arXiv:2305.02035v1 [math.AG] 3 May 2023

曲线的 Terracini 位

EDOARDO BALLICO 和 LUCA CHIANTIN I

Abstract. 我们研究曲线的子集 S，其双重结构不会对线性级数 L施加独立条件，但存在除子 $D \in |L|$ 在 S 的所有点处均为奇异。这些子集构成 X的 Terracini轨迹。我们研究 Terracini轨迹，特别关注其非空性，主要考察典范曲线以及空间曲线的情形。

1. Introduction

定义在代数闭域 X（特征零）上的射影簇的 Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X, L, x)$，是集合 $\mathcal{S}(X, x)$ 的子集；后者由所有基数为 x 的既约有限子集 $S \subset X_{\mathrm{reg}}$ 组成。其性质是： S 上的双概形 $2S$ 不会对线性级数 L施加独立条件，并且在 $|L|$ 中存在经过 $2S$的除子。Terracini轨迹显然与研究映射 L所诱导的 X 的插值性质有关，但它们在嵌入簇 X的割簇理论中也具有重要意义，因为它们与 X 的抽象割簇中某些点相关；在这些点处，映射到嵌入割簇的微分秩下降。关于 Terracini轨迹初始性质的更多细节，可参见 [1]。

本文重点关注曲线的 Terracini 位。尽管曲线从不退化，因此其割线簇始终具有预期维数，但仍存在特殊的点 p，使得 Terracini 引理无法给出割线簇 Zariski 相切空间的维数。当生成 p 的点集 X 属于某个 Terracini轨迹时，通常会发生这种情况。

我们主要关注 Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X, L, x)$ 非空性的问题。当然，当 X 是 $\mathbb{P}^r$ 中的一条有理正规曲线、 L 是完整的超平面线性级数，且 $x \leq (r+1)/2$ 时， $\mathbb{T}(X, L, x)$ 为空，因为 X 中每个长度为 $\leq r+1$ 的子概形都是线性无关的。我们将看到，对于奇数 r， $\mathbb{T}(X, L, (r+1)/2)$ 为空当且仅当曲线是有理正规曲线（命题 5.6）。这意味着存在大量曲线的非空 Terracini轨迹的例子。

我们的分析主要考虑两种情况：正则嵌入曲线（第 4 节）和 $\mathbb{P}^3$ 中的曲线（第 5 节）。

在前一种情形中，级数 L 是完整的正则线性级数 K_X，不难预期， $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 中集合的存在性很大程度上取决于曲线上线性级数的几何性质。我们确实证明， X 上的 theta 特征子集表明，当 $g/2 \leq x \leq g-1$ 时， $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 非空。对于 $x < g/2$，我们看到（命题 4.7）， $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 的非空性与 X 的多重度有关。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14H50；14H51。

对于空间曲线，我们对次数和亏格使用归纳法，并采用可约曲线的光滑化技术，证明当 $6 \leq 2x \leq d$ 时，某些次数为 d、亏格为 $g \leq d-3$ 的光滑曲线满足 $\mathbb{T}(X, L, x)$ 非空（定理 5.12）。我们还证明，即使在 Brill-Noether 范围之外，空间曲线的希尔伯特概形的某些分支中，也存在 Terracini 轨迹非空的光滑特殊曲线（定理 5.13 和注 5.14）。

我们感谢匿名审稿人对本文初稿提出的宝贵意见。

2. Preliminaries

我们在特征零的代数闭域上工作。

2.1. 记号。对于任意零维子概形 S，我们用 $\ell(S)$ 表示 S 的长度。当 S 为既约时，$\ell(S)$ 是 S 的基数。

设 X 为一个整射影簇。对于任意点 $P \in X_{\mathrm{reg}}$，其齐次极大理想为 $m_{P,X}$，我们用 $(2P, X)$ 表示由 $m_{P,X}^2$ 定义的 X 的子概形。如果 $S = \{P_1, \ldots, P_x\} \subset X$ 是一个点的有限集，则我们用 $(2S, X)$ 表示非既约概形 $2S = \bigcup_{i=1}^{x} (2P_i, X)$。

当所指的 X 明确时，我们便简单地写作 $2S$，而不再写作 $(2S, X)$。

对于任意概形 X 和任意整数 x，我们用 $\mathcal{S}(X, x)$ 表示所有长度为 x 的既约有限子集 $S \subset X_{\mathrm{reg}}$ 的集合。$\mathcal{S}(X, x)$ 是对称积 $X^{(x)}$ 的一个开子集。

设 X 是一条射影曲线，S 是 X_{reg} 的一个有限子集。当 S 在 X 上确定一个 Cartier 除子时，略去符号滥用，我们仍用 S 表示它。我们也用 $|S|$ 表示与 S 相关联的完全线性系，并用 $h^0(S)$ 表示相关联线丛的截面空间的维数。对于 $2S$，我们也采用同样的约定。

对于任意概形 $Z \subset \mathbb{P}^r$，令 $\langle Z \rangle \subseteq \mathbb{P}^r$ 表示包含 Z 的 $\mathbb{P}^r$ 中的最小线性子空间。

2.2. Terracini轨迹。我们回顾 [1] 中射影簇的 Terracini轨迹定义。

定义2.1. 设 X 为一个整射影簇，L 为 X 上的线丛，且$V \subseteq H^0(L)$为一个线性子空间。令 $m := \dim X$。固定 $S \in \mathcal{S}(X, x)$。如果 $V(-(2S, X)) \neq (0)$，且 $\dim V(-(2S, X)) > \dim V - x(m+1)$，则称 S属于 Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X, L, V, x)$。

我们称整数 $\delta(S, X, L, V) := \dim V(-(2S, X)) - \dim V + x(m+1)$ 为 S 关于 (L, V) 的（Terracini）亏损。当 $V = H^0(L)$ 时，我们将在记号中省略 V。

在本文中，我们将主要考虑 X 是一条曲线的情形，即 $m = 1$。在这种情况下，长度为 x 的有限集 S 当且仅当 $\dim V(-(2S, X)) > \max\{\dim V - 2x, 0\}$ 时，属于 Terracini轨迹。

我们可以扩展 Terracini轨迹的定义，将某些非既约零维子概形也纳入其中。

定义 2.2. 设 $C \subset \mathbb{P}^r$ 是一条光滑、连通的非退化曲线。对每个正整数 x，令 $C^{(x)}$ 表示由 x 个 {

C 构成的对称积。簇 $C^{(x)}$ 是一个维数为 x 的连通射影簇，它参数化 X 上次数为 x 的零维概形，并且存在一个非空的扎里斯基开子集 $S(C,x) \subset C^{(x)}$，它参数化基数为 x 的子集。对每个正整数 x，令 $\tilde{\mathbb{T}}(C,x)$ 表示所有满足 $\dim \langle 2Z\rangle \leq 2x-2$ 且 $\langle 2Z\rangle \neq \emptyset$ 的 $Z \in C^{(x)}$ 的集合。显然，$\mathbb{T}(C,1) = \tilde{\mathbb{T}}(C,1) = \emptyset$。包含关系 $S(C,x) \subset C^{(x)}$ 导出˜一个包含关系 $\mathbb{T}(C,x) \subseteq \mathbb{T}(C,x)$。上同调的半连续性定理表明，$\tilde{\mathbb{T}}(C,x)$ 包含 $\mathbb{T}(C,x)$ 在 $C^{(x)}$ 中的闭包。有时，$\tilde{\mathbb{T}}(C,x)$ 不等于 $\mathbb{T}(C,x)$ 在 $C^{(x)}$ 中的闭包（例 2.3）。

例 2.3. 固定一个偶数 $d \geq 4$、一条直线 $D \subset \mathbb{P}^2$ 和 $p \in D$。存在一条次数为 d 的光滑曲线 $C \subset \mathbb{P}^2$，使得 $p \in C$ 且 $D \cap C = dp$，也就是说，p 是 C 的一个全分歧点，其切线为 D。由于 C 只有有限条˜多重相切直线，因此 $\mathbb{T}(C,x)$ 是有限集，故在 $\mathbb{T}(C,x)$ 中是闭的。由于 d 是偶数且 $d \geq 4$，$\frac{d}{2}p$ 属于 $\tilde{\mathbb{T}}(C,d/2) \setminus \mathbb{T}(C,d/2)$。

3. 一般性

例 3.1. 设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是一条不可约曲线。这里取 $L = \mathcal{O}_X(1)$，并令$V =$为超平面的线性级数。对于一般的 $S = \{P_1, \ldots, P_x\} \subset X_{\mathrm{reg}}$，记$2S$ 为 $(2S, X)$。$V(-2S)$ 中的元素对应于包含在 P_i 各点处与 X 相切的切线的超平面。由此可知，当 X 各点处的 x 条切线的张成空间维数小于预期值时，S 属于 Terracini轨迹。因此，根据定义，$\mathbb{T}(X,L,V,1)$ 总是空的。

另一方面，当线性级数 V所诱导的映射并非双有理映到其像上时，Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X,L,V,1)$ 可能包含一些点。

例 3.2. 设 X 是亏格为 $g \geq 2$的光滑超椭圆曲线。我们可以描述关于 $L = K_X$ 和 $V = H^0(K_X)$的所有 Terracini轨迹。

设 $B \subset X$ 为 X的魏尔斯特拉斯点集。对于任意整数 x，令 $\mathcal{S}(B,x)$表示 B 中所有基数为 x的子集所成的集合。集合 B 是 g^1_2 的 X的分歧轨迹。由于我们在特征零下工作，$\ell(B) = 2g+2$。固定一个正整数 x，并取 $S \in S(X,x)$。若 $x \geq g$，则 $\deg(K_X(-(2S,X))) < 0$，因此 $h^0(K_X(-(2S,X))) = 0$。于是，对所有 $x \geq g$，$\mathbb{T}(X,K_X,x) = \emptyset$。

假设 $1 \leq x \leq g-1$。令 $h\colon X \to \mathbb{P}^1$ 为与 X的 g^1_2相关联的态射。线性系统 $|K_X|$ 是由 X的 g^1_2 的 $g-1$ 份构成的最小和。因此，X 上的每个无基点特殊的线丛都是 g^1_2 的至多 $g-1$份之和。因此 $\mathbb{T}(X,K_X,1) = B$且 $\mathbb{T}(X,K_X,g-1)) = \mathcal{S}(B,g-1)$。更一般地，$S$属于 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$ 当且仅当我们有 $S \cap B \neq \emptyset$，或者存在 $p,q \in S$，使得 $p \neq q$ 且 $h(p) = h(q)$，因为这些条件等价于 $h^0(K_X(-(2S,X))) > g-2x$。

容易看出，对于每个 $x \in \{2,\ldots,g-2\}$，$\mathbb{T}(X,K_X,x)$ 中具有（最大）亏格缺陷 x 的元素，正是 $\mathcal{S}(B,x)$ 中的元素。如果 $e := \#(S \cap B)$ 且 S 具有 f 个不同的集合 $\{p_i,q_i\}$，$1 \leq i \leq f$，并且 $p_i \neq q_i$ 和 $h(p_i) = h(q_i)$，那么 $h^0(K_X(-2S)) = g-2x+e+f$。

在本节余下部分中，我们回到这样一种情形：$X \subset \mathbb{P}^N$ 是一条不可约曲线，并且我们取 $L = \mathcal{O}_X(1)$ 和 $V =$ 为超平面的线性级数。

例 3.3. 让我们考察 $x = 2$ 和 X 是平面曲线时的情形。因此 $\max\{\dim V - 2x, 0\} = 0$。那么 $S = \{P,Q\} \in \mathcal{S}(2)$ 属于 Terracini轨迹，当且仅当 X 在 P 和 Q 处的切线重合。由于在特征中。

0 不是每条切线都是双切线，那么 $\mathbb{T}(X,L,V,2)$ 要么为空，要么是有限集。若 $N>2$， X 中两个一般点的切线张成一个3维线性子空间（回顾一下，我们在特征零中工作）。当 P， Q 中的切线在某个点P_0相交时，集合 $S=\{P,Q\}$ 位于 Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X,L,V,2)$ 中，即存在一个包含这两条切线的平面。在这种情况下，从 P_0 对 X 进行投影得到的是一条具有（至少）两个尖点的曲线。

4. Canonically embedded curves

现在我们转向这样的情形： X 是一条亏格为 g 的光滑曲线，并且我们考虑其完备正则线性级数 $L=K_X$。我们将在若干种情形下描述轨迹 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$。

由于我们已在例 3.2 中处理过超椭圆曲线的情形，因此假设 $g\geq 3$ 和 K_X 将 X 嵌入 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中。

我们先从一个非常简单的观察开始，它表明我们需要区分两种情况，具体取决于 x 是否小于 $g/2$ 。

命题 4.1. 一个长度为 x 的约化点集 S 属于 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$，当且仅当以下两种情况之一成立： $2x<g$ 和 $h^0(2S)>1$，即线性级数 $|2S|$ 不是单点集；或者 $2x\geq g$ 和 $h^0(K_X-2S)>0$，即 $2S$ 是特殊的。

证明。根据定义，集合 S属于 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$，当且仅当 $h^0(K_X-2S)>\min\{0,h^0(K_X)-2x\}$。由于 $h^0(K_X)=g$，我们区分 $2x<g$和$2x\geq g$。在后一种情况下， S属于 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$，当且仅当 $h^0(K_X-2S)>0$。在前一种情况下，由于根据黎曼-罗赫定理， $h^0(2S)=2x-g+1+h^0(K_X-2S)$，因此 S属于 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$，当且仅当 $h^0(2S)>1$。□

根据前一个命题可知，当 $x\geq g$ 时，Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X,K_X,x)$ 为空，因为在这种情况下， K_X-2S 的次数为负数。下面我们考虑极端情形 $x=g-1$。

例 4.2. 长度为 $g-1$ 的集合 S（分别地，概形）属于 $\mathbb{T}(X,K_X,g-1)$（分别地，$\tilde{\mathbb{T}}(X,K_X,g-1)$），当且仅当 $h^0(K_X-2S)>0$；由次数可知，这意味着 $2S$ 是一个正则除子。因此，子集 $S\in\mathbb{T}(X,K_X,g-1)$ 对应于某个非空线性级数 G 中的除子，满足 $2G=K_X$，即 X 的一个 theta 特征。

众所周知（ [5]） ， X 有有限个 theta特征，其数量恰好为 2^{2g}。根据 $h^0(G)$ 的奇偶性，theta特征可分为奇 theta特征和偶 theta特征。奇 theta特征的数量为 $2^{g-1}(2^g-1)$，而偶 theta特征的数量为 $2^{g-1}(2^g+1)$。

现在假设 X 在模空间 Mc_g中是一般的。在此情形下，根据 [5]推论 1.11， $h^0(G)\leq 1$ 对于 X上的每个 theta特征 G 都成立，并且对于每个奇 theta特征 G 在 X 上，满足 $\{D\}=|G|$ 的除子 D 是既约的。因此，对于 $X\in Mc_g$一般，Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X,K_X,g-1)$ 是有限的，其基数为$2^{g-1}(2^g-1)$。

存在具有 theta特征 G 的 $X\in Mc_g$ ，使得 $h^0(G)\geq 2$。对于此类 h 曲线 $\mathbb{T}(X,K_X,g-1)$ 是无限的。

相反，一个自然的问题是：是否存在 $X\in Mc_g$ 使得$\mathbb{T}(X,K_X,g-1)=\emptyset$，也就是说，没有既约除子是某个有效 theta特征的零点轨迹。

在 $g=3$ 的情况下，这等价于询问是否存在一条光滑的四次平面曲线

X，它有 28 个高阶拐切点，即有 28 条直线 $L \subset \mathbb{P}^2$ 在唯一一点与 X 相交。光滑平面四次曲线上所有拐切点的总重数为 24，因为其 Hessian行列式的次数为 6。因此，对于 $g = 3$，不存在这样的 X。对于任意 X，我们有 $\#\tilde{\mathbb{T}}(X, K_X, g-1) \geq 2^{g-1}(2^g - 1)$，并且要么 $\#\tilde{\mathbb{T}}(X, K_X, g-1) = 2^{g-1}(2^g - 1)$（情形$h^0(G) \leq 1$适用于 X 的所有 theta特征 G），要么 $\dim\ \tilde{\mathbb{T}}(X, K_X, g-1) > 0$。

无论如何，对 theta特征取子集，我们立即得到以下结论。

命题 4.3. 固定一个满足 $g/2 \leq x \leq g-1$ 的整数 x。那么 Terracini~轨迹 $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 非空。

当然，当 X 具有正维的 theta特征时，对于 $g/2$ 与 $g-1$之间的所有 x，$\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 也都是无限的。

注4.4. 固定整数 x 使得 $g/2 \leq x \leq g-2$. 可以尝试将 $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 的元素扩展为 $\mathbb{T}(X, K_X, x+1)$ 的元素，并添加适当的点。对此，我们可以观察到：

(a) 假设存在维数为 $\langle 2S\rangle = g-2$ 的 $S \in \mathbb{T}(X, K_X, x)$，即 $H\colon = \langle 2S\rangle$ 是一个超平面。点 $p \in X \setminus S$ 具有如下性质： $S \cup \{p\}$ 位于 $\mathbb{T}(X, K_X, x+1)$ 中，当且仅当 $p \in H$ 且 H 在 p 处与 X 相切。存在包含 S 的 $Z \in \mathbb{T}(K_X, x+1)$，当且仅当 H 在 $X \setminus S$ 中的某一点处与 X 相切，或者存在 $o \in S$ 使得概形 $H \cap X$ 包含 o，且重数至少为 4。

(b) 假设存在 $S \in \mathbb{T}(X, K_X, x)$，且 $\dim\langle 2S\rangle = g-3$。有理映射 $\phi\colon X \setminus X \cap \langle 2S\rangle \to \mathbb{P}^1$ 的微分由从 $\langle 2S\rangle$ 出发的线性投影所诱导，这表明只有有限多个 $p \in X \setminus S$ 满足 $S \cup \{p\} \in \mathbb{T}(X, K_X, x+1)$。这样的点 p 至少有 2 个，因为 ϕ 延拓为态射 $\psi\colon X \to \mathbb{P}^1$，这是由于 X 光滑，且 X 至少有 2 个分歧点，因为 $g > 0$。(c) 假设存在 $S \in \mathbb{T}(X, K_X, x)$，且 $\dim\langle 2S\rangle = g-4-2k-\epsilon$，其中$k$为非负整数，并且 $\epsilon \in \{0, 1\}$。那么，对于一般的 $(p_1, \ldots, p_{k+1}) \in X^{k+1}$， $S \cup \{p_1, \ldots, p_{k+1}\}$ 属于 $\mathbb{T}(X, K_X, x+k+1)$。

现在我们来考虑 $x < g/2$ 的情形。

命题 4.5. 假设 $x < (g-1)/2$，并假设 $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 非空。那么

$$\dim(\mathbb{T}(X, K_X, x+1)) \geq 1 + \dim(\mathbb{T}(X, K_X, x)).$$

证明。取 $S \in \mathbb{T}(X, K_X, x)$，并令 p 在 X 中为一般的。由于 $2x < g$，根据命题 4.1，我们有 $h^0(2S) \geq 2$。由此可得 $h^0(2(S \cup \{p\})) \geq h^0(2S) \geq 2$。
当 $x+1 < g/2$ 时，根据命题 4.1，我们可以从最后一个不等式得出 $S \cup \{p\}$ 属于 $T(X, K_X, x+1)$，因此维数不等式成立。

假设 $x = (g-2)/2$。由于 $h^0(2(S \cup \{p\})) \geq 2$，因此根据黎曼-罗赫定理

$$h^1(2(S \cup \{p\})) \geq g - 1 - 2\left(\frac{g-2}{2} + 1\right) + 2 = 1.$$

因此，$2(S \cup \{p\})$ 是特殊的，根据命题 4.1，它属于 $T(X, K_X, x+1)$，于是我们像之前一样得出结论。□

推论4.6。固定使 Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X, K_X, x)$ 非空的最小整数 x。那么对于所有满足 $x \le y \le g-1$ 的 y，Terracini轨迹 $\mathbb{T}(X, K_X, y)$ 都是非空的。

我们在上一节中看到，$\mathbb{T}(X, K_X, 1)$ 非空，当且仅当 X 是超椭圆曲线。本节最后两个命题将 {6} 的多重度 k 与满足 $\mathbb{T}(X, K_X, x) \neq \emptyset$. 的最小 x 联系起来。

命题 4.7. 若 $\mathbb{T}(X, K_X, x) \neq \emptyset$，则 X 有一个线性级数 g^1_{2x}。反之，若 X 有一个线性级数 g^1_k，且 $k < g/2$，则 $\dim(\mathbb{T}(X, K_X, k)) \ge 1$。
证明。回顾一下，我们假设 $g \ge 3$ 和 X 都不是超椭圆的。
如果对于每个 X，$x \ge g/2$ 都满足 $\mathbb{T}(X, K_X, x) \neq \emptyset$，且每个 X 都具有一个线性级数 g^1_{2x}，那么第一个断言显然成立。当 $x < g/2$ 时，根据命题 4.1，第一个断言立即成立。

对于第二个断言，考虑与线性级数 g^1_k 相关联的次数为 k 的映射 $f : X \to \mathbb{P}^1$。对于任意 $p \in \mathbb{P}^1$，令 $D_p := f^{-1}(p)$ 表示相应的次数为 k 的除子。注意，$h^0(2D_p) \ge h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2p)) = 3$。于是，与命题 4.1 中一样，~一般的 D_p 属于 $\mathbb{T}(X, K_X, k)$。由于我们在特征零下工作，一般的 D_p 由 k 个互异点构成，因此它属于 $\mathbb{T}(X, K_X, k)$。□

在进一步完善前一个命题之前，我们先来看三重覆盖曲线的情形。

例 4.8。设 X 是一条亏格为 $g \ge 4$、典范嵌入于 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的光滑三重覆盖曲线，并设 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 是与 g^1_3 相关联的次数为 3 的态射。由 Castelnuovo不等式 [8]，当 $g \ge 5$ 时，f 是唯一的。令 $\Sigma \subset X$ 表示该映射的所有分歧点的集合，令 $\Sigma' \subseteq \Sigma$ 表示所有属于基数为 2 的纤维的 $p \in \Sigma$ 的集合。点 $p \in \Sigma \setminus \Sigma'$ 称为 f 的全分歧点，因为包含 p 的纤维支撑在 p 处。
$\Sigma' = \Sigma$ 若 X 是亏格为 g的一般三重覆盖曲线，但也存在等式不成立的三重覆盖曲线，以及满足 $\Sigma' = \emptyset$的三重覆盖曲线，例如 $\mathbb{P}^1$的 3 次伽罗瓦覆盖。

取 $p \in \Sigma'$，并考虑经过 p的 f 的纤维中的点 $q_p \neq p$。我们断言 $S = \{p, q_p\}$属于 $\mathbb{T}(X, K_X, 2)$，因此 $\mathbb{T}(X, K_X, 2)$非空。
为证明这一断言，注意 $h^0(2p + q_p) = 2$。于是 $h^0(2p + 2q_p) = h^0(2S) \ge 2$；由命题 4.1，当 $g > 4$时，这便证明了该断言。对于 $g = 4$，由于$h^0(2S) \ge 2$，除子 $2S$ 由黎曼-罗赫定理可知是特殊的，因此再次由命题 4.1 得出该断言。

定义 4.9. 给定 X 上的线性级数 G，它是一个 g^1_d，若存在 G 中的非约化除子 D，且其中所有点的系数均为 ≤ 2，则称 G 为温和分歧。

命题 4.10. 设 X 是一条亏格为 $g \ge 4$、典范嵌入于 $\mathbb{P}^{g-1}$ 的光滑曲线。假设 X 有一个无基点铅笔 $R \in \mathrm{Pic}^k(X)$，使得 $h^1(R^{\otimes 2}) > 0$，并设 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 是由 $|R|$ 诱导的次数为 k 的态射。则 $\mathbb{T}(X, K_X, k-1) \neq \emptyset$。假设 f 温和分歧。则 $\mathbb{T}(X, K_X, k-1) \neq \emptyset$。

证明. 若 $k - 1 \ge g/2$，则结论由命题 4.3 得出。
假设 $k - 1 < g/2$。由于 $g > 0$ 和 $\mathbb{P}$是代数单连通的，存在一个除子 $A = m_1 q_1 + \cdots + m_s q_s \in |R|$，使得 $m_1 \ge 2$。由于 $2A$ 是一个特殊除子，

~$A \in \mathbb{T}(X、\ K_X、\ k-1)$。现在假设 f 是温和分歧的。因此，所有 $A \in |R|$ 的剖面重数均为1或2。由于 $g > 0$，$A = 2p_1 + \cdots + 2p_i + p_{i+1} + \cdots + p_j \in |R|$，其中 p_1、.....、p_j 是互异的点，且 $i \geq 1$。注意到 $i + j = k$，因此 $j < k$。于是 $S = \{p_1, \ldots, p_j\}$ 包含于 $\mathbb{T}(X、\ K_X、\ j)$中。也就是说，$j \leq k-1 < g/2$ 且 $h^0(R) \geq 2$蕴含 $h^0(2S) \geq 2$。于是 $\mathbb{T}(X、\ K_X、\ j) \neq \emptyset$，结论由推论4.6得出。□

5. Embedded curves

本节中，我们考虑嵌入射影空间 $X \subset \mathbb{P}^r$ 的既约局部完全交曲线 X。

记号5.1. 我们用 N_X 表示 X 的法丛。
为简便起见，我们用 $\mathbb{T}(X, x)$ 表示 X 关于超平面因子的线性级数（不一定是完全线性级数）的 Terracini轨迹。
对于任意整数 $g \geq 0$、$r \geq 3$ 和 $d \geq r + g$，我们用 $H(d, g, r)$ 表示所有满足 $h^1(\mathcal{O}_X(1)) = 0$ 的光滑非退化曲线 $X \subset \mathbb{P}^r$ 的集合，其中这些曲线的次数为 d，亏格为 g。

固定 $X \in H(d, g, r)$。由于 X 光滑，根据欧拉列，N_X 是 $O_X(1)^{\oplus r}$ 的一个商。因此 $h^1(N_X) = 0$。所以 $H(d, g, r)$ 是光滑的，并且

$$\dim H(d, g, r) = (r+1)d + (r-3)(1-g).$$

由于亏格为 g 的曲线上所有次数为 d 的非特殊线丛都具有相同数量的截面，且所有光滑的亏格为 g 的曲线都由一个不可约簇参数化，因此 $H(d, g, r)$ 是不可约的。参见 [4]。

J. Harris 的一个例子由 L. Ein 在 [4], 中推广，它表明，如果去掉关于 $h^1(\mathcal{O}_X(1))$ 消失的假设，那么当 r 足够大时，关于不可约性和维数的两个断言都不成立。另一方面，我们主要研究 $\mathbb{P}^3$ 中的曲线，在这种情况下，根据 [3], 我们可以去掉这一假设。

由贝祖公式可立即得出，若 $x > d/2$，则 $\mathbb{T}(X, x)$ 为空。因此我们分析情形 $2x \leq d$。

注5.2. 固定 x，使得 $2x < r$，并设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 为一条非退化不可约曲线，满足 $\mathbb{T}(X, x) \neq \emptyset$。则也有 $\mathbb{T}(X, x+1) \neq \emptyset$。
事实上，如果 $S \in \mathbb{T}(X, x)$，那么概形 $(2S, X)$ 位于一个维数至少为 $r - 2x + 1 \geq 2$ 的超平面线性系中。因此，对于 $p \in X$ 一般的情形，概形 $(2(S \cup \{p\})\ X)$ 位于一个维数至少为 $r - 2x - 1 \geq 0$ 的超平面线性系中。

记号 5.3. 取 $X \subset \mathbb{P}^r$。$\mathbb{P}^r$ 中的一个箭是长度为 2 的非既约概形。$\mathbb{P}^r$ 中所有支撑于 p 的箭构成希尔伯特概形中的一个闭集，其维数为 $r-1$。因此，$\mathbb{P}^r$ 中所有箭构成的集合维数为 $2r-1$。注意，支撑为 p 的箭 w 确定了一条经过 p 的直线 r_w。如果 $p \in X$ 在 p 处光滑，且 X，那么当且仅当 X 包含箭 w 时，r_w 与 X 相切。

在研究 Terracini轨迹（即使不在曲线上）时，论文 [2] 非常有用，我们将在以下备注中对其进行说明，该备注用于命题 5.6 的证明。

注记 5.4. 固定一条不可约射影曲线 X in $\mathbb{P}^r$，并令 W 为限制映射 $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$ 的像。对于任意零维概形$Z \subset X$，设 $W(-Z) := H^0(\mathcal{I}_Z(1)) \cap W$。固定整数 $s > 0$ 和 $e_i > 0,\ i = 1, \ldots, s$。

设 Z 为 X_{reg} 的一个一般子概形，具有 s 个连通分支，长度分别为$e_1,\dots,e_s$。那么我们声称， [2] 的主要结果及其证明蕴含：

$$\dim W(-Z)=\max\{0,\dim W-e_1-\cdots-e_s\}.$$

也就是说，其中的证明表明， X 中的一般概形（因而显然是曲线的）不包含于任何次数为 d 的超平面中，并且对次数为 d的超平面线性系统施加独立条件。

注意到，概形 Z是 X的 Cartier 除子，而整数 dim $W(-Z)$ 是线性空间 $\langle Z\rangle$ 在 $\mathbb{P}^r$中的余维数。

对于有理曲线，我们可以轻易证明如下结论。

命题 5.5。固定满足 $r\le 2x\le d$的整数 $d\ge r\ge 3$ 和 x。则存在一条光滑且非退化的有理曲线 $X\subset\mathbb{P}^r$，使得 $\mathbb{T}(X,x)\neq\emptyset$。

证明。固定一个超平面 $H\subset\mathbb{P}^r$。令 $Z\subset H$ 为 x 条箭头的一般并，令 Z' 为 $d-2x$ 个点的一般集合。由 $[9,\text{定理 }1.6]$，存在一条光滑且非退化的有理曲线 $X\subset\mathbb{P}^r$，使得 $(Z\cup Z')=X\cap H$。令 $S\subset H$ 为 Z的约化。由于 X 是光滑的且 $2x\ge r$，因此 $S\in\mathbb{T}(X,x)$。□

事实上，我们可以用 Terracini轨迹来刻画有理正规曲线。

命题 5.6. 设 $r\ge 3$ 是一个奇整数， $X\subset\mathbb{P}^r$ 是一条光滑、连通且非退化的曲线。那么， X 是有理正规曲线，当且仅当 $\mathbb{T}(X,(r+1)/2))=\emptyset$。

证明. 令 $x:=(r+1)/2$。

“若”部分成立，因为如果 X 是一条有理正规曲线，那么每个次数为 $r+1$ 的零维概形 $Z\subset X$ 都是线性无关的。

现在假设 $\mathbb{T}(X,x)=\emptyset$。令 $d:=\deg(X)$，并取一个基数为$x-1$的一般 $S\subset X$，记为 $S=\{p_1,\dots,p_{x-1}\}$。令 V为双概形 $(2S,X)$ 的线性包。对所有正整数 $a_1,\dots,a_{x-1}$，令 $V(a_1,\dots,a_{x-1}):=\langle a_1p_1+\cdots+a_{x-1}p_{x-1}\rangle$。注意 $V=V(2,\dots,2)$。由于 S在 X中一般，应用于曲线 X 的注记 5.4 给出

$$\dim V(a_1,\dots,a_{x-1})=\min\{r,x-2+\sum_{i=1}^{x-1}(a_i-1)\}.$$

因此 $\dim V=r-2$。由于 $\dim V=r-2$ 且 $\dim V(a_1,\dots,a_{x-1})=r-1$，若存在 $j\in\{1,\dots,x-1\}$ 使得 $a_j=3$ 且对所有 $i\neq j$都有 $a_i=2$，那么概形$V\cap X$ 就以重数 2 包含每个 p_i。首先假设 $(V\cap X)_{\mathrm{red}}\neq S$，并取 $o\in(V\cap X)_{\mathrm{red}}\setminus S$。由于 $\dim\langle 2o\cup V\rangle\le\dim V+1$, $S\cup\{o\}\in\mathbb{T}(X,x)$，矛盾。因此 $(V\cap X)_{\mathrm{red}}=S$。既然我们已证明每个 p_i 在概形论交集 $V\cap X$中都以重数 2 出现，那么我们有 $V\cap X=(2S,X)$，其次数为 $2x-2=r-1$。令 u 表示从 V到 $\mathbb{P}^1$的线性投影。由于 X 是光滑的，$u_{|X\setminus S}$ 可延拓为一个态射 $u'\colon X\to\mathbb{P}^1$，且$u'$ 的次数为 $d-r+1$。假设 $\mathbb{T}(X,x)=\emptyset$ 意味着，除了可能位于 S 中的点外， u' 没有分歧点。固定 $a\in S$，例如 $a=p_1$。只有当 $V(4,2,\dots,2)$ 是一个超平面时，点 p_1 才是 u' 的分歧点。这不成立，因为 $\dim V(4,2,\dots,2)=r$。因此 u'没有分歧点。只有在$d=r$的情况下这才可能，因此 X 是有理正规曲线。□

由于在本文余下部分中，我们将经常通过归纳法论证，并对节点型可约曲线取光滑化，因此需要一些关于可约曲线法丛的预备结果。

注 5.7. 设 $X \subset \mathbb{P}^r$ 是一条仅具有局部完全交奇点的既约曲线。 N_X 是定义在 X 上的秩为 $(r-1)$ 的向量丛，并且

$$\deg(N_X) = (r+1)\deg(X) + (r-1)(1-p_a(X)).$$

存在映射 $\phi: T\mathbb{P}^r_{|X} \to N_X$，它在 Sing($X$) 之外是满射。考虑 $T\mathbb{P}^r$的欧拉列在 X 上的限制:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)^{\oplus(r+1)} \to T\mathbb{P}^r_{|X} \to 0 \tag{1}$$

现在假设 $h^1(\mathcal{O}_X(1)) = 0$。由于 $\dim X = 1$，因此 $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$。于是 (1) 给出$h^1(T\mathbb{P}^r_{|X}) = 0$。
映射 ϕ 在 X上诱导出如下相干层正合列:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\phi) \to T\mathbb{P}^r_{|X} \to \mathrm{Im}(\phi) \to 0 \tag{2}$$

由于 $\dim X = 1$, $h^2(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$。因此 (2) 给出 $h^1(\mathrm{Im}(\phi)) = 0$。
若 X 光滑，则 $N_X = \mathrm{Im}(\phi)$，因此 $h^1(N_X) = 0$。
现在假设 X 奇异。考虑正合列

$$0 \to \mathrm{Im}(\phi) \to N_X \to N_X/\mathrm{Im}(\phi) \to 0 \tag{3}$$

由于 $N_X/\mathrm{Im}(\phi)$ 的支集是有限集 Sing(X)，因此 $h^1(N_X/\mathrm{Im}(\phi)) = 0$。于是，即使非特殊曲线是奇异的，(3) 也给出 $h^1(N_X) = 0$。若 X 光滑且有理，则 $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$。如上所述，我们得到 $h^1(T\mathbb{P}^r(-1)|_X) =0$，且 $h^1(N_X(-1)) = 0$。

特别地，我们研究平面中曲线的情形。

引理 5.8. 设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是一条既约曲线， $C' \subset \mathbb{P}^3$ 是一条光滑圆锥曲线，它与 C 相交于 $i \leq 3$ 个点 $p_1, \ldots, p_i \in C_{reg}$，且在每个 p_i 处均为节点型。设 H 是由 C' 张成的平面。若 $i > 1$，还假设 $T_{p_1}C \nsubseteq H$, $T_{p_2}C \nsubseteq H$ 和 $T_{p_1}C \cap T_{p_2}C = \emptyset$。

1) 若 $i = 1$，则 $N_{C\cup C'|C'}$ 是两个线丛的直和，一个次数为 3，另一个次数为 4。

2) 若 $i = 2$，则 $N_{C\cup C'|C'}$ 是两个线丛的直和，二者的次数均为 4。3) 若 $i = 3$, 则 $N_{C\cup C'|C'}$ 是两个线丛的直和，一个次数为 4，另一个次数为 5。

在任何情况下， $h^1(N_{C\cup C'|C'}(-1)) = 0$。

证明。注意 $N_{C'} \cong \mathcal{O}_{C'}(2) \oplus \mathcal{O}_{C'}(1)$，即 $N_{C'}$ 是一个次数为 4 的线丛与一个次数为 2 的线丛的直和。
我们先证明 2)。令 $Y := T_{p_1}C \cup T_{p_2}C \cup C'$。根据 [7, 推论 3.2]，线丛$N_{C\cup C'|C'}$ 由 $N_{C'}$ 通过进行两次正初等变换得到（其意义见 [7, §2]）；这些变换由 C'、p_1、p_2以及直线 $T_{p_1}C$、$T_{p_2}C$唯一确定。因此 $N_{C\cup C'|C'} \simeq N_{Y|C'}$。由于 Y是连通的，且 $\deg(Y) = 4$，故 $h^0(\mathcal{O}_Y(2)) < 10$。于是 $h^0(\mathcal{I}_Y(2)) > 0$。由于 $T_{p_1}C \cap T_{p_2}C = \emptyset$, Y既不包含于可约二次曲面中，也不包含于二次锥面中。因此 Y位于一个光滑二次曲面Q 中，设 $T_{p_1}C \in |\mathcal{O}_Q(1, 0)|$。于是同样地， $T_{p_2}C$也位于$|\mathcal{O}_Q(1, 0)|$中，且它不与 $T_{p_1}C$相交。显然 $C' \in |\mathcal{O}_Q(1, 1)|$, 从而我们得到 $Y \in |\mathcal{O}_Q(3, 1)|$。因此，$N_Y$是 $\mathcal{O}_Y(2)$ 的一个扩张，其扩张子为线丛 $\mathcal{O}_Q(3, 1)$ 在 Y 上的限制。

因此，$N_{Y|C'}$ 是两个次数为 4 的线丛的扩张。
1) 根据 [7, 推论 3.2]，向量丛 $N_{C\cup C'|C'}$ 是通过对 $N_{C'}$ 作一次一般的正初等变换得到的；如上所述，对 $N_{C\cup C'|C'}$ 作一次一般的正初等变换，所得结果是一个次数为 4 的线丛与一个次数为 3 的线丛的直和。

3) 这里，$N_{C\cup C'|C'}$ 是通过对 $N_{C'}$ 作 3 次正初等变换得到的，分别在 p_1、p_2 和 p_3 处各作一次。因此，$N_{C\cup C'|C'}$ 是通过对向量丛 E 作一次正初等变换得到的；该向量丛定义在 C' 上，是仅在 p_1 和 p_2 处作正初等变换得到的。根据 1)，E 同构于 $\mathcal{O}_{C'}(2) \oplus \mathcal{O}_{C'}(2)$。由于 C' 上的任意向量丛都可分解为线丛的直和，结论得证。□

注 5.9。我们将反复使用 J. Kleppe 的一项结果：他证明了在 $\mathbb{P}^r$ 内对具有固定超平面截面 $H\cap T$ 的（可能可约的）曲线 $T\subset\mathbb{P}^r$ 进行变形的函子，其切空间为 $H^0(T, N_T(-1))$，障碍空间为 $H^1(N_T(-1))$。例如参见 [9, 定理 1.5]。

注 5.10。设 C 和 D 是局部完全交空间曲线。假设$S := C\cap D = C_{\mathrm{reg}}\cap D_{\mathrm{reg}}$，且对每个 $p\in S$，C 和 D 在 p处的切线不同。令 $Y:= C\cup D$。称 N_C^+（分别称 N_D^+）为在所有 $p\in S$处沿 T_pD（分别沿 T_pC）的方向对 N_C（分别对 N_D）作正初等变换后，在 C（分别在 D）上的秩 2 向量丛。我们有 $\deg(N_C^+) = \deg(N_C) + \#S$，且 $\deg(N_D^+) = \deg(N_D) + \#S$。由 [7, 推论 3.2] 可得 $N_C^+ \cong N_{Y|D}$且 $N_D^+ \cong N_{Y|D}$。因此，向量丛 N_Y的 Mayer-Vietoris 正合列给出如下正合列

$$0 \to N_{C\cup D} \to N_C^+ \oplus N_D^+ \to N_{Y|S} \to 0. \tag{4}$$

因此，要证明 $h^1(N_Y(-1)) = 0$，只需证明 $h^1(N_C^+(-1)) = h^1(N_D^+(-1)) = 0$，并证明限制映射 $H^0(D, N_D^+(-1)) \to H^0(N_{Y|S})$ 是满射。

证明 $h^1(N_{C\cup D}) = 0$ 的方法也类似。

引理 5.11. 设 $H\subset\mathbb{P}^3$ 为一个平面，$C'\subset H$ 为一条光滑圆锥曲线。固定 C' 上三个互不相同的点 p_1、p_2、p_3 及直线 L_1、L_2、L_3，使得对所有 i，均有 $H\cap L_i = \{p_i\}$。令 E（分别为 F）表示由 $N_{C'}$ 在 p_1 和 p_2 处相对于 L_1 和 L_2（分别为 L_1、L_2 和 L_3）作正初等变换所得的向量丛。则 E 是两个次数为 4 的线丛的直和，而 F 是一个次数为 5 的线丛与一个次数为 4 的线丛的直和。

证明。设 $X := C'\cup L_1\cup L_2$ 和 $Y := X\cup L_3$。由于 $H\cap L_i = \{p_i\}$，因此 L_i 与 H 横截。因此 X 和 Y 在 p_1、p_2 和 p_3处是节点型的。注意 $E\cong N_{X|C'}$和 $F\cong N_{Y|C'}$。

首先假设 $L_1\cap L_2\neq\emptyset$。因此 X 是具有 3 个节点且算术亏格为 1 的节点型曲线。将包含 $L_1\cup L_2$ 的平面称为 M。为了证明 $E\cong\mathcal{O}_{C'}(2)\oplus\mathcal{O}_{C'}(2)$，只需证明 X 是 $M\cup H$ 与一个二次曲面的完全交。这是成立的，因为 $h^0(\mathcal{O}_X(2)) = 8$，$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) = 10$，因此 $h^0(\mathcal{I}_X(2)) \geq 2$。

现在假设 $L_1\cap L_2 = \emptyset$。在这种情况下，X 既不包含于可约二次曲面中，也不包含于二次锥面中。由于 $h^0(\mathcal{O}_X(2)) = 9$，$X$ 包含于一个光滑二次曲面中，Q。称 $|\mathcal{O}_Q(1,0)|$ 为包含 L_1 的 Q 的直纹，因此也包含L_2。由于 $C'\in|\mathcal{O}_Q(1,1)|$，于是 $X\in|\mathcal{O}_Q(3,1)|$。由于 $N_Q\cong\mathcal{O}_Q(2)$，我们有一个

正合列

$$0 \to N_{X,Q} \to N_X \to N_X(2) \to 0 \tag{5}$$

我们有 $N_{X.Q} \cong \mathcal{O}_X(3,1)$，因此其在 C' 上的限制次数为 4。由于 (5) 是向量丛的正合列，其在 C' 上的限制是在 $C' \cong \mathbb{P}^1$ 上的向量丛正合列，其中最左端和最右端的项都是次数为 4 的线丛。由于 $C' \cong \mathbb{P}^1$, E 是两个次数为 4 的线丛的直和。

向量丛 F 是通过对 E 作正初等变换得到的，并且 $\mathbb{P}^1$ 上的所有秩 2 向量丛都可分解。因此， F 是一个次数为 5 的线丛与一个次数为 4 的线丛的直和。□

现在我们准备好证明 $\mathbb{P}^3$中的一些非空性结果。

回顾一下， $H(d,g,3)$ 表示次数为 d 、亏格为 g的光滑非退化空间曲线 X 的集合，且满足 $h^1(\mathcal{O}_X(1)) = 0$。

定理 5.12. 固定整数 $g \geq 0$, $d \geq g+3$ 和 x ，使得 $6 \leq 2x \leq d$。则存在 $X \in H(d,g,3)$，使得 $\mathbb{T}(X,x) \neq \emptyset$ 且 $h^1(N_X(-1)) = 0$。

证明。固定一个平面 $H \subset \mathbb{P}^3$。我们将找到 $X \in H(d,g,3)$，使得 X 在 H 的 x 个点处与 H 相切，且这些点张成 H。我们先在步骤 (a) 和 (b) 中处理 $x = \lfloor d/2 \rfloor$和$d = g+3$ 的情形，接着在步骤 (c) 中处理 $x = \lfloor d/2 \rfloor$ 和 $d > g+3$ 的情形，并在步骤 (d) 中处理 $3 \leq x < \lfloor d/2 \rfloor$ 的情形。

(a) 假设 d 为偶数且 $x = d/2$。

(a1) 假设 $d = 6$。根据命题 5.6 $\mathbb{T}(C,2)$， $\neq \emptyset$ 对于每条亏格为 1、次数为 4 的光滑曲线 C均成立。因此，通过坐标变换，我们可以找到一条次数为 4、亏格为 1 的光滑曲线$C \subset \mathbb{P}^3$ ，它在两个不同的点处与 H 相切，记为 q_1 和q_2。由于 C 是两个二次曲面的完全交，因此 C的法丛分解为 $N_C \cong \mathcal{O}_C(2) \oplus \mathcal{O}_C(2)$。由于 C的亏格为 1，我们得到 $h^1(N_C(-1)) = 0$。固定一个一般的 $q_3 \in H$ ，并令 $M \subset \mathbb{P}^3$ 为包含 q_3的一般平面。由于 q_3和 M 是一般的，我们可以假设 M 与 C横截，且 $C \cap M \cap H = \emptyset$和 $C \cap M$张成 M。固定三个张成M的不同点 $\{p_1,p_2,p_3\} \in C \cap M$。存在一条包含 $\{p_1,p_2,p_3,q_3\}$的光滑圆锥曲线 C'，它在 q_3 处与直线$H \cap M$ 相切，但不包含 $C \cap M$ 的第四个点 p_4。事实上， q_3 在$H \cap M$中是一般的，而经过 p_1、 p_2、 p_3、 p_4 且与 $H \cap M$相切的圆锥曲线至多只有两条。由于 M与 C横截，曲线 $Y := C \cup C'$ 是节点型的。根据引理 5.8，向量丛 $N^+_{C'}(-1)$ 是一个次数为 2 的线丛与一个次数为 3 的线丛的直和。由于次数为 2 和 3 的线丛能够分离光滑圆锥曲线 C'中任意三个点，因此限制映射 $H^0(C', N^+_{C'}(-1)) \to H^0(N^+_{C'}(-1)|_{\{p_1,p_2,p_3\}})$ 是满射。注记 5.10 给出 $h^1(N_Y(-1)) = 0$, 因此Y 可以通过 [7, 定理 4.1]进行平滑化。根据半连续性， Y的平滑化族中的一般成员 X_0 满足 $h^1(N_{X_0}(-1)) = 0$。根据构造， $\mathbb{T}(Y,3) \neq \emptyset$。然而，为了得出结论，我们还需要更多条件：我们需要在一个空间曲线族中对 Y 进行平滑化，该族中的每个元素 Y_λ 都满足 $\mathbb{T}(Y_\lambda,3) \neq \emptyset$。换言之，我们需要：

断言 1：存在一条仿射光滑连通曲线 Δ, $o \in \Delta$ 以及一个空间曲线的平坦族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ ，使得 $Y_0 = Y$，该族的一般元素是光滑的，并且对于所有 $\lambda \in \Delta$， $\mathbb{T}(Y_\lambda,3) \neq \emptyset$ 。

断言 1 的证明：设 $Z' := (2q_1, C) \cup (2q_2, C)$， $Z'' := (2q_3, C')$ 且 $Z := Z' \cup Z''$。注意到 $Z \cap C = Z'$和 $Z \cap C' = Z''$。由于 q_1、 q_2 和 q_3 是 Y的光滑点， Z 是 Y的次数为 6 的 Cartier 除子。因此， $N_Y(-Z)$ 是 Y上的秩 2 向量丛，且 $\deg(N_Y(-Z)) = \deg(N_Y) - 12$。向量空间 $H^0(N_Y(-Z))$ 是

在包含 Z的曲线族中， Y在 $\mathbb{P}^3$ 内的变形函子的切空间，而 $H^1(N_Y(-Z))$ 是该函子 [9, Th. 1.5] 的障碍空间。要证明断言 1，只需找到 $Y = Y_o$的一个平滑化族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$，使得对所有 $\lambda \in \Delta$都有 $Z \subset Y_\lambda$。注意， $N_{C'}(-Z) = N_{C'}(-Z'')$ 是 $C' \cong \mathbb{P}^1$上次数为 2 的线丛的直和。因此，对所有 i都有 $h^1(N_{C'}(-Z-p_i)) = 0$。特别地（采用 [7]中的术语）， $h^1(N_C(-Z)^-) = 0$。由于 $N_C \cong \mathcal{O}_C(2) \oplus \mathcal{O}_C(2)$，且 $\deg(Z \cap C) = 4$，所以 $h^1(N_C(-Z-p_1-p_2-p_3)) = 0$。因此，对于由 $N_C(-Z-p_1-p_2-p_3)$ 经过有限次正初等变换得到的 C上的任意向量丛 F，都有 $h^1(F) = 0$。考虑 Mayer-Vietoris 正合列

$$0 \to N_Y(-Z) \to N_Y(-Z)_{|C} \oplus N_Y(-Z)_{|C'} \to N_Y(-Z)_{|\{p_1,p_2,p_3\}} \to 0 \tag{6}$$

由于 $N_Y(-Z)_{|C}(-p_1-p_2-p_3)$ 是通过作正初等变换从 $N_C(-Z-p_1-p_2-p_3)$ 得到的，因此 $h^1(N_Y(-Z)_{|C}(-p_1-p_2-p_3)) = 0$ （此处我们将 p_1、 p_2、 p_3 视为光滑曲线 C 上的点）。序列

$$0 \to N_Y(-Z)_{|C}(-p_1-p_2-p_3) \to N_Y(-Z)_{|C} \to N_Y(-Z)_{|\{p_1,p_2,p_3\}} \to 0$$

表明映射 ϕ： $H^0(N_Y(-Z)_{|C}) \to H^0(N_Y(-Z)_{|\{p_1,p_2,p_3\}})$ 是满射，且 $h^1(N_Y(-Z)_{|C}) = 0$。我们还知道， $N_Y(-Z)_{|C'}$ 是光滑圆锥曲线 C'上两个非负次数线丛的直和，因此 $h^1(N_Y(-Z)_{|C'}) = 0$。由此， ϕ 的满射性进一步推出，在序列 (6) 中， $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。因此，我们可以应用定理 4.1] 的证明，因为保持 Z 固定的 Y变形函子无障碍。我们得到一个如陈述所述的族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$，其中一般元素包含 Z，因此它在三个点处与 H 相切。□

（a2）假设 $d \geq 8$，并假设对于满足 $x = d'/2$、 $d' = g' + 3$ 和 $d' \leq d-2$ 的三元组（d'， g'， x'），定理成立。取（d'， g'， x'）=（$d-2$， $g-2$， $x-1$）的一个解 C，并按照以下方式，在此 C 中使用步骤（a1）的证明，而不是使用椭圆曲线。由归纳法，存在一个平面 H，其中包含 C 中的一组 $x-1$ 条箭头 Z'。然后取一个一般平面 M 以及 $M \cap C$ 的三个点 o_1、 o_2、 o_3。固定一条经过 o_1、 o_2、 o_3 并在点 p 处与 H 相切的圆锥曲线 $C' \subset M$。由于 M 中经过 o_1、 o_2、 o_3 且与 H 相切的圆锥曲线族的基底轨迹恰好由 o_1、 o_2、 o_3 给出，我们可以假设 C' 不包含 $M \cap C$ 中的任何其他点。令 $Y = C \cup C'$、 $Z'' =$（$2p$、 C'）以及 $Z = Z' \cup Z''$。

断言 2： $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。

断言 2 的证明：丛 $N^+_{C'}(-Z''-o_1-o_2-o_3)$ 是一个次数为 0 的线丛与一个次数为 -1 的线丛的直和。因此 $h^1(C', N_{Y|C'}(-Z-o_1-o_2-o_3)) = 0$。与断言 1 中一样，只需在 C' 上而非 C 上进行，并用 o_1、 o_2、 o_3 替代 p_1、 p_2、 p_3，即可推出限制映射

$$H^0(N_Y(-Z)_{|C'}) \to H^0(N_Y(-Z)_{|\{o_1,o_2,o_3\}})$$

是满射。然后，(6) 的类似结论给出 $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。 □

因此，我们可以继续归纳法：取族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ 中的一个一般元素 X，它给出 Y 的平滑化，并固定 Z。注意，在每一步， X 都满足 $h^1(N_X(-Z)) = 0$，这是由半连续性得出的，因为 $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。

(b) 假设 d 为奇数且 $x = (d-1)/2$。由于 $x \geq 3$, $d \geq 7$。根据命题 5.6，每个 $C \in H(5, 2, 3)$ 都具有 $\mathbb{T}(C, 2) \neq \emptyset$。为了调整步骤 (a) 的证明，我们首先找到具有 $h^1(N_C(-1)) = 0$ 的 $C \in H(5, 2, 3)$。令 $Y' \subset \mathbb{P}^3$ 为一条光滑有理三次曲线。取一个与 Y' 横截的平面 $M \subset \mathbb{P}^3$，并令 $C' \subset M$ 为一条包含 $Y' \cap M$ 的光滑圆锥曲线。设 $T := Y' \cup C'$。引理 5.8 给出 $h^1(N_T(-1)) = 0$。根据 [7, 定理。

4.1] 和引理 5.8， T 可以在一个保持概形论交的族中进行平滑化（$Y' \cup C'$），如步骤 (a1) 中所示。根据半连续性，该族的一个一般元素 C 满足 $h^1(N_C(-1)) = 0$。接下来，我们按照步骤 (a) 中的方法进行归纳，将适当的圆锥曲线 C'（按照步骤 (a) 中的方法构造）添加到曲线 C 上，其中这些曲线是三元组 $(d', g', x') = (d-2, g-2, x-1)$ 的解，并对 $C \cup C'$ 取一个一般平滑化 X。为了证明我们得到 $h^1(N_X(-1)) = 0$，我们将引理 5.11 应用于 C'。

(c) 假设 $d > g+3$。若 $d-g-3$ 为偶数，则从一条亏格为 g、次数为 $d' = g+3$ 的曲线开始：当 d' 为偶数时，按步骤 (a2) 构造；若 d' 为奇数，则按步骤 (b) 构造。接着进行 $(d-g-3)/2$ 步：在先前构造的曲线 C 上添加一条与 H 相切的光滑圆锥曲线 C'，它与 $C' \cap C$ 的交点数为 $\#(C' \cap C) = 1$，并且$C' \cup C$为节点型。由引理 5.8 可知，我们总能得到 $h^1(N_{C \cup C'}(-1)) = 0$。经过 $(d-g-3)/2$ 步后，我们就得到所要求的曲线。

假设 $d-g-3$ 为奇数。当 $g = 0$ 时，利用命题 5.6，从一条有理四次曲线开始。当 $g \geq 1$ 时，从一条亏格为 $g-1$、次数为$d' = g+2$的曲线 C 开始：当 d' 为偶数时，按步骤 (a2) 构造；若 d' 为奇数，则按步骤 (b) 构造。第一步是在 C 上添加一条与 H 相切的光滑圆锥曲线 C'；该圆锥曲线与曲线 C 交于两点，这两点处的切线 t_1、t_2 与 C 相交，且彼此不相交，也不同于与 C' 相切的切线。我们可以在一个不包含 t_1、t_2 的平面内取这样一条圆锥曲线 C'。随后继续进行 $(d-g-4)/2$ 步：在先前构造的曲线 C 上添加一条与 H 相切的光滑圆锥曲线 C'，它与C交于唯一一点，且 $C \cup C'$ 为节点型。无论哪种情况，引理 5.8 的假设对 $C \cup C'$ 都成立。因此，由引理 5.8 可知，我们总能得到 $h^1(N_{C \cup C'}(-1)) = 0$；接着可以继续归纳法，对 $C \cup C'$ 作保留与 H 交集的平滑化。

(d) 假设 $3 \leq x \leq \lfloor d/2 \rfloor$。我们从一条满足 $\mathbb{T}(Y, 2) \neq \emptyset$且 $h^1(N_Y(-1)) = 0$的曲线 Y开始。如果 d 为偶数，则取亏格为 1、次数为 4 的 Y；如果 g 为奇数，则取亏格为 2、次数为 5 的 Y。然后，我们按照上述步骤 (a)、(b) 和 (c) 继续进行，但在 $\lfloor d/2 \rfloor - x$ 步中，我们添加一条与 H不相切的光滑圆锥曲线 C'。□

对于满足 $h^1(\mathcal{O}_X(1)) \neq 0$ 的空间曲线 $X \subset \mathbb{P}^3$，我们证明以下结果。

定理 5.13. 固定整数 $x \geq 3$、$g \geq 0$ 和 d，使得 $g \geq 2x+2$。记作 $g = 2x+1+5s-q$、$0 \leq q \leq 4$，并假设 $d \geq 2x+4+3s$。则存在一条光滑且连通的曲线 $X \subset \mathbb{P}^3$，使得 $\deg(X) = d$、$p_a(X) = g$、$h^1(N_X) = 0$、$h^1(\mathcal{O}_X(2)) = 0$，且 $\mathbb{T}(X, x) \neq \emptyset$。

注 5.14. 在定理 5.13 中，对每个固定的 x，我们都能找到 g_0，使得对所有 $g \geq g_0$和所有 $d \geq \frac{3}{4}g + 3$，都存在一条亏格为 g、次数为 d 的光滑曲线 $X \subset \mathbb{P}^3$，满足$\mathbb{T}(X, x) \neq \emptyset$。对于关于 g的缓慢递增函数 $x(g)$，结论也同样成立。
注意，对固定的 x 和 $g \gg x$，这些曲线 X 所覆盖的次数和亏格范围比 Brill-Noether范围 $d \geq \frac{3}{4}g + 3$更大。

为了证明定理 5.13，我们需要一系列预备引理。

引理 5.15. 固定一个整数 $e \in \{1, 2, 3, 4\}$。设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是一条次数为 d的不可约且非退化曲线。如果 $e = 4$，则假设 $d \geq 4$。取有限条曲线的并 $Y \subset \mathbb{P}^3$，使得 $C \nsubseteq Y$。那么存在一条光滑圆锥曲线 C'，使得 $\#(C \cap C') = e$，$C \cup C'$ 在 $C \cap C'$的每个点处都是节点型的，并且 $C' \cap Y = \emptyset$。

证明。取一个一般平面 $M \subset \mathbb{P}^3$。平面 M 与 C横截，$Y \cap M$ 是有限的，且 $Y \cap C \cap M = \emptyset$。根据三割线引理，$C \cap M$的 d 个点中没有三点共线。固定 $S \subseteq C \cap M$ 使得 $\#S = e$。由于 S 上的点中没有三点共线，

S 是（$5-e$）维线性空间 $|\mathcal{I}_S(2)|$的概形论基点集。 $|\mathcal{I}_S(2)|$ 的一般元素是光滑的。因此存在光滑的 $C' \in |\mathcal{I}_S(2)|$ ，使得 $C' \cap Y = \emptyset$ 且 $C' \cap C = S$。由于 M 与 C 横截，且 $C' \subset M$，因此 $C \cup C'$ 在 S的每个点处都是节点型的。□

引理 5.16. 设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是一条次数为 4 的整非退化曲线。对于一般的长度为 6 的 $S \subset C$ ，存在一条有理正规曲线 $T_S \subset \mathbb{P}^3$ ，使得 $S = C \cap T_S$ 和 $T_S \cup C$ 是节点型的。

此外，如果 $p_a(C) = 1$ 则对于一般的 $S_1 \times S_2 \subset C \times C$，使得 S_1 和 S_2 的长度均为 6。

证明。令 $\mathcal{U}$ 表示所有满足 $\#A = 6$ 且 A 处于线性一般位置的 $A \subset \mathbb{P}^3$ 的集合。对于每个 $A \in \mathcal{U}$ ，存在唯一一条包含A的有理正规曲线 T_A 。设 $\mathcal{U}(C) := \{S \in \mathcal{U} \mid S \subset C\}$。由于 C 是整的且非退化的， $\mathcal{U}(C)$是一个维数为 6 的整拟射影簇。集合 S 是 $\mathcal{U}(C)$的一个一般元素。由于 $\deg(C) \neq 3$，因此 $C \neq T_S$。我们需要证明 S 等于$C \cap T_S$（集合论意义上）， $T \cup C$是节点型的，以及最后一个断言，即关于一般的 $S_1 \times S_2 \subset C \times C$ 的断言（当 $p_a(C) = 1$时）。

如果 $p_a(C) = 1$，曲线 C 是两个二次曲面的完全交（由于它至多有一个奇点且嵌入维数为 2 ），因此包含在一个光滑二次曲面 Q 中，设为 $C \in |\mathcal{O}_Q(2,2)|$。取一个长度为 6 的一般 $S \subset C$ 。由 S 的一般性，因为 $h^0(\mathcal{O}_Q(1,2)) = h^0(\mathcal{O}_Q(2,1)) = 6$，我们得到 $h^0(\mathcal{I}_{S,Q}(2,1)) = h^0(\mathcal{I}_{S,Q}(1,2)) = 0$。因此 $T_S \nsubseteq Q$。由贝祖定理， $S = T_S \cap Q$ 作为概形相等。因此 $T_S \cap C = S$ 且 $T_S \cup C$ 是节点型的。如果 $p_a(C) = 0$ ，那么 $h^0(\mathcal{I}_C(2)) = 1$ ，且包含 C 的唯一二次曲面 Q 是光滑的 [6, 例 V.2.9], ，且或者为$C \in |\mathcal{O}_Q(1,3)|$ ，或者为 $C \in |\mathcal{O}_Q(3,1)|$。我们得出结论，与 $p_a(C) = 1$ 的情形相同。

现在我们证明最后一个结论，对于 $p_a(C) = 1$。只需找到 $S_1, S_2 \in \mathcal{U}(C)$，使得 $T_{S_1} \cap T_{S_2} = \emptyset$。铅笔 $|\mathcal{I}_C(2)|$ 只有有限个（即 4 个）奇异元素。取光滑二次曲面 Q_1, $Q_2 \in |\mathcal{I}_S(2)|$ ，使得 $Q_1 \neq Q_2$。注意，$C \in |\mathcal{O}_{Q_i}(2,2)|$, $i = 1, 2$。取一个一般的 $T_i \in |\mathcal{O}_{Q_i}(2,1)|$。每个 T_i 都是一条有理正规曲线，且 $\deg(T_i \cap C) = 6$。贝尔蒂尼定理给出 $S_i := T_i \cap C$ 的基数为 6。由于 $S_i \subset T_i$ 且 T_i 是一条有理正规曲线，因此 S_i 处于线性一般位置。因此 $T_i = T_{S_i}$。由于 $T_{S_i} \neq C$，我们有 $T_{S_1} \nsubseteq Q_2$ 和 $T_{S_2} \nsubseteq Q_1$。由于$T_i \subset Q_i$, $i = 1, 2$，我们得到 $T_{S_1} \cap Q_2 = T_{S_1} \cap Q_1 \cap Q_2 = T_{S_1} \cap C = S_1$。由于 $T_{S_2} \subset Q_2$，因此 $T_{S_1} \cap T_{S_2} \subseteq T_{S_1} \cap Q_2 = S_1$。由于 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 和 $T_{S_2} \cap C = S_2$，我们得到 $T_{S_1} \cap T_{S_2} = \emptyset$。□

引理 5.17. 对于 $q = 0, \ldots, 4$，空间 $H(2x+4, 2x+1-q, 3)$ 包含满足以下条件的光滑曲线 X_0 。

(1) $\mathbb{T}(X_0, x)$ 非空，且存在一个平面 H ，其中包含由 x 个箭头 $Z \subset X_0$ 组成的并，且 $h^1(\mathcal{N}_{X_0}(-Z)) = 0$。 (2) 对于基数为 6 的 s 个子集 $S_1, \ldots, S_s \subset X_0$ 的一般选择，存在互不相交的有理正规曲线 $T_1, \ldots, T_s$ ，使得对于所有 i ，并集$X_0 \cup T_i$ 是节点型的，并且 T_i 与 X_0 恰好交于 S_i。

证明. 我们对 $x \geq 2$ 作归纳法。

为了处理 $x = 2$ （即 $d = 8$ 和 $g = 5 - q$）的情形，我们从一条光滑椭圆四次曲线 C 开始。我们知道 $H^1(\mathcal{N}_C(-1)) = 0$，并且 $\mathbb{T}(C, 2)$ 非空。由于 $\mathbb{T}(C, 2) \neq \emptyset$，存在一个基数为 2 的子集 $Z \subset C$ ，使得 Z 中各点处的 C 的切线位于一个平面 H 中。由引理 5.16，对于一般的选取

由 s 子集 S_1、……、$S_s \subset C$ 中基数为 6 的子集，我们可以找到互不相交的有理正规曲线T_1、……、T_s，使得 $C \cup T_i$ 是节点型的，并且对于所有 i，均有 $T_i \cap C = S_i$。取一个一般平面$H' \subset \mathbb{P}^3$。因此， H' 与 C 和 $Z \cap H' = \emptyset$横截。固定 $e \in \{0,1,2,3\}$ 和$W \subset H' \cap C$，使得 $\#W = 4-e$。取一条包含W的一般光滑圆锥曲线 $C' \subset H'$。由于 $\#W \leq 4$ 且 C' 是一般的，因此对于所有 i，均有 $T_i \cap C' = \emptyset$。令 $Y := C \cup C'$。法丛 $N_Y(-Z)_{|C}$ 可通过对 $N_C(-Z)$进行正初等变换得到，因此 $h^1(N_Y(-Z)_{|C}) = 0$。回顾一下， $1 \leq \#W \leq 4$。对于每个$o \in W$， C 在 o 处的切线 T_oC 与 H'横截。如果 $\#W = 4$，引理 5.11 表明，限制映射 $\rho\colon H^0(N_Y(-Z)_{|C'}) \to H^0(N_Y(-Z)_{|W})$ 是满射，因此正合列

$$0 \to N_Y(-Z) \to N_Y(-Z)_{|C} \oplus N_Y(-Z)_{|C'} \to N_Y(-Z)_{|W} \to 0 \tag{7}$$

证明了 $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。若 $\#W \leq 3$，则 ρ 的满射性只用到： $N_{C'}$ 是两个次数为 ≥ 2 的线丛的直和，且 $N_Y(-Z)_{|C'}$ 是由 $N_{C'}$ 经正初等变换得到的。由半连续性可知，我们能找到 $C \cup C'$ 的一个平滑化 D，使其保持 Z。因此，对于 $g = \#W \in \{1,2,3,4\}$，我们得到曲线 D，它们属于 $H(6,g,3)$，并满足 $\mathbb{T}(D,2) \neq \emptyset$、 $h^1(N_D(-Z)) = 0$；而且，对于基数为 6 的一般子集 S_1、……、$S_s \subset X_0$，我们有陈述中所述的互不相交的有理正规曲线 T_1、……、T_s。接着，考虑一条圆锥曲线 C''，它与 D 相交于一个或两个一般点。如上所述，在这两种情况下，$Y' = C'' \cup D$ 均满足 $h^1(N_{Y'}(-Z)) = 0$，并且我们能找到 Y' 的一个一般平滑化 X_0，使其保持 Z。 X_0 的次数为 8，其亏格 g 可以取 1 到 5 之间的任意值，因为 $\#W$ 可以是 1 到 4 之间的任意整数。此外，$h^1(N_{X_0}(-Z)) = 0$， $\mathbb{T}(X_0,2) \neq \emptyset$，并且由半连续性可知， X_0 满足陈述中的条件 2。至此，情形 $x = 2$ 得证。

假设我们构造出了所需的曲线 $X \in H(2(x-1)+4, 2(x-1)+1-q, 3)$。存在一个由 $x-1$ 个箭头构成的子概形 $Z \subset X$，它包含在平面 H 中，并且 $h^1(N_X(-Z)) = 0$。取一个一般平面 M，使其与 H 和 X 都横截，且避开 Z。如定理 5.12 的 (a1) 的证明所示，对于 $p_1,p_2,p_3 \in M \cap X$，存在一条光滑圆锥曲线 C'，经过 p_1,p_2,p_3，并在 $p_4 \notin X$ 处与 H 相切，且避开 $M \cap X$ 中其余的点。取 $Y = X \cup C'$，并将 Z_0 定义为 Z 与在 p_4 处和 C' 相切的箭的并。注意， Z_0 位于 H 中。如断言 1 的证明所示， $H^1(N_X(-Z))$ 的消失蕴含映射 $H^0(N_Y(-Z_0)_{|X}) \to H^0(N_Y(-Z_0)_{|\{p_1,p_2,p_3\}})$ 的满射性，而序列 (6) 的类似结果表明 $h^1(N_Y(-Z_0)) = 0$。因此，存在一个平滑化 $X_0 \in H(2x+4, 2x+1-q, 3)$，它由 Y 得到并保持 Z_0。 $Z_0 \subset X_0$ 的存在蕴含 $\mathbb{T}(X_0,x) \neq \emptyset$。由半连续性， $h^1(N_{X_0}(-Z_0)) = 0$，且 X_0 满足陈述中的条件 2。□

注意到，在前一个引理中，条件 $h^1(N_{X_0}(-Z)) = 0$ 蕴含$h^1(N_{X_0}) = 0$。

引理 5.18. 取一条既约曲线 $C \subset \mathbb{P}^3$，使得 $h^1(\mathcal{O}_C(2)) = 0$。设 $T \subset \mathbb{P}^3$ 是一条光滑有理曲线，且不是 C 的不可约分支。令 $f := \deg(T)$， $e := \deg(C \cap T)$。如果 $e \leq 2f+1$，那么 $h^1(\mathcal{O}_{C \cup T}(2)) = 0$。

证明。考虑 Mayer-Vietoris 正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{C\cup T}(2) \to \mathcal{O}_C(2) \oplus \mathcal{O}_T(2) \to \mathcal{O}_{T\cap C}(2) \to 0 \tag{8}$$

根据假设，$h^1(\mathcal{O}_C(2)) = 0$。显然，$h^1(\mathcal{O}_T(2)) = 0$。由于 $e \leq 2f+1$、$T \cong \mathbb{P}^1$ 且 $\deg(\mathcal{O}_T(2)) = 2f$，限制映射 $H^0(\mathcal{O}_T(2)) \to H^0(\mathcal{O}_{C\cap T}(2))$ 是满射。因此，由 (8) 得 $h^1(\mathcal{O}_{C\cup T}(2)) = 0$。□

引理 5.19. 设 $C \subset \mathbb{P}^3$ 是一条不可约局部完全交曲线，$Z \subset C_{\mathrm{reg}}$ 是一个零维概形。假设 $h^1(N_C(-Z)) = 0$。取 $S \subset C_{\mathrm{reg}}$，使得 $\#S = 6$, $S \cap Z = \emptyset$, S 处于线性一般位置，并且唯一包含 S 的有理正规曲线 T 仅在 S 处与 C 相交，且在 S 的每一点都有 $C \cup T$ 节点型。令 $Y := C \cup T$。则 $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。

证明. 根据假设，S 是 C 与 T 的概形论交。因此我们有如下 Mayer-Vietoris 正合列

$$0 \to N_Y(-Z) \to N_Y(-Z)_{|C} \oplus N_Y(-Z)_{|T} \to N_Y(-Z)_{|S} \to 0 \tag{9}$$

由于 $Z \cap T = \emptyset$，$N_Y(-Z)_{|T} \cong N_{Y|T}$。由于 $N_Y(-Z)_{|C}$ 是由 $N_C(-Z)$ 作正初等变换得到的，且 $h^1(N_C(-Z)) = 0$，$h^1(N_Y(-Z)_{|C}) = 0$。由于 N_T 是两个次数为 5 的线丛的直和，$\#S = 6$，且 $N_Y(-Z)_{|T}$ 是由 N_T 作正初等变换得到的，$h^1(N_Y(-Z)_{|T}) = 0$，并且限制映射 $H^0(N_Y(-Z)_{|T}) \to N_Y(-Z)_{|S}$ 是满射。因此 (9) 给出 $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。□

现在我们可以证明定理 5.13 了。

定理 5.13 的证明。回忆 $g = 2x+1+5s-q$，其中 $q \in \{0, \dots, 4\}$。由假设 $d \geq 2x+4+3s$。

我们先处理 $d = 2x+4+3s$ 的情形。$s = 0$ 的情形由引理 5.17 解决。考虑引理 5.17 的陈述中所述的曲线 $X_0 \in H(4x+2, 2x+1, 3)$。由于 $\mathbb{T}(X_0, x)$ 非空，我们可以取一组 Z 个共面箭头，它们位于 X_0 中并支撑在 x 个点上，且满足 $h^1(N_{X_0}(-Z)) = 0$。此外，对于一组选取为一般位置的、基数为 6 的子集 S_1、……、$S_s \subset X_0$，存在互不相交的有理正规曲线 T_1、……、T_s，使得对所有 i，其并集 $X_0 \cup T_i$ 是节点型的，并且 T_i 与 X_0 恰好交于 S_i。定义 $Y = X_0 \cup T_1 \cdots \cup T_s$。于是 $h^1(N_Y(-Z)) = 0$。对 s 作归纳，可得 Y 的一个保持 Z 的平滑化 X_s。曲线 X_s 属于 $H(2x+4+3s, 1+2x+5s-q, 3)$。Z 的存在表明 $\mathbb{T}(X_s, x) \neq \emptyset$。由半连续性，我们还知道 $h^1(N_{X_s}(-Z)) = 0$。

最后，假设 $d = (2x+4+3s)+t$，其中 $t > 0$。那么，通过对 t 使用归纳法，我们可以得到 $H(d, g, 3)$ 中所需的曲线。我们从 $X_{s,\,0} = X_s$ 开始。然后，我们通过添加一条直线 ℓ 来构造 $X_{s,\,t+1}$，该直线与 $X_{s,\,t}$ 在一个一般点处相交，从而使 $X_{s,\,t} \cup \ell$ 成为节点型曲线，并进行保持 Z 不变的光滑变形。

条件 $h^1(\mathcal{O}_X(2)) = 0$ 可通过多次应用引理 5.18 得出，该引理应用于次数为 ≤ 3 的光滑有理曲线。□

References

1. E. Ballico 和 L. Chiantini，*On the Terracini locus of projective varieties*，《米兰数学杂志》89 (2021)，1–17。2. C. Ciliberto 和 R. Miranda，*Interpolation on curvilinear schemes*，《代数杂志》203 (1998)，677–678。3. L. Ein，*Hilbert scheme of smooth space curves*，《高等师范学院科学年鉴》19 (1986)，469–478。4. ,

The irreducibility of the Hilbert scheme of complex space curves，《代数几何，鲍登，1985》，《纯数学专题讨论会论文集》，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1987 年，第 83–87 页。

5. J. Harris, *Theta.characteristics on algebraic curves*, 《美国数学会汇刊》271（1982），611–638。6. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, 数学研究生教材，施普林格，柏林，纽约，1992。7. R. Hartshorne 和 A. Hirschowitz, *Smoothing algebraic space curves*, 《代数几何》，锡切斯 1983，数学讲义，第 1124 卷，施普林格，柏林，纽约，1985，第 98–131 页。8. E. Kani, *On Castelnuovo's equivalent defect*, 《纯粹与应用数学杂志》352（1984），24–70。9. D. Perrin, *Courbes passant par m points généraux de* $\mathbb{P}^3$, 《法国数学会回忆录》28–29（1987），1–137。

E. Ballico, Dipartimento di Matematica, Università di Trento, Italy*Email address*: edoardo.ballico@unitn.itL. Chiantini,
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche,
Università di Siena, Italy*Email address*: luca.chiantini@unisi.it