\overline{M}$ ($\ge \kappa$)-连续的情况。

- $\bullet_1$ 如果 $\iota \ge 1$, $\mathfrak{s}$ 具有 $K^{3,\ {\rm prs}}_{\mathfrak{s}}$-素（见下文 2.7）。
- $\bullet_2$ 如果 $p \in \mathcal{S}_{\rm bss}(N)$，那么对于来自 K_λ的某个 $M \le_{\mathfrak{s}} N$，p 在 M 上不分叉。

(i) 强连续性：

情形 1：$\iota = 1$、2、3。我们有，正交类型$(b, M_\delta, M_{\delta+1})$ 在 M_0 上不分叉，其中

- $\bullet_1$ $\overline{M} = \langle M_i : i \le \delta + 1 \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的。
- $\bullet_2$ M_δ 在 $\overline{M} \restriction \delta$ 上素。
- $\bullet_3$ $b \in M_{\delta+1} \setminus M_\delta$
- $\bullet_4$ 正交类型$(b, M_i, M_{\delta+1})$ 对于 $i < \delta$ 在 M_0 上不分叉。

情形 2：$\iota = 4$、5。我们有，正交类型$(b, M_\delta, M_{\delta+1})$ 在 M_0 上不分叉，其中

- $\bullet_1$ $\overline{M} = \langle M_s : s \in I \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的偏序，且 I 以 $0 \in I$为极小元。
- $\bullet_2$ N_0 在 $\overline{M}$上素。
- $\bullet_3$ $b \in N_1 \setminus N_0$，其中 $N_0 \le_{\mathfrak{s}} N_1$。
- $\bullet_4$ 正交类型(b, M_s, N_1)在 M_0 上不分叉，对所有 $s \in I$成立。

断言 2.2. 1) 若 $\langle M_i : i < \delta \rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{k}}$-递增的，$\left(\sum \{\|M_i\| : i < \delta\}\right) < \mu$, $p_i \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$在 M_0 上不分叉，且对 $i < \delta$成立，并且 $i < j \Rightarrow p_j \restriction M_i = p_i$，则：

(a) 我们可以找到 M_δ，使得 $i < \delta \Rightarrow M_i \le_{\mathfrak{k}} M_\delta$。($b$) 对任意这样的 M_δ，我们可以找到 $p_\delta \in \mathcal{S}_{\mathfrak{s}}(M_\delta)$，使得 $\bigwedge p_\delta \restriction M_i = p_i$，并且$_{i<\delta} p_\delta$ 在 M_0上不分叉。(c) 在条款 (b)中，p_δ 是唯一的。(d) 若 $\ell \ge \kappa \wedge$ 的共尾性(δ) 为 $\ge \kappa$，我们可以添加 $M = \bigcup \{M_\alpha : \alpha < \delta\}$。

2）同样，对于 $\overline{M} = \langle M_t : t \in I \rangle$、$I$ 有向。

证明。1）首先，根据 2.1 条款 (A) 选择 M_δ。其次，选择 $p_\delta \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_\delta)$，即 p_0 的一个不分叉扩张；根据 2.1(E) 的公理 (g)，该扩张存在。现在，根据 2.1(E)(b)，$p_\delta \restriction M_i \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_i)$ 在 M_0 上不分叉，并且它扩张了 p_0，因此根据 (E)(e)，它等于 p_i。第三，根据 (E)(e)，p_δ 是唯一的。

2）这也应该是显然的。 $\square_{2.2}$

定义 2.3。1）假设对于 $\ell = 1$，有 $M_\ell \le_{\mathfrak{s}} N$ 和 $p_\ell \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_\ell)$，2。若某个 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 是 p_ℓ 关~~于 $\ell =$~~ 1的不分叉扩张，2，则称 p_1、p_2 平行。

2) 当对于 $M \in K_{\mathfrak{s}}$，$\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M) = \mathcal{S}^{\rm na}_{\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}}(M)$ 时，我们称 $\mathfrak{s}$ 为类型全。

3) 当满足以下条件时，我们称 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 基于 $^-$a：

(A) $^-$a 是来自 M 的序列。

(B) 如果 $M \le_{\mathfrak{s}} N$, $q \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$ 是 p 的不分叉扩张，并且 π 是 N 在 $^{-}$a 上的自同构，那么 $\pi(q) = q$。（参见 [Sheb]，了解如何保证存在这样的 $^{-}$a $\in {}^{\lambda}M$，甚至是 $^{-}$a $\in {}^{1}M$。）

3A) 对 $p \in \mathcal{S}^{\rm e}_{\mathfrak{s}}(M)$ 同理；(4) 也同理。

4) 若上述 2.3(3) 条款中存在这样的 $^{-}$a $\in {}^{\theta>}M$，则称 $\mathfrak{s}$ 是基于 $(<\theta)$ 的。

定义 2.4. 1) 若除 2.1(A)-(C) 外还满足以下条件，则称 NF 是 (μ,λ,κ)-1-DAEC$\mathfrak{k}$ 上的非分叉关系：

(F) (a) NF 是 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$上的四元关系，并且 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$ 蕴含$M_0 \le_{\mathfrak{k}} M_\ell \le_{\mathfrak{k}} M_1$，且 NF$_{\mathfrak{s}}$ 在同构下保持不变。(b)$_1$ 单调性：若 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$，$M_0 \le_{\mathfrak{s}} M'_\ell \le_{\mathfrak{s}} M_\ell$ 对于 $\ell = 1$、2 以及$M'_1 \cup M'_2 \subseteq M'_3 \le_{\mathfrak{s}} M$，则 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M'_1,M'_2,M'_3)$。(c) 对称性：NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$ 蕴含 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_2,M_1,M_3)$。(d)$_1$ 传递性：若对 $\ell = 0$、1，NF$_{\mathfrak{s}}(M_{2\ell},M_{2\ell+1},M_{2\ell+3},M_{2\ell+4})$，则 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_4,M_5)$。(d)$_2$ 长传递性：若 $\langle (N_i,M_i) : i<\delta\rangle$ 是一个 NF$_{\mathfrak{s}}$-序列（即 M_i 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的，N_i 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的，$M_i \le_{\mathfrak{s}} N_i$, $i<j<\delta \Rightarrow$ NF$_{\mathfrak{s}}(M_i,N_i,M_j,N_j)$，且 $\sum\{\|N_i\| : i<\delta\} < \mu$），则可以找到 (N_δ,M_δ)，使得$\langle (M_i,N_i) : i\le\delta\rangle$ 是一个 NF-序列。(d)$^{+}_{2}$ 对有向系统也有类似 (d)$_2$，的性质。(d)$_3$ 此外，在 (d)$_2$，中，若 $\langle M_i : i<\delta\rangle$ 和 $\langle N_i : i<\delta\rangle$ 是 $(\ge\kappa)$- 连续的，且 cf$(\delta) \ge \kappa_{\mathfrak{s}}$，则可以要求 $M_\delta = \bigcup\{M_i : i<\delta\}$, $N_\delta = \bigcup\{N_i : i<\delta\}$。

定义 2.5. 1) 设 $\mathfrak{s}$ 是一个良好 λ-框架，且 NF 是 $\mathfrak{k}$ 上的非分叉关系。当满足以下条件时，我们称 NF 尊重 $\mathfrak{s}$：若 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$ 且 $a \in M_2$，ortp$_{\mathfrak{s}}(a,M_0,M_3) \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_0)$，则 ortp$_{\mathfrak{s}}(a,M_1,M_3)$ 是 ortp$_{\mathfrak{s}}(a,M_0,M_2)$ 的一个不分叉扩张。2) 若 $\mathfrak{s}$ 是一个良好 (λ,μ,κ)-NF- 框架，且它是一个良好 (λ,μ,χ)-框架，并且 NF$_{\mathfrak{s}}$ 是 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 上尊重 $\mathfrak{s}$的非分叉关系，则称 $\mathfrak{s}$ 为良好 (λ,μ,κ)-NF-框架。

定义 2.6. 若 $\mathfrak{s}$ 是一个良好 (μ,λ,κ)-NF-框架，且

(G) (a) 若 NF$_{\mathfrak{s}}(M_0,M_1,M_2,M_3)$，则存在一个在 $M_1 \cup M_2$ 上素的 $M^*_3 \le_{\mathfrak{s}} M_3$。也就是说，

- 如果 NF$_{\mathfrak{s}}(M'_0,M'_1,M'_2,M'_3)$，且 f_ℓ是一个从 M_ℓ到M'_ℓ的同构，其中 $\ell = 0$取 1、2，使得 $f_0 \subseteq f_1$ 且 $f_0 \subseteq f_2$，那么存在一个$\le_{\mathfrak{s}}$-嵌入 f_3，将 M^*_3 嵌入到 M'_3中并扩展 $f_1 \cup f_2$。(b) $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ 具有 $K^{3,\text{素}}_{\mathfrak{s}}$-素元（见下文 2.7(3)）。

定义 2.7. 0) $K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}} = \{(M,N,a) : M \le_{\mathfrak{s}} N,\ a \in N,$ and 正交类型$_{\mathfrak{s}}(a,M,N) \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)\}$.

1) $K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}} = \{(M,N,a) \in K^{3,{\rm bs}}_{\mathfrak{s}}$: 如果 $M \le N'$, $a' \in N'$, 正交类型$_{\mathfrak{s}}(a',M,N') =$正交类型$(a,M,N$) 那么存在一个从 N 到 N' 的 $\le_{\mathfrak{k}}$-嵌入，该嵌入扩展了 id$_M$ 并将 a 映射到 $a'\}$。2) 如果对于每个 $M \in K_{\mathfrak{s}}$和 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，都存在 (N,a) 使得 $(M,N,a) \in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$且 ortp$_{\mathfrak{s}}(a,M,N) = p$，则 $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$具有 $K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$-素。

定义 2.8。 $[\iota \ge 3]$

1) 假设$(M,p_1,p_2) \in$ 当满足以下蕴含关系时，我们称 p_1,p_2 弱正交（记作$p_1 \perp^{\rm wk} p_2$）：若 $M_0 \le_{\mathfrak{s}} M_\ell \le_{\mathfrak{s}} M_3$，则$(M_0,M_\ell,a_\ell) \in$

$K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm pr}$，且对于 $\ell=1$，若 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(a_\ell,M_0,M_\ell)=p_\ell$，则 $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(a_2,M_1,M_3)$ 在 M_0 上不分叉（由 2.1(E) 的公理 (f) 可知这是对称的）。

2) 当满足以下条件时，我们称 p_1、p_2 正交（记作 $p_1\perp p_2$）：若 $M\le_{\mathfrak{s}}M_2$、$M_1\le_{\mathfrak{s}}M_2$ 且 $q_\ell\in\mathcal{S}^{\rm bs}(M_2)$ 是 p_ℓ 的不分叉扩张，并且 q_ℓ 不在 M_1 上分叉，则 $q_1\perp_{\rm wk}q_2$。

3）当满足以下条件时，我们称 $\{a_t:t\in I\}$ 在 (M_0,M_1,M_2) 中独立：

(A) $a_t\in M_2\setminus M_1$ (B) 正交类型$_{\mathfrak{s}}(a_t,M_1,M_2)$ 不分叉于 M_0。(C) 存在一个序列 $\langle t(\alpha):\alpha<\alpha(*)\rangle$ 列出 I，且没有重复项；并且存在一个 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增序列 $\langle M_{1,\alpha}:\alpha\le\alpha(*)+1\rangle$，满足 $M_1\le_{\mathfrak{s}}M_{1,0}$ 且 $M_2\le M_{1,\alpha(*)+1}$，使得 $a_{t(\alpha)}\in M_{1,\alpha+1}$，并且正交类型$_{\mathfrak{s}}(a_{t(\alpha)},M_{1,\alpha},M_{1,\alpha+1})$ 不分叉于 M_0。

4) 令 $(M,N,\mathrm{J})\in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm bs}$ 如果 $M\le_{\mathfrak{s}}N$，且 J 在 (M,N) 中是独立的。

5) 令 $(M,N,\mathrm{J})\in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm qr}$ 如果：

(A) $M\le_{\mathfrak{s}}N$ (B) J 是 (M,N) 中的独立集。(C) 如果 $M\le_{\mathfrak{s}}N'$ 和 h 是从 J 到 N' 的单射，且 $(M,N',h''\mathrm{J})\in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm bs}$ 那么存在一个 $\le_{\mathfrak{s}}$-嵌入 g，将 N 嵌入到 N' 中，并且在 M 上扩展 h。

注 2.9. 现在我们可以仿照公理的关系（如 [She09b, §2]），以及 2.8 中引入的概念的基本性质。

定义 2.10. 1) 当满足以下条件时，我们称 p 被 $\{p_t$ 强支配：$t\in I\}$，并记作 $p\le_{\rm st}\{p_t:t\in I\}$（该集合可能包含重复项[6]）：

(A) $p\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N)$、$p_t\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_t)$、$N_t\le_{\mathfrak{s}}N^+\in K_{\mathfrak{s}}$、$N\le_{\mathfrak{s}}N^+$ 以及 (B) 如果 $N^+\le_{\mathfrak{s}}N^*$、$a_t\in N^*$，则 $\mathrm{ortp}(a_t,N^+,N^*)\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N^+)$ 平行于 p_t，且 $p'\in\mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N^+)$ 平行于 p（见定义 2.3），并且 $\{a_t:t\in I\}$ 在 (N^+,N^*) 中是独立的，那么某个 $a\in N^*$ 实现 p'。

2) 我们称 p 被 $\{p_t:t\in I\}$ 弱支配，并在存在某个集合 J 及从 J 到 I 的函数 h 使得 $p\le_{\rm st}\{p_{h(t)}:t\in J\}$ 时，记作 $p\le_{\rm wk}\{p_t:t\in I\}$。

3) 规定“支配”表示强支配。

4) 当满足以下条件时，我们称 $\mathfrak{s}$ 是一个强优 ι 框架：

(A) 这是一个良好的 ι-框架。(B) 如果 J 是 J_1 与 J_2 的不交并，$(M,N,\mathrm{J})\in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm bs}$，$M\le_{\mathfrak{s}}M_1\le_{\mathfrak{s}}N$，且 $(M,M_1,\mathrm{J})\in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm qr}$，那么 $(M_1,N,\mathrm{J}_2)\in K^{3,\mathfrak{s}}{}^{\rm bs}$，并且对所有 $a\in\mathrm{J}_2$，$\mathrm{ortp}(a,M_1,N)$ 都不在 M 上分叉。

断言 2.11. 假设 $\mathfrak{s}$ 是强良好的。

1) 如果 p 被 $\{p_t$ 强支配：$t\in I\}$，那么 p 被 $\{p_t$ 弱支配：$t\in I\}$。

2) 如果 p 被 $\{p_t$ 强支配：$t\in I\}$，那么存在某个基数为 $<\kappa_{\mathfrak{s}}$ 的 $J\subseteq I$，使得 p 被 $\{p_t$ 强支配：$t\in J\}$。

3) p 被 $\{p_t$ 弱支配：$t\in I\}$，当且仅当存在某个 $\langle i_t:t\in I\rangle$，使得 p 被 $\{p'_s$ 强支配：$s\in\{(t,i):t\in I,\ i<i_t\}\}$，其中 $p'_{(t,i)}=p_t$ 且 $i_t<\kappa_{\mathfrak{s}}$ 对每个 $t\in I$ 都成立。

4）在定义 2.10(2) 中，不失一般性 $(\forall s\in I)$ $(\exists^{<\kappa}t\in J)[h(t)=s]$。

[6]因此，严格来说，我们应使用一个序列，并将其写为 $p\le_{\rm st}\langle p_t:t\in I\rangle$。

5）平行性保持。

6) $(M,N,\mathbf{J}) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$当且仅当对每个有限的 $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}$，都有 $(M,N,\mathbf{I}) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$。

7) 若 $\mathbf{J} = \{a_s : s \in \overline{I}\}$ 在 (M,N) 中是独立的，其见证为 $\langle M_{1,\alpha} : \alpha \le \alpha(*)\rangle$, $\langle t(\alpha) : \alpha < \alpha(*)\rangle$ (见 2.8(5)) 则 $(M_{1,0}, M_{1,\alpha(*)}, \mathbf{J}) \in K^{3,\mathrm{qr}}_{\mathfrak{s}}$.

证明。1）显然。

2) 根据 2.11(2)，经过一些运算。

3) 根据 2.12 和定义 2.1 的条款 (i)。

4)、5) 容易。

6) $\Rightarrow$ 方向由定义可得； $\Leftarrow$ 方向可通过对 $\alpha(*)$进行归纳证明。

7) 根据定义 2.10(4)。 $\square_{2.11}$

断言 2.12。如果 $(M,N,\mathbf{J}) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$且 $b \in N$，那么存在 $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}$ 和 M_1，使得：

(A) $M \le_{\mathfrak{s}} M_1 \le_{\mathfrak{s}} N$

(B) $|\mathbf{I}| < \kappa_{\mathfrak{s}}$(C) $b \in M_1$

(D) $(M, M_1, \mathbf{I}) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$

证明。不失一般性， $b \notin \mathbf{J}$。我们试图通过对 $i \le \kappa$ 作归纳，选择N_i （如果可能，还选择 $\mathbf{I}_i$），使得

(*) (a) $N_i \le_{\mathfrak{s}} N$ and $\mathbf{I}_i \subseteq \mathbf{J} \setminus \bigcup \mathbf{I}_j$, with $|\mathbf{I}_i| < \kappa$.$j<i$(b) If $j < i$ then $N_j \le_{\mathfrak{s}} N_i$ and $(N_j, N_{j+1}, \mathbf{I}_j) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$. (c) $N_0 = M$(d) If i is a limit ordinal then N_i is 在 $\langle N_j$ 上素: $j < i\rangle$. (e) If $i = j+1$ and N_j has already been defined with $b \notin N_j$, and there

is

$\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J} \setminus \bigcup \mathbf{I}_\ell$ 基数为 $< \kappa$ （或简言之为有限）的$\ell<j$

$$\big(N_j, N, \mathbf{I} \cup \{b\}\big) \notin K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$$

那么我们可以选取这样的 $\mathbf{I}$ 作为我们的 $\mathbf{I}_j$ ，并选取 $N_i \le_{\mathfrak{s}} N$ 使得 $(N_j, N_i, \mathbf{I}_j) \in K^{3,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$。

如果我们对所有的 $i < \kappa$ 进行归纳，就会得到矛盾（见 2.1(E)(c)），因此对于某个 $i(*) < \kappa$，我们会到达一个点，此时 $N_{i(*)}$ 有定义，但 $\mathbf{I}_{i(*)}$ 没有定义。

我们通过对 $\theta \le |\mathbf{J}|$ 进行归纳来证明：如果 $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}' = \mathbf{J} \setminus \bigcup_{j<i(*)} \mathbf{I}_j$ 的基数为θ，那么 $(N_{i(*)}, N, \mathbf{I} \cup \{b\}) \in K^{3,\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}$。因此，利用定义 2.1(E)(i) 的情形 1，我们就完成了证明。$\square_{2.12}$

断言 2.13. 1) 如果 $p \le_{\mathrm{wk}} \{p_i : i < i^*\}$ 且 $i < i^* \Rightarrow q \perp p_i$ ，那么 $q \perp p$ （见定义 2.7(3)）。

2) 若 $p \le_{\mathrm{wk}} \{p_i : i < i^*\}$ 且 $p \in \mathcal{S}^{\mathrm{bs}}_{\mathfrak{s}}(M)$，则 $p \not\perp p_i$ 对于某个 $i < i^*$成立。

3) 若 $p \le_{\mathrm{st}} \{p_i : i < \alpha\}$ ，则 $p \le_{\mathrm{st}} \{p_i : i < \alpha,\ \ p_i \not\perp p\}$ （见定义 2.10）。

证明。1) 对 i^* 作归纳：对于 i^* 极限，我们使用 2.1(E)(i)；对于 i^* 后继，使用 $q \perp p_{i^*-1}$。

2) 根据第 (1) 部分和 2.11(3)。

3) 显然。 $\square_{2.13}$

断言 2.14。假设 $\mathfrak{s}$ 是类型全的。

若 $\chi = \chi^{<\kappa} \in [\lambda, \mu)$，则以下情况不可能成立：(a) $\langle M_i : i < \chi^+\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的、 $\le_{\mathfrak{s}}$-半连续的，

(*b*) $\langle N_i : i < \chi^+ \rangle$ 是 $\leq_{\mathfrak{s}}$-递增的、 $\leq_{\mathfrak{s}}$-半连续的，(*c*) $M_i \leq_{\mathfrak{s}} N_i \in K_{\leq \chi}$，
(*d*) 对某个平稳的 $S \subseteq \{\delta < \chi^+ :$ 共尾性$(\gamma) \geq \kappa\}$，对每个 $i \in S$，

- 存在 $a_i \in M_{i+1} \setminus M_i$，使得正交类型$(a_i, N_i, N_{i+1})$不是正交类型$(a_i, M_i, M_{i+1})$的不分叉扩张 $\in \mathcal{S}_{\rm bs\mathfrak{s}}(M_i)$。

证明。对于某个 χ^+的闭无界集 E，我们有 $i \in E \wedge j \in [i, \chi^+) \Rightarrow N_i \cap M_j = M_i$。对于每个 $i \in S \cap E$，根据 2.1(E)(c)，存在一个 $j_i < i$，使得正交类型(a_i, M_i, M_{i+1})不在 M_{j_i} 上分叉。根据 2.1 的条款 (E)(i)，对于某个 $j \in [j_i, i)$，我们有正交类型(a_i, N_j, N_{i+1})不是正交类型(a_i, M_{j_i}, M_{i+1})的不分叉扩张，因此不失一般性，假设这对 $j = j_i$成立。

根据Fodor引理，对于某个 $j(*) < j$ 集合 $S' = \{i \in S \cap E : j_i = j(*)\}$ 是平稳的。所以 $\{b_i : i \in S'\}$ 在 $\left(\bigcup M_j, M_{j+1}\right)$ 中是独立的。根据第 (3) 部分，我们已经j完成。

此外，存在一个序列 $\langle M_{j(*),\varepsilon} : \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \kappa \rangle$，它是 $\varepsilon_{\mathfrak{s}}$-递增连续的，满足 $M_{j(*),0} = M_{j(*)}$, $M_{j(*),\varepsilon} = N_{j(*)}$，且 $(M_{j(*),\varepsilon}, M_{j(*),\varepsilon+1}, c_\varepsilon) \in K^{3,{\rm pr}}_{\mathfrak{s}}$。现在我们可以通过对 $\varepsilon < \varepsilon*$ 作归纳，选取 $\zeta_\varepsilon < \chi^+$，使其递增连续，并满足 $\{a_i : i \in [\zeta_i, \chi^+)\}$ 在 $(M_{j(*),\varepsilon}, \bigcup N_j)$ 中独立，且 ortp$(a_i, M_{j(*),\varepsilon}, N_{i+1})$ does$_j$不在 $M_{j(*)}$ 上分岔，对 $i \in [\zeta, \chi^+)$ 成立——这显然矛盾。归纳在 $\varepsilon = 0$ 的情形下显然成立；对于 ε 极限情形，由 2.11(6) 得出；对于 $\varepsilon = \xi + 1$，我们使用 2.12。$\square_{2.14}$

例 2.15. 1) 对于一个完备的一阶严格稳定 T 以及 $\kappa = {\rm cf}(\kappa) > \aleph_0$，我们定义 $\mathfrak{k}$如下：

(A) $K_{\mathfrak{k}}$ 是 κ-饱和（等价地，F^a_κ-饱和）的 T的模型类。(B) $\leq_{\mathfrak{k}}$定义为：$M \leq_{\mathfrak{k}} N$当且仅当 M、$N \in K_{\mathfrak{k}}$和 $M \prec N$。

断言 2.16. 若对于 $i < \kappa_{\mathfrak{s}}$， p、$p_i \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$ 且 $i < j \Rightarrow p_i \perp p_j$，则对每个足够大的 $i < \kappa$，都有 $p \perp p_i$。

证明。类似于 Shea 的证明，1.6=Lj20]。 $\square_{2.16}$

定义 2.17. 1) 我们称优良框架 $\mathfrak{s}$ 是 θ-基于的$_1$，当：

(A) 若 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M)$，则对于某个 $^-$，存在一个 $\in {}^{\theta >}M$，使得 p基于 $^-$a（见定义 2.3(4)）。

2）当满足以下条件时，我们称 $\mathfrak{s}$ 是基于 θ的$_2$：

(A) 与第 (1) 部分相同。(B) $\mathfrak{s}$是类型全的。(C) 如果 $M_1 \leq_{\mathfrak{s}} M_2$ 和 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(M_2)$，那么对于某个 $\bar{a}_\ell \in {}^{\theta >}(M_\ell)$，型 p 和正交类型 $_{\mathfrak{s}}(\bar{a}_2, M_1, M_2)$ 分别基于 $^-$a$_2$、$^-$a$_1$，。

§ 3. Thoughts on the main gap

我们在此探讨两个问题：严格稳定类的类型理论（即维数、正交性等），以及关于某种饱和模型的主间隙。人们始终希望，第一个问题上的进展能有助于解决第二个问题。

关于一阶情形，相关研究始于 [She90, Ch.V]（尤其是 §5）和 [She91]，并在 Hernandes [Her92] 中得到了很大推进；但这对于某种饱和模型的主间隙问题而言仍然不够。

这里我们在一般框架下处理类型维数。

* * *

可数一阶理论的 $\aleph_1$ 饱和模型的主间隙问题尚未解决。原则上，它看起来比模型的主间隙问题更容易（后者因是“原始问题”而受到优先关注），因为任意模型之上都存在素模型；但这个问题仍未解决。（不可数一阶 $|T|^+$ 饱和模型的相关问题也尚未解决。）

为什么 [She90, Ch.XII] 中的证明行不通？在 $\mathfrak{C}^{\rm eq}$ 中，缺少的是，

⊛ If $M_0 \prec M_1 \prec M_2$ are $\aleph_1$-saturated, $a \in M_2 \setminus M_1$ and $(a/M_1) \not\perp M_0$ then for some $b \in M_2 \setminus M_1$ we have $b \underset{M_0}{\bigcup} M_1$.

中心情形是，当 $q \perp M_0$ 时，a/M_1 与 q 正交。

可能的方法 1：我们利用 T 为一阶可数、稳定 NDOP（甚至是浅的）来理解类型。参见 [LS06]。

可能的方法 2：我们使用本文所处理的背景。我们对该类的了解较少，但拥有更丰富的 $\mathfrak{C}^{\rm eq}$，因此即使 ⊛ 在初等情形下对 T 失效，我们也可能证明它（这是 [Sheb] 与本文之间的联系）。

可能的方法 3：我们从这里的上下文开始。如果情况不理想，我们就定义这样一个导出 DAEC；[She09e] 和 [She09b] 中已做过这件事。它可能具有非结构性质——这足以得到同构意义下模型的最大数量。如果不行，我们就得到一个更精细的 $\mathfrak{k}$，但仍属于我们的上下文。极限情形也类似。如果我们足够多次地成功，就能证明一切都没问题。

可能的方法 4：现在我们在某个相当饱和的模型中有一棵极大的非分叉树 $\langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathcal{T}\rangle$；对于 [她90], 例如 $\|M_\eta\| \le \lambda$，这些模型是λ^+-饱和的，但从这里开始我们使用模型。如果 M 在 $\bigcup\{M_\eta : \eta \in \mathcal{T}\}$上素，那么我们就完成了，但也许还存在残余部分。这以下述方式出现：对于$\eta \in \mathcal{T}$和 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}(M_\eta)$，$p$ 的维数并未被

$$\{a_{\eta^\frown\langle\alpha\rangle} : \eta^\frown\langle\alpha\rangle \in \mathcal{T} \text{ and } (a_{\eta^\frown\langle\alpha\rangle}/M_\eta) \not\perp p\}$$

但缺失的部分并不是无限的！这要求从 $\mathcal{T}$到 $\mathcal{T}$的 $\le \lambda$ 个一元函数。现在看来，这种可能出现的不完全耗尽[7] 是否发生并不是一个好的分界线；尽管其否定具有信息量，但尚不清楚它是否会带来任何后果。不过，有两个分界线候选（实际上，它们的析取似乎正是我们想要的）。

(*A*) (∗) 我们可以找到 $M, \langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathcal{T}\rangle$ 如上所述，以及 $\eta_* \in \mathcal{T}, \ell g(\eta) = 2$, $\nu_* \in \mathcal{T}, \ell g(\nu_*) = 1, \eta_* \restriction 1 \ne \nu_*$，还有 $p \in \mathcal{S}^{\rm bs}(M_{\eta_*})$，$p \perp M_{\eta\restriction 1}$ 具有如上所述的留数，使得我们需要 M_{ν_*} 对其进行说明。

[7] 本质上：存在一个非代数的 $p \in (M^\perp)^\perp$，它不 1-支配任何 $q \in \mathcal{S}(M)$。

更明确地说，

$(*)'$ If $M' \le_{\mathfrak{s}} M$ is prime over $\bigcup\{M_\eta : \eta \in \mathcal{T}\}$ and we can find $a_{\eta_*,\nu_*} \in M \setminus M'$ such that $\mathrm{ortp}\big(\mathscr{C}(a_{\eta^*,\nu^*}, M'), \bigcup\{M_\eta : \eta \in \mathcal{T}\}\big)$ mark (M_{η_*}, M_{ν_*}).

即使在（$*$）′ 中，我们也必须进一步说明，才能成功运用它。

根据（$*$）′，我们可以证明一个非结构结果：在 $\mathcal{T}$ 上，我们可以编码 $\{\eta \in \mathcal{T}$ 上的任意二元关系 R： $\ell g(\eta) = 1$， M_η， $M_{\eta^\frown 1}$ 在 $M_{\langle\rangle}\}$ 上同构，而 $M_{\langle\rangle}\}$ 具有（$\nu_1 \, R \, \nu_2 \Leftrightarrow (\exists \nu) \bigwedge [\,]$ 的形式；存在 η'， $\eta_\ell \lhd \eta' \in \mathcal{T}$， $\ell g(\eta') = 2$，并且 $\nu \in T$，$\ell g(\nu) = 1_\ell$，且存在 $a_{\eta',\,\nu}$ 如上所述]。

更复杂的情况是

(B) $(**)$ We can fix M, $\langle M_\eta, a_\eta : \eta \in \mathcal{T}\rangle$ as above, $\eta_* \in T$, $\nu_*, \nu_{**} \in \mathcal{T}$, $\ell g(\eta_*) = \ell g(\nu_*) = \ell g(\nu_{**}) = 1$ such that $(\eta_*, \nu_*), (\eta_*, \nu_{**})$ are as above.

但对于（A），我们必须使 η_* 和 ν_* 都不冗余；而在（B）中，为了得到非结构结果，我们必须使用（B）中一种并非“伪造”的情形；例如，我们不能用两组这样的对来替换（M_{η_*}， a_{η_*}）。

也就是说，“伪造情形”是指我们可以找到 $M'_{\eta_*}, M''_{\eta_*}$，使得：

- NF$(M_{\langle\rangle}, M'_{\eta_*}, M''_{\eta_*}, M_{\eta_*})$
- M_{η_*} 在 $M'_{\eta_*} \cup M''_{\eta_*}$ 上素。
- 只有 (M'_{η_*}, M_{ν_*}) 和 $(M''_{\eta_*}, M_{\nu_{**}})$ 相关。

(C) 如果 (A) 和 (B) 均未以正确表述出现，那么 (

α) **A good possibili ty**

我们可以建立一种结构理论：对于 $M, \langle M_\eta, a_\eta$：如上所述的 $\eta \in \mathcal{T}\rangle$；也就是说，在每个 suc$_{\mathcal{T}}(\eta)$ 上都有一个二元关系，但它非常简单：你只需将某些部分粘合起来，或通过树结构扩展后继的集合。

如果此方法行不通，我们可以退而采用方法 (3)。

我们可以考虑（见 [She08], [PS18]）：

问题 3.1. 1) 对于一个抽象初等类 $\mathfrak{k}$，何时模型在逻辑 $\mathscr{L} = \mathbb{L}_{\infty,\,\kappa}[\mathfrak{k}]$ 中加入维数量词后的理论，能够在同构意义下刻画 $\mathfrak{k}$ 的模型? 同样地，也可以加入长度为 $\le \kappa$ 的博弈量词。

2) 证明以下版本的主要间隙定理：若 $\mathfrak{s}$ 是 n-美丽 [或 $n+1$?] 则对于 $K_{\lambda^{+n}}$ 主要间隙成立。特别地，若 $\mathfrak{s}$ 具有非正交维数性质，则每个 $M \in K_{\lambda^{+n}}$都在某个由 $\le_{\mathfrak{K}[\mathfrak{s}]}$-子模型组成的非分叉树之上素 $\langle M_\eta :\ \eta \in \mathcal{T}\rangle$，每个 M_η的基数为 $\le \lambda$，其中 $\mathcal{T} \subseteq {}^{\omega>}(\lambda^{+n})$。若 $\mathfrak{s}$ 是浅的，则该树的深度为$\le \mathrm{Depth}(\mathfrak{s}) < \lambda^+$，由此我们可以推断模型的数量。

讨论 3.2。假设 $\lambda_{\mathfrak{s}}$ 中的稳定性。

暂且假设 $M_0 \in K_{\mathfrak{s}}$, $\lambda_{\mathfrak{s}}^+$-饱和。1) 假设

$\boxplus_1$ $N_0 \le_{\mathfrak{s}} N_1 \le_{\mathfrak{s}} M$, $N_\ell \in K^{\mathfrak{s}}_\lambda$, $a \in N_0$，以及 $(N_0, N_1, a) \in K^{3,\,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$。

我们通过对 $i \le \lambda_{\mathfrak{s}}^+$ 归纳，选取 $(N^+_{1\,i,}, N_{1,i}, \mathrm{I}_i)$，并且在可能的情况下也选取 (M_1, a_i)，使得

$(*)$ (a) $N_{0,i} \le_{\mathfrak{s}} N_{1,i} \le_{\mathfrak{s}} N^+_{1,i} \le_{\mathfrak{s}} M$ (b) $\mathrm{I}_i \subseteq \{c \in M$: 正交类型$(c, N_{1,i}, M_0)$ $\perp N_0\}$ 在$(N_{1,i}, N^+_{1,i}, M)$中是独立的且极小。(c) $\langle N_j :\ j \le i\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-半连续的；此外，$\langle N^+_j :\ j \le i\rangle$ 也是如此。(d) 若 $i = j+1$，则$N^+_{1,i}$在$N^+_{1,j}$上是 $\le_{\mathfrak{s}}$-普遍的，并且$(N_0, N_{1,i}, a) \in K^{3,\,\mathrm{pr}}_{\mathfrak{s}}$。

(e) 若 $j<i$，则$\mathbf{I}_j \setminus (N_i \cap \mathbf{I}_j) \subseteq \mathbf{I}_i$。(f) 如果可能：($\alpha$) $N_i \le_{\mathfrak{s}} M_i^+ \le_{\mathfrak{s}} M$($\beta$) $(\mathbf{I}_i \setminus M_i)$在$(M_i, M)$中是独立的。($\gamma$) $a_i \in M \setminus \mathbf{I}_i$ (δ) 正交类型$(a_i, M_1^*, M) \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_i^+)$是 $\perp N_i$。(ε) $N_i^* \le N_{1,\ i+1}$

(g) 若 $i=j+1$且存在 (b, N_*^+, N_{**}) 使得 $b \in N_{1,\ j}^+ \setminus N_{1,j}$,

$$N_{1,i} \le_{\mathfrak{s}} N_* \le_{\mathfrak{s}} N_{**} \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda_{\mathfrak{s}}},$$

$N_{1,i}^+ \le_{\mathfrak{s}} N_{**}$, and $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(b, N_*, N_{**})$ forks over $N_{1,j}$ then, for some $b \in N_{1,j}^+ \setminus N_{1,j}$, the type $\mathrm{ortp}_{\mathfrak{s}}(N_{1,i}, N_{1,i}^+)$ forks over $N_{1,j}$.

继续进行归纳没有问题。

$\boxplus_2$ 以下 $\lambda_{\mathfrak{s}}^+$ 的子集不是平稳的——也就是说，与闭无界集 C 不相交：

- $S = \{i < \lambda_{\mathfrak{s}}^+ : \mathrm{cf}(i) \ge \kappa_{\mathfrak{s}} \text{ and } (M_i, a_i) \text{ is well defined}\}$
- $S_2 = \big\{i : \mathrm{cf}(i) \ge \kappa_{\mathfrak{s}} \text{ and for some } b \in N_{1,i}^+,\ \mathrm{tp}(b, N_{1,i}, N_{1,i}^+) = N_0\big\}$.

2) 同样，不需要 (N_0, a)，因此也不需要“$\perp N_0$”；这样更简单。

$\boxplus$定义 3.3. 我们称 $(\overline{N}, \bar{a}, I)$ 是 M的一个递减对，当存在某个 n使得：

(A) $\overline{N} = \langle N_\ell : \ell \le n\rangle$ 是 $\le_{\mathfrak{s}}$-递增的。(B) $N_\ell \le_{\mathfrak{s}} M$, $N_\ell \in K^{\mathfrak{s}}_{\lambda_{\mathfrak{s}}}$(C) $\bar{a} = \langle a_\ell : \ell < n\rangle$(D) $(N_\ell, N_{i+1}, a_\ell) \in K^{3,\mathfrak{s}}_{\rm pr}$(E) $\mathbf{I} = \langle \mathbf{I}_\ell : \ell \le n\rangle$(F) $\mathbf{I}_\ell$在 (N_ℓ, M) 中是独立的。(G) $\mathbf{I}_\ell \subseteq \{c \in M$: 正交类型$(c, N_\ell, M) \in \mathcal{S}^{\rm bs}_{\mathfrak{s}}(N_\ell)$ 若 $k<\ell\}$则为 $\perp N_k$ (H) 若 $N_\ell \le_{\mathfrak{s}} N \le_{\mathfrak{s}} M$, $b \in M \setminus N_0 \setminus \mathbf{I}_\ell$，且正交类型$(b, N, M)$ 为 $\not\perp N_\ell$，但对于 $k<\ell$与 N_k 正交，则 b在 (N_ℓ, M) 中依赖于 $\mathbf{I}_\ell$。

尝试证明分解

我们假设维数连续性来证明分解。如果想去掉“M 是 $\lambda_{\mathfrak{s}}^+$饱和的”，就必须假设我们有一个 $\mathfrak{s}$ 的稍弱版本$\mathfrak{s}_*$，其中 $\lambda_{\mathfrak{s}_*} < \lambda_{\mathfrak{s}}$ 和$\langle N_{0,\ i} :\ i < \lambda_{\mathfrak{s}}\rangle \le_{\mathfrak{s}_*}$表示 N_0，并据此开展工作。假设 CH，$|T| = \aleph_0$ 就可以。没有维数不连续性时，我们将长度为 $\le \kappa_{\mathfrak{s}}$的任意（$N$、$\bar{a}$、$\mathbf{I}$）称为“良好”！

* * *

$\boxplus$定义 3.4。我们称 $\mathbf{d} = (I, N, \bar{a}, \mathbf{I}) = (I_{\mathbf{d}}, N_d, \bar{a}_{\mathbf{d}}, \mathbf{I}_{\mathbf{d}})$ 是 的部分分解，当：

$\boxplus$ (a) $I \subseteq {}^{\omega>}\mathrm{Ord}$ is closed under initial segments.
(b) $\overline{N} = \langle N_\eta : \eta \in I\rangle$, so $N_\eta = N_{\mathbf{d},\eta}$.
(c) $\bar{a} = \big\langle a_\eta : \eta \in I \setminus \{\langle\,\rangle\}\big\rangle$, so $a_\eta = a_{\mathbf{d},\eta}$.
(d) $\bar{\mathbf{I}} = \langle \mathbf{I}_\eta : \eta \in I\rangle$, so $\mathbf{I}_\eta = \mathbf{I}_{\mathbf{d},\eta}$.
(e) If $\eta \in I$ then

$$\big(\big\langle N_{\eta\restriction\ell} : \ell \le \ell g(\eta)\big\rangle, \big\langle \bar{a}_{\eta\restriction(\ell+1)} : \ell < \ell g(\eta)\big\rangle, \big\langle \mathbf{I}_{\eta\restriction\ell} : \ell \le \ell g(\eta)\big\rangle\big)$$

is nice in M.

(f) 如果 $\eta \in I$ 那么 $\langle a_{\eta\hat{}\langle\alpha\rangle}$： $\eta\hat{}\langle\alpha\rangle \in I\rangle$ 是 I^{η} 中无重复元素组成的序列。

定义 3.5。令 $\leq_\mu$ 为定义在 M的分解集合上的如下二元关系：

$\bar{\mathrm{d}}_1 \leq_M \mathrm{d}$当且仅当 (A) $I_{\mathbf{d}_1} \subseteq$
I_{d_1}(B) $\overline{N}_{\mathbf{d}_1} = \overline{N}_{\mathbf{d}_2} \restriction I_{d_1}$(C)
$\bar{a}_{\mathbf{d}_1} = \bar{a}_{\mathbf{d}_2} \restriction (I_{\mathbf{d}_1} \setminus \{< j\})$
$\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$(D) $\mathrm{I}_{\mathbf{d}_1} = \mathrm{I}_{d_2} \restriction I_{\mathbf{d}_1}$

References

[CK66] 陈仲昌和 H. Jerome Keisler， *Continuous model theory*，《数学年刊研究》，第 58 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1966 年。[Her92] A. Hernandez， *On ω_1–saturated models of stable theories*，博士论文，加利福尼亚大学伯克利分校，1992 年，导师：Leo Harrington。[Kei20] H.J. Keisler， *Model theory for real-valued structures*，arXiv:2005.11851。[LS06] Michael Chris Laskowski 和 Saharon Shelah，*stable theories* **191** 2006 124 *Decompositions of saturated models of* ，《基础数学》（），第 期，第 – 页。MR PS Daniel Palacın 和 Saharon Shelah，，《纯粹与应用逻辑年刊》 2, 95 2231058 （），第 期，第 – 页，[18] *On the class of flat stable theories* arXiv: 。MR Shea Saharon Shelah，。[Sheb]， *AEC: weight and p-simplicity*。《逻辑与分析》（新系列）18（ 1975 71 72, 241 308 0539969），第 期，第 - – 页。MR She， [90] *Classification theory and the number of nonisomorphic models*，第 2 版，《逻辑与数学基础研究》，第 92 卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹， 1990， [ ] 1083551 Sh:a 的修订版。MR She，，《以色列数学杂志》（），第 2-3 期，281–288 页。MR 1135240[She01]， *Categoricity of an abstract elementary class in two successive cardinals*，《以色列数学杂志》 **126** 2001 29 128， 9805146 1882033 （），第 – 页，[08] *Theories with Ehrenfeucht-Fraïssé equivalent non-isomorphic models* arXiv: math/ 。MR She，，《第比利斯数学杂志》1（2008），133–164 页，arXiv: math/0703477。MR 2563810[She09a]， *Abstract elementary classes near $\aleph_1$*，抽象初等类的分类理论，《逻辑研究》（伦敦），第 18 卷，College Publications，伦敦，2009 年，arXiv: 0705.4137， [Sh:h]，的第 I 章，第 vi 页。[She09b]， *Categoricity in abstract elementary classes: going up inductively*，2009 年，arXiv: math/0011215， [Sh:h]的第 II 章。[She09c]， *Categoricity of an abstract elementary class in two successive cardinals revis-* ，，， [Sh:i]的第 章。*ited* 2009 6 [She09d]， *Classification theory for abstract elementary classes*，《逻辑研究》（伦敦），第 18， 2009 2643267 卷，College Publications，伦敦，。[09] *Universal Classes: The heart of the matter* 2009 MR She e，，， [Sh:i]的第 V (F) 章。

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram, The He-brew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904, Israel, and, Department of Mathe-matics, Hill Center - Busch Campus, Rutgers, The State University of New Jersey, 110Frelinghuysen Road, Piscataway, NJ 08854-8019 USA*Email address*: shelah@math.huji.ac.il*URL*: http://shelah.logic.at