arXiv:2305.02048v1 [math.FA] 3 May 2023

# 一般一维克利福德傅里叶变换及其在概率论中的应用

赛义德·法赫拉维[1,3] 和哈基姆·莫奈姆[2,3]

摘要。本文介绍一般的一维克利福德傅里叶变换。我们推导了其基本性质：普朗歇尔定理、重构公式和卷积公式。此外，我们还将其应用于概率论，并通过示例阐释相关结果。

关键词：克利福德几何代数；克利福德傅里叶变换；普朗歇尔-帕塞瓦尔定理；概率论。

2020年数学主题分类：42B10，30G35，60B11。

## 1. 引言

克利福德代数，也称为几何代数，是一种将复数和向量的原理扩展到更高维度的数学结构。该思想最初由19世纪末著名数学家威廉·金登·克利福德 $19^{th}$ 提出 [7]。克利福德代数的概念基于向量之间的几何积，这为分析高维几何对象提供了强大的工具。它的应用范围广泛，涉及物理学、工程学和计算机科学等领域。

克利福德代数的一项重要优势在于，它能够统一并简化数学和物理学的诸多领域，包括线性代数、微分几何、电磁学和量子力学。在 [10], 中，作者旨在将克利福德代数、流形与调和分析联系起来，并展示代数、几何和微分方程在欧几里得傅里叶分析中的基础性作用。他们还

[1]通讯作者：s.fahlaoui@umi.ac.ma[2]monaim.hakim@edu.umi.ac.ma[3]摩洛哥梅克内斯穆莱·伊斯梅尔大学理学院`。

将欧几里得空间的表示理论与半单李群的表示理论相结合。

已有多项研究探讨了克利福德代数在信号处理中的应用。例如， [4] Bracx 等人提出了新的克利福德傅里叶变换，重点研究二维情形。Todd ell 提出了四元数代数（H $\simeq C\ell_{0,2}$）上的傅里叶变换，称为四元数傅里叶变换（QFT），并利用它分析由偏微分方程描述的系统。Hitzer 也为这一理论的发展作出了重要贡献。在其著作中，他考察了四元数傅里叶变换（QFT）的不同形式，并探讨了其在四元数域上的应用，给出了相应的 Plancherel 定理 [11]。他还在 [12], 中利用四元数傅里叶变换，为四元数值函数推导出一种新的方向不确定性原理，并将其推广，以在带有四元数子代数的克利福德几何代数中建立类似原理。在 [13], 中，他基于一个或两个线性无关的纯单位四元数的选取，阐述了四元数的正交平面分裂（OPS）；他还系统地推广了应用于四元数域的四元数傅里叶变换，使其符合 OPS，并建立了逆变换，阐释其几何意义。他在其章节 [15, 17],中将上述分裂（OPS）推广为一种可自由调节的正交二维平面分裂，其中包含两个正交且共线的纯单位四元数。OPS 的这一一般形式为 QFT 对信号的作用带来了新的几何解释。在他们的著作 [18, 5], 中，P. Lounesto 和 Bracx 等人回顾了四元数与克利福德代数小波的发展历程及其应用。

除此之外，Bahri 等人在 [2, 3], 中引入了一维四元数傅里叶变换，并确立了其性质。该变换推广了傅里叶变换，他们还研究了它在概率论中的应用。因此，关于克利福德代数的研究对多个领域具有重要意义，持续探索有望带来更多见解与进展。

## 2. 克利福德几何代数

实数域 $C\ell$（$\mathbb{R}^{p,\,q}$）$= C\ell_{p,\,q}$ 上的克利福德几何代数，在实数域–线性空间 $\mathbb{R}^{p,\,q}$上，是由实数域$^{p,\,q}$-正交归一向量基底 $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$（其中 $p + q = n$）生成的非交换代数，并遵循以下结合的非交换几何乘法规则（参见 [10, 15]）

$$e_\ell e_k + e_k e_\ell = 2\delta_{\ell,k}\varepsilon_\ell \tag{1}$$

其中 $\delta_{\ell,\,k}$ 是克罗内克符号，并且

$$\varepsilon_\ell = \left[\mathbb{1}_{[\![1,p]\!]}(\ell) - \mathbb{1}_{[\![p+1,n]\!]}(\ell)\right]. \tag{2}$$

克利福德几何代数 $C\ell_{p,\,q}$ 可分解为以下直和 [18, 15]

$$C\ell_{p,q} = \bigoplus_{\ell=0}^{n} C\ell_{p,q}^{\ell} \tag{3}$$

其中，$C\ell_{p,\,q}^{\ell}$ 表示由 $\ell$向量族张成的空间

$$\mathscr{B}_\ell = \{e_{\sigma_1} e_{\sigma_2} \cdots e_{\sigma_\ell}, \qquad 1 \le \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_\ell \le n\}. \tag{4}$$

因此，该集合

$$\{e_\Sigma = e_{\sigma_1}e_{\sigma_2}\cdots e_{\sigma_\ell},\qquad \Sigma\subseteq[\![1,n]\!],\quad 1\le\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_\ell\le n\}\cup\{e_\emptyset=1\} \tag{5}$$

构成了$C\ell_{p,q}$的分级（刀片）基。等级 $\ell$ 从标量的 0 级、向量的 1 级、双向量的 2 级、 $\ell$ $\ell$-向量的级别，一直到伪标量的 n 级。实数域 R（相应地，R 线性空间 $\mathbb{R}^{p,q}$）作为 0-向量（相应地，1-向量）的子集包含于$C\ell_{p,q}$ 中。

克利福德乘积（1）生成了$C\ell_{p,q}$ 的一组基，其中包含 $2^n$ 个元素。$C\ell_{p,q}$ 的一个一般元素 $\mathcal{C}$（称为克利福德数、多向量或超复数）是基刀片（$e_\Sigma$）$_\Sigma$ 的实线性组合，可展开为 [15]

$$\mathcal{C}=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]}\mathcal{C}_\Sigma e_\Sigma=\overbrace{\mathcal{C}_\emptyset}^{\text{scalar part}}+\overbrace{\sum_{\ell\in[\![1,n]\!]}\mathcal{C}_\ell e_\ell}^{\text{vector part}}+\overbrace{\sum_{1\le\ell,k\le n}\mathcal{C}_{\ell k}e_\ell e_k}^{\text{bivector part}}+\cdots+\overbrace{\mathcal{C}_{12\ldots n}e_1e_2\cdots e_n}^{\text{pseudo-scalar part}} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{C}_\Sigma$ 为实值系数。 $\mathcal{C}$ 也可以写作

$$\mathcal{C}=\sum_{\ell=0}^{n}\langle\mathcal{C}\rangle_\ell=\langle\mathcal{C}\rangle_0+\langle\mathcal{C}\rangle_1+\cdots+\langle\mathcal{C}\rangle_n \tag{7}$$

其中 $\langle\mathcal{C}\rangle_\ell=\sum\mathcal{C}_\Sigma e_\Sigma$ 表示 $\mathcal{C}$的 $\ell$-向量部分。例如， $\langle\mathcal{C}\rangle_0$ 表示$_{\#\Sigma=\ell}$标量部分， $\langle\mathcal{C}\rangle_1$ 表示向量部分， $\langle\mathcal{C}\rangle_2$ 表示双向量部分， $\langle\mathcal{C}\rangle_n$ 表示伪标量部分。多向量 $\mathcal{C}\in C\ell\ (p,q)$ 的主反转定义为 [18, 15]

$$\widetilde{\mathcal{C}}=\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}\overline{\langle\mathcal{C}\rangle_\ell} \tag{8}$$

其中 $\overline{\mathcal{C}}$ 表示在 $\mathcal{C}$ 的基分解中改变每个负平方向量的符号 $\overline{e_\Sigma}=\varepsilon_{\sigma_1}e_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2}e_{\sigma_2}\cdots\varepsilon_{\sigma_\ell}e_{\sigma_\ell}$其中 $1\le\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_\ell\le n$且 $^{\varepsilon_{\sigma_k}}$ 由（2）给出。

主反转是线性的、对合的且反自同构的，即对于所有 $\mathcal{C},\mathcal{D}\in C\ell_{p,q}$

$$\widetilde{\mathcal{C}+\mathcal{D}}=\widetilde{\mathcal{C}}+\widetilde{\mathcal{D}},\qquad\widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}=\mathcal{C},\qquad\widetilde{\mathcal{C}\mathcal{D}}=\widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{\mathcal{C}}. \tag{9}$$

$\mathcal{C}$、$\mathcal{D}\in C\ell_{p,\ q}$ 的标量积可以定义为 [15]

$$\mathcal{C}*\widetilde{\mathcal{D}}=\langle\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{D}}\rangle_0=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]}\mathcal{C}_\Sigma\mathcal{D}_\Sigma. \tag{10}$$

特别地，如果 $\mathcal{C}=\mathcal{D}$，那么多向量 $\mathcal{C}\in C\ell_{p,\ q}$ 的模由 [18, 15] 给出。

$$|\mathcal{C}|=\sqrt{\langle\mathcal{C}\widetilde{\mathcal{C}}\rangle_0}=\sqrt{\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]}\mathcal{C}_\Sigma^2}. \tag{11}$$

对于 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}\in C\ell_{p,\ q}$ （$p+q=n\ge3$），以下性质成立 [8]

$$|\mathcal{C}\mathcal{D}|\le2^n|\mathcal{C}||\mathcal{D}|. \tag{12}$$

平方可积克利福德几何代数值函数空间$f,g\in L^2$(实数域$C\ell_{p,q}$)上的内积定义如下

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R},C\ell_{p,q})}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{13}$$

对于 $f=g$，我们得到 $L^2$(实数域$C\ell_{p,q}$)-范数为

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R},C\ell_{p,q})}=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx. \tag{14}$$

## 3. 一般一维克利福德傅里叶变换

我们将 $\mathbb{C}_\mu$ 记为由 $\{1,\mu\}$张成的 $C\ell_{p,\ q}$ 二维子平面，其中 $\mu \in C\ell_{p,\ q}$ 和 $\mu^2 = -1$。

$$\mathbb{C}_\mu = span\{1,\mu\} = \{a + b\mu\ ,\quad a,b \in \mathbb{R}\} \tag{15}$$

$\mathbb{C}_\mu$ 是一个与复平面 $\mathbb{C}$ 同构的代数闭交换域。每个超复数 $q \in \mathbb{C}_\mu$ 都可以写成极坐标形式：[8]

$$q = |q|e^{\theta\mu} = |q|\left(\cos\theta + \mu\sin\theta\right). \tag{16}$$

定义 3.1。设 $\mu \in C\ell_{p,\ q}$ 且 $\mu^2 = -1$。 $f \in L^1(\mathbb{R}C\ell_{p,\ q})$ 关于 $\mu$ 的一般一维克利福德傅里叶变换（1DCFT）定义为

$$\mathcal{F}^\mu(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{\mu x\xi}dx \tag{17}$$

其中 $x$、$\xi \in$ ∈实数域。

若使用 $C\ell_{p,\ q}$-基展开； $f = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma f_\Sigma$， $f$ 的 1DCFT 变为

$$\mathcal{F}^\mu(f)(\xi) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \mathcal{F}^\mu(f_\Sigma)(\xi). \tag{18}$$

下面给出 1DCFT 的基本性质；其证明及更全面的分析请参阅 [2, 14, 16],

- 对所有 $\mathcal{C},\mathcal{D} \in C\ell_{p,\ q}$ 以及 $f,g \in L^1$（实数域 $C\ell_{p,\ q}$），有

$$\mathcal{F}^\mu(\mathcal{C}f + \mathcal{D}g)(\xi) = \mathcal{C}\mathcal{F}^\mu(f)(\xi) + \mathcal{D}\mathcal{F}^\mu(g)(\xi). \tag{19}$$

- 对所有 $f \in L^1$（实数域 $C\ell_{p,\ q}$）以及 $h \in$ 实数域，有

$$\mathcal{F}^\mu(\tau_h f)(\xi) = \mathcal{F}^\mu(f)(\xi)e^{-\mu h\xi} \tag{20}$$

其中平移算子定义为 $\tau_h f(x) = f(x+h)$。

- 对所有 $f,\mathcal{F}^\mu(f) \in L^1$(实数域 $C\ell_{p,\ q}$)，f 可由其傅里叶变换还原为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^\mu(f)(\xi)e^{-\mu\xi x}d\xi. \tag{21}$$

- 对所有 $f,\mathcal{F}^\mu(f) \in L^2$(实数域 $C\ell_{p,\ q}$)，帕塞瓦尔恒等式成立

$$2\pi\|f\|_2 = \|\mathcal{F}^\mu(f)\|_2. \tag{22}$$

- 对于 $f \in \mathscr{C}^m$(实数域 $C\ell_{p,q}$)

$$\mathcal{F}^\mu\left(\frac{d^m}{dx^m}f\right)(\xi) = \mathcal{F}^\mu\left(f\right)(\xi)(-\mu\xi)^m. \tag{23}$$

定义 3.2。两个取值于克利福德代数的函数 $f, g \in L^1$(实数域$C\ell_{p,q}$) 的卷积定义为

$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y-x)dx. \tag{24}$$

命题 3.3. 设 $f, g \in L^1$(R$C\ell_{p,q}$)。我们有

$$\mathcal{F}^{\mu}(f * g)(\xi) = \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} \mathcal{F}^{\mu}(fe_{\Sigma})(\xi)\mathcal{F}^{\mu}(g_{\Sigma})(\xi). \tag{25}$$

证明。 若使用 6 式中对 $g$ 的展开式

$$g = \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_{\Sigma} g_{\Sigma}, \tag{26}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mu}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy e^{\mu x\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_{\Sigma} g_{\Sigma}(x-y)dy e^{\mu x\xi} dx \\
&= \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} \int_{\mathbb{R}} f(y)e_{\Sigma} e^{\mu y\xi} \int_{\mathbb{R}} g_{\Sigma}(x-y)e^{\mu(x-y)\xi} dxdy \\
&= \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} \mathcal{F}^{\mu}(fe_{\Sigma})(\xi)\mathcal{F}^{\mu}(g_{\Sigma})(\xi).
\end{aligned}$$

□

引理 3.4.（黎曼-勒贝格）一般的一维克利福德傅里叶变换（1DCFT） $\mathcal{F}^{\mu}$ 将 L$^1$(R$\,C\ell_{p,q}$) 映射到 $\mathscr{C}_0$(R$\,C\ell_{p,q}$)，且它是一一映射。其中$\mathscr{C}_0$(R$C\ell_{p,q}$) 是在无穷远处趋于零的连续函数集合 [1]。

定理 3.5.（Szokefalvi-Nagy 不等式）。设 $f \in L^2$(实数域$C\ell_{p,q}$)，则

$$|f(x)|^2 \leq \|f\|_2 \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2. \tag{27}$$

证明。
***i-*** $\frac{df}{dx} \notin L^2$(实数域$C\ell_{p,q}$)，Szokefalvi-Nagy 不等式显然成立。ii- $\frac{df}{dx} \in L^2$(实数域$C\ell_{p,q}$)。对于 $\rho > 0$，可得

$$\begin{aligned}
|f(x)|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{\mu}(f)(\xi)e^{\mu\xi x} d\xi \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (\rho + \xi^2) \left| \mathcal{F}^{\mu}(f)(\xi) \right|^2 \frac{e^{2\mu\xi x}}{\rho + \xi^2} d\xi.
\end{aligned}$$

柯西–施瓦茨不等式，（22）和（23）给出

$$|f(x)|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (\rho + \xi^2) \left| \mathcal{F}^{\mu}(f)(\xi) \right|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho + \xi^2} d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \int_{\mathbb{R}} (\rho + \xi^2) \left|\mathcal{F}^{\mu}(f)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \rho \left|\mathcal{F}^{\mu}(f)(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\mathcal{F}^{\mu}(f)(\xi)\right|^2 d\xi \right] \\
&\leq \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \left[ \int_{\mathbb{R}} 2\pi\rho \left|f(x)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} 2\pi \left| \frac{d}{dx} f(x) \right|^2 d\xi \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho}}{2} \|f\|_2^2 + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2^2 .
\end{aligned}
$$

令 $\rho = \|f\|_2^{-2} \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2^2$，我们得到

$$
|f(x)|^2 \leq \|f\|_2 \left\| \frac{df}{dx} \right\|_2 . \tag{28}
$$

□

## 4. 概率论中的一维克利福德傅里叶变换 y

定义 4.1. 克利福德代数值函数 $f_X(x) = \sum e_{\Sigma}(f_X)_{\Sigma}(x)$ 称为实随机变量 $X$ 的克利福德代数概率密度函数$_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]}$，如果 $\forall\, \Sigma \subseteq [\![1,n]\!]$

$$
\int_{\mathbb{R}} (f_X)_{\Sigma}(x)dx = 1 \qquad \text{and} \qquad \{(f_X)_{\Sigma} < 0\} = \emptyset. \tag{29}
$$

这里，$(f_X)_{\Sigma}$ 是一个实概率密度函数。克利福德代数累积分布函数表示为

$$
f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x), \tag{30}
$$

其中，概率 P 与 $F_X$ 有关，定义如下

$$
F_X(x) = P(X \leq x). \tag{31}
$$

定义 4.2. 设 $X$ 是一个具有克利福德代数概率密度函数 $f_X$ 的实随机变量。$X$ 的 $\ell^{th}$ 阶矩定义为

$$
m_{\ell} = E[X^{\ell}] = \int_{\mathbb{R}} x^{\ell} f_X(x)dx. \tag{32}
$$

若令

$$
f_X(x) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_{\Sigma}(f_X)_{\Sigma}(x) \qquad \text{and} \qquad \int_{\mathbb{R}} x^{\ell}(f_X)_{\Sigma}(x)dx := E[X_{\Sigma}^{\ell}] = (m_{\ell})_{\Sigma},
$$

我们得到

$$
m_{\ell} = \int_{\mathbb{R}} x^{\ell} \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_{\Sigma}(f_X)_{\Sigma}(x)dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \int_{\mathbb{R}} x^\ell (f_X)_\Sigma(x)dx \\
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma E[X_\Sigma^\ell] \\
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma (m_\ell)_\Sigma .
\end{aligned}
$$

很容易看出，

$$
|m_\ell|^2 = E[X]\overline{E[X]} = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} (m_\ell)_\Sigma^2 . \tag{33}
$$

定义4.3。 设 $X$ 是一个实随机变量，其克利福德代数概率密度函数为 $f_X$。的特征函数 $\phi_X$： 实数域 $\longrightarrow C\ell_{p,\ q}$），定义为以下公式（与（15）比较）

$$
\phi_X(t) = E[e^{\mu t X}] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t x} dx = \mathcal{F}^\mu(f_X)(t). \tag{34}
$$

令 $f_X(x) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma (f_X)_\Sigma(x)$，则 $X$的特征函数可表示为

$$
\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \mathcal{F}^\mu(f_X)(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t x} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma (f_X)_\Sigma(x) e^{\mu t x} dx \\
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \int_{\mathbb{R}} (f_X)_\Sigma(x) e^{\mu t x} dx \\
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \int_{\mathbb{R}} (f_X)_\Sigma(x) e^{\mu t x} dx \\
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \mathcal{F}^\mu((f_X)_\Sigma)(t) \\
&= \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma (\phi_X)_\Sigma(t).
\end{aligned}
$$

由反演公式可得

$$
f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_X(x) e^{-\mu t x} dx = \mathcal{F}^{-\mu}(\phi_X)(t). \tag{35}
$$

由（34）、（30）和定义（23），可得

$$
\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \mathcal{F}^\mu(f_X)(t) \\
&= \mathcal{F}^\mu\left(\frac{d}{dx}F_X\right)(t) \\
&= -\mathcal{F}^\mu\left(F_X\right)(t)\mu t.
\end{aligned}
$$

因此，对于 $t \neq 0$

$$
\mathcal{F}^\mu\left(F_X\right)(t) = \frac{1}{t}\phi_X(t)\mu. \tag{36}
$$

定理 4.4。设 $\phi_X$ 和 $\psi_X$ 是随机变量 $X$ 的两个克利福德代数特征函数，定义如下：

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t x} dx \qquad \text{and} \qquad \psi_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g_X(t) e^{\mu t x} dt, \tag{37}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}} g_X(t)\phi_X(t) e^{-\mu t y} dt = \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_\Sigma f_X * (\psi_X)^{\diamondsuit}_\Sigma(y), \tag{38}$$

使用 $(\psi_X)^{\diamondsuit}_\Sigma(x) = (\psi_X)_\Sigma(-x)$

证明。将 $g_X$ 在 $C\ell_{p,q}$-基下展开；$g_X(x) = \sum e_\Sigma (g_X)_\Sigma(x)$。向前计算得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g_X(t)\phi_X(t) e^{\mu t x} dt &= \int_{\mathbb{R}} g_X(t) \left( \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t x} dx \right) e^{-\mu t y} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g_X(t) \left( \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t (x-y)} dx \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_\Sigma (g_X)_\Sigma(t) \left( \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t (x-y)} dx \right) dt \\
&= \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_\Sigma \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \int_{\mathbb{R}} (g_X)_\Sigma(t) e^{\mu t (x-y)} dt dx \\
&= \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_\Sigma \int_{\mathbb{R}} f_X(x) (\psi_X)_\Sigma(x-y) dx. \\
&= \sum_{\Sigma \subseteq [\![1,n]\!]} e_\Sigma f_X * (\psi_X)^{\diamondsuit}_\Sigma(y).
\end{aligned}$$

□

定理 4.5. 若 $X$ 是实随机变量，则克利福德代数特征函数 $\phi_X$ 存在 $\ell^{th}$ 阶导数，其表达式为

$$\frac{d^\ell}{dt^\ell}\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} x^\ell f_X(x) e^{\mu t x} dx \mu^\ell. \tag{39}$$

此外

$$m_\ell = E[X^\ell] = \frac{d^\ell}{dt^\ell}\phi_X(0)(-\mu)^\ell. \tag{40}$$

证明。对于 $\ell = 1$，直接计算可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_X(t) &= \frac{d}{dt}\left( \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t x} dx \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \frac{d}{dt}\left( e^{\mu t x} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{\mu t x} x dx \mu.
\end{aligned}$$

假设

$$\frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}}\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} x^{\ell-1} f_X(x) e^{\mu t x} dx \mu^{\ell-1}. \tag{41}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}}\phi_X(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\phi_X(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} x^{\ell-1} f_X(x) e^{\mu t x} dx \mu^{\ell-1}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^{\ell-1} f_X(x) \frac{d}{dt}\left(e^{\mu t x}\right) dx \mu^{\ell-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^{\ell} f_X(x) e^{\mu t x} dx \mu^{\ell}.
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}}\phi_X(t)(-\mu)^{\ell} = \int_{\mathbb{R}} x^{\ell} f_X(x) e^{\mu t x} dx. \tag{42}$$

Then

$$m_\ell = E[X^\ell] = \frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}}\phi_X(0)(-\mu)^{\ell}. \tag{43}$$

□

定义 4.6. 实随机变量 $X$在克利福德代数框架下的方差定义为

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = E[X^2] - (E[X])^2. \tag{44}$$

由式（43）， $\sigma$ 的 $X$ 方差可用克利福德代数特征函数表示为

$$\sigma^2 = \frac{d^2}{dt^2}\phi_X(0)(-\mu)^2 - \left[\frac{d}{dt}\phi_X(0)(-\mu)\right]^2 = \left[\frac{d}{dt}\phi_X(0)\right]^2 - \frac{d^2}{dt^2}\phi_X(0). \tag{45}$$

定理 4.7. 设 $X$ 为一个具有克利福德代数概率密度函数 $f_X = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma f_{\Sigma^\circ}$ 然后 $\forall \quad \Sigma \subseteq [\![1,n]\!]$ 的实随机变量。

$$1 \le \left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\right\|_2^2 \|\xi(\phi_X)_\Sigma\|_2^2 (m_2)_\Sigma. \tag{46}$$

证明。设

$$f_X = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma f_\Sigma = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma g_\Sigma^2. \tag{47}$$

海森堡不确定性原理 [6] 给出

$$\frac{\|g\|_2^4}{4} \le \|\xi\mathcal{F}^\mu(g_\Sigma)\|_2^2 \|x g_\Sigma\|_2^2. \tag{48}$$

我们有

$$\|f\|_1 = \|g\|_2^2 = 1, \tag{49}$$

and

$$\|xg_\Sigma\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 g_\Sigma^2(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\Sigma(x)dx = (m_2)_\Sigma. \tag{50}$$

根据帕塞瓦尔恒等式（22）

$$\begin{aligned}
\|\xi\mathcal{F}^\mu(g_\Sigma)\|_2^2 &= \left\|\mathcal{F}^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}g_\Sigma\right)\right\|_2^2 \\
&= 2\pi\left\|\frac{\partial}{\partial x}g_\Sigma\right\|_2^2 \\
&= \frac{\pi}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{f_\Sigma}}\frac{\partial}{\partial x}f_\Sigma\right\|_2^2 \\
&= \frac{\pi}{2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\frac{\partial}{\partial x}f_\Sigma\right\|_1.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\frac{\partial}{\partial x}f_\Sigma\right\|_1 &\leq \left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\right\|_2^2\left\|\frac{\partial}{\partial x}f_\Sigma\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\right\|_2^2\left\|\mathcal{F}^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}f_\Sigma\right)\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

则（48）变为

$$\begin{aligned}
1 &\leq \left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\right\|_2^2\left\|\mathcal{F}^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}f_\Sigma\right)\right\|_2^2(m_2)_\Sigma \\
&\leq \left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\right\|_2^2\|\xi\mathcal{F}^\mu(f_\Sigma)\|_2^2(m_2)_\Sigma \\
&\leq \left\|\frac{\partial}{\partial x}\ln(f_\Sigma)\right\|_2^2\|\xi(\phi_X)_\Sigma\|_2^2(m_2)_\Sigma.
\end{aligned}$$

□

## 5. 示例

i- 考虑一个实随机变量 $X$，它可能按照克利福德代数均匀分布出现。

$$f_X(x) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \mathbb{1}_{[\alpha_\Sigma,\beta_\Sigma]}. \tag{51}$$

我们有

$$\mathcal{F}^\mu\left(\mathbb{1}_{[\alpha_\Sigma,\beta_\Sigma]}\right)(t) = \begin{cases} \beta_\Sigma - \alpha_\Sigma & \text{if} \quad t = 0 \\ \dfrac{2}{t}\sin\left((\beta_\Sigma - \alpha_\Sigma)\dfrac{t}{2}\right)e^{\mu(\beta_\Sigma+\alpha_\Sigma)\frac{t}{2}} & \text{if} \quad t \neq 0. \end{cases}$$

由（37）可得

$$\phi_X(t)=\mathcal{F}^{\mu}\left(f_X\right)(t)=\begin{cases}\sum\limits_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\beta_\Sigma-\alpha_\Sigma & \text{if}\quad t=0\\ \sum\limits_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\dfrac{2}{t}\sin\left((\beta_\Sigma-\alpha_\Sigma)\dfrac{t}{2}\right)e^{\mu(\beta_\Sigma+\alpha_\Sigma)\frac{t}{2}} & \text{if}\quad t\neq 0.\end{cases}$$

$\phi_X$ 的每个实值系数的一阶和二阶导数为

$$\frac{d}{dt}(\phi_X)_\Sigma(0)=\mu\frac{\beta_\Sigma^2-\alpha_\Sigma^2}{2},\qquad\text{and}\qquad\frac{d^2}{dt^2}(\phi_X)_\Sigma(0)=\frac{\alpha_\Sigma^3-\beta_\Sigma^3}{3}. \tag{52}$$

Then

$$m_1=\frac{d}{dt}\phi_X(0)(-\mu)=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\frac{\beta_\Sigma^2-\alpha_\Sigma^2}{2}, \tag{53}$$

and

$$m_2=\frac{d^2}{dt^2}\phi_X(0)(-\mu)^2=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\frac{\beta_\Sigma^3-\alpha_\Sigma^3}{3}. \tag{54}$$

由（45），可得

$$\sigma^2=m_2-m_1^2=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\frac{\beta_\Sigma^3-\alpha_\Sigma^3}{3}-\left(\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\frac{\beta_\Sigma^2-\alpha_\Sigma^2}{2}\right)^2. \tag{55}$$

ii- 设 $Y$ 为一个具有如下概率密度函数的实随机变量

$$g_Y(x)=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\sqrt{\frac{\lambda_\Sigma}{\pi}}e^{-\lambda_\Sigma x^2}, \tag{56}$$

其中 $(\lambda_\Sigma)_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]}$ 是一个由严格正实数组成的有限序列。由（37）可得

$$\phi_Y(t)=\mathcal{F}^{\mu}\left(g_Y\right)(t)=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma\sqrt{\frac{\lambda_\Sigma}{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\lambda_\Sigma x^2}e^{\mu t x}dx=\sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma e^{-\frac{t^2}{4\lambda_\Sigma}}. \tag{57}$$

$\phi_Y$ 各实值系数的一阶和二阶导数为

$$\frac{d}{dt}(\phi_Y)_\Sigma(t)=-\frac{t}{2\lambda_\Sigma}e^{-\frac{t^2}{4\lambda_\Sigma}}, \tag{58}$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_Y)_\Sigma(t)=\left(\frac{t^2}{4\lambda_\Sigma^2}-\frac{1}{2\lambda_\Sigma}\right)e^{-\frac{t^2}{2\lambda_\Sigma}}. \tag{59}$$

Then

$$m_1=\frac{d}{dt}\phi_Y(0)(-\mu)=0, \tag{60}$$

and

$$m_2 = \frac{d^2}{dt^2}\phi_Y(0)(-\mu)^2 = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \frac{1}{2\lambda_\Sigma}. \tag{61}$$

由（58，59），我们得出

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \frac{1}{2\lambda_\Sigma}. \tag{62}$$

iii- 设 $Z$ 为一个具有概率密度函数的实随机变量。

$$h_Z(x) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \lambda_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x), \tag{63}$$

其中 $(\lambda_\Sigma)_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]}$ 是严格正实数的有限序列。由（37）可得

$$\phi_Z(t) = \mathcal{F}^\mu(h_Z)(t) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \int_{\mathbb{R}} \lambda_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)e^{\mu t x}dx = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_\Sigma - \mu t}. \tag{64}$$

$\phi_Y$ 的每个实值系数的一阶和二阶导数分别为

$$\frac{d}{dt}(\phi_Z)_\Sigma(t) = \frac{\lambda_\Sigma \mu}{(\lambda_\Sigma - \mu t)^2}, \tag{65}$$

and

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_Y)_\Sigma(t) = \frac{2\mu\lambda_\Sigma t - 2\lambda_\Sigma^2}{(\lambda_\Sigma - \mu t)^4}. \tag{66}$$

Then

$$m_1 = \frac{d}{dt}\phi_Y(0)(-\mu) = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \frac{1}{\lambda_\Sigma}, \tag{67}$$

and

$$m_2 = \frac{d^2}{dt^2}\phi_Y(0)(-\mu)^2 = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \frac{2}{\lambda_\Sigma^2}. \tag{68}$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \sum_{\Sigma\subseteq[\![1,n]\!]} e_\Sigma \frac{1}{\lambda_\Sigma^2}. \tag{69}$$

## 结论

本文介绍并探讨了一维克利福德傅里叶变换（1DCFT）的性质，并展示了其在推导相关不等式方面的实际应用。通过在克利福德代数框架下详细考察特征函数、期望值和方差，证明了1DCFT在概率论中的有效性。这些结果代表了使用克利福德代数发展概率论的重要进展。该研究建议未来对涉及克利福德代数概率密度函数及其特征函数的不确定性原理开展研究。

## 声明

作者贡献。本文是两位作者共同合作的成果。两位作者均已阅读并批准最终稿件，并对编辑和匿名审稿人表示感谢。

利益冲突。作者声明，他们不存在任何利益冲突。

数据和材料的可用性。不适用。

## 参考文献

[1] M Bahri 和 R Ashino。《连续四元数小波变换的不确定性原理及对数不确定性原理的一种变体》。载于《抽象与应用分析》，第2017卷。Hindawi，2017年。[2]M Bahri 等。《一维四元数傅里叶变换》。载于《物理学杂志：会议系列》，第1341卷，第062004页。IOP Publishing，2019年。[3] M Bahri 等。《一维四元数傅里叶变换及其在概率论中的应用》。《Symmetry》，15(4):815，2023年。[4] F Brackx 等。《克利福德分析中的傅里叶变换》。载于《成像与电子物理进展》，第156卷，第55–201页。Elsevier，2009年。[5] F Brackx 等。《四元数与克利福德傅里叶变换及小波的历史》。《四元数与克利福德傅里叶变换及小波》，27:XI–XXVII，2013年。[6] K Chandrasekharan。《经典傅里叶变换》。Springer Science & Business Media，2012年。[7] WK Clifford。《格拉斯曼广延代数的应用》。《美国数学杂志》，1(4):350–358，1878年。[8] Y El Haoui 和 S Fahlaoui。《实克利福德代数中的多诺霍–斯塔克不确定性原理》。《应用克利福德代数进展》，29(5):94，2019年。[9] TA Ell。《用于分析二维线性时不变偏微分系统的四元数傅里叶变换》。载于《第32届IEEE决策与控制会议论文集》，第1830–1841页。IEEE，1993年。[10] J Gilbert 和 M Murray。《调和分析中的克利福德代数与狄拉克算子》。第26号。剑桥大学出版社，1991年。[11] E Hitzer。《四元数域上的四元数傅里叶变换及其推广》。《应用克利福德代数进展》，17(3):497–517，2007年。[12] E Hitzer。《四元数傅里叶变换的方向不确定性原理》。《应用克利福德代数进展》，20(2):271–284，2010年。[13] E Hitzer。《OPS-QFT：一种基于使用一个或两个一般纯四元数进行正交平面分解的新型四元数傅里叶变换》。载于《AIP会议论文集》，第1389卷，第280–283页。美国物理联合会，2011年。

[14] E Hitzer。《实克利福德代数中的克利福德傅里叶变换》。载于 Klaus G¨urlebeck、Tom Lahmer 和 Frank Werner 编，《数字会议录：计算机科学与数学在建筑和土木工程中的应用国际会议》，2012年7月4日至6日，魏玛包豪斯大学，2017年。

[15] E Hitzer. 四元数与克利福德傅里叶变换. Chapman and Hall/CRC, 2021年.[16] E Hitzer 和 M Bahri. 多向量场上的克利福德傅里叶变换，以及维数 n= 2 (模 4) 和 n= 3 (模 4) 的不确定性原理. 应用克利福德代数进展, 18:715–736, 2008年.[17] E Hitzer 和 SJ Sangwine. 四元数的正交二维平面分裂与可转向四元数傅里叶变换. 载于《四元数与克利福德傅里叶变换及小波》，第 15–39 页. Springer, 2013年.[18] P Lounesto. 克利福德代数与旋量. 伦敦数学学会讲义系列. 剑桥大学出版社，第 2 版，2001年。