arXiv:2305.02027v1 [econ.GN] 3 May 2023

黑箱优化器与偏好冲击*

Yasin Kürşat Önder†

根特大学

2023年5月4日

摘要

我们评估并扩展了动态规划中含有二元选择变量和多个连续选择变量的模型的求解方法，尤其是在离散状态空间求解方法不可行的情况下。因此，我们采用偏好冲击或黑箱优化器来近似求解，这些黑箱优化器是应用数学家用于评估其算法性能的工具。我们将这些方法应用于一个违约框架，在该框架中，经济主体必须求解一个涉及长期债务的投资组合问题。我们表明，求解方法的选择至关重要，因为在多维问题中，偏好冲击无法实现收敛。我们比较了使用四种优化算法的相对优势：Nelder-Mead下山单纯形算法、结合 LINMIN 的 Powell方向集算法、BOBYQA 共轭梯度法，以及 Davidon-Fletcher-Powell（DFPMIN）拟牛顿算法。除最后一种算法外，当导数难以直接计算时，其余算法均更具优势。最终，我们发现，采用 B 样条进行评估的 Powell 算法虽然速度较慢，却是最可行的选择。BOBYQA 位居第二，而另外两种方法的表现则较差。

关键词： 偏好冲击、黑箱优化器、债务、违约、数值方法**JEL 分类代码：**
C61,C63,F34, F41

*感谢 Leonardo Martinez 和 Emircan Yurdagul 提供的建设性意见和建议，尤其感谢 Bulent Guler 给予的大力支持，特别是在实施偏好冲击方面。作者感谢弗兰德斯研究基金会和根特大学启动基金提供的资金支持。

†根特大学经济系；电子邮箱：kursat.onder@ugent.be

1 引言

<escape>动态规划中一个日益普遍的问题是求解包含二元选择变量和多重选择变量的模型。在本研究中，我们考察了一类无法应用离散状态空间（DSS）方法的模型。为解决这一问题，我们比较并扩展了基于偏好冲击和黑箱优化算法的求解方法，这些方法通常被应用数学家用于对其算法进行基准测试。我们特意将这些方法应用于一个包含长期债务和违约行为的框架，主要基于两个原因。首先，先前的研究表明，DSS方法并不适用于这一框架（Hatchondo 和 Martinez (2009) 以及 CE Chatterjee 和 Eyigungor (2012)）。其次，借款和违约行为是消费者、企业和主权国家的关键特征。</escape>

早期文献表明，在单期单资产模型下，对于更精细的网格，DSS 和插值方法往往会得出相同的结果。然而，对于长期债务而言，情况并非如此：如 CE 中此前所述，在不纳入偏好冲击等额外因素的情况下，仅使用 DSS 实现收敛似乎极具挑战性。我们评估并改进偏好冲击求解方法和黑箱优化器，采用替代性插值技术，以阐明其实际可行性以及这些求解方法所面临的瓶颈。随后，我们将基准模型扩展为投资组合配置问题，并证明所采用的求解方法至关重要。此时，使用偏好冲击实现收敛几乎变得不可能，而采用黑箱多维搜索例程的插值方法（如Press 等人（1992）所述）则能够实现这一目标。因此，比较不同的优化算法，是确定解决特定问题的最佳方法的重要步骤。当导数难以计算时，Nelder-Mead 下山单纯形算法、结合 LINMIN 的 Powell方向集算法，以及共轭梯度法 BOBYQA，都是久经验证的方法，可用于此类问题。这些方法已得到广泛测试，并被证明在各种优化问题中均可靠且高效。

然而，这些算法的相对性能可能因具体问题的不同而有所差异。因此，评估每种算法在当前特定问题上的性能至关重要。可以通过比较各种算法的收敛速度、准确性和鲁棒性来进行评估。在投资组合配置问题中，优化算法的选择会对最终所得解的质量产生重大影响。因此，仔细评估不同算法在该问题上的性能至关重要。

在长期债务的构建方面，CE 和 HM 均采用了类似的方法。其思路是避免追踪债券到期日的分布。不过，两种模型采用的方法略有不同。CE 为长期债务提供了一个更为全面的框架，而 HM 则是其中的一个特例。两者的主要差异源于研究人员提出的久期定义各不相同。根据校准方式的不同，这些定义可能导致久期和利差出现显著差异。

为求解模型，CE 引入了一个从连续分布中抽取的暂时性收入冲击，以改善其 DSS方法的收敛性；而 HM 则使用插值技术。CE 框架中的新冲击起到偏好冲击的作用，使折点变得平滑。重要的是，这个作为状态变量引入的额外冲击，限制了研究者对其作用进行试验的空间。我们以一种更具创新性的方式引入该冲击，以加快收敛并避免内存问题带来的限制。具体而言，在债务选择上加入偏好冲击后，给定当前债务选择和收入，债务政策便成为未来债务选择的一个密度函数；而在没有偏好冲击时，它则是一个单元素集合。不过，这个密度函数仅在少数债券选择上为正。因此，我们利用稀疏矩阵，将评估范围限制在目标函数取得全局最大值的最大值附近的相邻网格点的选择概率上。

偏好冲击的主要问题出现在网格大小增加时：模型矩往往会发生变化，尽管变化幅度较小。因此，在增大网格大小时，需要通过降低偏好冲击的标准差进行调整，以实现收敛，这可能是一项繁琐的工作。[1] 然而，借助插值技术，研究人员可以使用一维最小化程序，从而简化这一过程。在样条插值和线性插值之间，我们发现，线性插值的速度至少比样条插值快 20 倍，同时能够得出几乎相同的结果。尽管如此，线性插值有时可能无法实现收敛。因此，在经过一定次数的迭代后，我们会切换到样条插值。

在求解投资组合问题时，黑箱优化器相较于偏好冲击的优势尤为明显。我们通过引入期限为一期的不可违约债务来扩展基准模型，并使用黑箱优化器求解该模型。在三种无需计算导数的基准优化器中，Nelder–Mead下山单纯形算法和共轭梯度法BOBYQA的表现均逊于使用样条评估的Powell方向集算法。然而，引入偏好冲击后，由于维数灾难，我们未能在一个相对简单的投资组合问题中实现收敛。这使得偏好冲击技术显得尤为重要。

[1]我们感谢 Emircan Yurdagul 对这一发现的确认。

在解决投资组合问题时，其表现显著逊于优化器技术。尽管遭遇了这一失败，我们仍开发了一种算法，以加快计算速度并避免单资产问题中的内存问题。

文献综述： McFadden（1974年）在离散选择模型的背景下引入了偏好冲击，其函数形式称为广义极值分布。随后，这一方法被拓展到产业组织、结构劳动经济学和国际贸易领域的动态模型中（Pakes （1986年）和Rust （1987年）），并被拓展至内生网格法（Iskhakov等人 （2017年））。Chatterjee等人（2023年）和Dvorkin 等人 （2021年）也将同一思路应用于一期债务下的消费者和主权违约问题。我们从三个主要方面拓展了这些研究：(*i*) 求解长期债务问题；(*ii*) 提出一种算法，通过利用稀疏矩阵来缓解维数灾难并加快收敛；以及(*iii*) 阐述引入偏好冲击时可能遇到的问题，尤其是在引入额外选择变量时，例如本文提出的投资组合问题。

<escape>Hatchondo、Martinez 和 Sapriza (2010年) 通过与以下模型进行基准比较，评估了一期债务主权违约模型的定量表现：Arellano (2008) 和 Aguiar 和 Gopinath (2006)。他们发现，当 DSS 网格点的数量足够多时，DSS 和插值技术都会收敛到相似的结果。然而，我们证明，对于长期债务而言，情况并非如此。尽管差异较小，近似技术仍会产生不同的结果，而且仅采用 DSS 技术不足以实现收敛。我们进一步扩展了分析，引入了投资组合问题，其他几位研究人员也通过在标准长期债务违约模型中增加额外的资产类别，对这一问题进行了探索（Bianchi、Hatchondo 和 Martinez(2018年)、Önder 和 Sunel (2021年)、Arellano 和 Ramanarayanan(2012年)、Hatchondo、Martinez 和 Önd</escape>

er (2017年), Önder (2022年*a*), Guler、Önder 和 Taskin (2022年), Önder (2022年*b*)). 我们通过比较不同黑箱优化器和求解方法的性能，为这一文献作出贡献。

本文其余部分安排如下：第2 节介绍模型，第3 节说明基准校准。第4 节展示模拟结果。最后，第6 节作总结。

2 模型

本节介绍一个具有长期非或有债务的动态小型开放经济模型。该经济体仅禀赋一种可贸易消费品。经济冲击无法投保，时间是离散的。

2.1 环境

偏好与禀赋。 本文考察一个小型开放经济，其中仁慈的政府旨在最大化无限期存续的代表性家庭的效用，且其偏好为

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \tag{1}$$

其中，E 表示期望算子，$0 < \beta < 1$ 为跨期贴现因子，c_t 表示时间t的总消费。效用函数 $u(.)$ 是一个递增、连续且严格凹的函数，属于常相对风险厌恶效用函数这一类，可写为

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{2}$$

风险厌恶参数为 γ。每期，家庭获得随机收入$y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}_{++}$，该收入遵循一阶自回归过程:

$$\log(y_t) = (1-\rho)\,\mu + \rho \log(y_{t-1}) + \varepsilon_t, \tag{3}$$

其中，$|\rho| < 1$，且 $\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$。

资产空间。 CE 和 HM 对长期债务采用略有不同的表述。HM 的情形下，政府发行一种永续债券，按$(0,1]$的比率以几何递减的方式支付票息 $\kappa \quad \delta \in$ 。如果避免违约，债务价格将是无风险的，而平均一期债券价格等于非或有长期债务的现值。票息支付 κ 的设定使债务的无违约价格等于平均一期债务价格。第t 期发行的非或有债券承诺在后续各期支付$(\kappa, (1-\delta)\kappa, (1-\delta)^2\kappa, ..., 0)$单位的可贸易品。因此，长期债务动态可表示如下:

$$b_{t+1} = (1-\delta)b_t + l_t,$$

其中，b_t 和b_{t+1} 分别表示t 期初和$t+1$期初未偿非或有债务票息债权的总数，而l_t 表示t期发行的非或有长期债券数量。注意，$\delta = 1$ 是长期债券的一种特殊框架，对应于采用一期债务的经济体，因此可以写作 $\kappa = {}^{\delta+}{}_{r1+r}$，其中$r$ 是无风险利率，HM设定中的无风险价格等于 $\frac{1}{r}$。

在CE世界中，长期债务不再是永续债券，而是以概率方式到期。具体而言，单位未偿债务以δ的概率到期。未到期部分以概率$(1-\delta)$支付票息z。因此，CE设定中的无风险价格变为 $^{\delta+}{}_{(1-\delta)z\ r+\delta}$。两项研究直观上采用了相同的技巧，但方法略有不同。其思路是避免追踪政府在违约和偿还决策之间不同债券~~到期日~~的完整分布。

时序。政府以非或有债务 b和收入 y开始一个时期，这些信息均为公开信息。随后，政府选择是否违约；如果政府偿还债务，贷款人则根据政府新发行债务的数量和当前收入提供一组价格。[2] 随后，政府选择下一期债务，以实现其预算平衡；消费的计算采用长期债务的 HM表述

$$c = y - \kappa b + q^{HM}(b', y)(b' - (1-\delta)b), \tag{4}$$

并采用 CE表述

$$c = y + (\delta + (1-\delta)z)b + q^{CE}(b', y)(b' - (1-\delta)b). \tag{5}$$

请注意，当 $z = {}_{r1+r}$ ~~时，~~ HM表述就变成了 CE 表述的一个特殊版本，唯独久期的定义不同。在 CE 中，久期等于 $\frac{1}{\delta}$，而 HM世界采用的是 Macaulay(1938) 对久期的定义。这一细微差异可能会导致研究者在校准模型时得出不同结果。[3] 另一个差

[2]这种情形等同于政府向贷款人提供一组价格，而贷款人在均衡中选择贷款金额。定量违约文献中的大多数研究都描述了类似的博弈设置。期限 D 是未来现金流的加权平均期限。某债券在时间 t 发行，承诺在随后各期的时间 1、2、.....、J年支付定期款项 κ，且最终价格为零，则其久期为 D。$D = {}^{1+}{}_{ii+\delta}$ 其中，i 是贷款人在债券持有至到期且不存在违约的情况下获得的定期收益率，并且满足

$$q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa(1-\delta)^{j-1}}{(1+i)^j}.$$

HM 经济体的主权利差 r_s 通过收益率 i 与无风险利率r之差计算。表中报告的年化利差计算如下：

$$1 + r_s = \left(\frac{1+i}{1+r}\right)^4.$$

异在于报告方式：HM 将债务收入比除以 4，以呈现平均债务收入比，而 CE 不作此处理。

如果政府对其债务违约，则将实施惩罚机制；政府在随机数量的时期内不得从国际市场借款，并且在排除期内承担违约的收入成本。其在排除期内的消费由以下公式给出。

$$c = y - \phi(y),$$

其中，违约成本 $\phi(y)$ 等于 $Max\{0,d_0 y + d_1 y^2\}$。政府在重新获得信贷市场准入时，初始债务为零。

2.2 递归表述

令 V_R、V_D 分别表示偿还价值函数和违约价值函数，其中下标 R 和D 分别代表偿还和违约。令V 表示政府在拥有违约选择权时的价值函数。对于任意非或有价格函数q，V 满足以下函数方程：

$$V(b,y) = Max\left\{V_R(b,y), V_D(y)\right\}, \tag{6}$$

其中，政府的偿还价值为

$$\begin{aligned} V_R(b,y) = & \max_{c\geq 0, b'\in\mathcal{B}} \left\{u(c) + \beta \mathbb{E}_{y'|y} V(b',y')\right\}, \\ & \text{subject to} \\ c \;\; = \;\; & y - (\delta + (1-\delta)z)b + q^{CE}(b',y)(b' - (1-\delta)b). \end{aligned} \tag{7}$$

违约的政府以恒定概率 $\psi \in [0,1]$ 重新获得进入信贷市场的机会，并且在重新进入市场时债务为零。违约价值如下

$$\begin{aligned} & V_D(y) = u(c) + \beta \mathbb{E}_{y'|y}\left[(1-\psi)V_D(y') + \psi V(0,y')\right], \\ & \text{subject to} \\ & c = y - \phi(y). \end{aligned} \tag{8}$$

通过模拟得到的债务水平等同于未来债务义务的现值，并计算为$\frac{b'}{\delta + r}$。

该问题的解给出一个二元违约决策规则 $\hat{d}(b,y)\in\{0,1\}$：若政府违约则为 1，否则为 0；同时还给出一条借款规则 $\hat{b}(b,y)$。第 2.3 节定义了均衡，在均衡中，贷款人使用这些决策规则为合约定价。接下来描述贷款人的问题。债券市场竞争充分，并假设贷款人是风险中性且原子化的。因此，贷款人将价格函数 $q(b',y)$ 视为给定。资金机会成本由外生无风险利率 $r > 0$ 决定。在零利润假设和无套利条件下，非或有债券的价格函数 q^{CE} 满足以下函数方程：

$$q^{CE}(b',y) = \frac{\mathbb{E}_{y'|y}\left[\left(1-\hat{d}\left(b',y'\right)\right)\left[\delta+(1-\delta)\left(z+q^{CE}\left(b'',y'\right)\right)\right]\right]}{1+r}, \tag{9}$$

其中，$d'=\hat{d}\left(b',y'\right)$ 表示下一期均衡违约决策，$b''=\hat{b}(b',y')$表示下一期均衡非或有债券决策。

在方程（9）中，持有债券的期望价值应等于持有无风险资产的期望回报，其回报率为r。如果贷款人今天购买非或有债务，并以政府在下一期偿还为条件，那么贷款人将收到 $\delta+(1-\delta)z$ 单位商品，以及尚未到期的应收款项；这些款项价值为$(1-\delta)q^{CE}\left(b'',y'\right)$。

如前所述，当$z = r1+r$时，~~HM~~表述成为CE表述的一种特殊形式，具体而言，HM世界中的预算约束和价格函数为：

$$c = y-\kappa b+q^{HM}(b',y)(b'-(1-\delta)b),$$

$$q^{HM}(b',y) = \frac{\mathbb{E}_{y'|y}\left[\left(1-\hat{d}\left(b',y'\right)\right)\left[\kappa+(1-\delta)q^{HM}\left(b'',y'\right)\right]\right]}{1+r}. \tag{10}$$

请注意，在不存在违约风险的情况下，非或有长期债务的价格等于$q^* = \kappa_{r+\delta} = \frac{1}{1+r}$，因此可以写作 ~~$\kappa = r\frac{+\delta}{1+r_\circ}$~~

2.3 均衡的定义

本文关注马尔可夫完美均衡（MPE）。因此，均衡条件取决于当前状态变量，而非整个历史。

定义 1（马尔可夫完美均衡） 马尔可夫完美均衡 由以下内容刻画

1. 一组价值函数 V,V_R 和 V_D；ˆ ˆ 2. 违约 d 和借款 b规则；以及 3. 债务价格函数 q^{CE}；

使得：

i. 给定价格函数 q^{CE}；$\left\{V、V_R、V_D，\hat{}d，\hat{}b\right\}$ 求解贝尔曼方程（6）、（7）和（8）。

ii. 给定政策规则 $\left\{\hat{}d,\hat{}b\right\}$，价格函数 q^{CE} 满足方程（9）。

2.4 偏好冲击

Chatterjee 和 Eyigungor （2012年）提出在模型中加入偏好冲击，以改善模型的求解。他们表明，在没有偏好冲击的情况下，对于状态变量而言，在计算上可行的网格大小下，DSS方法无法实现价格函数的收敛。CE 将偏好冲击引入为标准差较小的暂时性禀赋冲击。然而，这限制了使用偏好冲击所带来的益处，因为偏好冲击成为面临维数灾难的状态变量，而预期延续价值需要计算积分，这进一步复杂化了求解过程，并增加了另一层计算误差。随后，Dvorkin 等人（2021年）遵循 McFadden （1974年）和Rust （1987年）的方法引入偏好冲击，同时不增加状态空间，因此增大网格大小不会成为问题。从技术上讲，需要证明满足收敛要求的偏好冲击不会改变模型矩；一种实现方法是将偏好冲击的标准差设为零来求解模型。

带有偏好冲击的模型有两个主要区别：将债务选择空间限制为有限的离散选择，以及针对每种离散债务选择和违约选择引入条件偏好冲击。遵循 McFadden (1974年) 和 Rust(1987年，我们假设这些偏好冲击是可加可分的，且服从独立同分布的 I 型极值分布。我们允许离散违约选择和离散化债务选择分别具有独立的偏好冲击。根据这些变化，政府在作出违约选择之前的价值函数变为

$$V(b,y,\epsilon) = \max\left\{V_R(b,y) + \sigma_\epsilon \epsilon_R, V_D(y) + \sigma_\epsilon \epsilon_D\right\}, \tag{11}$$

其中，ϵ_i 服从尺度参数为 σ_ϵ的独立同分布 I 型极值分布。

政府的偿还价值由以下公式给出。

$$\begin{aligned} V_R(b,y) &= \max_{c\geq 0, j\in\mathcal{J},} \left\{ u\left(c\right) + \sigma_\varepsilon \varepsilon_j + \beta \mathbb{E}_{y'|y} V^{\sigma_\epsilon}(b'_j, y') \right\}, \\ &\text{满足} \\ c &= y - (\delta + (1-\delta)z)b + q(b'_j, y)(b'_j - (1-\delta)b). \end{aligned} \tag{12}$$

其中，ε_j 服从尺度参数为 σ_ε 的独立同分布 I 型极值分布，且V^{σ_ϵ} 由下式给出

$$\begin{aligned} V^{\sigma_\epsilon}(b,y) &= E\left[\max\left\{V_R(b,y) + \sigma_\epsilon \epsilon_R, V_D(y) + \sigma_\epsilon \epsilon_D\right\}\right] \\ &= \sigma_\epsilon \log\left\{\exp\left(\frac{V_R(b,y)}{\sigma_\epsilon}\right) + \exp\left(\frac{V_D(b,y)}{\sigma_\epsilon}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

违约价值变为

$$\begin{aligned} V_D(y) &= u\left(c\right) + \beta \mathbb{E}_{y'|y}\left[(1-\psi)V_D(y') + \psi V^{\sigma_\epsilon}(0,y')\right], \\ &\text{subject to} \\ c &= y - \phi(y). \end{aligned} \tag{14}$$

定价函数q 变为

$$q(b_i,y) = \frac{\mathbb{E}_{y'|y}\left[\left(1-d\left(b_i,y'\right)\right)\left[\delta + (1-\delta)\left(z + \sum_j q\left(b_j,y'\right) P(b_j|b_i,y')\right)\right]\right]}{1+r}. \tag{15}$$

其中P 是给定禀赋冲击实现值时下一期债务的选择概率，并且得益于对偏好冲击所作的特殊假设，它可表示为

$$P(b_j|b_i,y) = \frac{\exp\left(\tilde{V}_R(b_j,b_i,y)/\sigma_\varepsilon\right)}{\sum_k \exp\left(\tilde{V}_R(b_k,b_i,y)/\sigma_\varepsilon\right)} \tag{16}$$

其中

$$\tilde{V}_R(b_j,b_i,y) = u\left(y - (\delta + (1-\delta)z)b_i + q(b_j,y)(b_j - (1-\delta)b_i)\right) + \beta \mathbb{E}_{y'|y} V^{\sigma_\epsilon}(b_j,y') \tag{17}$$

3 校准

我们将基准参数设定为与Chatterjee 和 Eyigungor (2012年)相同，以便将模型与他们发表的结果进行比较，并将这些参数汇总于表1。

表1： 参数值

	参数	价值
风险厌恶	γ	2
无风险利率	r	1%
收入自相关系数	ρ	0.948503
创新项标准差	σ_ϵ	0.027092
对数收入均值	μ	(-1/2)σ_ϵ^2
违约后的重新进入概率	ψ	0.0385
平均期限的倒数（CE）	δ	0.05
票息支付（CE）	z	0.03
票息支付（HM）	κ	$\frac{r+\delta}{1+r}$
已校准		
折现因子	β	0.95402
违约收入成本	d_0	-0.18819
违约收入成本	d_1	0.24558

3.1 数值求解

本节简要概述本文采用的数值算法，用于求解正文中提出的模型，详细内容则留待附录说明。我们采用全局搜索方法下的价值函数迭代法求解模型，具体使用 BRENT 方法；不断迭代价值函数和价格函数，直到连续两次迭代的差异保持不变。[4] 通过这种方法，使用插值技术或偏好冲击时，收敛准则达到 10^{-6} 。然而，即使采用更精细的网格（资产设为 1,000 个网格，收入设为 1,000 个网格点），我们仍无法在 DSS 下实现收敛。[5]

偏好冲击模型的求解还需要进一步阐述。尽管偏好冲击有助于平滑价值函数和政策函数中的拐点，并获得

[4]我们还尝试使用 IMSL 中的 DUVMIF，它采用保护插值法来寻找目标函数的最小值。由于所得结果完全相同，因此这里不再报告。[5]如果使用 Tauchen 方法近似一阶自回归过程，并将收入抽样的最小值和最大值设定在 2 以内，则可以通过 DSS 技术实现收敛。5 $\frac{\sigma_\epsilon}{1-\rho^2}$不过，意料之中的是，这会降低模拟中的违约数量。

模型求解的收敛，但会大幅增加计算时间。当我们将偏好冲击引入债务选择时，这一点尤为明显。引入偏好冲击后，在给定当前债务选择和收入的条件下，债务政策会成为关于未来债务选择的密度函数；而在没有偏好冲击时，它则是一个单元素集合。这不仅增加了政策函数的内存需求，也增加了债券价格的计算时间。[6] Gordon （2019）提出了一种分治算法，以加快含偏好冲击模型的计算速度。尽管该算法加快了政策函数的计算，但对债券价格的计算没有帮助。在我们的应用中，当网格大小相对较高时，代码中计算量最大的部分变成了债券价格的计算。

我们通过两种方式解决这些问题。首先，我们使用稀疏矩阵存储债券政策函数。其次，我们利用这样一个事实：对于大多数债券选择，选择概率在计算上为零。在价值函数的计算中，一旦找到使目标函数达到全局最大值的网格点，我们就只计算最大值附近相邻网格点的选择概率。[7]如下文将讨论的，这种方法在投资组合问题中的优势更为明显。为了直观展示这一策略背后的原理，我们提供了图 1 ，其中绘制了均衡债务分布。左图展示了整个状态空间内的分布，右图则沿收入轴对左图进行剖分，展示模拟中观察到的均值遍历债务水平。请注意，在图的左侧，债务分布仅在相对较小的区域内为正值，而在其他所有区域均为零。因此，我们不必存储全部选择概率，只需存储那些可能非零的选择概率。右图展示了我们如何在选择概率非零的区域内实现这一点。也就是说，我们只利用二维图中取正值的区域，并使用稀疏矩阵。尽管这显著加快了算法的运行速度，并解决了单资产问题中的内存问题，但仍不足以为投资组合问题提供可靠的解。

[6]这一问题存在于长期债务的情况下。如方程15所示，在长期债务情况下，债券价格方程包含债券价格的转售价值，而该价值涉及债务选择的密度函数。对于一期债务，定价方程将不包含这一项。[7]相邻网格点的大小设为 $\min\{100N_b\sigma_\varepsilon,\ N_b/2-1\}$ 其中N_b 是债务选择的网格大小， σ_ε 是偏好冲击的标准差。

4 定量结果

表2 展示了采用 CE 公式时不同近似技术的结果。第一列重列了 CE 在出版商网站上公布的结果。[8] 第二列展示了使用不含偏好冲击的 DSS 方法所得的模拟结果。当我们采用与 CE 相同数量的网格点，即收入冲击取 200 个、债务取 350 个时，尽管无法实现收敛，但我们的模拟结果与 CE 高度相似。在第三列中，我们引入偏好冲击，并将偏好冲击的标准差设为 0.003，这与 CE 中使用的数值相同。此时我们可以实现收敛，但矩也有所变化。具体而言，债务收入比上升，而平均利差和违约率下降。在第 (4) 和第 (5) 列中，我们使用 BRENT最小化方法，通过线性和 B 样条插值求解模型。线性插值和样条插值下的矩高度相似，但与 DSS 下的矩有所不同，尤其是违约和利差相关的矩。最后，我们在图2 和3 中绘制政策函数，特别是价格函数和价值函数。图2 绘制了采用偏好冲击和线性插值时的政策函数，而图3 绘制了采用线性和样条插值所得的政策函数。请注意，图2 未包含债务政策函数，因为在偏好冲击下，债务政策会变为一种分布。尽管两种偏好冲击线性插值方法得到的模拟矩非常相似，但政策函数在视觉上仍存在明显差异。不过，线性插值与样条插值之间看不出这种差异。

为了更好地理解偏好冲击的作用——偏好冲击常被用作一种技术，以提升算法的收敛性，也是 CE 所采用的技术——我们进行了多项分析。具体而言，我们使用自己的算法重新进行分析，通过增加网格大小并降低偏好冲击的标准差来考察结果；这是因为，当网格大小增加时，出版商网站提供的 CE 代码会遇到内存问题。分析结果见表 3。首先，在第 (2) 列中，我们将偏好冲击的标准差从 0.003 降至 10^{-4}，同时保持基准情景中的网格大小不变。此时，我们的结果与 CE 印刷版结果非常相似。接下来，我们增加网格大小；具体而言，在后续各列中，将资产的网格数设为 1000，将收入的网格数设为 500。在第三列中，我们使用 DSS 求解模型，但收敛再次失败。随后，我们在第 (4) 和第 (5) 列中引入偏好冲击，其标准差分别为 10^{-4} 和 5×10^{-5}。模型无法

[8]我们也使用出版商网站上提供的代码复现了该结果。

当我们将其设为 10^{-5} 时收敛。结果表明，除违约频率外，只要偏好冲击的取值足够小、能够实现收敛，采用偏好冲击的模型可能会产生与线性近似和样条近似相似的结果。然而，使用 DSS 和偏好冲击时，要获得一致且可靠的结果仍然是一项挑战，因为每次增加网格大小时，矩似乎仍会发生变化，尽管变化幅度很小；因此，研究者需要尝试多个不同的偏好冲击取值，才能找到能够实现收敛的最小值。使用线性插值或样条插值时则不存在这种情况。当网格点数量足够多时，改变网格大小不会使模型矩发生变化。尽管这两种插值技术得出的结果非常相似，线性插值至少比 B 样条快 20 倍。

现在，剩下的就是介绍 CE 环境与 HM 环境之间的主要区别。HM 使用麦考利久期，其定义为未来现金流期限的加权平均值，具体形式见脚注3；而 CE 将其定义为债务在下一期到期概率的倒数，即 $\frac{1}{\delta}$。这导致两个环境中内部收益率或到期收益率的计算方式有所不同。在 CE 中，内部收益率 $\mathrm{r}(\mathrm{b}', \mathrm{y})$ 的计算满足 $\mathrm{q}(\mathrm{b}') = {}^{\delta+}(1-\delta)\mathrm{z}\ {}_{\delta+}\mathrm{r}(\mathrm{b}',\mathrm{y})$。因此，年化利差可以表示为 $(1 + \mathrm{r}(\mathrm{b}', \mathrm{y}))^4 - (1 + \mathrm{r})^4$。HM世界中的收益率和利差同样见脚注3。为了使两个框架具有可比性，我们将 z（即 CE世界中的票息支付）设为 $\mathrm{r}_{1+\mathrm{r}}$，并保~~持表1中~~的其他所有内容不变。经过这一转换后，两个环境变得完全相同，结果如表4所示。两张表中的差异归因于久期及由此产生的利差计算方式不同。如前所述，在季度模型中，HM 将债务收入比除以4，而 CE 则不进行这一处理。 —

5 投资组合问题

我们在正文所述模型中引入一种新资产，以便比较投资组合配置问题下的求解方法。这是一项重要且有意为之的扩展，旨在突出两点：(*i*) 当前文献往往要求对不止一种资产进行求解；(*ii*) 所采用的求解方法确实会产生影响。具体而言，我们现在允许主权国家借入一种一期非违约资产，其价格为无风险价格。形式化地，令a 表示主权国家必须偿还的非违约债券数量，并令 $\bar{}a$ 表示主权国家可发行债券的上限。我们将其设为平均趋势收入的 10%。我们省略上标，并采用 CE表述作为首选方法。对于这个简单的投资组合问题，我们可以

将递归表述写为：

$$V(b,a,y) = Max\left\{V_R(b,a,y), V_D(a,y)\right\}, \tag{18}$$

其中，政府的偿还价值为

$$V_R(b,a,y) = \max_{c\geq 0, b', a'} \left\{u(c) + \beta \mathbb{E}_{y'|y} V(b',a',y')\right\}, \tag{19}$$

满足以下条件】

【。

$$c = y - (\delta + (1-\delta)z)b + q(b',a',y)(b' - (1-\delta)b) - a + \frac{a'}{1+r}, \tag{20}$$

$$a' \leq \bar{a}.$$

由于这些债券不会违约，因此一旦发生违约，主权国家就有义务全额偿还。由此，违约的价值为

$$V_D(a,y) = u(c) + \beta \mathbb{E}_{y'|y}\left[(1-\psi)V_D(0,y') + \psi V(0,0,y')\right], \tag{21}$$

subject to

$$c = y - a - \phi(y).$$

该问题的解给出了一个二元违约决策规则 $\hat{d}(b,a,y) \in \{0,1\}$，以及借款规则 $\hat{b}(b,a,y)$、$\hat{a}(b,a,y)$。在均衡中，贷款人使用这些决策规则为合约定价。非或有债券的价格函数 q 满足以下函数方程：

$$q(b',a',y) = \frac{\mathbb{E}_{y'|y}\left[\left(1-\hat{d}(b',a',y')\right)\left[\delta + (1-\delta)\left(z + q\left(b'',a'',y'\right)\right)\right]\right]}{1+r}. \tag{22}$$

5.1 求解算法

使用插值技术时，应采用内置的最小化程序，而不是使用偏好冲击。在求解最优投资组合问题时，这一点尤为重要。在用于求解约束优化问题的多维最小化方法中，我们主要尝试了四种常见程序：Nelder 和 Mead 提出的下山单纯形法、采用方向集方法的 Powell 方法、拟牛顿Davidon-Fletcher-Powell（DFPMIN）算法，以及 BOBYQA 程序（Powell (2009)）。除 DFPMIN 程序外，当研究人员难以计算导数时（例如在我们的应用中），通常会选择这些方法。我们

还尝试了与 DFPMIN 密切相关的 Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno（BFGS）算法，并通过有限差分近似计算偏导数。

如果没有这些程序，B 样条和线性插值都无法实现收敛，因此二者的相对表现变得十分重要。以下重要观察结果尤为突出。采用 B样条 的 Powell程序 是明显更优的选择，而 BOBYQA 紧随其后。在某些情况下，根据校准和网格大小的不同，一种算法会优于另一种。尽管我们发现 Powell 在实现收敛方面更具可行性，也是我们首选的方法，但我们也观察到，在算法无法在一定次数的迭代内找到全局最优值时，会调用局部搜索，而 Powell程序 在局部搜索期间有时会发生严重失控。在局部搜索期间，我们将解限定在全局求解方法所获得的候选最优值附近，该全局求解方法在附录中有所说明。因此，对于某些特定的参数组和网格大小，代码无法收敛。这是因为 Powell程序 的输入不是边界，而是方向。如果它无法沿给定方向找到局部最大值，就会发生失控。尽管研究人员可以在其提供的目标函数中加入惩罚项，以便在程序超出边界时对其进行惩罚，但这并不能阻止程序在边界之外进行尝试。然而，BOBYQA 要求将边界作为输入，从而确保其始终处于定义的搜索空间内。不过，在实现收敛方面，它可能落后于 Powell算法。尽管如此，这两个程序都很强大，可以作为近乎完美的替代方案使用，因为它们生成的结果几乎完全相同。

一般而言，与线性插值相比，使用样条插值时算法更有可能收敛，但计算成本也更高。如果采用线性插值的算法在通常的 250 次迭代内未能收敛，我们就改用样条插值，并将线性插值下得到的价值函数和政策函数作为样条模型的初始猜测。

使用样条插值时，值得注意的是，我们对收入水平进行线性插值，对可违约债务水平和不可违约债务水平进行样条插值。这是因为三维样条插值耗时显著更长。因此，我们使用二维B样条。如有需要，我们很乐意提供三维B样条的代码。

其他算法和拟牛顿Davidon-Fletcher-Powell算法都未能收敛，且差距很大。因此，我们不展示这些结果。

在引入偏好冲击后，我们同样无法实现收敛，也无法获得系统性一致的结果。也就是说，随着我们扩大网格空间，直到遇到内存问题为止，

我们的模拟结果始终在不断变化。因此，由于引入偏好冲击所得到的模拟结果并不可靠，我们不予提供。

5.2 投资组合问题的结果

表 2 展示了模拟结果。请注意，我们保持了 CE世界的参数空间不变。暂且不谈引入不可违约债务的规范性影响（参见 Önder(2022年*a*)），我们使用 Powell 和 Bobyqa 最小化程序，并通过线性插值和样条插值求解该模型。

线性插值和样条插值技术，以及多维最小化程序，在表 2 中得出的矩都高度相似。我们还在图 4 中绘制了政策函数。图中使用平均收入，且不可违约债务的初始存量设为不可违约债务存量的遍历水平。图中显示，价格、价值和违约债务政策函数几乎完全相同。采用线性插值并使用 OpenMP 耗时约 49 小时。

6 结论

我们评估并拓展了动态规划问题中含二元和连续选择变量的模型的求解方法，尤其是离散状态空间求解方法并不适用的问题。为此，我们将这些方法应用于长期债务和违约问题。我们进一步完善了偏好冲击的实现方式，并比较了多维黑箱优化器的性能。这些优化器被应用数学领域的研究者用于基准测试其算法的性能。我们还比较了线性插值和样条插值。我们主要比较 Powell 和 BOBYQA 算法。我们表明，求解方法至关重要。偏好冲击无法在多维问题中实现收敛，而且经常遇到内存问题。线性插值技术的速度比高维样条插值快 20 倍，但有时难以收敛，因此无法成为可行的选项。因此，我们建议研究者先使用线性插值，并在其未能于一定次数的迭代内收敛时改用样条插值。在多维算法中，就能否有效达到全局最大值而言，BOBYQA 不如 Powell 程序；而我们使用 Nelder-Mead下山单纯形算法和拟牛顿Davidon-Fletcher-Powell算法（DFPMIN）时，始终未能实现收敛。

表2： 采用 CE表述的模拟结果

	(1) CE	(2) DSS	(3) 偏好冲击	线性	(4) (5) B 样条
			债务统计		
债务收入比	69.98	70.84	73.9	70.69	70.57
平均利差	8.15	7.94	7.46	8.39	8.47
利差标准差	4.43	2.49	2.91	3.47	3.5
违约率	6.75	6.68	5.06	5.83	5.79
			商业周期统计		
$\sigma(c)/\sigma(y)$	1.11	1.31	1.32	1.32	1.32
$\sigma(tb/y)/\sigma(y)$	0.17	0.35	0.36	0.34	0.34
corr(c,y)	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99
corr(tb/y,y)	-0.88	-0.83	-0.83	-0.87	-0.87
corr(spread,y)	-0.79	-0.81	-0.75	-0.75	-0.75

第一列重新列出了 CE 的结果。第（2）列采用 DSS近似得出，第（3）列则是在 DSS近似中加入偏好冲击后得出。第（4）列和第（5）列分别采用线性插值和 B 样条插值计算。DSS 列无法实现收敛。所有列中的矩均采用 CE 的长期债务设定计算，模拟详情见附录。

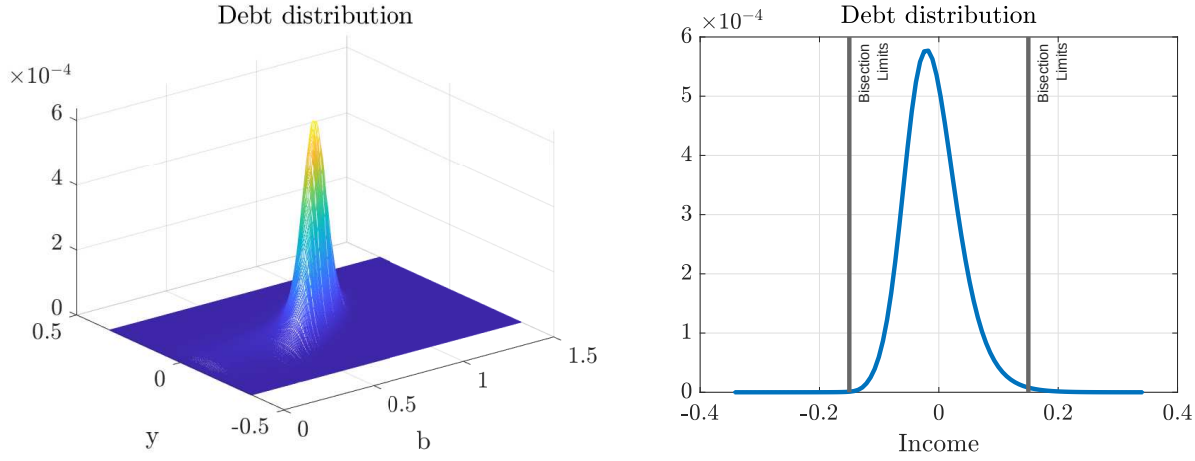

图1： 左侧图表展示了非或有债务的分布，右侧图表展示了在单资产问题中将债务水平设定为其遍历均值时的债务分布。右侧图表中的嵌入图展示了正价值区域如何被二等分。

表3： 采用CE表述的模拟结果

	(1) CE CE	(2) $\sigma_t = 10^{-4}$ (350-200)	(3) DSS （1000-500）	(4) $\sigma_t = 10^{-4}$ （1000-500）	(5) $\sigma_t = 5 \times 10^{-5}$ (1000-500)
债务统计					
债务收入比	69.98	69.98	71.12	70.71	70.67
平均利差	8.15	8.18	8.46	8.31	8.32
利差标准差	4.43	3.34	3.52	3.41	3.42
违约率	6.75	6.65	6.58	6.62	6.65
商业周期统计					
$\sigma(c)/\sigma(y)$	1.11	1.32	1.33	1.32	1.32
$\sigma(tb/y)/\sigma(y)$	0.17	0.36	0.36	0.35	0.35
corr(c,y)	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99
corr(tb/y,y)	-0.88	-0.83	-0.88	-0.86	-0.86
corr（利差，y）	-0.79	-0.75	-0.76	-0.75	-0.75

第一列重现了 CE 的结果。第 (2) 列采用偏好冲击得到，偏好冲击价值的标准差为 10^{-4}，债务上使用 350 个网格点，收入上使用 200 个网格点。第 (3) 列采用 DSS 近似得到，债务上使用 1000 个网格点，收入上使用 500 个网格点；第 (4) 列则在此 DSS 近似中加入价值为 10^{-4} 的偏好冲击得到。第 (5) 列采用偏好冲击价值的标准差为 5×10^{-5} 得到。DSS 列无法达到收敛。所有列的矩均采用 CE 的长期债务设定得到，模拟的具体细节见附录。

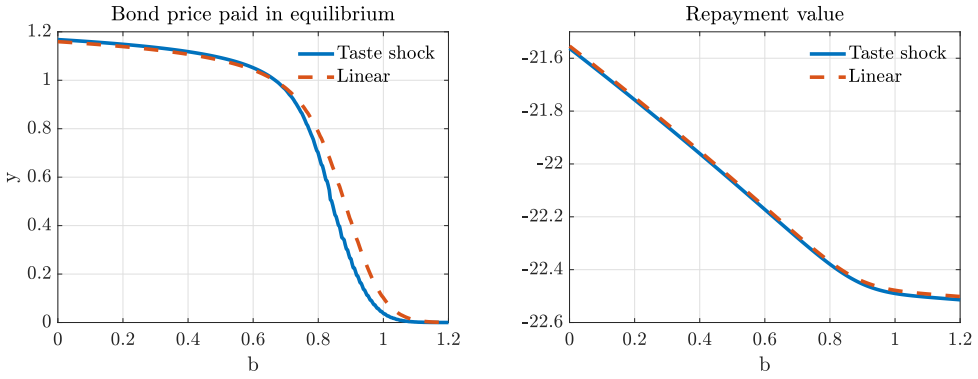

图2： 使用线性插值和偏好冲击时，平均收入下单资产问题的政策函数。

表4： HM与CE表述之间的差异

	(1) CE线性	(2) HM线性
债务统计		
债务收入比	93.34	93.35
平均利差	8.44	8.11
利差标准差	3.49	3.35
违约率	5.8	5.8
久期（季度）	20	13
商业周期统计		
$\sigma(c)/\sigma(y)$	1.32	1.32
$\sigma(tb/y)/\sigma(y)$	0.34	0.34
corr(c,y)	0.99	0.99
corr(tb/y,y)	-0.87	-0.87
corr(spread,y)	-0.75	-0.75

第一列报告 CE 的结果，第二列报告 HM 的结果。两列结果均采用线性插值获得。

表5： 投资组合配置的模拟结果

	Powell		Bobyqa	
	(1)	(2)	(3)	(4)
	线性	B 样条	线性	B 样条
债务统计				
债务收入比	78.10	78.22	78.12	78.25
不可违约债务收入比	9.68	9.68	9.67	9.67
平均利差	7.22	7.13	7.12	7.08
利差标准差	2.80	2.78	2.75	2.76
违约率	4.43	4.44	4.37	4.44
商业周期统计				
$\sigma(c)/\sigma(y)$	1.34	1.34	1.34	1.34
$\sigma(tb/y)/\sigma(y)$	0.37	0.37	0.37	0.37
corr(c,y)	0.99	0.99	0.99	0.99
corr(tb/y,y)	-0.86	-0.86	-0.86	-0.86
corr(spread,y)	-0.75	-0.75	-0.75	-0.75

第一列和第二列的矩使用 Powell 最小化程序获得，而第三列和第四列的矩则使用 Bobyqa 获得。

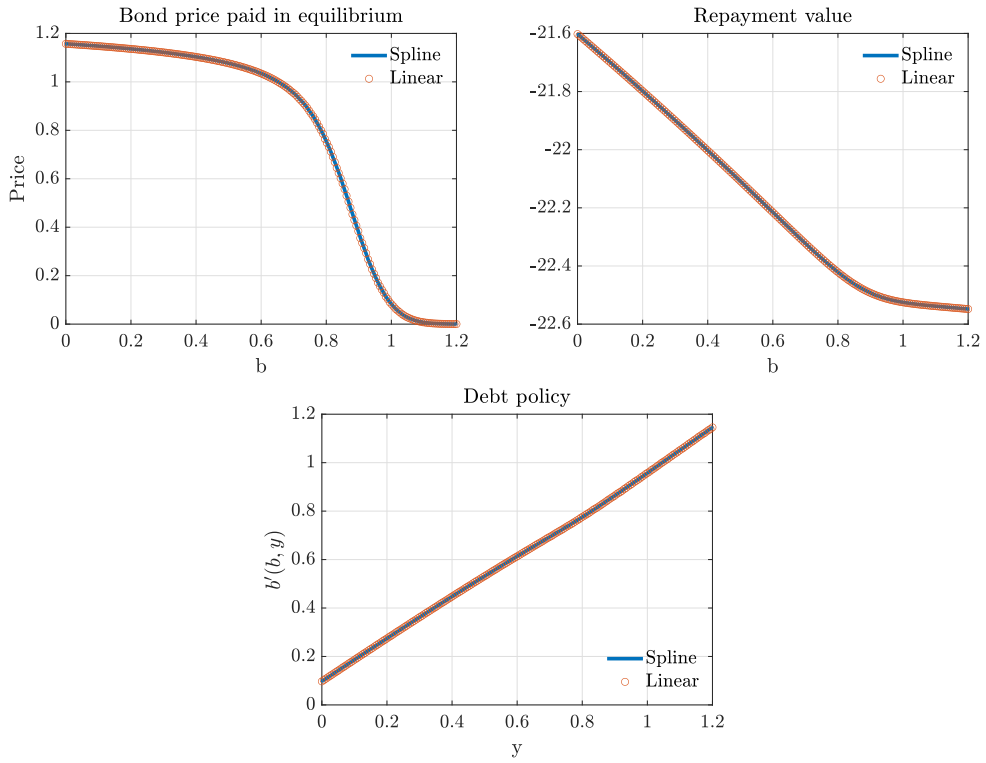

图 3： 使用线性插值和样条插值求解单资产问题时，平均收入对应的政策函数。

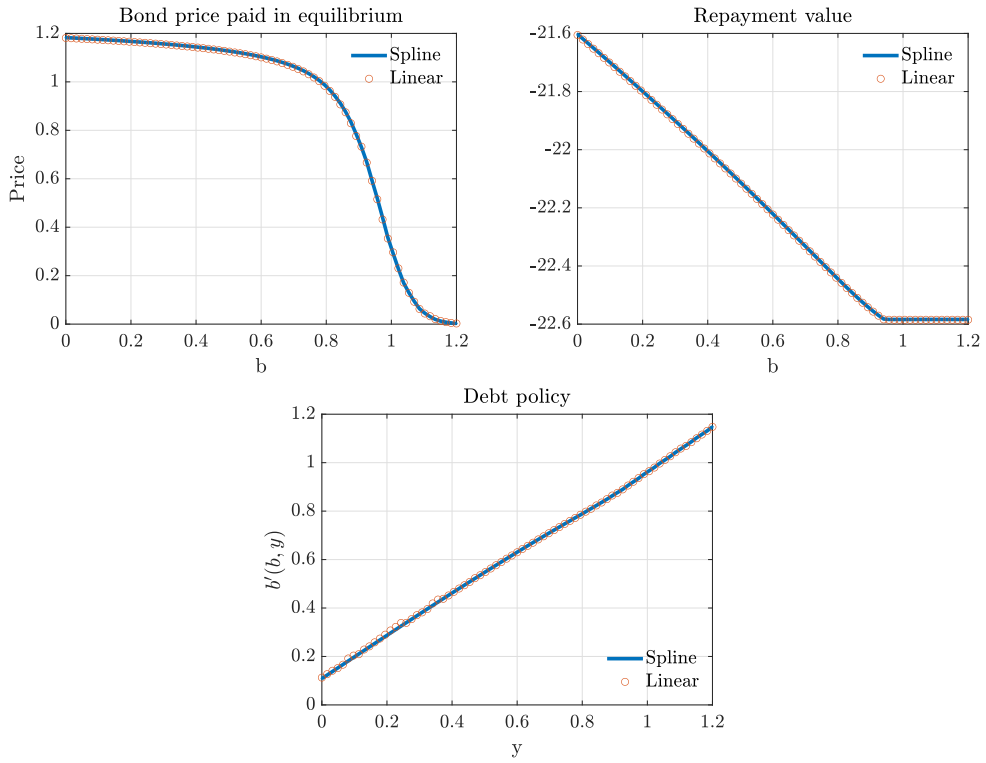

图4：投资组合问题中的政策函数。所有结果均通过 Powell 算法获得。图中的平均收入取均值，初始不可违约债务存量设为不可违约债务存量的遍历水平。

7 参考文献

Aguiar、Mark 和 Gita Gopinath。 2006年。“可违约债务、利率与经常账户。”《国际经济学杂志》，69：64–83。**Arellano，Cristina**。 2008年。“新兴经济体中的违约风险与收入波动。”《美国经济评论》，98(3)：690–712。**Arellano，Cristina 和 Ananth Ramanarayanan**。2012年。“主权债券中的违约与期限结构。”《政治经济学杂志》，120(2)：187–232。**Bianchi，Javier、Juan Carlos Hatchondo 和 Leonardo Martinez**。2018年。“国际储备与再融资风险。”《美国经济评论》，108(9)：2629–2670。**Chatterjee，Satyajit 和 Burcu Eyigungor**。 2012年。“期限、负债与违约风险。”《美国经济评论》，102(6)：2674–99。**Chatterjee，Satyajit、Dean Corbae、Kyle Dempsey 和 José-Víctor Ríos-Rull**。 2023年。“信用评分的定量理论。”即将在《计量经济学》发表。**Dvorkin，Maximiliano、Juan M. Sánchez、Horacio Sapriza 和 Emircan Yurdagul**。 2021年。“主权债务重组。”《美国经济学杂志：宏观经济学》，13(2)：26–77。**Gordon，Grey**。2019年。“偏好冲击下的高效计算。”里士满联邦储备银行，第19-15号。**Guler，Bulent、Yasin Kür.sat Önder 和 Temel Taskin**。 2022年。“不对称信息与主权债务披露。”http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4048018。**Hatchondo，Juan Carlos 和 Leonardo Martinez**。 2009年。“长期债券与主权违约。”《国际经济学杂志》，79：117–125。**Hatchondo，Juan Carlos、Leonardo Martinez 和 Horacio Sapriza**。 2010年。“主权违约模型的定量性质：求解方法至关重要。”《经济动态评论》，13(4)：919–933。**Hatchondo，Juan Carlos、Leonardo Martinez 和 Yasin Kür.sat Önder**。 2017年。“不可违约债务与主权风险。”《国际经济学杂志》，105：217–229。**Iskhakov，Fedor、Thomas H. Jørgensen、John Rust 和 Bertel Schjerning**。2017年。“具有（或不具有）偏好冲击的离散—连续动态选择模型的内生网格法。”《定量经济学》，8(2)：317–365。**Macaulay，Frederick R.** 1938年。《*1856*年以来美国利率、债券收益率与股票价格变动所引发的一些理论问题》。 纽约：哥伦比亚大学出版社。**McFadden，Daniel**。1974年。“定性选择行为的条件Logit分析。”载于《计量经济学前沿》，P. Zarembka 编，第4章。学术出版社。**Önder，Yasin Kür.sat**。 2022*a*年。“流动性危机、流动性额度与主权风险。”《国际经济学杂志》。

《发展经济学杂志》，154：102772。**Önder，Yasin Kürşat**。2022年*b*。“最优GDP指数化债券。”根特大学工作论文，2022/1056。**Önder，Yasin Kürşat 和 Enes Sunel**。2021年。“没有名义锚的通胀与违约权衡：希腊案例。”《经济动态评论》，39：55–78。**Pakes，Ariel**。1986年。“专利作为期权：持有欧洲专利组合的价值的一些估计。”《计量经济学》，54(4)：755–784。**Powell，Michael J. D.** 2009年。“用于无导数有界约束优化的 BOBYQA 算法。”www.damtp.cam.ac.uk。**Press，William H.、Brian P. Flannery、Saul A. Teukolsky 和 William T. Vetterling**。1992年。《*Fortran 77* 数值方法：科学计算的艺术》，第二版，第一卷：*Fortran* 数值方法。剑桥大学出版社。**Rust，John**。1987年。“GMC 公交车发动机的最优更换：Harold Zurcher 的一个经验模型。”《计量经济学》，55(5)：999–1033。

A 附录

A.1 数值算法

本文所使用的计算算法需要不断迭代价值函数和价格函数，直至达到 10^{-6} 的收敛标准。为评估这些函数，使用等间距网格点；为近似网格点之外的函数，使用线性或样条插值。为计算期望，使用 200 个 Gauss-Legendre 求积点。下文首先介绍单资产模型的算法，然后给出投资组合配置问题的详细说明。

A.1.1 单资产模型

i. **初始化：** 将V_R、V_D和q 的初始猜测设定为有限期经济最后一期的结果，如下所示：$V_R(b、y) = u(y - \kappa b)$、$v_D(y) = u(y - \phi^d(y))$以及$q = 0$。

ii. **全局阶段：** 方程（7）中定义的优化问题针对资产和收入上的每个网格点求解，然后我搜索下一期非或有债务借款决策的全局最优点。为此，需要为 b' （以及投资组合问题中的 a' ）生成 100 个网格点，以找出使目标最大化的候选值。我们将该网格点输入一维 BRENT 程序作为初始猜测，以双精度确定最优的 b' 。我们有

还试验了 IMSL 的带保护措施的二次插值方法 DUVMIF，并得到了相同的结果。

iii. **停止规则：** 对方程（7）至（9）所定义的程序进行迭代，直至满足收敛标准。

A.1.2 投资组合模型

i. **初始化：** 将V_R、V_D和q 的初始猜测值设为有限期经济最后一期的相应值，如下所示：$V_R(b、a、y) = u(y - \kappa b - a)$、$v_D(y) = u(y - \phi^d(y) - a)$以及$q = 0$。

ii. **全局阶段：** 对资产和收入的每个网格点求解方程（19）中定义的优化问题，然后搜索下一期非或有债务借款决策的全局最优点。这需要为b' 和a' 生成100个网格点，以寻找最大化的候选值。我们将这些特定的网格点作为一维BRENT程序的初始猜测值，以双精度确定最优b' 。我们还试验了IMSL中的带保护二次插值方法DUVMIF，并获得了相同的结果。因此，对于候选最优a'，我们再次使用一维BRENT优化器确定最优b' 选择，并将(a',b') 候选投资组合的两个值逐一输入文中所述的二维黑箱最小化程序。对于LINMIN程序而言，这一点尤其重要，因为初始区间界定是最小化程序不可或缺的一部分。正如Press 等人(1992)所强调的：“我们绝不会为了这些非区间界定程序可能带来的函数求值次数的可疑减少，而放弃那种知道某处‘存在一个最小值’的安全感。请在隔离最小值（或者同样地，隔离零点）之前，先界定其区间！”详情请参见第10.5章。

iii. **局部阶段：** 如果价值函数和政策函数在 250 次迭代内未能收敛，则对上一步中每个(b, a,y) 网格点，在已获得的候选值(b', a') 的邻域内切换为局部搜索方法。

iv. **停止规则：** 对上述方程 (7) 至 (9) 定义的过程进行迭代，直至满足收敛标准。

利用均衡价值函数、价格函数，以及关于非或有债务的借款和违约决策规则，我对模型进行模拟。具体而言：

- 设置 n 样本数量 $N = 5000$，时期数量 $T = 1501$ 和 $T_0 = 500$.

- 使用随机数生成器抽取ε_t和 ψ的序列，其中$t = 1, 2, ..., T$，以计算后续时期的收入并评估违约的延续价值。建议保留这些抽样结果，以便对每个样本$n \in N$使用相同的数值。

- 将初始禀赋 y 设为平均值 y，并将债务持有量 b 设为零。

- 在计算模拟的矩之前，先删除每个样本的前$T0$期，以确保随机选取的初始值不会对矩产生任何影响。

所有表中报告的矩均根据 5000 条模拟样本路径计算得出，每个样本包含 80 个时期（20 年），且期间没有违约观测。样本期至少从违约事件后重新进入信贷市场 20 个时期后开始。违约频率根据整个模拟计算。经济周期矩是在经 HP 滤波去趋势后报告的，平滑参数为 1600。