arXiv:2305.02056v1 [cs.CC] 3 May 2023

定量第二类逻辑查询的近似求值

Jan Dreier RobertGanian* Thekla Hamm†维也纳工业大学 维也纳工业大学 乌得勒支大学 dreier@ac.tuwien.ac.at rganian@gmail.com t.l.s.hamm@uu.nl

摘要

Courcelle 定理及其针对团宽的扩展，塑造了精确参数化算法领域，并被广泛视为算法元定理的典范。过去十年间，人们对开发参数化近似算法的兴趣日益浓厚，旨在解决那些无法由 Courcelle 定理刻画的问题；尤其是，这些问题被认为在相关宽度参数下并非固定参数可 tractable。

我们提出了 Courcelle 定理的一种推广，可为任何能够由一种扩展逻辑刻画的问题提供高效的近似方案。我们将这种逻辑称为 ∀CMSO，它能够通过所谓的权重比较，对集合变量的大小作出逻辑陈述。该逻辑通过相关变量的量词交替深度来控制权重比较：对零交替变量允许完整比较，对一次交替变量则只允许有限比较。我们证明，所提出的框架精准把握了可处理性的边界：一方面，它能够描述广泛的可近似问题；另一方面，在公认的复杂性假设下，我们证明无法放宽该逻辑的限制。

我们的近似方案的运行时间关于 $1/\varepsilon$为多项式级，使我们能够在更快的近似算法与较慢的精确算法之间实现完整的插值。这提供了一个统一框架，用于解释以树宽和团宽为参数的图问题，以及子集和、背包等经典非图问题的可处理性全貌。

*感谢奥地利科学基金（FWF）START 项目 Y1329 的资助
†感谢奥地利科学基金（FWF）项目 J4651-N 的资助

目录

1 引言 **2**
1.1 贡献概述.2 1.2 证明技术与技术挑战.8 1.3 相关工作.13

2 预备知识 **13**
2.1 图.13 2.2 团宽.14 2.3 树宽.15

2.4 逻辑.15

3 元定理与扩展逻辑 17
3.1 基本优化.18 3.2 添加权重比较.19 3.3 我们的可处理片段.20 3.4 近似.20

4 我们的算法元定理 **24**

5 蕴含式 特定问题 25
5.1 基于数值的基本问题.26 5.2 均等性.28 5.3 有界度顶点删除.30 5.4 容量约束问题.
31 5.5 图模体.33

6 精确扩展 扩展的 Feferman–Vaught 35
6.1 表公式的定义.35 6.2 组合.35 6.3 细粒度组合.43

7 近似扩展 Feferman–Vaught 44
7.1 近似表的定义.44 7.2 组合.45

8 表计算 **49**

9 从表中得出答案 **53**

10 最终算法 6410.1 我们的算法元定理的证明.69

11 更一般公式的困难性 72

1 引言

Courcelle 的著名定理 [8] 表明，所有可用单子二阶逻辑（MSO_2）表达的问题，都可以在线性时间内在有界树宽的图类上求解。其现代表述 [2, 10] 将这一结果加强到可用 $LinECMSO_2$,表达的问题，即对于给定的 $CMSO_2$ 公式[1] 及其自由集合变量，要求找到自由变量的一个满足赋值，使给定的线性函数达到最优。结合针对有界团宽图类上 $LinECMSO_1$-可定义问题的变体 [10], ，这些著名结果被视为算法元定理的典范——这类普适性定理表明，在结构化输入上，一大类计算问题具有可处理性。

虽然 CMSO 扩展了单子二阶逻辑（MSO），使其能够比较模固定常数的集合大小，但这种形式体系最大的缺点或许在于，它无法在标准算术（即非模运算）意义下比较集合大小。这使得该框架无法表达涉及集合大小、超出简单最大化或最小化的命题，例如 Equitable Coloring [4, 37], Capacitated Vertex Cover [30] or Bounded Degree Vertex Deletion [26]。这确实有其充分理由：已有公认的下界排除了在以树宽和查询大小为参数时，对包含大小比较的简单查询进行固定参数 tractable 求值的可能性。不过，尽管相关归约排除了处理关于集合大小的精确陈述的可能性，但在许多值得关注的情形中（尤其是受实际应用启发的情形），以近似意义比较集合大小就已绰绰有余。

人们提出了 LinECMSO 的许多扩展，纳入了对集合大小的一定程度的访问 [34, 第1.2]小节，同时以更弱的可处理性概念等为代价，换取更强的表达能力。在这项工作中，我们统一探究一个问题：能否——以及在多大程度上——强化 Courcelle 定理（针对树宽和团宽上的 LinECMSO），使其也纳入标准算术中对集合大小和权重的精确与近似优化及比较。我们发现，问题的可处理性与允许的近似程度之间存在明确的权衡。这一统一框架重新证明了许多精确和近似结果，并刻画了许多定义在有界树宽或有界团宽图上的其他（精确和近似）问题的复杂度（见第5节）。

1.1 我们贡献的概述

Courcelle 定理最具一般性的表述或许是：$LinECMSO_1$-查询可在有界树宽或团宽的图类上高效求值。由于我们的形式体系扩展了这一概念，下面先对其加以定义。一个 $LinECMSO_1$-查询由计数单子二阶逻辑（$CMSO_1$）中的公式 $\varphi(X_1 \dots X_k)$ 和一个优化目标 $\hat{}t(X_1 \dots X_k)$组成；任务是在某个（可能是顶点加权的）输入图 G [10] 上，找到自由集合变量 $X_1, \dots, X_k$ 的一个满足赋值，使 $\hat{}t$ 最大。粗略地说，优化目标是与 $X_1, \dots, X_k$ 相关联的基数和顶点权重的线性组合。

[1]该框架通常被称为“LinEMSO”，但在此我们选择有意加入“C”，以强调该框架支持 CMSO 公式 [24, 12]。

一种自然的尝试是将 Courcelle 定理扩展到能够处理关于集合大小的陈述：除了优化一个目标之外，还允许对如下形式的线性权重项 进行比较

$$t(X_1 \dots X_\ell) := a + \sum_{1 \le i,j \le \ell} a_{ij} w_i(X_j)$$

作为该逻辑的原子构件；具体而言，这些权重项与 LinECMSO$_1$-查询的优化目标具有相同的结构。对于加权图，这类项会对集合 X_j 中所有顶点的第 i 个权重 w_i 求和，再乘以系数 a_{ij} 并加上偏移量 a。我们将由此得到的扩展逻辑称为 CMSO[$\leqslant$]（将在第 3.2 节中正式定义）。在 CMSO[$\leqslant$] 中，例如，我们可以使用比较两个集合基数的原子公式 $|X| \le |Y|$。因此，CMSO[$\leqslant$] 可以轻松表达许多有趣的问题，例如前面提到的 Equitable Coloring、 Capacitated Vertex Cover 和 Bounded Degree Vertex Deletion；已知这些问题在以树宽为参数时均为 W[1]-困难。事实上，正如我们将在定理 20 中看到的，CMSO[$\leqslant$] 甚至可以表达在有界深度树上为 NP-困难的问题。换言之，这种逻辑过于强大，因此我们无法期望存在 CMSO[$\leqslant$] 的固定参数求值算法。

近似框架。 因此，我们转而研究近似。为此，我们遵循Dreier和Rossmanith针对一阶逻辑中近似大小比较所采用的形式体系 [16], ，并考察在给定一个较小的“精度界” $0 < \varepsilon \le 0.5$内对约束作微小调整时，解可能会如何变化。例如，考虑 Bounded Degree Vertex Deletion 问题：求一个最小顶点集 W ，使得删除 W 后最大度不超过输入指定的整数 d，其中值得关注的情形是 d 很大。该问题可视为一个最小化问题，其可行解由以下CMSO[$\leqslant$]约束描述

$\varphi(X) := \forall x \notin X\ \forall Y$: ($|Y| \le d$) $\vee$ (“Y不是删除 X后 x 的邻居集合”)。

我们称公式的$(1+\varepsilon)$-放宽 或$(1+\varepsilon)$-收紧 是指将所有比较分别放宽或加强因子$(1+\varepsilon)$。在我们的例子中，这对应于以下两个CMSO[$\leqslant$]公式（略去算术细节）：

$\forall x \notin X\ \forall Y$: （$|Y| \le$ （$1+\varepsilon$） $\cdot\, d$） $\vee$ （“Y删除 X后，并非 x 的邻居集合”），

$\forall x \notin X\ \forall Y$: （$|Y| \le$ （$1-\varepsilon$） $\cdot\, d$） $\vee$ （“Y删除 X后，并非 x 的邻居集合”）。

显然，放宽后的（或收紧后的）约束比原始约束稍微容易（或困难）满足，因此，相较于原始约束，我们可能会找到更小的删除集 W；而相较于收紧后的约束，这些删除集还可能更小。不过，只有在系数发生 $(1+\varepsilon)$ 扰动，导致最小解被移除或出现更小的解时，放宽后的约束与收紧后的约束所对应的最优解才会不一致。在许多情况下，以这种近似方式回答查询几乎和给出精确答案一样有用，因为基于大数值的约束往往只是粗略估计（例如，顶点 v 的容量是否恰好为 1000，还是 998 也可以？）。

由于当以树宽 [3], 为参数时， Bounded Degree Vertex Deletion 是 W[1]-困难的，因此我们无法期望在固定参数可处理时间内找到该问题的一个极小解。我们即将介绍的算法元定理可以在时间 $f(|\varphi|, \mathsf{cw}(G)\ \varepsilon)\cdot d^{0.001}\cdot|V(G)|^2$ 内找到一个集合 W^+ ，使其至少与最优解一样好，但可能不满足约束（即，对于公式的长度、 G 的团宽以及精度 ε 而言，它是固定参数可 tractable 的；其中数字按单个符号计数）。不过，我们保证 W^+ 满足 $(1+\varepsilon)$-放宽后的约束，因此，如果允许约束有一点“余量”，我们的答案 W^+ 就足够好了。因此，在我们的例子中，删除 W^+ 后得到的图的最大度至多为 $(1+\varepsilon)\cdot d$ ，并且 W^+ 小于或等于任何使度数达到 d 的删除集。

有时，即使只是稍微违反约束，也可能造成严重后果。对于这种情况，我们的算法元定理还会返回一个集合 W^- ，它肯定满足约束，但可能不如最小解。尽管如此，我们的算法保证， W^- 至少与满足收紧后的约束 $(1+\varepsilon)$ 的任意解一样好。因此， W^- 优于任何满足较小“安全裕度”的解。在我们的示例中，删除 W^- 后得到的图的最大度至多为 d ，而且 W^- 小于或等于任何将度降至 $(1-\varepsilon)\cdot d$ 的删除集。

一般来说，我们的算法会返回两个集合 W^- 和 W^+，其中

- W^- 满足所有约束，并且至少与收紧后的约束的最优值 _ 一样好，

- W^+ 满足所有放宽后的约束，并且至少与原始查询的最优值一样好。

我们可以将 W^- 称为优化问题的 $(1+\varepsilon)$-保守 解，将 W^+ 称为优化问题的 $(1+\varepsilon)$-积极解。我们知道，计算上无法获得一个既满足约束又达到最优值的解，但保守解和积极解使我们能够在这两项要求之间实现细致的权衡（见图 1）。

近似解的精确定义见第 3.4 节中的定义 3。我们认为，这一概念构成了一个稳健的框架，能够清晰地刻画许多自然的近似问题。例如，将已知的近似结果应用于 Bounded Degree Vertex Deletion 以及例如图上有界树宽的 Capacitated Dominating Set或 Equitable Coloring [36] ，并转化到我们的框架中（另见第5节），恰好对应于为该问题计算（$1+\varepsilon$）-积极解 W^+ 。此外，我们还将 Dreier和Rossmanith [16] 的概念从判定查询自然地推广到了优化查询。

与其他近似框架的关系。请注意，我们的概念不同于大多数近似算法所采用的近似概念。

- 通常，我们致力于为优化问题寻找满足给定约束的解，并保证其相对于最优解的偏差不超过某个乘法因子，这一偏差根据某项优化目标来衡量。最优解与所求解之间的比值称为<滔style id='2'>近似比。我们可以将这种情形称为<滔style id='4'>优化目标近似。



图 1：我们的近似算法给出的两种答案示意图。保守解仍满足原始约束，而积极解仍满足放宽后的约束。如果放宽后的约束与收紧后的约束对应的最优解相同，我们就能保证得到一个最优解。

- 在我们的设定中，解的界由对问题约束进行轻微扰动后可获得的最优值决定。我们可以将这种情形称为<滔style id='2'>约束近似。

在约束近似设置中，（保守）解的近似比可能差到任意程度，只要对约束稍作改变就会导致解的质量大幅下降。另一方面，也可能出现另一种情况：对约束稍作改变并不会降低解的质量；此时，约束近似会返回最优解，而优化目标近似则未必如此。因此，通常而言，优化目标近似与约束近似互不包含，我们认为这两个概念都值得研究。对于同样能够刻画 NP- 困难决策 问题（这些问题可能无法直接表述为优化问题）的基于逻辑的元定理，自然可以考虑约束近似。

寻找合适的片段。 或许令人意外的是，我们证明了对于逻辑 CMSO[≦]，无法得到关于约束近似的元定理。事实上，我们证明，即使精度为常数（且可以任意差），对 CMSO[≦]-查询 φ 进行近似求值，在参数为 $|\varphi|$ 时，即使在路径类上也是 W[1]-困难的（定理19）。不过，仍有希望。我们注意到，许多值得关注的问题都可以只通过集合之间的比较来描述，这些集合要么是自由变量，要么以较浅的方式量化。例如， Equitable Coloring 的自然编码只使用颜色数为 ℓ的情况下自由变量之间的比较。

$\varphi(X_1 \dots X_\ell)$ = （“所有成对元素的集合大小相等（± 1）”） $\wedge$ （“这些集合构成一个 ℓ-着色”）

另一方面，对于上述的 Bounded Degree Vertex Deletion 问题，或者对于诸如 Capacitated Dominating Set 和 Ca-pacitated Vertex Cover等问题的编码，我们只需要获取自由变量和最外层全称量化集合的基数（有关这些问题的编码，请参见下文的图 2 和第5节）。

通过跟踪自由集合变量的近似大小，我们可以证明，如果将范围限制为仅允许在自由变量之间进行比较的公式，那么近似求值问题就是固定参数可 tractable 的。这将带来一种近似

例如，算法适用于 Equitable Coloring，但不适用于上述列出的其他示例。另一方面，令人惊讶的是，我们证明，如果进一步允许涉及最外层全称量化集合的比较，那么近似求值将变得难以处理（定理19）。因此，乍一看，分界线似乎如下面的图 2 所示。然而，我们希望定义一种能够刻画上述可处理的近似问题的逻辑，而仅仅将比较限制在浅层量词上，并不足以刻画这些问题——我们必须更深入地考察公式的结构，才能划定可处理性与困难性之间的界限。

$$\underbrace{\varphi(X_1\ X_2\ \cdots\ ) = \forall Y_1\ \forall Y_2\ \ \ldots}_{\text{通常用于比较}}\ \underbrace{\exists Z_1\ \forall Z_2\ \ \ldots}_{\text{通常不用于比较}}$$

$$\underbrace{\varphi(X_1\ X_2\ \ \ldots\ )}_{\substack{\text{comparisons allowed}\\ \text{(first estimate)}}} = \underbrace{\forall Y_1\ \forall Y_2\ \ \ldots\ \ \exists Z_1\ \forall Z_2\ \ \ldots}_{\substack{\text{comparisons forbidden}\\ \text{(first estimate)}}}$$

图 2：上：许多自然问题的编码只使用对最外层量化集合的大小比较。下：然而，第一类可处理公式的初始估计并不适合刻画这些问题。

分块 CMSO。 在这方面，我们的核心洞见是，困难性源于将全称量化变量的基数彼此比较的能力。事实上，结果表明，禁止此类交互是对 Courcelle 定理进行富有表达力的扩展的主要前提；该扩展允许对权重项进行近似比较。我们的扩展围绕一种称为 分块 *CMSO* 的逻辑展开。事实证明，它足以刻画许多已知可近似求解的重要问题，以及更多此前尚不知是否可近似求解的问题，同时又足够弱，仍能支持高效的近似求值算法。

虽然我们会在第 3.3 节正式定义 分块 *CMSO*（记作 $\forall$CMSO），但现在先给出一个非正式定义。请记住，CMSO[$\leqslant$]扩展了 CMSO，还允许将权重项之间的大小比较作为原子公式。例如，原子公式

$$|X_1| + 2|X_2| < 100 + |Y|$$

将含有变量 X_1、X_2 的左侧权重项与含有变量 Y 的右侧权重项进行比较。现在，$\forall$CMSO 是 CMSO[$\leqslant$] 的一个片段，其中包含所有能够通过析取、合取和存在量化分解为称作块公式 的子公式的公式，这些块公式满足三个性质。

- 每个块公式的形式为 $\forall Y_1 \ldots \forall Y_k\ \varphi(X_1 \ldots X_\ell Y_1 \ldots Y_k)$，其中 X_1、.....、X_ℓ 是自由集合变量，而 φ 是一个任意的 CMSO[$\leqslant$] 公式，其权重项中仅含自然数系数。

- φ 的所有权重项中，除至多一个外，其余都只涉及来自 X_1、...、X_ℓ 的集合变量（我们称这类权重项为存在量化）。

例外权重项可能只涉及来自 X_1、…、X_ℓ、Y_1、…、Y_k 的变量（我们称这类权重项为全称量化）。

值得注意的是，∀CMSO 仅限制带权重比较的公式结构，因此每个 CMSO公式 也是一个 ∀CMSO公式。因此，每个 LinECMSO 查询都可以被视为一个退化的 ∀CMSO 优化查询，其中只有一个 Block，且完全不包含权重比较。

让我们通过一个示例问题来说明这个定义。对于两个自然数区间 $\sigma = [\ell_\sigma, \dots, r_\sigma]$ 和 $\rho = [\ell_\rho, \dots, r_\rho]$，$(\sigma,\rho)$-Domination 问题要求在图中找到一个（大小最小或最大的）顶点集 W，使得对于每个顶点$v \in W$，其在 W中的邻居数属于值域 σ；而对于每个其他顶点 $v \notin W$，其在 W 中的邻居数属于值域 ρ。例如，当 $\sigma = \{0\}$ 和 $\rho = \mathbb{N}$时，这描述了 Independent Set；当 $\sigma = \mathbb{N}$ 和 $\rho = \mathbb{N} \setminus \{0\}$时，这描述了 DominatingSet。下面的 CMSO[≤]-公式[2] 表达了这个问题。

$$\varphi(X) = \Big[\forall x \in X\ \forall Y : \big((\ell_\sigma \le |Y|) \wedge (|Y| \le r_\sigma)\big) \vee \text{“}Y \text{ is not Neighborhood}(x) \cap W\text{”}\Big] \wedge \Big[\forall x \notin X\ \forall Y : \big((\ell_\rho \le |Y|) \wedge (|Y| \le r_\rho)\big) \vee \text{“}Y \text{ is not Neighborhood}(x) \cap W\text{”}\Big].$$

请注意，该公式不属于 ∀CMSO，因为在每个块（以方括号标记）中，都有两个包含全称量化变量 Y 的权重项。在定理19中，我们证明了这类问题很难近似[3]。然而，例如，如果 $\ell_\sigma = 1$，那么我们可以将 $\ell_\sigma \le |Y|$ 替换为纯CMSO公式“Y 非空”；如果 $r_\rho = \infty$，则可以将 $|Y| \le r_\rho$ 替换为纯CMSO公式“真”。在这种情况下，我们得到公式

$$\varphi(X) = \Big[\forall x \in X\ \forall Y : \big(\text{“}Y \text{ is nonempty”} \wedge (|Y| \le r_\sigma)\big) \vee \text{“}Y \text{ is not Neighborhood}(x) \cap W\text{”}\Big] \wedge \Big[\forall x \notin X\ \forall Y : (\ell_\rho \le |Y|) \vee \text{“}Y \text{ is not Neighborhood}(x) \cap W\text{”}\Big].$$

该公式属于 ∀CMSO，因为在每个块中，Y 只出现在一个权重项中。

近似算法元定理。作为主要结果，我们针对树宽和团宽，建立了 Courcelle 定理向 ∀CMSO 的所需推广。我们的元定理的完整形式化表述将在必要的预备知识之后，于专门的第4节中给出。下面，我们给出一个简化版本，以突出这些结果的主要特点。

定理 1（简化的主要结果）。给定一个 $\forall\mathrm{CMSO}_1$-或 $\forall\mathrm{CMSO}_2$-查询 (φ, t)、精度 $0 < \varepsilon \le 0.5$ 和一个图 G，我们可以分别在时间 $\mathcal{O}^*\big((\frac{1}{\varepsilon})^{f(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))}\big)$ 或 $\mathcal{O}^*\big((\frac{1}{\varepsilon})^{f(|\varphi|,\mathrm{tw}(G))}\big)$内计算出一个 $(1+\varepsilon)$-积极解和一个 $(1+\varepsilon)$-保守解，其中 f是某个可计算函数，而 $\mathcal{O}^*$ 隐藏了多项式因子。

[2]出于第 3 节讨论的技术原因，我们倾向于不在比较前使用否定，这使这些公式看起来略显别扭。[3]为简化归约，我们的证明未能证明 σ-ρ-Domination specifically 的近似困难性，但对结构相似的公式仍然成立。

由于不含权重比较的 ∀CMSO-查询恰好刻画了 LinECMSO-查询，而且对于这类查询，近似解与精确解一致，因此定理 1 可视为在 ε 设为常数时，针对团宽和树宽的 LinECMSO 元定理的推广。此外，我们的结果意味着，对于有界宽度图上由固定的 ∀CMSO-查询表达的所有问题，都存在全多项式时间近似方案（FPTAS）；同时，也存在用于精确计算 ∀CMSO-查询的 XP 时间算法（见第4节）。 □

总体而言，定理 1 涵盖了广泛的问题；当以树宽或团宽为参数时，这些问题是 W[1]-困难的，包括 Bounded Degree Deletion、 EquitableColoring、 Capacitated Dominating Set 和 Graph Motif。我们还给出了更一般的运行时间界，更适合处理权重以二进制编码的图，使我们能够直接表达并近似经典的 NP-困难基于数值的问题，例如 Subset Sum 和 Knapsack。这些应用以及元定理的其他应用均在第5节中详细介绍。我们的主要结果不仅为所有这些算法提供了统一的理论依据（在某些情况下，还揭示了此前未知的可处理性结果），而且还给出了在精度 ε与运行时间之间可灵活权衡的方案。

最后，人们或许会问，我们的逻辑 ∀CMSO所施加的限制是否确有必要。这些限制规定，最外层的全称量化变量只能出现在单个比较的一侧的权重项中（对每个块而言）。我们证明，只需稍微放宽这一限制，允许最外层的全称量化变量出现在两个 比较中，就会导致对每个常数精度 α，即使在路径上，近似也具有 W[1]-困难性（定理19）。在深度为三的树上，对这类放宽后的公式进行精确求值也会变成 NP-困难（定理 20）。这表明， ∀CMSO 是在有界树宽或团宽的图上进行近似的“恰当”逻辑。 □

1.2 证明技术与技术挑战

基本思路。 对于有界树宽或团宽图上的公式，业界成熟的评估方法是通过动态规划计算所谓的 q-类型，也就是计算所有量词嵌套深度不超过某个给定值 q 的公式的真值。对于优化问题，我们将这一概念扩展到集合，并为每个 q-类型保留一个满足该类型且使目标函数最优的集合。这类 q-类型的大小仅取决于 q 和图的宽度（经过语法规范化后），并且可以通过团宽表达式中的重新着色和连接操作轻松传递。值得关注的是不相交并操作，此时我们利用 ***Feferman–Vaught*** 定理 [20] 来传递 q-类型。假设我们有图 G_1, G_2，已知它们的 q-类型，并且我们想判断

$$G_1 \cup G_2 \models \exists X \varphi(X).$$

该定理给出 我们一个小的“Feferman–Vaught 集” FV(φ)，使得这等价于

$$G_1 \models \exists X \varphi_1(X) \quad \text{and} \quad G_2 \models \exists X \varphi_2(X) \quad \text{for some } (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{FV}(\varphi).$$

从 q 类型的 G_1 和 G_2 中，我们可以知道 $G_1 \models \exists X \varphi_1(X)$ 和 $G_2 \models \exists X \varphi_2(X)$ 是否为真，而上述组合规则告诉我们，对于 $G_1 \cup G_2$ 的 q 类型，是否应将 $\exists X \varphi(X)$ 标记为真。

对于我们的逻辑，我们必须扩展这一机制，使其也能考虑权重比较。因此，假设例如 $n = |V(G_1)| + |V(G_2)|$，我们想知道对于某个 $0 \leq m \leq n$ 是否

$$G_1 \cup G_2 \models \exists X \varphi(X) \wedge |X| = m.$$

利用 Feferman–Vaught 定理，并枚举大小为 m 的集合拆分为两个大小分别为 m_1 和 m_2的集合的所有方式，得到等价表述

$$G_1 \models \exists X \varphi_1(X) \wedge |X| = m_1 \quad \text{and} \quad G_2 \models \exists X \varphi_2(X) \wedge |X| = m_2$$
$$\text{for some } (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{FV}(\varphi) \text{ and } m_1, m_2 \in \mathbb{N} \text{ satisfying } m_1 + m_2 = m.$$

请注意，虽然此前 q-类型的大小是常数，但现在我们必须考虑 m的每个可能取值，因此需要存储大小为 $\mathcal{O}(n)$ 的记录。若要跟踪的不只是一个阈值，而是 k 个阈值，记录大小就会变成 $\mathcal{O}(n^k)$，对于 FPT 算法而言过大。

对数值进行舍入。 自然地，在尝试解决以树宽或团宽为参数的单个问题时，也会出现上述问题，例如 Lampis [36]所做的那样。为了解决这个问题，Lampis 并未存储阈值 m 的所有可能取值，而只考虑形如 $(1+\delta)^i$，$i \in \mathbb{N}$ 的数值；在 0 到 n 的值域内，这类数值大约有 $\log(n)/\log(1+\delta) \approx \log(n)/\delta$ 个。假设我们存储以下问题的答案

$$G_1 \models \exists X \varphi_1(X) \wedge |X| \leq m_1 \quad \text{and} \quad G_2 \models \exists X \varphi_2(X) \wedge |X| \leq m_2$$

对于所有形如 $(1+\delta)^i$ 的数 m_1，m_2。这意味着我们只需存储大小大约为 $\log(n)/\delta$ 的记录，但这也意味着，对于 m_1 和m_2，我们知道这些陈述在 真 和 假 之间跳变时的“临界阈值”仅存在一个 $(1+\delta)$ 的倍数误差。由于乘法误差在加法下保持不变，我们可以使用 Feferman–Vaught 定理，得到以下陈述的“临界阈值” m

$$G_1 \cup G_2 \models \exists X \varphi(X) \wedge |X| = m$$

精确到 $(1+\delta)$ 的因子。然而，两个形如 $(1+\delta)^i$ 的数相加，结果未必仍具有 $(1+\delta)^i$ 的形式，因此我们必须再次将阈值舍入为 $(1+\delta)^i$ 的形式。这会使我们掌握的信息再产生一个 $(1+\delta)$ 因子的误差。这些误差会随时间累积，因此进行 d 次不交并会导致 $(1+\delta)^d$ 的误差。Lampis [36]通过一种复杂的数据结构，以随机化方式解决了这个问题；该结构称为近似加法树，采用加权随机舍入，并通过细致的概率分析，以高概率界定误差。我们采用一种概念上更简单的确定性方法，即所谓的平衡团宽表达式，它是深度约为 $\log(n)$ 的团宽表达式。这使误差大致被限制在 $(1+\delta)^{\log(n)}$ 以内。通过选择 $\delta \approx \varepsilon/\log(n)$，我们的记录仍足够小，并能得到所需的最终误差 $1+\varepsilon$。值得一提的是，Lampis 也指出，可以使用平衡分解来推导他的一些结果（并感谢一位匿名审稿人的反馈），并在完整版的 [36, 第4节]讨论了这两种方法各自的优缺点。

下面描述查询求值问题中隐含的记录。若 τ_1 是输入公式中的¯权重项 X ，表示一个变量元组，那么对于每个公式 φ （量词秩较小）以及所有形如 $(1+\delta)^i$ 的阈值 $g_{t,\leq}$， $g_{t,\geq}$ ，我们的记录都会近似表示以下陈述的真值

$$\exists \bar{X} \colon \varphi(\bar{X}) \wedge \bigwedge_{t \in \tau_1} t(\bar{X}) \leq g_{t,\leq} \wedge t(\bar{X}) \geq g_{t,\geq}.$$

¯对于求解决策问题，只需对 X进行存在量化；但由于我们¯主要进行优化，实际上应当存储使目标函数达到最大值的 X 赋值。在这两种情况下，都可以调整 Feferman–Vaught 定理来传播这些记录，从而每次应用最多引入 $1+\delta$ 的乘法“精度损失”。

更深入的比较。 虽然这需要一些谨慎的技术考量，但到目前为止，我们讨论的内容在概念上仍相当直接，且范围有限。它允许我们对带有自由变量（或最外层存在量化变量）的比较的近似公式进行处理，例如 Equitable Coloring，但无法涵盖诸如 Bounded Degree Deletion、 Capacitated Vertex Cover 或
Capacitated Dominating Set之类的问题，而这些问题似乎需要更深入的比较。

$$\varphi(\underbrace{X_1\ X_2\ \ldots}_{\substack{\text{comparisons allowed}\\ \text{(first estimate)}}}) = \underbrace{\forall Y_1\ \forall Y_2\ \ldots\ \exists Z_1\ \forall Z_2\ \ldots}_{\substack{\text{comparisons forbidden}\\ \text{(first estimate)}}}$$

¯为了涵盖这些更深入的比较，我们不仅存储是否存在满足特定大小界限的 X 某种¯类 q，还存储是否所有其他某些 q类的 Y 也满足其他大小界限。令 τ_1 为我们想要近似求值的公式中较简单的存在量化权重项，并令 τ_2 为该公式的全称权重项，每个 Block 中至多有一个。我们进一步用¯ ¯ ¯ ¯CMSO$_1$(σ, q, XY)表示所有量词秩至多为 q、自由变量来自 XY且签名为 σ 的 CMSO$_1$公式（这样的公式只有少数几个）。

我们的第一项核心技术贡献，是计算出记录，使其能够对所有形式为（$1+\delta$）^{i} 的阈值$g_{t,\leq}$， $g_{t,\geq}$， $g_{t,\psi,\leq}$， $g_{t,\psi,\geq}$ 近似计算公式的真值

$$\exists \bar{X} \Big(\bigwedge_{t \in \tau_1} t(\bar{X}) \leq g_{t,\leq} \wedge t(\bar{X}) \geq g_{t,\geq} \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{t \in \tau_2} \bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \psi(\bar{X}\bar{Y}) \vee \big(t(\bar{X}\bar{Y}) \leq g_{t,\psi,\leq} \wedge t(\bar{X}\bar{Y}) \geq g_{t,\psi,\geq} \big) \Big). \quad (1)$$

与之前较为简单的方法相比，第二行是新增的。它对所有全称项 t 和公式 ψ 强制要求：对于满足 $\neg\psi$ 的所有元组 Y， t 的值都被限制在 $g_{t,\psi,\geq}$ 和 $g_{t,\psi,\leq}$ 之间。我们的第二项核心技术贡献表明，任何 ∀CMSO 查询的近似答案都可以从此类记录中导出。□

主要证明结构。 下面我们将更详细地介绍如何把这些任务分解为多个步骤，其中每一步都颇具挑战性。

- 在第 6 节中，我们首先将记录视为精确的（也就是说，记录包含所有阈值对应的精确真值，而不只是取整后的值）。我们以 Feferman–Vaught 定理为基本构件，描述了一种在不交并上递推这些记录的过程（定理 13）。正确性证明通过对这些项进行细致的句法重写和语义重写来完成。

- 在第 7 节中，我们证明，即使将输入假设放宽到仅要求输入记录是近似的（也就是说，记录只能涉及可表示为 $(1+\delta)$ 的某个幂的“取整后数值”），我们仍然可以在不交并上计算近似输出记录。单次调用这一计算过程（由定理 14 给出）会因将数值取整到最接近的幂而造成前文所述的“精度损失”。为了维持对精度损失的“保守”和“积极”估计，我们通常需要对系数重新缩放，这会使记录中出现非整数系数。因此，我们考虑具有一定“粒度”$\gamma \in \mathbb{N}$的系数，也就是说，将它们写成分母为 γ 的分数，并证明在对系数重新缩放时，无需将 γ 增加太多。

- 在第 8 节中，我们针对对数深度的团宽表达式执行动态规划：对于不交并，调用前一项；对于重新着色和边插入，则采用简单的项重写过程。这一步并无意外，和预期的一样顺利。

- 最后，在第 9 节中，我们证明，可以通过组合若干个针对记录公式的近似答案，获得任意 $\forall$CMSO 查询的近似答案。在动态规划算法中，通常只需利用计算树根节点处存储的记录，就能轻松推导出最终答案。而在我们的情形中，这一步出人意料地复杂，也是我们必须克服的主要技术挑战之一。尤其是，要证明近似过程中的稳健性，需要格外谨慎。

令人惊讶的是，本文提出的记录恰好在两方面取得了适当的平衡：一方面，它们受到足够多的限制，因此可以通过不交并进行组合并高效存储；另一方面，它们又具有足够强的表达能力，既能从 $\forall$CMSO 查询中推导出答案，也能刻画第 5 节讨论的所有问题。正如第 11 节的困难性结果所暗示的那样，对于更强大的逻辑，假设存在的记录要么会变得过于庞大，要么无法再通过不交并进行高效组合。

图1.2以图示方式概述了我们主要技术结果的证明过程，该过程与通过 Feferman–Vaught 定理评估 $\mathrm{LinECMSO}_1$-查询相对应。由于我们面临额外的挑战，证明需要绕道使用我们记录中的公式，如上文所述（我们称之为表公式）。

文章结构。第2节介绍一般预备知识，随后第3节对我们的逻辑进行形式化。第4节概述团宽和树宽的新元定理，并给出其精确陈述；第5节则介绍一系列

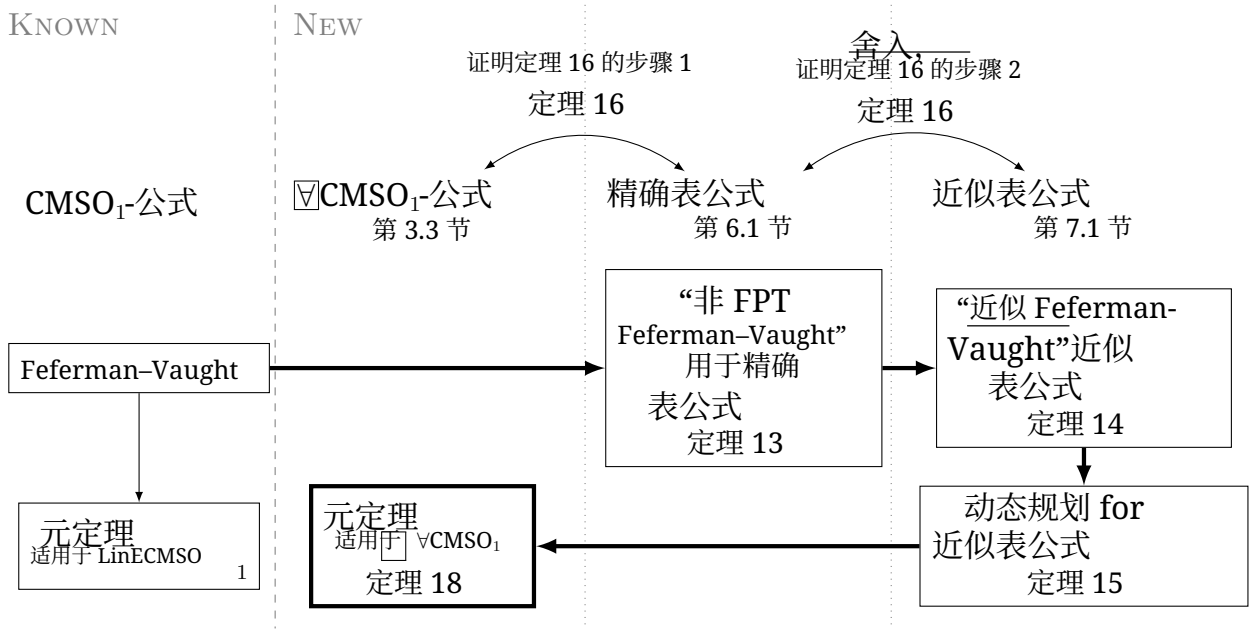

图 3：我们主要结果（定理 18）证明过程的图示概览。左侧展示了经典 $\mathrm{LinECMSO}_1$ 定理的构成模块。虚线标示的列根据各个框内定理适用的公式类型加以区分。我们的目标公式是 $\forall\mathrm{CMSO}_1$ 公式。证明由两个部分组成：(a) 在列之间转换，同时避免精度损失过大：这一部分完全限于第 9 节，尤其是定理 16 的证明，并以弯曲箭头表示。(b) 描述基于 Feferman–Vaught 定理推广形式的动态规划：我们首先针对 (1) 中所述形式、具有精确阈值的精确表公式，得到 Feferman–Vaught 定理的非算法版本，并以此为基础，针对 (1) 中所述形式、具有舍入阈值的近似表公式，得到其算法版本。这进而使我们能够得到一个用于计算近似记录的动态规划算法，并将其与 (a) 结合起来，证明关于 $\forall\mathrm{CMSO}_1$ 的近似元定理。下划线标出了主要结果中满足的比较出现精度损失的两个位置。

若干示例展示了我们的结果的一些潜在应用，其中不仅包括标准的图问题，还包括诸如 Subset Sum 这样的经典数论问题。第 6 节至第 10 节给出了我们主要技术结果的证明。最后的第 11 节则给出了相关下界的证明。

1.3 相关工作

许多作者研究了单子二阶逻辑在计数和标准算术求值方面的扩展。Szeider 研究了通过添加所谓的局部基数约束来增强逻辑的方法，这些约束限制了每个顶点的邻域与实例化的自由集合变量之间交集的大小 [39], ，并证明了当以树宽和查询大小为参数时，该片段具有 XP 可处理性。Ganian 和 Obdržálek ´研究了仅针对自由集合变量的 MSO 中添加权重比较的方法 [27], ，并证明当以顶点覆盖数（即输入图中最小顶点覆盖的大小）为参数时，所得逻辑允许进行固定参数模型检验。Knop、Koutecký、Masařík 和 Toufar ´ ´ [34]研究了将局部基数约束与权重比较相结合的各种方法，并确定了它们相对于顶点覆盖数及其针对稠密图的一种推广——邻域多样性——的复杂性。至关重要的是，在这些单子二阶逻辑扩展中，用于求解查询的所有框架在以查询大小和树宽（或团宽）为参数时，都不具备固定参数可 tractable 性。

逻辑查询的近似评估由 Dreier 和 Rossmanith 开创，他们研究了对一阶查询的扩展进行计数 [16]。在此之前，Lampis [36]开发了算法，为若干由我们的框架所涵盖、以树宽和团宽为参数的问题提供近似解，包括 EquitableColoring [4, 37]、Bounded Degree Deletion [22, 26]、Graph Balancing [17]、Capacitated Vertex Cover [30]和 Capacitated Dominating Set [31]。

2 预备知识

对于整数 i, j，其中 $i \leq j$，我们用 $[i, j]$ 表示集合 $\{i, i+1, \ldots, j-1, j\}$，并用 $[i]$ 表示集合 $\{1, \ldots, i\}$。集合 V的幂集记作 $\mathcal{P}(V) = \{A \mid A \subseteq V\}$。我们通常用 X 表示元组 $X_1 \ldots X_\ell$。该元组的长度记作 $|X| = \ell$。元组 X 的第 i 个元素总记作 X_i。对于两个长度分别为 ℓ 和 ℓ' 的元组 X 和 Y，我们用拼接 $XY := Z$ 表示长度为 $\ell + \ell'$的元组，其定义为：若 $i \leq \ell$，$Y_{i-\ell}$ ，则为 $Z_i = X_i$；若 $\ell < i \leq \ell + \ell'$.

对于两个长度相等的集合元组 X 和 Y ℓ，我们将它们按元素并集定义为长度为 ℓ 的元组 $X \cup Y := Z$ 对所有 $i \in [\ell]$，其定义为 $Z_i = X_i \cup Y_i$。

2.1 图

A （顶点）着色（顶点）加权图是一个元组

$$G = \big(V(G), E(G), (P_1^G, \ldots, P_k^G), (w_1^G, \ldots, w_l^G)\big),$$

其中 $V(G)$ 和 $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ 分别是顶点集和边集，$P_i^G \subseteq V(G)$ 是颜色集，而 $w_i^G\colon V(G) \to \mathbb{N}$ 是权重。对于集合 $W \subseteq V(G)$，我们定义累积权重 $w_i^G(W) := \sum_{v \in W} w_i^G(v)$。除非另有说明，本文中的所有图都是顶点着色且顶点加权的。

当我们专门讨论树宽时，同时考虑边和顶点上的权重与颜色会很有用。在这种情况下，我们处理如下形式的边着色边加权图

$$G = \big(V(G), E(G), (P_1^G, \dots, P_k^G), (\hat{P}_1^G, \dots, \hat{P}_h^G), (w_1^G, \dots, w_l^G), (\hat{w}_1^G, \dots, \hat{w}_t^G)\big),$$

其中加法地，$\hat{P}_i^G \subseteq E(G)$ 是边颜色集，而 $\hat{w}_i^G\colon E(G) \to \mathbb{N}$ 是边权重。

2.2 团宽

对于正整数 k，令 k-图 为一个最多有 k 个标签 且每个顶点至多有一个标签的图。图 G（可能带有颜色和权重）的团宽 是满足下述条件的最小整数 k：图 G 的底层图（不带颜色和权重，但边和顶点相同）可以通过反复应用以下三种操作，由单顶点 k-图构造而成：

1. 不相交并（记作 $\cup$）；
2. 重新标记：对于某个 $1 \le i, j \le k$，将所有标签为 i 的顶点改为标签 j（记作 $\rho_{i \to j}$）；
3. 边插入：对于某个 $1 \le i \ne j \le k$，在每个标签为 i 的顶点与每个标签为 j 的顶点之间添加一条边（记作 $\eta_{i,j}$）。

我们还用 $\mathrm{cw}(G)$ 表示图 G 的团宽，并将见证 $\mathrm{cw}(G) \le k$ 的操作表达式称为 G 的 k-表达式。

我们特别指出，图的 k-表达式中使用的标签与该图的颜色有所区别。特别地，如果一个 k-表达式见证了图 G 的团宽，那么同一个 k-表达式也见证了 G 的每一种着色的团宽。

虽然目前尚无固定参数算法，能够以图 G 的团宽为参数计算最优的 k-表达式，但可以得到 k-表达式，其中 k 由 $\mathrm{cw}(G)$ 的某个函数上界限制。此类结果中最新的一项是：

定理 2 ([23])。给定一个图 G，可以在时间 $\mathcal{O}(2^{2^{\mathrm{cw}(G)}}|V(G)|^2)$ 内计算出 G 的一个 $2^{\mathrm{cw}(G)+2}$-表达式 χ。

一个 k-表达式 χ 的大小（记为 $|\chi|$）是其包含的操作数；我们指出，对于某个可计算函数 k，$|\chi|$ 总可以被界定为 $f(k) \cdot |V(G)|$。我们将 k-表达式的深度 称为其嵌套操作的最大数量。虽然 k-表达式的深度对计算单子二阶逻辑查询 [10], 的运行时间影响不大，但对我们的近似查询影响显著。因此，我们将使用对数深度的 k-表达式，而这总可以通过以下定理得到。

定理 3 ([7]). 给定一个图 G 的 k-表达式 χ，可以在至多 $f(k)\cdot|\chi|\cdot\log(|\chi|)$的时间内，计算出一个等价的 k-表达式，其深度至多为 $f(k)\cdot\log(|V(G)|)$，大小至多为 $f(k)\cdot|\chi|$，其中 f 是某个可计算函数。

证明。 这一陈述并未在 [7]中作为独立定理给出，而是构成了 [7, 定理 3]证明的第一步。具体而言，采用该证明中的记号和术语， t 是给定的 k-表达式 χ。由此，我们通过 [7, 定理 1]，在 $\mathcal{O}(|\chi|\log(|\chi|))$时间内，得到由有限多个辅助二元运算 $\oplus_\lambda$ 构成的表达式 t''；这些运算作用于序列中单顶点 k-图，且可由 $\rho_{i\to j}$ 和$\eta_{i,\,j}$的有限序列 λ 得到，即$\chi_1\oplus_\lambda\chi_2:=\lambda(\chi_1\cup\chi_2)$。根据 [7, 定理 3]的证明中的构造， t'' 的深度至多为$3\log(|t|)+3$。最后，通过将辅助二元运算 $\oplus_\lambda$ 分解为由 $\rho_{i\to j}$、 $\eta_{i,\,j}$ 和 $\cup$ 运算组成的有限序列，可将 t'' 转化为所需的 k-表达式。

□

结合这两个结果，我们可以计算出一个深度为对数级的近似最优 k-表达式。

定理 4. 给定一个图 G，可以在至多 $f(k)\cdot\log(|V(G)|)$ 的深度和至多 $f(k)\cdot|V(G)|$ 的规模下，在至多 $f(k)\cdot|V(G)|^2$的时间内计算出一个 $2^{\mathrm{cw}(G)+2}$-表达式，其中 f 是某个可计算函数。

2.3 树宽

在我们的证明中，我们不会显式地使用树宽，因为下面的观察表明，通过对边进行细分，可以从顶点集量化得到边集量化。

观察 1 （例如， [11, 第 7] 节）。 对于任意图 G 以及由 G 对每条边进行细分而得到的图 G'，都有 $\mathrm{tw}(G)=\mathrm{tw}(G')$。

此外，有界树宽允许快速计算 k-表达式，其中 k 由树宽的函数界定。

定理 5 ([35] 以及 [6])。 给定一个图 G，可以在时间 $f(\mathrm{tw}(G))\cdot|V(G)|$内计算出 G的一个$(3\cdot4^{\mathrm{tw}(G)-1}+1)$-表达式 χ，其中 f是某个可计算函数。

再次将其与定理 3 结合，我们得到如下结论。

定理 6. 给定一个图 G，可以在至多 $f(\mathrm{tw}(G))\cdot|V(G)|$的时间内，计算出一个深度至多为 $f(\mathrm{tw}(G))\cdot\log(|V(G)|)$ 且大小至多为 $f(\mathrm{tw}(G))\cdot|V(G)|$ 的$(3\cdot4^{\mathrm{tw}(G)-1}+1)$表达式，其中 f 是某个可计算函数。

2.4 逻辑

语法和语义。 在我们的证明中，我们考虑不 对边集进行量化的计数单子二阶逻辑，通常记作 CMSO_1。在该逻辑中，公式通过逻辑连接词（$\vee$、 $\wedge$ 和 $\neg$）以及对顶点和顶点集进行的全称量化和存在量化（$\forall$ 和$\exists$）构造而成（通常使用小写字母 x、 y、 z，..... 表示顶点，使用大写字母 X、 Y、 Z，..... 表示集合），这些公式由以下原子公式构成

- $x \in X$，其中 x 是顶点变量， X 是顶点集变量，
- 顶点变量 x 与 y之间的相等关系 $x = y$
- $E(x, y)$，表示顶点变量 x 与 y之间存在一条边
- $U(x)$，表示顶点变量 x具有颜色 U
- $\mathsf{card}_{a,r}(X)$，其中 $a, r \in \mathbb{N}$ 和 $a < r \geq 2$，且 X 是一个顶点集变量，其解释为 $|X| = a$ 模 r。

可以使用上述连接词和原子公式构造其他连接词和原子公式（例如，蕴含 $\rightarrow$ 或集合之间的相等关系 $X = Y$），因此不将它们明确列为基本构件。此外，为简化起见，我们假设没有变量被量化多次。对于出现这种情况的变量，只需重新命名即可确保这一点，而不会损失任何表达能力。

CMSO_2（计数单子二阶逻辑，其中量化范围包括边集）是CMSO_1 的扩展，增加了对边和边集的量化。在这种逻辑中，关于包含关系、相等关系、颜色和$\mathsf{card}_{a,r}$ 的原子谓词也扩展到边变量和边集变量，并引入顶点变量 v 与边变量 e 之间的新原子公式$\mathsf{inc}(v, e)$，表示 v 是 e的一个端点。不难看出，在图 G 上求值一个CMSO_2句子，可以归约为在 G的细分图上求值一个长度成比例的CMSO_1句子，其中新的细分顶点获得一个辅助颜色，以标记它们是原图的“边”。因此，在我们的证明和陈述中，可以专注于CMSO_1 。省略下标时，所写内容同样适用于CMSO_1 和CMSO_2。

基本符号约定。 公式 φ 的长度 记作 $|\varphi|$，即其包含的符号数量。我们用 $\varphi(X_1, \ldots\ldots, X_k)$ 表示公式 φ 的自由集合变量为 $X_1, \ldots\ldots, X_k$。这通常简写为 $\varphi(X)$，其中 X 表示一个长度未命名的集合变量元组$X_1, X_2\ldots\ldots$，记作 $|X|$。

公式 φ 的签名 σ 是 φ中使用的原子关系（除包含关系和等号外）所构成的集合。类似地，图的签名由其边关系以及所有使用到的顶点颜色和边颜色组成。如果句子 φ 的签名与图 G 的签名相匹配（也就是说， φ 只涉及 G 所包含的颜色），我们用 $G \models \varphi$ 表示 φ 在 G 中为真。我们将默认公式与图的签名相匹配，而不再明确说明。

我们不再选择一个元组 $W = W_1, \ldots, W_\ell$满足 $W_i \subseteq V(G)$，而从现在起等价地说 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^\ell$。对于一个公式 $\varphi(\bar{X})$，其中有 $\bar{X} = X_1 \ldots X_\ell$，以及一个元组 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^\ell$，我们写作 $G \models \varphi(\bar{W})$，表示在将每个自由变量 X_i 解释为 W_i时， φ 在 G 上为真。我们称在 G 中的解 为集合$\varphi(G) := \{\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^\ell \mid G \models \varphi(\bar{W})\}$的元素。

规范化。 公式的量词秩 是其量词的最大嵌套深度。我们用$\ldots\ldots$表示所有量词秩至多为 q 的 CMSO_1 公式的集合，其中其签名是某个签名 σ 的子集，且其自由变量包含于 X 中

$\mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, X)$。本文中我们始终假设，所有公式都经过语法规范化：变量名已标准化，并且合取与析取中重复的项已删除。因此，我们的公式长度可以界定如下。

观察 2。 $\mathrm{CMSO}_1(\sigma,\ q,\ X)$ 的规模以及其中公式的长度均由 $|\sigma|$、 q 和 $|X|$ 的一个可计算函数所界定。

Feferman–Vaught 定理。 这一经典结果 [20]使我们能够将关于 CMSO_1-公式的信息传播到图的不交并上。现代表述如下，例如 [38,定理 71]中所述。

定理 7。对于每个公式 $\varphi(X) \in CMSO_1(\sigma, q, X)$，都可以有效计算出公式序列 φ_1^1、……、$\varphi_1^m \in CMSO_1(\sigma, q, \bar{X})$、 φ_2^1、……、$\varphi_2^m \in CMSO_1(\sigma, q, \bar{X})$，以及一个布尔函数 B: $\{0,1\}^{2m} \to \{0,1\}$，使得对于所有图 G_1、 G_2 以及 $\bar{W}_1 \in \mathcal{P}(V(G_1))^{|\bar{X}|}$, $\bar{W}_2 \in \mathcal{P}\ V\ G_2$ $((\,))^{|\bar{X}|}$,

$$G_1 \cup G_2 \models \varphi(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \iff B\big(G_1 \models \varphi_1^1(\bar{W}_1), \ldots, G_1 \models \varphi_1^m(\bar{W}_1), G_2 \models \varphi_2^1(\bar{W}_2), \ldots, G_1 \models \varphi_1^m(\bar{W}_2)\big).$$

将布尔函数 B 转换为析取范式，可得到以下更简洁的表述：为每个公式 $\varphi(X)$关联一个“Feferman–Vaught 集”$\mathrm{FV}(\varphi)$。

定理 8. 对于每个公式 $\varphi(X) \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, X)$，都可以有效地计算出一个集合 $\mathrm{FV}(\varphi \subseteq {}_1\sigma\ q\ X \times {}_1\sigma\ q\ X)^{|\bar{X}|}$，使得对于所有图 $G_1\ G_2$ $W_1 \in)\,\mathrm{CMSO}(,,)\,\mathrm{CMSO}(,,)$，和 $\bar{W}_2 \in \mathcal{P}\ V\ G_2$ $^{|\bar{X}|}$ $(()),(()),$

$$G_1 \cup G_2 \models \varphi(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \iff G_1 \models \varphi_1(\bar{W}_1)\ and\ G_2 \models \varphi_2(\bar{W}_2)\ for\ some\ (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{FV}(\varphi).$$

证明。 如果将定理 7 中的布尔函数 B 转换为合取子句的析取式，我们就会得到：$G_1 \cup G_2 \models \varphi(W_1 \cup W_2)$ 等价于如下形式的若干语句的析取

$$\bigwedge_{i=1}^{m} G_1 \models (\neg)\varphi_1^i(\bar{W}_1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} G_2 \models (\neg)\varphi_2^i(\bar{W}_2),$$

其中，符号 $(\neg)$ 表示每个合取项前可选的否定。这当然等价于

$$G_1 \models \bigwedge_{i=1}^{m} (\neg)\varphi_1^i(\bar{W}_1) \wedge G_2 \models \bigwedge_{i=1}^{m} (\neg)\varphi_2^i(\bar{W}_2).$$

我们将 $\mathrm{FV}(\varphi)$ 选为该析取中出现的所有形如 $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\neg)\varphi_1^i(\ \bar{X})\ \bigwedge_{i=1}^{m}(\neg)\varphi_2^i(\ \bar{X}))$ 的元组。

□

3 元定理与扩展逻辑

我们将逐步介绍相关的逻辑与算法概念，首先介绍 CMSO 上的优化，然后在此基础上扩展出大小比较与近似。

3.1 基本优化

我们首先介绍 Courcelle、Makovsky 和 Rotics 关于有界团宽图的经典优化元定理，并用本文全文采用的语言对其进行改述。为此，我们定义权重项 这一概念；经典结果对权重项进行优化，而它们也将成为我们扩展大小比较逻辑的基本构件。

权重项。 我们将权重项 定义为形式为 t 的项:

$$t(X_1 \dots X_\ell) := a + \sum_{1 \le i,j \le \ell} a_{ij} w_i(X_j)$$

其中 $a_{ij}, a \in \mathbb{R}$，每个 w_i 都是一个权重符号，每个 X_j 都是一个顶点集变量。在某些应用中，人们可能希望在权重项中使用顶点变量 x_j，而不是 X_j。为使定义保持简洁，我们在形式化定义中排除这种情况，但只需在相应的 CMSO_1 公式中要求 X_j 是一个单元素集合，即可轻松模拟。权重符号将由给定图的权重解释。更精确地说，给定一个具有匹配签名的图 G和集合 $W_1, \dots, W_k \subseteq V(G)$，权重项的解释 为

$$t^G(W_1 \dots W_\ell) := a + \sum_{1 \le i,j \le \ell} a_{ij} w_i^G(W_j).$$

在 CMSO_2, 的语境下，这种记法自然可以扩展到带边权重的 权重项，其输入同时包含边集变量和顶点集变量。作为简写，例如，我们常将 $|X|$ 写作表示 X大小的权重项，也就是项 $w(X)$，其中隐含的权重符号 w被解释为 $w^G(W) = |W|$。当图 G可由上下文明确时，我们通常会省略上标中的图，将逻辑符号与它们在图中的相应解释统一起来。这种略显滥用的记法意味着，例如，当上下文已明确我们讨论的不是项或符号本身，而是它们在图 G中的解释时，对于颜色集，我们通常写作 $P_i \subseteq V(G)$ 而非 P_i^G；对于权重，我们写作 $w_i \colon V(G) \to \mathbb{N}$而非 w_i^G；对于权重项的解释，我们写作 $t \colon V(G) \times \cdots \times V(G) \to \mathbb{N}$ 而非 t^G。

控制系数。我们需要一些额外的定义，以控制权重项中出现的系数。如果某个权重项的所有系数 a_{ij}, a 均为非负数，则称 $t(X_1 \dots X_k)$ 为一个非负权重项。如果所有系数均满足 $a_{ij}, a \in \mathbb{N}$ 或$a_{ij}, a \in \mathbb{Z}$，则分别称其为自然数权重项或整数权重项。此外，如果一个数 $q \in \mathbb{Q}$ 可以表示为 $\frac{a}{\gamma}$，其中 $a, \gamma \in \mathbb{N}$，则称其具有粒度 γ。如果所有系数 a_{ij}, a 都是粒度为 γ的数，则称该权重项具有粒度 γ。请注意，图 G 上的权重符号的解释是根据 G 的权重推导出来的，而我们已将这些权重定义为非负整数。因此，当且仅当一个权重项在每个图上都保证求值为非负数、自然数、整数或粒度为γ的数时，它才分别是非负、自然数、整数权重项或具有粒度γ 的权重项。

LinECMSO。 有了这些定义，我们现在可以重新表述 CMSO 的经典优化结果。

定义 1 ([10, 定义 10])。 LinECMSO-查询 是由一个 CMSO- 公式 $\varphi(X_1 \dots X_\ell)$ 和一个整数权重项 $\hat{t}(X_1 \dots X_\ell)$ 构成的成对元素，我们分别将前者称为查询的约束，将后者称为查询的优化目标 。

LinECMSO查询（φ，$\hat{t}$）在具有匹配签名的图 G 上的答案要么是在 G 上使优化目标 $\hat{t}$ 达到最大值的 φ 的解，要么是不存在解这一信息。

定理 9 （[10, 定理 4]）**：** 给定一个 $\mathrm{LinECMSO}_1$查询（φ，t）、一个图 G 以及一个关于 G的 k 表达式 χ，可以在 G上找到 （φ，t）的解，所需时间为 f（k，φ，t）$\cdot|\chi|$，其中 f是某个可计算函数。

如预备知识中所述，只需细分所有边，该结果便可自然扩展到有界树宽图上的 $\mathrm{LinECMSO}_2$ 。

3.2 添加权重比较

虽然 LinECMSO 仅对权重项进行优化，但现在我们将继续把它们深度整合到逻辑中，具体而言是整合到其原子公式中。若 t 和 t' 是一般权重项，则 $t \leq t'$、$t < t'$、 $t \geq t'$ 和 $t > t'$ 是权重比较。我们将 CMSO[$\lesseqgtr$] 定义为 CMSO 的扩展，该扩展还允许将权重比较作为原子构件（语义如前所定义）。例如，$\mathrm{CMSO}_1[\lesseqgtr]$句子

$$\exists X \ w_1(X) \geq 100 \wedge w_2(X) \leq 50$$

表示存在一个集合 $W \subseteq V(G)$，使得 $\sum_{v \in W} w_1^G(v) \geq 100$ 且 $\sum_{v \in W} w_2^G(v) \leq 50$。

为了简化一些定义，我们要求 CMSO[$\lesseqgtr$] 公式采用 否定范式，也就是说，否定绝不会作用于包含权重比较的子公式。注意，每个公式都可以通过将否定不断下推到更低层的子公式（利用德摩根律），直至每个被否定作用的子公式都不包含权重比较，或者本身就是一个权重比较，从而化为否定范式。否定的权重比较可以替换为等价的非否定权重比较（例如，$\neg(t \leq t')$ 可替换为 $t > t$）。

我们将 CMSO 中所有基本逻辑记法扩展到 CMSO[$\lesseqgtr$]。最值得注意的是，CMSO[$\lesseqgtr$] 公式 φ 的长度$|\varphi|$ 仍然是 φ 中符号的数量，其中权重项的每个系数 a，a_{ij}都算作一个符号。因此，即使系数非常大，它们对公式长度的贡献也不取决于其数值，而是简单地计为一个。类似地，我们可以将优化查询的概念从 LinECMSO 扩展到 CMSO[$\lesseqgtr$]，以更强大的逻辑 CMSO[$\lesseqgtr$] 替代 CMSO。遗憾的是，这并没有太大意义，因为即使是判断对于固定的 CMSO[$\lesseqgtr$] 公式 φ， $G \models \varphi$ 是否成立这一“简单”问题，在深度为常数的树上也是 NP-困难的（见定理 20）。这完全排除了 CMSO[$\lesseqgtr$]-查询存在 Courcelle 定理类似结果的可能性。

项范围。 请注意，CMSO[$\lesseqgtr$] 可以轻松地用一个常数长度的公式表达 Subset Sum 问题：构造一个无边图，将每个数与一个权重等于该数的顶点关联起来（另见第5节）。对于一元编码数，该问题可在多项式时间内求解；对于二进制编码数，该问题则是 NP 完全的。为了反映

这一点在我们算法的运行时间中，我们定义项范围。给定一个图 G 和一组 τ权重项，我们称 G的 τ值域为整数 $\{0,\dots,N\}$的集合，其中N是满足以下条件的最小值：对于所有 t（$\bar{Z}$），$\in\tau$都有 t^G（V（G）$^{|\bar{Z}|}$）$\leq N$。我们将在后续证明中使用 τ值域，但也可以立即用直接由图和公式的权重项所反映的度量来界定它们。

引理 1. 设 G 是一个图，τ 是一组至多包含 k 个自由集合变量的权重项。设 μ 是 τ 的任一权重项中作为系数出现的数，或 G 中任一权重中的最大值。那么 G 的 τ-值域包含于 $\{0,\dots,\mu+k^2\mu^2|V(G)|\}$。

证明. 设 $t(Z)\in\tau$，其权重为 $0\leq a,a_{ij}\leq\mu$。那么

$$t^G(V(G)^{|\bar{Z}|})=a+\sum_{1\leq i,j\leq|\bar{Z}|}a_{ij}\sum_{v\in V(G)}w_i^G(v)\leq\mu+k^2\mu|V(G)|\mu. \qquad \square$$

3.3 我们的可处理片段

我们将定义 CMSO[$\lesseqgtr$] 的一个片段 ∀CMSO，它通过权重比较限制全称量化变量之间的交互，因此更适合用于算法。为此，我们称块公式为形如 $\forall Y\varphi(XY)$ 的公式，其中

- φ 是一个仅包含非负权重项的 CMSO[$\lesseqgtr$] 公式，
- 中除至多一个权重项外，其余每个权重项都只包含来自 X 的自由变量，
- 可能的例外权重项仅出现在一次权重比较的单侧，并且仅包含来自 XY 的自由变量。

我们将 ∀CMSO 定义为由块公式通过迭代应用析取、合取和存在量化所能得到的所有公式构成的集合。更形式化地说，每个块公式都属于 ∀CMSO；如果 φ 和 ψ 属于 ∀CMSO，那么 $(\psi\wedge\psi)$、$(\psi\vee\psi)$、$(\exists x\varphi)$ 和 $(\exists X\varphi)$ 也属于该集合。我们指出，读者可以在第5节中找到多个不同类型的 ∀CMSO 公式示例。

定义 2。 ∀CMSO-查询 是由一个 ∀CMSO公式 $\varphi(X_1\dots X_\ell)$ 和一个整数权重项 $\hat{t}(X_1\dots X_\ell)$ 组成的成对元素。前者只包含自然数权重比较，我们称之为查询的约束；后者可能包含负系数，我们称之为查询的优化目标。

图 G 上的匹配签名 φ，$\hat{t}$ 的 ∀CMSO 查询的答案是一个解，该解在 G 中最大化优化目标 $\hat{t}$，或者表明不存在解φ。

请注意，我们只关注最大化并不是限制，因为可以将目标乘以 -1，从而将最小化问题转化为最大化问题。

3.4 近似

权重项 t 与实数 $\alpha\in\mathbb{R}$ 的乘积 αt 只需将 t 中的所有系数按 α进行缩放即可得到。准确地说，如果 $t=a+\sum_{1\leq i,j\leq|\bar{X}|}a_{ij}w_i(X_i)$，那么 $\alpha t:=\alpha a+\sum_{1\leq i,j\leq|\bar{X}|}\alpha a_{ij}w_i(X_i)$。

放宽与收紧。对于 CMSO[≶]-公式 $\varphi(X)$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，α-放宽 $\varphi_\alpha(X)$ 由替换 $\varphi(X)$ 中所有形如以下形式的权重比较得到

- $t \le t'$ 由 $\frac{1}{\alpha}t \le \alpha t'$,
- $t \ge t'$ by $\alpha t \ge \frac{1}{\alpha}t'$, and
- $t < t'$由 $\frac{1}{\alpha}t < \alpha t'$,
- $t > t'$由 $\alpha t \succ \frac{1}{\alpha}t'$。

类似地，$\varphi(X)$ 的 α-收紧 $\varphi^\alpha(X)$ 定义为：将 $\varphi(X)$ 中形如以下形式的所有权重比较替换为

- $t \le t'$ 由 $\alpha t \le \frac{1}{\alpha}t'$,
- $t \ge t'$ by $\frac{1}{\alpha}t \ge \alpha t'$, and
- $t < t'$ 由 $\alpha t < \frac{1}{\alpha}t'$,
- $t > t'$ by $\frac{1}{\alpha}t > \alpha t'$.

请记住，我们假设所有 CMSO[≶] 公式都已进行否定范式化，即大小比较前不存在否定。这意味着，使大小比较更难或更容易满足，也会使整个公式更难或更容易满足。因此，对于 $\alpha \ge 1$，我们有：$\varphi^\alpha(X)$ 是最严格的公式（即最难满足），而 $\varphi_\alpha(X)$ 是可以从 $\varphi(X)$ 通过将系数乘以介于 $1/\alpha$ 和 α之间的因子而得到的最不严格公式（即最容易满足）。

我们称 G α-满足不足一个 CMSO[≶]-公式 φ（记作 $G \models_\alpha \varphi$），当且仅当 $G \models \varphi_\alpha$。类似地，G α-过度满足 φ（记作 $G \models^\alpha \varphi$），当且仅当 $G \models \varphi^\alpha$。因此，对于 $\alpha \ge 1$，满足不足一个公式比过度满足它更容易，于是我们得到如下蕴含链

$$G \models^\alpha \varphi \quad \Longrightarrow \quad G \models \varphi \quad \Longrightarrow \quad G \models_\alpha \varphi. \tag{2}$$

当且仅当将系数乘以介于 $1/\alpha$ 和 α 之间的因子不会改变该公式在 G 上是否成立时，这条链才会坍缩。

此前，这一概念已经产生了用于判定问题的近似算法。Dreier和 Rossmanith [16] 证明，对于一阶逻辑的某种计数扩展，在树上精确求值该逻辑中的公式是 W[1]-困难的，但对于稀疏图存在一种高效的近似算法。该算法以一个图 G、该逻辑的一个公式 φ 以及一个精度 $\varepsilon > 0$ 作为输入，并返回“是”“否”或“我不知道”之一，使得

- 如果算法返回“是”，那么 $G \models \varphi$,
- 如果算法返回“否”，那么 $G \not\models \varphi$,
- 如果算法返回“我不知道”，那么 $G \models \varphi_{1+\varepsilon}$，但是 $G \not\models \varphi^{1+\varepsilon}$.

因此，只有当公式处于“即将为真”的边缘时，算法才可能返回不充分的答案。

过度满足与满足不足的最大值。将这些概念从判定领域推广到还需优化一个目标的情形，需要格外谨慎，但这番努力值得。我们先定义图 G 上 CMSO[≶]-查询 $(\varphi, \hat{t})$ 的最大值为

$$\max(G, \varphi, \hat{t}) := \max\left\{\hat{t}(W_1, \ldots, W_\ell) \;\middle|\; G \models \varphi(W_1, \ldots, W_\ell)\right\}.$$

满足不足的最大值和过度满足的最大值定义如下

$$\begin{aligned}\text{undersatisfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha) &:= \max\left\{\hat{t}(W_1,\ldots,W_\ell) \;\middle|\; G \models_\alpha \varphi(W_1,\ldots,W_\ell)\right\},\\ \text{oversatisfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha) &:= \max\left\{\hat{t}(W_1,\ldots,W_\ell) \;\middle|\; G \models^\alpha \varphi(W_1,\ldots,W_\ell)\right\}.\end{aligned}$$

直观而言，过度满足最大值表示在对所有项进行 α-收紧（使其更难满足）后，$\hat{t}$ 所能达到的最高值；而未满足最大值表示在对所有项进行 α-放宽（使其更易满足）后，$\hat{t}$ 所能达到的最高值。因此，根据 (2)，对于每个 $\alpha \geq 1$，都有

$$\text{oversatisfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha) \leq \max(G,\varphi,\hat{t}) \leq \text{undersatisfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha).$$

近似答案。最后，我们介绍优化查询的近似答案概念，这是本文贡献的核心。我们首先给出一个较为复杂的定义，然后逐步进行分解说明。

定义 3。对于 $\alpha \geq 1$，图 G 上的 $\forall$CMSO 查询 $(\varphi, \hat{t})$ 的一个 α-近似答案 由两个值 $\max^-$，$\max^+ \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ 组成，其中

过度满足 $\text{isfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha) \leq \max^- \leq \max(G,\varphi,\hat{t}) \leq \max^+ \leq \text{undersatisfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha).$

如果 $\max^- \neq -\infty$，则该答案还包含一个“保守的”见证 $\bar{W}^-$，其中

$$G \models \varphi(\bar{W}^-) \quad \text{and} \quad \hat{t}(\bar{W}^-) = \max^- \geq \text{oversatisfy}(G,\varphi,\hat{t},\alpha).$$

如果 $\max^+ \neq -\infty$，那么该答案还包含一个“积极的”见证 W^+，其满足

$$G \models_\alpha \varphi(\bar{W}^+) \quad \text{and} \quad \hat{t}(\bar{W}^+) = \max^+ \geq \max(G,\varphi,\hat{t}).$$

在我们的算法中，我们力求针对任意小的 $\varepsilon > 0$ 给出（$1+\varepsilon$）-近似答案。注意，对查询的（$1+\varepsilon$）-近似答案包含最佳可达到值 $\max(G, \varphi, \hat{t})$ 的上界 $\max^-$ 和下界 $\max^+$。这些界的质量取决于在 G 上加入或移除的 φ 的解，这由对权重比较进行（$1+\varepsilon$）-放宽或收紧所决定。因此，只有当 φ 对于某些非常好的候选解而言“处于”即将为真的边缘时，上界和下界才不会一致；也就是说，将系数乘以介于 $1/(1+\varepsilon)$ 和 $1+\varepsilon$ 之间的因子，要么会移除最优解，要么会加入更好的解。

虽然我们无法返回该查询的最优答案，但可以返回一个“（$1+\varepsilon$）-保守型”答案 W^-，它必然满足 φ，并且仍优于 φ 的（$1+\varepsilon$）-收紧所得的任何解。然而，可能 φ 本身存在解，而（$1+\varepsilon$）-收紧不存在解，在这种情况下不会返回“保守型”答案。尽管如此，我们仍会返回一个额外的“（$1+\varepsilon$）-积极型”答案 W^+，其至少与 φ 的最优解一样好。虽然 W^+ 可能不满足 φ，但仍保证满足 φ 的（$1+\varepsilon$）-放宽。重申我们之前的观察，

- $\bar{W}^-$ 满足约束，且至少与收紧后的约束的最优值一样好，

- $\bar{W}^+$ 满足放宽后的约束，且至少与最优值一样好。

此外，请注意，对于任意 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$，$(1+\varepsilon')$-近似答案也是 $(1+\varepsilon)$-近似答案，而任何 1- 近似答案都只是一个答案。将我们的结果应用于特定问题时，以下观察有助于我们以更简洁的方式表述近似保证。

观察 3. 设 $0 < \varepsilon \leq 0.5$ 和 φ 是一个 ∀CMSO- 约束。

- 如果一个元组 W 满足由 φ 将每个不等式替换为

$$
\begin{aligned}
&- \ t \leq t' \text{ by } t \leq (1-\varepsilon)\cdot t', && - \ t \geq t' \text{ by } t \geq (1+\varepsilon)\cdot t', \text{ and}\\
&- \ t < t' \text{ by } t < (1-\varepsilon)\cdot t', && - \ t > t' \text{ by } t > (1+\varepsilon)\cdot t',
\end{aligned}
$$

那么 $\bar{W}$ 也满足 $(1+\varepsilon/3)$-收紧后的约束 $\varphi^{1+\varepsilon/3}$。

- 如果一个元组 W 满足 $(1+\varepsilon/3)$-放宽后的约束 $\varphi_{1+\varepsilon/3}$，那么它也满足由 φ 将每个不等式替换为

$$
\begin{aligned}
&- \ t \leq t' \text{ by } t \leq (1+\varepsilon)\cdot t', && - \ t \geq t' \text{ by } t \geq (1-\varepsilon)\cdot t', \text{ and}\\
&- \ t < t' \text{ by } t < (1+\varepsilon)\cdot t', && - \ t > t' \text{ by } t > (1-\varepsilon)\cdot t'.
\end{aligned}
$$

证明。 不等式的 $(1+\varepsilon/3)$ 放宽形式 $t \leq t'$ 给出 $t/(1+\varepsilon/3) \leq t' \cdot (1+\varepsilon/3)$，因此等价于 $t \leq t' \cdot (1+\varepsilon/3)^2$。类似地，不等式的 $(1+\varepsilon/3)$ 收紧形式$t \leq t'$ 给出 $t \cdot (1+\varepsilon/3) \leq t'/(1+\varepsilon/3)$，等价于 $t \leq t'/(1+\varepsilon/3)^2$。涉及权重比较且因子 $(1+\varepsilon)$ 发生变化的结论，可由以下事实推出：对于每个 $0 < \varepsilon \leq 0.5$,

$$(1+\varepsilon/3)^2 \leq 1+\varepsilon.$$

类似地，涉及权重比较且因子 $(1-\varepsilon)$ 发生变化的结论，可由不等式推出（使用前述结论以及对于所有 a，b，$a \leq b$ 当且仅当 $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$）：

$$\frac{1}{(1+\varepsilon/3)^2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \geq 1-\varepsilon. \qquad \square$$

为了进一步阐释观察 3 的预期用途，假设我们给定一个 ∀CMSO- 查询（φ，$\hat{t}$）。（$1+\varepsilon$）-近似答案（φ，$\hat{t}$）会以（$1+\varepsilon$）-放宽后的或（$1+\varepsilon$）-收紧后的权重比较的形式给出保证；具体而言，φ中的每个权重比较，例如 $t \leq t'$，都可以看作变成了（$1+\varepsilon$）-放宽后的权重比较$t \leq t' \cdot (1+\varepsilon)^2$，或（$1+\varepsilon$）-收紧后的权重比较$(1+\varepsilon)^2 \cdot t \leq t'$。然而，通常我们期望能够用更简单的形式来表述所提供的保证，例如，对于某个 ε'，表述为 $t \leq t' \cdot (1+\varepsilon')$ 或 $t \leq t' \cdot (1-\varepsilon')$。观察 3 允许我们将后一种“简洁”形式的所需保证 ε'转换为一个值 ε，使得（$1+\varepsilon$）-近似答案（φ，$\hat{t}$）能够保证满足这些“简洁”保证。具体而言，我们只需设定$\varepsilon := \varepsilon'/3$。

4 我们的算法元定理

我们终于可以通过两个定理正式陈述本文的主要结果：一个关于团宽，另一个关于树宽。这些定理的证明是第6–10节内容的总结，并在第10.1小节中给出。需要指出的是，前两个定理各自给出了两个运行时间界：前一个界适用于较大的二进制编码数；后一个界则给出了通常适用于较小、且相对于输入规模为多项式的数的运行时间。后一个运行时间界是前一个界的直接推论（利用观察11）。

定理 10 ($\forall\mathrm{CMSO}_1$的近似。**给定一个** $\forall\mathrm{CMSO}_1$-查询 $(\varphi, \hat{}t)$、精度$0 < \varepsilon \leq 0.5$ 以及一个具有匹配签名的图 G，我们可以在 G 上计算 $(\varphi, \hat{}t)$ 的$(1+\varepsilon)$-近似答案，时间至多为

$$\left(\frac{\log(M)}{\varepsilon}\right)^{f_1(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))} \cdot |V(G)|^2,$$

且尤其是在至多.....的时间内

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{f_2(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))} \cdot |V(G)|^2 \cdot M^{0.001}$$

其中，f_1、f_2 是可计算函数，而 M 是比 φ 的任何权重项中出现的最大数值或 G中的任何权重都大2的数。

我们指出，上述定理中的常数 0.001 可以替换为任意$\delta > 0$ （同时相应地调整函数 f_2 ）。对于下述关于树宽的元定理，将常数 1.001 替换为 $1+\delta$ 也是如此。

定理 11 ($\forall\mathrm{CMSO}_2$的近似。**给定一个** $\forall\mathrm{CMSO}_2$-查询 $(\varphi, \hat{}t)$、一个精度$0 < \varepsilon \leq 0.5$ 以及一个具有匹配签名的图 G，我们可以在至多.....的时间内计算出 G 上 $(\varphi, \hat{}t)$ 的 $(1+\varepsilon)$ 近似答案。

$$\left(\frac{\log(M)}{\varepsilon}\right)^{f_1(|\varphi|,\mathrm{tw}(G))} \cdot |V(G)|^{1.001},$$

且尤其是在至多.....的时间内

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{f_2(|\varphi|,\mathrm{tw}(G))} \cdot M^{0.001} \cdot |V(G)|^{1.001}$$

其中，f_1、f_2 是可计算函数，而 M 是比 φ 的任何权重项中出现的最大数值或 G中的任何权重都大2的数。

我们指出，只要将精度 ε 设得足够大，上述两个定理就能让我们得到 $\forall$CMSO$_1$- 和 $\forall$CMSO$_2$-查询的（1-近似）答案。特别是，如果$\varepsilon > (M + |V(G)| + |\varphi|)^{\mathcal{O}(1)}$，那么每个 $(1+\varepsilon)$-近似答案实际上都包含一个精确答案。由于上述元定理的运行时间关于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 呈多项式增长，因此可得到它们的 XP 时间精确变体。

定理 12 (精确计算查询). 给定一个 $\forall$CMSO$_1$-查询（或 $\exists$CMSO$_2$-查询）(φ, t) 以及一个图 G，其匹配签名和团宽（或树宽）至多为 k，我们可以在 G 上计算 (φ, t) 的答案，耗时

$$(M + |V(G)|)^{f(|\varphi|,k)}$$

其中，f 是某个可计算函数，M 是出现在 φ 的任一权重项中或作为 G中任一权重的最大数。

5 针对特定问题的蕴含式

本节将举例说明一些可以用我们的逻辑编码的具体问题，以及我们的元定理对每个问题所蕴含的相应算法。其中许多（但并非全部）问题此前已有专门设计的算法解决，而我们将在此展示，只需简单应用我们的元定理即可推出这些结果。

我们再次讨论本文研究的近似概念与其他概念有何不同。考虑 Subset Sum 问题——更确切地说，是文献中有时会交替使用的 Subset Sum 的两个经典变体：

> Subset Sum （优化版本）
> 输入：一个由整数构成的多重集 $\mathcal{S}$，以及一个目标整数 T。任务：找到一个子集 $S \subseteq \mathcal{S}$，使得 $\sum_{s \in S} s \leq T$，并最大化 $\sum_{s \in S} s$。

> Subset Sum （判定版本）
> 输入：一个由整数构成的多重集 $\mathcal{S} =$ 和一个目标整数 T。问题：是否存在一个子集 $S \subseteq \mathcal{S}$，其元素之和恰好等于 T?

因此，给定一个较小的精度 $0.5 \geq \varepsilon > 0$，并使用引言中的术语，我们可以考虑 Subset Sum的两种不同近似概念。

- 优化目标近似：如果一个解 是 $\mathcal{S}$ 的一个子集，且其元素之和至多为 T，那么我们称其为一个解；我们需要找到一个解，使其元素之和至少达到某个解的最大值的 $1-\varepsilon$ 倍。

- 约束近似：在这里，我们需要给出 $\mathcal{S}$ 的一个子集，其元素之和介于 $(1-\varepsilon)T$ 和 $(1+\varepsilon)T$ 之间；或者正确地说明，不存在元素之和恰好等于 T的子集。

对于 Subset Sum，例如 Knapsack，优化目标近似是研究最广泛的概念，实际上也能提供更强的保证。不过，我们的框架也能刻画许多无法自然地表述为优化问题的问题；对于这类问题，约束近似更为自然。例如，考虑 EquitableColoring 问题：给定一个图 G 和一个整数 k，给定的图是否存在一种适当的 k-着色，使所有颜色类的大小都相等 ± 1? 这里，合理的近似方式是将约束“大小相等 ± 1”放宽为“大小大致相等”。

- 约束近似：要么返回一种 k-着色，使所有颜色类的大小之比至多为 $1+\varepsilon$；要么判定不存在一种 k-着色，使所有颜色类的大小都相等 ± 1。

我们根据所讨论问题的类型组织本节内容，从基础的基于数值的问题开始，逐步讨论以树宽和团宽为参数的图问题，并将通过我们的元定理得到的精确结果和约束近似结果与先前工作进行比较。

5.1 基于数值的基本问题

我们的框架可以涵盖一类经典的基于数值的问题，这些问题通常并非定义在图上。我们使用无边图对它们进行编码；这类图的团宽显然为 1，而所用公式通常长度为常数。

子集和。 给定一个整数多重集 $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ 和一个目标整数 T，为了刻画 Subset Sum，我们只需构造一个无边图，并为每个 $i \in [n]$ 引入一个权重为 $w(v_i)$ 的顶点 $v_i := s_i$。随后，可以用以下 $\forall\mathsf{CMSO}_1$-约束对该问题进行编码

$$\varphi_{\text{SUBS}}(X) := w(X) \leq T \wedge w(X) \geq T,$$

并带有一个空优化目标 $\hat{t} = 0$。显然，$\mathsf{cw}(G)$，$\mathsf{tw}(G)$ $|\varphi_{\text{SUBS}}| \leq \mathcal{O}(1)$.

对于任意 $\varepsilon > 0$，$\varphi_{\text{SUBS}}(X)$ 的 $(1+\varepsilon)$-收紧是不可满足的公式 $(1+\varepsilon)w(X) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}T \wedge \frac{1}{1+\varepsilon}w(X) \geq (1+\varepsilon)T$，这意味着保守解不存在，在此情境下也没有意义。然而，$(1+\varepsilon)$-放宽 $\varphi_{\text{SUBS}}(X)$ 相当于满足 $\frac{1}{1+\varepsilon}w(X) \leq (1+\varepsilon)T \wedge (1+\varepsilon)w(X) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}T$。请记住，$(1+\varepsilon)$-积极解仍满足给定约束的 $(1+\varepsilon)$-放宽。根据观察 3 对 ε 进行重新缩放后，我们还可以保证积极解满足 $w(X) \leq (1+\varepsilon)T \wedge w(X) \geq (1-\varepsilon)T$。因此，我们可以给出 $\mathcal{S}$ 的一个子集，其元素之和介于 $(1-\varepsilon)T$ 和 $(1+\varepsilon)T$ 之间；或者正确指出不存在元素之和恰好为 T 的子集。假设不失一般性，$\mathcal{S}$ 中的所有数都以上界 T 为限，定理 10 给出了一个针对 Subset Sum 的经典全多项式时间近似方案，其运行时间为

$$\left(\frac{\log(T) \cdot n}{\varepsilon}\right)^{\mathcal{O}(1)}.$$

这一结果及其优化问题的变体当然是众所周知的 [33]。此外，我们可以应用定理 12，重新证明一个众所周知的事实：当所有数字都采用一元编码时，Subset Sum 可在多项式时间内求解。

背包。 作为第二个例子，考虑 Knapsack 问题：给定一集合 V 物品、容量 $T \in \mathbb{N}$、得分函数 $w_1 : V \to \mathbb{N}$ 和大小函数 $w_2 : V \to \mathbb{N}$，找出一个子集 $S \subseteq V$，使 $\sum_{s \in S} w_1(s)$ 最大化，同时满足 $\sum_{s \in S} w_2(s) \leq T$。用于表示 Knapsack 的图将与表示 Subset Sum的一样简单：对于 V 中的每件物品，我们只需

创建一个相应的孤立顶点，并为该图的顶点集赋予权重函数 w_1 和 w_2。我们使用简单的 $\forall$ CMSO$_1$-公式 □

$$\varphi_{\textsc{Knap}}(X) := w_2(X) \leq T$$

以及优化目标 $\hat{t}(X) = w_1(X)$】【。

在此，$(1+\varepsilon)$-积极解会得到一个物品集合，其得分保证至少与原始 Knapsack 实例的最优解一样好，尽管它仅满足 $(1+\varepsilon)$-放宽后的约束 $\frac{1}{1+\varepsilon} w_2(X) \leq (1+\varepsilon)T$，因此可能会因使用多达 $T \cdot (1+\varepsilon)^2$ 的容量而"超出"背包容量；观察 3 允许我们将这一容量上界降低至 $T \cdot (1+\varepsilon)$。另一方面，对同一查询的 $(1+\varepsilon)$-保守解会得到一个物品集合，其使用的容量至多为 T，因此能够"装入"原始背包，但其得分可能无法达到最优得分。通过再次利用观察 3 优化容量上界，我们可以确保返回的得分至少与任何满足缩减后容量上界 $(1-\varepsilon)T$ 的解一样好。与本节开头的讨论一致，我们指出，这与 Knapsack的典型近似设置有所不同，后者旨在寻找一个能够装入背包的解，且其得分与最优得分之间的差距不超过一个因子 $1+\varepsilon$。

定理 10 为我们提供了一个全多项式时间近似方案，可在时间 $(\frac{\mathcal{I}}{\varepsilon})^{\mathcal{O}(1)}$内计算实例 $\mathcal{I}$ of Knapsack 的 $(1+\varepsilon)$-急切解和 $(1+\varepsilon)$-保守解，即使所有数字都采用二进制编码。

我们指出，通过在上述图编码中添加边，还可以在问题实例中编码其他类似图的依赖关系。例如，只有当某个元素的依赖项也已存在时，才允许将该元素放入背包；或者，可以添加冲突，以禁止同时选择某些元素。自然，本小节介绍的其他问题也适用同样的方法，此时运行时间还取决于图表示的团宽。

多维子集和。作为一个比前两个例子稍复杂的例子，我们来考虑子集和 Multidimensional Subset Sum的以下变体：给定一个由 k维向量组成的多重集 $\mathcal{S}$，这些向量取自 $\mathbb{N}$，以及一个 k维目标向量 T，所有数值均采用一元编码，判断是否存在一个子集 $S \subseteq \mathcal{S}$ 满足 $\sum_{s \in S} s = T$。与许多其他变体一样 [29, 28]，当以 k [26]为参数时，这一子集和 Multidimensional Subset Sum 变体是 W[1]-难的。

与普通情况类似 Subset Sum，我们为每个向量 $s_i \in S$ 创建一个顶点 v_i，并引入 k 个权重函数 w_1, ..., w_k，使得对于每个 $j \in [k]$ 和顶点 v_i，$w_j(v_i) = s_i[j]$。我们的 $\forall$CMSO$_1$查询由以下约束组成： □

$$\varphi_{\textsc{MSubS}}(X) := \bigwedge_{j \in [k]} \big(T[j] \geq w_j(X) \wedge T[j] \leq w_j(X)\big)$$

以及空优化目标 $\hat{t}(X) = 0$。

与（一维） Subset Sum的论证相同，我们的框架通过以下方式近似该问题：要么给出一个子集，其元素之和为介于（$1-\varepsilon$）T和（$1+\varepsilon$）T之间的 k向量；要么正确指出，不存在元素之和恰好为 T的子集。给定

一个 Multidimensional Subset Sum的实例 $\mathcal{I}$，其中所有数字均采用一元编码，定理10和定理12分别给出了一个全多项式时间近似方案和一个精确算法，其运行时间分别为

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{f(k)} \cdot |\mathcal{I}|^{\mathcal{O}(1)} \qquad \text{and} \qquad |\mathcal{I}|^{f(k)},$$

对于某个可计算函数 f。请注意，与前两个例子不同，这里的公式 $\varphi_{\text{MSUBS}}(X)$ 的长度取决于 k，因此两种算法的运行时间都呈指数级依赖于 k。这是意料之中的，因为若不以 k 为参数，这个问题已知是 NP-困难的，即使数字以一元编码提供也是如此 [26]。我们指出，其他已知的 Multidimensional Subset Sum 变体也可以用类似的方式纳入我们的形式体系 [29, 28]。

5.2 均等性

一类经过深入研究的问题通常无法在以树宽和团宽为参数时实现固定参数可 tractable；这些问题要求将图的顶点划分为若干部分，并使划分具有均等性，即每个部分的大小相同（± 1）。这类问题的典型例子包括 Equitable Coloring [4, 37] 和 Equitable Connected Par-tition [18, 1]，不过也有若干其他变体得到研究 [19, 32]。

对于 Equitable Coloring，给定一个图 G 和一个整数 k，问题是判断是否存在 G 的一个正常 k- 着色，使得任意一对颜色类的大小之差至多为 1。

Equitable Connected Partition 的定义与此类似，唯一的区别是，我们要将 G 划分为 k 个连通分量，而不是进行 k- 着色。这两个问题已知在以树宽加上 k [4, 18] 为参数时是 W[1]-困难的。

这两个问题都可以直接用带有自由集合变量 X_1，……，X_k 的 $\forall$CMSO$_1$ 公式 φ_{EC} 和 φ_{ECP} 来编码，这些公式定义为以下约束的合取：

(i) 对所有 i，$j \in [k]$ 的组合进行权重比较 k^2 $|X_i| \leq |X_j| + 1$。

根据所考虑的问题，我们还会合取一个 MSO$_1$ 公式，以确保 X_1，……，X_k 划分 $V(G)$，并且每个满足 $i \in [k]$ 的 X_i 都是

(ii) G 中的一个独立顶点集合（对于 Equitable Coloring），或在 G 中连通（对于 Equitable Connected Partition）。

应用定理 12，我们立即得到如下结论。

推论 1. Equitable Coloring 和 Equitable Connected Partition属于XP，其参数为 k 加上输入图的团宽。

自然地，我们可以将顶点集的划分的均等性与其他可用单子二阶逻辑表达的划分集合条件结合起来。例如，可以很容易地使用 $\forall$CMSO$_1$ 查询对 Equitable Partition into Induced Forests [19] 进行编码。 □

近似。 转向近似，对于固定的 $\varepsilon > 0$，$(1+\varepsilon)$-放宽后的 φ_{EC} orφ_{ECP} 相当于将 (i) 中的每个约束 $|X_i| \leq |X_j| + 1$ 替换为 $\frac{1}{1+\varepsilon}|X_i| \leq (1+\varepsilon)(|X_j|+1)$。类似地，$(1\mp\varepsilon)$-收紧 φ_{EC} or φ_{ECP} 相当于将第 (i) 项中的每个约束$|X_i| \leq |X_j| + 1$ 替换为 $(1+\varepsilon)|X_i| \leq \frac{1}{1+\varepsilon}(|X_j|+1)$。除非 ε 取最小值，否则收紧后的公式无法满足（这意味着我们无法保证得到保守解）。不过，放宽后的公式可以通过调整为更简洁的形式$|X_i| \leq (1+\varepsilon)|X_j|$，实现这一点的方法是按照观察 3 的方式重新缩放 ε，并再次[4] 以去掉"+1"。这样我们便可运用定理 10，为相应的均衡问题得到如下固定参数近似算法方案。

尽管下文不再明确说明，但所有这些算法都是全多项式时间近似方案，因为 $\frac{1}{\varepsilon}$ 仅以多项式方式出现，尽管该多项式的指数取决于团宽和公式。

推论 2。 存在一种固定参数算法，其输入为一个团宽为 ℓ 的图 G、一个整数 k 和 $0 < \varepsilon \leq 0.5$，参数为 $\ell + k + \frac{1}{\varepsilon}$，并且

1. 要么生成一个 k-着色，使任意两个颜色类的大小之比至多为 $1+\varepsilon$；要么正确判定不存在公平的 k-着色；
2. 要么生成一个划分为 k 个连通分量的划分，使任意两个分量的大小之比至多为 $1+\varepsilon$；要么正确判定不存在划分为 k 个连通分量的公平划分。

我们指出，该结果与 Lampis [36] 提出的针对 Equitable Coloring 的固定参数近似算法相一致（参数化方式相同，但运行时间更长；鉴于使用了单子二阶逻辑，这是可以预期的）。

只需稍微调整公式中的阈值，我们甚至可以得到更强的保证。我们只针对 Equitable Coloring陈述这些保证，但也可以用类似的方法推导出本节提到的其他问题的保证。

推论 3. 存在一个固定参数算法，以团宽为ℓ的图 G、整数 k 和 $0 < \varepsilon \leq 0.5$作为输入，参数为 $\ell + k + \frac{1}{\varepsilon}$，并且要么生成一个 k-颜色染色，使任意两个颜色类的大小之比至多为 $1+2\varepsilon$；要么正确判定不存在一种 k- 颜色染色，使任意两个颜色类的大小之比至多为 $1+\varepsilon$。

与部分数量无关的运行时间。 对于 Equitable ConnectedPartition，我们还可以通过使用边集变量来避免将 k 作为参数，从而将问题置于 $\forall\mathsf{CMSO}_2$中。因此，我们只允许将树宽而非团宽作为宽度参数。我们通过一个公式来实现这一点，该公式编码了这样一个性质：存在一个边集，删除它后，所有连通分量的大小均为 $|V(G)|/k \pm 1$；这一性质可以通过对所有集合进行全称量化来检查。更准确地说，我们可以通过以下 $\forall\mathsf{CMSO}_2$ 公式来刻画这一性质（其中用引号标记的语句可以通过标准的单子二阶逻辑公式表示）：

[4]如果 $a \leq (b+1)(1+\varepsilon/2)$且 b 足够大，那么也有 $a \leq b(1+\varepsilon)$。

引号可以通过标准的单子二阶逻辑$_2$ 公式来表示）：

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ECP-2}}(X) := &\left(\forall Y : (\text{“}G[Y] \text{ is not a connected component of } G - X\text{”}) \vee |Y| \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) \\ &\wedge \left(\forall Y : (\text{“G[Y] is not a connected component of } G - X\text{”}) \vee |Y| \leq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right) \\ &\wedge \Big(\forall Y : (\text{“}Y \text{ does not contain precisely one vertex from each} \\ &\qquad \text{connected component of } G - X\text{”}) \vee |Y| \leq k\Big) \\ &\wedge \Big(\forall Y : (\text{“}Y \text{ does not contain precisely one vertex from each} \\ &\qquad \text{connected component of } G - X\text{”}) \vee |Y| \geq k\Big),\end{aligned}$$

其中 X 是边集变量， Y 是顶点集变量，且 $n = |V(G)|$。例如，这使我们能够得到该问题仅以树宽为参数时已知的 XP 可处理性 [18]。

推论 4。 Equitable Connected Partition 属于XP ，其参数为输入图的树宽。

在相关的 Balanced Partitioning问题 [40], 中，给定一个图 G 以及整数 d和 k, 要求找到一个至多包含 d 条边的集合 X，使得 $G - X$ 由 k 个均衡的连通分量组成。通过与上文相同的论证，也可以用一个长度为常数的 $\forall$CMSO$_2$查询来刻画该问题。当然，定理 11 也给出了用于近似这些问题的固定参数算法。

5.3 有界度顶点删除

在 Bounded Degree Vertex Deletion 问题中，给定一个图 G 和一个整数 p，要求找到一个最小的顶点集 D，使得 $G - D$ 的度至多为 p；为简单起见，我们称这样的集合为一个 p-*BDVD* 集。已知该问题是 W[1]-难的，但当以树宽 [14, 3, 26] 或团宽 [36] 为参数时属于 XP。对于该问题在一般图 [13]上的可近似性，也存在很强的下界。

为了刻画 Bounded Degree Vertex Deletion，我们可以直接在未着色的输入图 G上进行操作。优化目标将为 $\hat{t}(X) = -|X|$ (从而允许我们最小化 X的大小)。若某个顶点 $v \in A$ 属于某个 $A \subseteq V(G)$，则称其为 A-全称的，如果它与 $A \setminus \{v\}$中的每个顶点都相邻。接着，我们通过以下$\forall$CMSO$_1$-公式刻画 Bounded Degree Vertex Deletion 。

$$\varphi_{\text{BDVD}}(X) := \forall A : \big(\neg(\text{“}X \cap A = \emptyset\text{”} \wedge \text{“}A \text{ 包含一个 } A\text{-通用顶点”})\big) \vee |A| \leq p + 1.$$

观察 4。每个 p-BDVD 集 D 都满足 $\varphi_{\text{CVC}}(D)$；同时，满足 $\varphi_{\text{CVC}}(X)$的 X 的每种解释都是一个 p-BDVD 集。

证明。考虑一个 p-BDVD 集 D，并注意到对于 A 的任意取值，公式 $\varphi_{\mathrm{BDVD}}(D)$都会自动成立，除非 A 包含一个 A-全称顶点。由于 $G-D$ 的度至多为 p，如果 A 包含一个 A-全称顶点，那么它的大小至多为 $p+1$。

另一方面，考虑一个集合 D，使得 $G \models \varphi_{\mathrm{CVC}}(D)$。如果某个顶点 $v \in G-D$的度至少为 $p+1$，那么 v将是集合 A中的一个 A-通用顶点，该集合包含v 以及 $G-D$中 v 的所有邻点。这样的集合 A 将与 D不相交，包含一个 A-通用顶点，且大小至少为 $p+2$。换言之，这样一个顶点 v 的存在将与 $G \models \varphi_{\mathrm{BDVD}}(D)$矛盾。这意味着$G-D$ 中的最大度至多为 p，特别地， D 是 G的一个 p-BDVD 集。 □

此时，应用定理12即可得到已知的 XP 算法，该问题以团宽为参数。

推论5。 Bounded Degree Vertex Deletion 属于 XP ，参数为输入图的团宽。

关于我们的方法对近似的蕴含，让我们再次考虑对于某个固定的 $\varepsilon > 0$，放宽和收紧 $\varphi_{\mathrm{BDVD}}(D)$ 意味着什么，并直接应用观察 3。 $\varphi_{\mathrm{BDVD}}(X)$ 的 $(1+\varepsilon)$- 收紧对应于一个 $(1-\varepsilon)$ p-BDVD 集；类似地，$(1+\varepsilon)$-放宽对应于一个 $(1+\varepsilon)p$-BDVD 集。

因此，对于构成近似 $\forall$CMSO$_1$ 查询答案第一部分的值 max$^-$ ，保守解 W^- 保证是一个 p-BDVD 集，且其大小不超过最小的 $(1-\varepsilon)p$-BDVD 集（也就是说，我们保证不会超过界限 p，但规模可能会超出预期）。与此同时，对于构成答案第二部分的值 max$^+$，积极解 W^+ 保证是一个 $(1+\varepsilon)p$-BDVD 集，且其大小不超过最小的 p-BDVD 集（这里我们对规模有很强的保证，但最终可能会有一些顶点的度略高）。综上，我们得到如下结论。

推论6。存在一种固定参数算法，其输入为一个团宽为 ℓ 的图 G 、整数 p 和 $0 < \varepsilon \leq 0.5$，以 $\ell + \frac{1}{\varepsilon}$ 为参数，并输出

1. a p-B G 中不大于最小的 $(1-\varepsilon)p$-*BDVD* 集合，且
2. G 中的一个 $(1+\varepsilon)p$-*BDVD* 集合，其大小不大于最小的 p-*BDVD* 集合。

我们再次指出，该结果与 Lampis 的固定参数近似算法相符 [36] （采用相同的参数化，尽管运行时间较慢）。

5.4 容量约束问题

若干包含顶点容量的经典图问题推广形式，也可以纳入我们的框架。作为两个典型例子，我们来考察 Capac-itated Dominating Set (CDS)和 Capacitated Vertex Cover (CVC)。以树宽为参数时，这两个问题都是 W[1]-难的 [15] ，但属于 XP，且适用于 FPT 近似 [36]。这些问题将进一步说明，涉及（多个）全称量化变量的权重项为何有用。

CDS 和 CVC 的优化变体以图 G 和容量函数 $c\colon\ V(G) \to \mathbb{N}$ 作为输入，我们假设该函数采用一元编码。对于 CDS，我们要寻找一个大小最小的支配集 X，并满足以下性质：存在一种支配分配，将每个顶点 $v \notin X$ 分配给 X 中的一个邻点，使得对于每个 $x \in X$，分配给它的顶点数量不超过 $c(x)$。类似地，对于 CVC，我们要寻找一个大小最小的顶点覆盖 C，并满足以下性质：存在一种覆盖分配，将每条边 ab 分配给 $\{a, b\} \cap X$ 中的一个顶点，使得对于每个 $x \in X$，分配给它的边数量不超过 $c(x)$。我们将满足这一附加性质的支配集（或顶点覆盖）称为容量约束的。

为了通过 $\forall$CMSO$_2$ 公式对这些问题进行编码，我们首先讨论如何将实例恰当地表示为带有权重函数 w 的图。一种自然的编码方式是令 $w(v) = c(v)$。然而，由于我们的公式在每个块中只能包含一个全称权重项，我们转而采用互补的方法：每个顶点将获得权重 $w(v) = \lambda - c(v)$，其中 $\lambda = \max_{v \in V(G)} c(v)$ 是该实例的最大容量。现在，我们可以通过一个 $\forall$CMSO$_2$ 查询来捕获 CDS，其最大化目标为 $\hat{t}(X) = -|X|$，约束公式为

$$\varphi_{\mathrm{CDS}}(X) := \exists F\colon \text{“}\ X \text{ 外的每个顶点都恰好关联一条来自 } F \text{ 的边} \qquad \text{”}$$
$$\wedge \big(\forall x\ \forall A\colon \text{“}x \notin X \text{ 或 } A \text{ 不是图 } (V(G), F) \text{ 中 } x \text{ 的邻域”} \vee |A| + w(x) \leq \lambda\big),$$

其中，F 是边集变量，x 是顶点变量，A 是集合变量。

观察 5。 原图中的每个容量支配集 D 都满足在构造出的加权图上的 $\varphi_{\mathrm{CDS}}(D)$；另一方面，加权图上满足$\varphi_{\mathrm{CDS}}(X)$的 X 的每种解释，都是原图中的一个容量支配集。

证明。给定 D，我们知道存在一个不会超过给定容量的支配分配 α。考虑边集 F，它由连接每个 D 之外的顶点与分配给它的顶点的边组成。这显然满足第一行中的条件。对于第二行，当析取中的第一项不满足时，集合 A 由可通过 F-边到达的 $v \in D$ 的邻居组成。由于每个 $v \in D$ 至多关联 $c(v)$个 $= \lambda - w(v)$边，而这些边属于 F（这意味着 $|A| \leq \lambda - w(v)$），因此可以保证权重比较中的左侧权重项之和至多为 λ。

另一方面，给定加权图上满足 $\varphi_{\mathrm{CDS}}(X)$ 的 X 解释，我们可以构造一个支配分配 α，将每个顶点 $v \in V(G) \setminus X$ 分配给其在 F 中唯一的伙伴。对 A 的“有效”解释的最大规模进行界定的论证保证了 α 对每个特定的 $v \in D$ 至多分配 $c(x)$ 个顶点。

□

为了刻画 CVC，我们对构造出的加权图再做一项技术性修改，以便让逻辑能够定义一个“赋值”——具体而言，我们将每条边细分，并用单一颜色（例如红色）给新产生的顶点着色。通过选择一条与红色顶点相连的边，我们可以指出该红色顶点所代表的边由哪一个端点覆盖。虽然这改变了图 G 本身，但

众所周知，边细分不会增加图的树宽（观察 1）。现在，我们使用相同的目标 $\hat{t}(X) = -|X|$ 以及约束公式

$\varphi_{\mathrm{CVC}}(X) := \exists F : \big(\forall x \in X : \neg\text{红色}(x)\big) \wedge$ (“每个红色顶点恰好与 F 中的一条边关联”) $\wedge \big(\forall x\ \forall A :$ “$x \notin X$ 或 A 不是图 $(V(G)\ F)$ 中 x 的邻域”$\vee\ |A| + w(x) \leq \lambda\big)$.

重复使用观察 5 证明中的论证，我们得到：

观察 6。 原图中的每个容量化顶点覆盖 C 都满足构造出的加权图上的 $\varphi_{\mathrm{CVC}}(C)$；另一方面，加权图上满足 $\varphi_{\mathrm{CVC}}(X)$ 的 X 的每种解释，都是原图中的一个容量化顶点覆盖。

至此，我们可以陈述这些编码所带来的结论。首先，通过应用定理 12，我们立即观察到问题 [15, 36] 已知的 XP 可处理性。

推论 7。 Capacitated Dominating Set 和 Capacitated Vertex Cover关于输入图的树宽是XP 参数化的。

请注意，根据观察 3， $\varphi_{\mathrm{CDS}}(X)$ 和 $\varphi_{\mathrm{CVC}}(X)$ 的收紧版本与放宽版本分别对应于在权重比较的右侧添加 $\pm\varepsilon\lambda$ 的加性变化。应用定理 10 可得：

推论 8。存在一种固定参数算法，以树宽为 ℓ 的图 G 、函数 $c : V(G) \to \mathbb{N}$ 和 $0 < \varepsilon \leq 0.5$作为输入，以 $\ell + \frac{1}{\varepsilon}$ 为参数，并且

1. 输出一个容量支配集（或容量化顶点覆盖）(G, c) ，其大小不超过实例 (G, c^-) 的最优解大小，其中 $c^-(v) := c(v) - \varepsilon \cdot$ (最大$_{v \in V(G)}\ c(v)$)，并且

2. 输出一个容量支配集（或容量化顶点覆盖）(G, c^+) ，其中$c^+(v) := c(v) + \varepsilon \cdot$ (最大值$_{v \in V(G)}\ c(v)$)，其规模的上界为 (G, c) 的一个最优解的规模。

人们自然会希望得到一个更强的结果：此时，误差不再是加性误差 $\pm\varepsilon\lambda$，而是相对误差 $c^-(v) := c(v)(1 - \varepsilon)$ 和 $c^+(v) := c(v) \cdot (1 + \varepsilon)$。虽然我们尚不清楚如何通过我们的元定理获得这一强化结果，但具有相对误差的更强表述同样成立 [36]。

5.5 图模体

Graph Motif 这是一个受生物信息学中的模式匹配应用 [21]启发提出的问题。输入包括一个图 G ，其顶点均带有来自颜色集 $C = [k]$ 的颜色，以及一个模式，可以视为一个映射 $M : C \to \mathbb{N}$。问题是是否存在一个 M-*motif*，也就是说，是否存在 G的一个连通子图 S ，满足以下性质：对于每种颜色 i， S 中被染成 i 的顶点数量为 $M(i)$。

因此，我们并不关注结构的细节，而只要求保留连通这一基本的拓扑要求。

Graph Motif 已知，在以树宽加上 k [21]为参数时，该问题具有 XP 可处理性；此外，人们还研究了它在其他一系列结构参数化下的性质 [5, 25] ，但令人意外的是，尚未研究团宽。我们将用来刻画 Graph Motif 的查询，其空优化目标为$\hat{t} = 0$，并由以下公式构成

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{GM}}(X) := \exists X_1, \ldots, X_k : (&\text{“}X \text{ is connected”})\\ &\wedge (\text{“}X_1, \ldots, X_k \text{ is the partitioning of } X \text{ into colors } 1, \ldots, k, \text{ respectively”})\\ &\wedge \Big(\bigwedge_{i \in [k]} |X_i| \leq M(i) \wedge M(i) \leq |X_i| \Big).\end{aligned}$$

容易看出，集合 S 是一个 M-motif，当且仅当它满足 $\varphi_{\mathrm{GM}}(S)$。值得注意的是，公式 $\varphi_{\mathrm{GM}}(X)$的长度取决于 k，这是必要的：当 k 不受限制时，即使在树宽为常数的实例 [5]上，Graph Motif 仍然是 NP-困难的。由于 $\varphi_{\mathrm{GM}}(X)$是一个 $\forall$CMSO$_1$公式，我们可以立即将该问题已知的 XP 可处理性从树宽推广到团宽。

推论 9. Graph Motif 在以 k 加上输入图的团宽为参数时属于XP 。

谈到近似，我们可以看到，这两个不等式编码了一个等式，因此对于所有 $\varepsilon > 0$，$(1+\varepsilon)$-收紧后的公式都不可满足。另一方面，要满足放宽后的公式，只需让每个 X_i 都符合不等式 $(1-\varepsilon)M(i) \leq |X_i| \leq (1+\varepsilon)M(i)$（应用观察 3 后）即可。我们将满足这些不等式、按颜色划分的集合 X 称为 $(1+\varepsilon)$-近似 M-模体。

如果我们调用定理 10，要求查询 $(\varphi_{\mathrm{GM}}, 0)^-$ 的 $(1+\varepsilon)$-近似答案，并收到 $\max^+ = 0$，那么我们还会得到一个见证 W^+，它是一个 $(1+\varepsilon)$-近似M-模体。或者，如果收到 $\max^+ = -\infty$，则这意味着 $\max(G, \varphi, \hat{t}) = -\infty$，从而排除了 M-模体存在的可能性。总之：

推论 10。存在一种固定参数算法，以实例 $(G, C = [k], M)$ 和一个数 $0 < \varepsilon \leq 0.5$作为输入，其中参数为 $\frac{1}{\varepsilon} + k + \mathrm{cw}(G)$，并计算一个$(1+\varepsilon)$近似的 M-模体，或正确判定 G 不包含 M-模体。

证明

6 精确扩展 Feferman–Vaught

在本节中，我们将探讨一种针对特殊类型 $\forall$CMSO公式、具有 Feferman–Vaught 风格的精确组合定理。随后，在第 9 节中，我们将看到，关于这些特殊 $\forall$CMSO公式的近似信息，足以近似求值所有$\forall$CMSO公式。

6.1 表公式的定义

我们首先定义所有证明和算法的核心数据结构。借鉴典型的动态规划算法，我们称之为一张表。

定义 4 (表)。设 σ 是一个 CMSO_1-签名， $q \in \mathbb{N}$ 是一个量词秩， X, Y 是由集合变量组成的元组， τ_1 是 X 上的整数权重项集合， τ_2 是 XY 上的整数权重项集合。我们将表 $T(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 定义为所有形式如下的表公式 $\omega(X)$ 的集合

$$\omega(\bar{X}) := \Big(\bigwedge_{t\in\tau_1} t(\bar{X}) \le g_{t,\le} \wedge t(\bar{X}) \ge g_{t,\ge}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{t\in\tau_2} \bigwedge_{\psi\in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y}\psi(\bar{X}\bar{Y}) \vee \big(t(\bar{X}\bar{Y}) \le g_{t,\psi,\le} \wedge t(\bar{X}\bar{Y}) \ge g_{t,\psi,\ge}\big)\Big),$$

其中 $g_{t_1,\le}, g_{t_1,\ge}, g_{t_2,\psi,\le}, g_{t_2,\psi,\ge} \in \mathbb{N}$ 对所有 $t_1 \in \tau_1$、 $t_2 \in \tau_2$、 $\psi \in$ 均成立的 $\mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, XY)$。

注意，一旦表固定下来，其中的每个表公式就完全由其包含的数值常数确定。对于每个这样的公式 $\omega(X)$，我们将其数值常数称为阈值，并记作

- $g_\omega(t, \le) := g_{t,\le}$,
- $g_\omega(t, \ge) := g_{t,\ge}$,
- $g_\omega(t, \psi, \le) := g_{t,\psi,\le}$,
- $g_\omega(t, \psi, \ge) := g_{t,\psi,\ge}$.

我们注意到，虽然对于每个固定的 $(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$，表 $T(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 只包含长度有界的公式，但表本身的大小是无限的，因为表公式的值域涵盖不等式中所有可能的数值。出于算法目的，将 $T(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 限制在一个大小有界的集合内，这将在后文讨论；目前我们将采用这种数学上更简洁的表述。

6.2 组合

我们将经典的 Feferman–Vaught 定理扩展到我们所说的表。请记住，FV(ψ) 是定理 8 中的“Feferman–Vaught 集”。我们将这一概念扩展到表中的公式 $\omega(X)$，定义“扩展的 Feferman–Vaught 集”$\mathrm{FV}^\forall(\omega)$。这些集合的定义受到以下想法的启发：如果我想要并集中顶点的一个子集

$G_1 \cup G_2$的大小，例如至少为 g，那么我就可以猜测将 g划分为数字 $g_1 + g_2 = g$，并在 G_1 中寻找一个大小至少为 g_1 的集合，以及在 G_2中寻找一个大小至少为 g_2 的集合。然而，由于表公式还包含一个全称量化部分，因此完整的论证会更加复杂。下面给出的定理表述及其对应的 Feferman–Vaught 集并非算法性的，因为它涉及一个无限大小的表 T。在接下来的第 7 节中，我们将使该结果变为有限的、近似的且算法性的。为简洁起见，我们还使用记号 $\overline{\mathrm{FV}}(\psi) := \{(\psi_1, \psi_2) \mid (\neg\psi_1, \neg\psi_2) \in \mathrm{FV}(\neg\psi)\}$。

定义 5（扩展的 Feferman–Vaught 集）。令 $T := T(q, c, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 为一个表，且 $\omega(X) \in T$为一个表公式。令 $\mathrm{FV}^\forall(\omega) \subseteq T \times T$为所有表公式元组 (ω_1, ω_2) 构成的集合，使得

- 对于所有 $t \in \tau_1$，都有$g_{\omega_1}(t, \leq) + g_{\omega_2}(t, \leq) \leq g_\omega(t, \leq)$，并且$g_{\omega_1}(t, \geq) + g_{\omega_2}(t, \geq) \geq g_\omega(t, \geq)$，并且
- 对于所有 $t \in \tau_2$，$\psi \in \mathrm{CMSO1}(\sigma, q, XY)$，且 $(\psi_1, \psi_2) \in \overline{\mathrm{FV}}(\psi)$，都有$g_{\omega_1}(t, \psi, \leq) + g_{\omega_2}(t, \psi, \leq) \leq g_\omega(t, \psi, \leq)$，并且$g_{\omega_1}(t, \psi, \geq) + g_{\omega_2}(t, \psi, \geq) \geq g_\omega(t, \psi, \geq)$。

定理 13. 设 $T := T(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$. 对于每个 $\omega(X) \in T$，集合 自由变量集$^\forall(\omega)$ 满足以下性质：对于所有图 G_1, G_2 和 $\bar{W}_1 \in \mathcal{P}(V(G_1))^{|\bar{X}|}$, $\bar{W}_2 \in \mathcal{P}(V(G_2))^{|\bar{X}|}$,

$$G_1 \cup G_2 \models \omega(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \iff G_1 \models \omega_1(\bar{W}_1) \text{ and } G_2 \models \omega_2(\bar{W}_2) \text{ for some } (\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{FV}^\forall(\omega).$$

证明。我们将通过推导一系列等价的框选命题来证明该定理。第一个命题正是定理中等价关系的左侧。

$$G_1 \cup G_2 \models \omega(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2).$$

现在我们根据表公式的定义展开 ω，其中 U_i 是 U 在 G_i上的限制。从这里开始，我们将方框划分为若干子框，以强调子陈述之间的合取。

- 对于所有 $t \in \tau_1$，
  - $G_1 \cup G_2 \models t(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \leq g_\omega(t, \leq)$ 和 $G_1 \cup G_2 \models t(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \geq g_\omega(t, \geq)$

- 对于所有 $t \in \tau_2$, $\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$,
  - 对于所有 $\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \in \mathcal{P}(V(G_1 \cup G_2))^{|\bar{Y}|}$,
    - $G_1 \cup G_2 \models \psi((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2))$ 或
    - $G_1 \cup G_2 \models t(\bar{W}(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)) \leq g_\omega(t, \psi, \leq)$ 和 $G_1 \cup G_2 \models t(\bar{W}(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)) \geq g_\omega(t, \psi, \geq)$。

最初几步将针对 τ_2中的项，也就是说，只涉及每个方框的后半部分。由于所有不满足 $G_1 \cup G_2 \models \psi((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2))$的 $\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \in \mathcal{P}(V(G_1 \cup G_2))^{|\bar{Y}|}$都必定满足 $G_1 \cup G_2 \models t((W_1 \cup W_2)(U_1 \cup U_2)) \leq g_\omega(t, \psi, \leq)$以及 $G_1 \cup G_2 \models t((W_1 \cup W_2)(U_1 \cup U_2)) \geq g_\omega(t, \psi, \geq)$，我们可以改写后两个陈述，使其引用极值如下。

- 对于所有 $t \in \tau_1$,
  - $G_1 \cup G_2 \models t(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \leq g_\omega(t, \leq)$ 且 $G_1 \cup G_2 \models t(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \geq g_\omega(t, \geq)$

- 对于所有 $t \in \tau_2$, $\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$,
  - $\max_{\{\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \mid G_1 \cup G_2 \models \neg\psi((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2))\}} t^{G_1 \cup G_2}((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)) \leq g_\omega(t, \psi, \leq)$，并且
  - $\min_{\{\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \mid G_1 \cup G_2 \models \neg\psi((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2))\}} t^{G_1 \cup G_2}((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)) \geq g_\omega(t, \psi, \geq)$。

现在将定理 8 应用于公式 $\neg\psi(\bar{X}\bar{Y})$，可得对所有 $\bar{U}_1 \in \mathcal{P}(V(G_1))^{|\bar{Y}|}$ 以及 $\bar{U}_2 \in \mathcal{P}(V(G_2))^{|\bar{Y}|}$,

$$G_1 \cup G_2 \models \neg\psi((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)) \iff G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1) \text{ and } G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2) \text{ for some } (\psi_1, \psi_2) \in \overline{\mathrm{FV}}(\psi). \quad (3)$$

令 $\mathsf{opt} \in \{\mathsf{min}, \mathsf{max}\}$ 和 $t \in \tau_2$。在所有满足 (3) 左侧条件的 $\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$ 上优化 $t^{G_1 \cup G_2}((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2))$，得到

$$\operatorname*{opt}_{\{\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \mid G_1 \cup G_2 \models \neg\psi((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2))\}} t^{G_1 \cup G_2}((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)), \quad (4)$$

类似地，在所有满足（3）右侧条件的 $\bar{U}_1, \bar{U}_2$ 上优化 $t^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) + t^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2)$，可得到

$$\operatorname*{opt}_{(\psi_1, \psi_2) \in \overline{\mathrm{FV}}(\psi)} \Big(\operatorname*{opt}_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) + \operatorname*{opt}_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \Big). \quad (5)$$

由于对于所有 $\bar{U}_1 \in \mathcal{P}(V(G_1))^{|\bar{Y}|}$ 和 $\bar{U}_2 \in \mathcal{P}(V(G_2))^{|\bar{Y}|}$，$t^{G_1 \cup G_2}((\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)(\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2)) = t^{G_1 \cup G_2}(\bar{W}_1\bar{U}_1) + t(\bar{W}_2\bar{U}_2)$，且式 (3) 的左右两边等价，因此我们得出 (4) 和 (5) 相等。由此，前一个框和后一个框是等价的。

- 对于所有 $t \in \tau_1$,
  - $G_1 \cup G_2 \models t(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \leq g_\omega(t, \leq)$ 和 $G_1 \cup G_2 \models t(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \geq g_\omega(t, \geq)$

- 对于所有 $t \in \tau_2$, $\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$,
  - 最大值 $_{(\psi_1,\ \psi_2)\in\text{自由}\overline{\text{变量集}}(\psi)}\Big(\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1\models\neg\psi_1(\ \bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\ \bar{W}_1\bar{U}_1) + \max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2\models\neg\psi_2(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\Big) \leq g_\omega(t,\ \psi,\ \leq)$,
  - 最小值 $_{(\psi_1,\psi_2)\in\text{自由}\overline{\text{变量集}}(\psi)}\Big(\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1\models\neg\psi_1(\ \bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\ \bar{W}_1\bar{U}_1) + \min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2\models\neg\psi_2(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\Big) \geq g_\omega(t, \psi, \geq)$。

在最后两行中，我们将对 $(\psi_1,\ \psi_2) \in$ 自由变量集(ψ) 的最大化和最小化转化为全称量化。

- 对于所有 $t \in \tau_1$,
  - $G_1 \cup G_2 \models t(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \leq g_\omega(t,\ \leq)$以及 $G_1 \cup G_2 \models t(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \geq g_\omega(t,\ \geq)$

- 对于所有 $t \in \tau_2$、$\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma,\ q, \bar{X}\bar{Y})$,
  - 对于所有$(\psi_1,\ \psi_2) \in$ 自由变量集(ψ),
    - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1\models\neg\psi_1(\ \bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\ \bar{W}_1\bar{U}_1) + \max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2\models\neg\psi_2(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \leq g_\omega(t,\ \psi,\ \leq)$，和
    - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1\models\neg\psi_1(\ \bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\ \bar{W}_1\bar{U}_1) + \min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2\models\neg\psi_2(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\ \bar{W}_2\bar{U}_2) \geq g_\omega(t,\ \psi,\ \geq)$。

现在，我们换一个角度，重新表述后半部分开头的量化。这一微妙的改写可以视为证明的核心。

- 对所有 $t \in \tau_1$,
  - $G_1 \cup G_2 \models t(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \leq g_\omega(t, \leq)$ 和 $G_1 \cup G_2 \models t(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \geq g_\omega(t,\ \geq)$

- 对于所有 $t \in \tau_2$，对于所有 $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma,\ q,\ \bar{X}\bar{Y})$,
  - 对于所有 $\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$ 使得 $(\psi_1, \psi_2) \in$ 自由变量集(ψ),
    - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1\models\neg\psi_1(\ \bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\ \bar{W}_1\bar{U}_1) + \max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2\models\neg\psi_2(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\ \bar{W}_2\bar{U}_2) \leq g_\omega(t,\ \psi,\ \leq)$，以及
    - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1\models\neg\psi_1(\ \bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\ \bar{W}_1\bar{U}_1) + \min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2\models\neg\psi_2(\ \bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\ \bar{W}_2\bar{U}_2) \geq g_\omega(t,\ \psi,\ \geq)$。

固定 $t \in \tau_1$。注意，$t^{G_1 \cup G_2}(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) = t^{G_1}(\bar{W}_1) + t^{G_2}(\bar{W}_2)$，因此 $t(\bar{W}_1\bar{W}_2) \leq g_\omega(t, \leq)$ 当且仅当存在 $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq a, b \leq g_\omega(t, \leq)$，使得 $t^{G_1}(\bar{W}_1) \leq a$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \leq b$ and $a + b \leq g_\omega(t, \leq)$。类似地，我们可以使用数 a' and b' 将 $g_\omega(t, \geq)$ 分解为：$t^{G_1 \cup G_2}(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \geq g_\omega(t, \geq)$ 当且仅当存在 $a', b' \in \mathbb{N}$, $0 \leq a', b' \leq g_\omega(t, \geq)$，使得 $t^{G_1}(\bar{W}_1) \geq a'$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \geq b'$ and $a' + b' \geq g_\omega(t, \geq)$。这意味着前一个 Block 和后一个 Block 的第一类部分是等价的。

此外，我们固定 $t \in \tau_2$ 和 $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$。我们前一个方框底部不等式左侧的项不取决于 $\bar{X}$ 的选择，因此我们可以将其视为两个数之和，这两个数由 t、ψ_1、ψ_2 的选择决定。对于任意两个这样的数 M_1 和 M_2，我们有如下结论：

$$M_1 + M_2 \leq g_\omega(t, \psi, \leq) \text{ holds for all } \psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y}) \text{ with } (\psi_1, \psi_2) \in \overline{\mathrm{FV}}(\psi)$$

当且仅当存在 a，$b \in \mathbb{N}$，使得对于所有满足 $(\psi_1, \psi_2) \in$ 自由变量集(ψ) 的 $\psi \in \overline{\mathrm{CMSO}}_1(\sigma, q, XY)$，都有 $a + b \leq g_\omega(t, \psi, \leq)$，并且

$$M_1 \leq a, \qquad M_2 \leq b.$$

这样，我们将每个阈值 $g_\omega(t, \psi, \leq)$ 和 $g_\omega(t, \psi, \geq)$ 拆分为两个加数，分别对应在 G_1 和 G_2 上取到的项，从而证明了前一个 Block 和后一个 Block 中后半部分的等价性。我们用下标标记 a-值和 b-值，以便将它们唯一地区分开来。

- 对于所有 $t \in \tau_1$,
  - 存在 $a_{t,\leq}, b_{t,\leq}, a_{t,\geq}, b_{t,\geq} \in \mathbb{N}$ 使得
    - $a_{t,\leq} + b_{t,\leq} \leq g_\omega(t, \leq)$, $a_{t,\geq} + b_{t,\geq} \geq g_\omega(t, \geq)$，以及
    - $t^{G_1}(\bar{W}_1) \leq a_{t,\leq}$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \leq b_{t,\leq}$, $t^{G_1}(\bar{W}_1) \geq a_{t,\geq}$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \geq b_{t,\geq}$。

- 对所有 $t \in \tau_2$，对所有 ψ_1，$\psi_2 \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$,
  - 存在 $a_{t,\psi_1,\leq}$，$b_{t,\psi_2,\leq}$，$a_{t,\psi_1,\geq}$，$b_{t,\psi_2,\geq} \in \mathbb{N}$ 使得对所有 $\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$ 满足 $(\psi_1, \psi_2) \in \overline{\mathrm{FV}(\psi)}$，我们有
    - $a_{t,\psi_1,\leq} + b_{t,\psi_2,\leq} \leq g_\omega(t, \psi, \leq)$, $a_{t,\psi_1,\geq} + b_{t,\psi_2,\geq} \geq g_\omega(t, \psi, \geq)$, 以及
    - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \leq a_{t,\psi_1,\leq}$, $\max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \leq b_{t,\psi_2,\leq}$, and
    - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \geq a_{t,\psi_1,\geq}$, $\min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \geq b_{t,\psi_2,\geq}$.

接下来，我们将通过对整个 a 值集合（即形如 $a_{\circ,\circ}$ 的值）和 b 值集合（形如 $b_{\circ,\circ,\circ}$ 的值）进行存在量化，来交换陈述开头的量词。随后，我们会对元素的所有可能选择进行条件检查，这些元素来自 τ_1、τ_2 和 $\mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, X)$。与此同时，我们以一种稍后会派上用场的方式重新整理这些条件：第二个和第四个子框包含此前位于顶部子框中的条件，而

第三个和第五个子框包含此前位于底部子框中的条件。

- 存在 $a_{t^{\exists},\ \leq}$，$b_{t^{\exists},\ \leq}$，$a_{t^{\exists},\ \geq}$，$b_{t^{\exists},\ \geq} \in \mathbb{N}$ 对 $t^{\exists}$ 的所有选择 $\in \tau_1$
  - 存在 $a_{t^{\forall},\ \psi_1,\ \leq}$，$b_{t^{\forall},\ \psi_2,\ \leq}$，$a_{t^{\forall},\ \psi_1,\ \geq}$，$b_{t^{\forall},\ \psi_2,\ \geq} \in \mathbb{N}$ 对 $t^{\forall}$ 的所有选择 $\in \tau_2$ 以及 ψ'_1，$\psi'_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma,\ q, \bar{X}\bar{Y})$

  * 对于所有 $t \in \tau_1$
    - $a_{t,\leq} + b_{t,\leq} \leq g_\omega(t, \leq)$，$a_{t,\ \geq} + b_{t,\ \geq} \geq g_\omega(t,\ \geq)$，以及

  * 对于所有 $t' \in \tau_2$ 以及所有 ψ_1，$\psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma,\ q, \bar{X}\bar{Y})$
    - $a_{t',\psi_1,\leq} + b_{t',\psi_2,\leq} \leq g_\omega(t',\ \psi,\ \leq)$，$a_{t',\ \psi_1,\ \geq} + b_{t',\ \psi_2,\ \geq} \geq g_\omega(t',\ \psi,\ \geq)$，以及

  * 对于所有 $t \in \tau_1$
    - $t^{G_1}(\bar{W}_1) \leq a_{t,\ \leq}$，$t^{G_2}(\bar{W}_2) \leq b_{t,\leq}$，$t^{G_1}(\bar{W}_1) \geq a_{t,\geq}$，$t^{G_2}(\bar{W}_2) \geq b_{t,\geq}$，以及

  * 对于所有 $t' \in \tau_2$ 以及对于所有 ψ_1，$\psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma,\ q,\ \bar{X}\bar{Y})$
    - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \leq a_{t',\ \psi_1,\ \leq}$，$\max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \leq b_{t',\ \psi_2,\ \leq}$，
      and
    - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \geq a_{t',\psi_1,\geq}$，$\min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \geq b_{t',\psi_2,\geq}$.

接下来，我们需要回顾一下：T 中的每个表公式都包含（1）对于每个 $t^{\exists} \in \tau_1$，值 $g_{t^{\exists},\leq}$ 和 $g_{t^{\exists},\geq}$；以及（2）对于每个 $t^{\forall} \in \tau_2$ 和每个公式 $\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, XY)$，值 $g_{t^{\forall},\psi,\leq}$ 和 $g_{t^{\forall},\psi,\geq}$。由于 T 是所有表公式构成的集合，因此，第一子框中所指定数值的存在，等价于存在两个表公式：一个公式的 $g_{\circ,\circ}$ 和 $g_{\circ,\circ,\circ}$ 数值恰好是 a-值，另一个公式的这些数值则是 b- 值。我们据此重新表述前三个子框中的陈述。

- 存在公式 $\omega_1, \omega_2 \in T$ 使得
  - 对于所有 $t \in \tau_1$
    - $g_{\omega_1}(t, \trianglelefteq) + g_{\omega_2}(t, \trianglelefteq) \leq g_{\omega}(t, \trianglelefteq)$, $g_{\omega_1}(t, \trianglerighteq) + g_{\omega_2}(t, \trianglerighteq) \geq g_{\omega}(t, \trianglerighteq)$, 以及
  - 对于所有 $t' \in \tau_2$ 和所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$
    - $g_{\omega_1}(t', \psi_1, \trianglelefteq) + g_{\omega_2}(t', \psi_2, \trianglelefteq) \leq g_{\omega}(t', \psi, \trianglelefteq)$, 以及
    - $g_{\omega_1}(t', \psi_1, \trianglerighteq) + g_{\omega_2}(t', \psi_2, \trianglerighteq) \geq g_{\omega}(t', \psi, \trianglerighteq)$, 且

- 对所有 $t \in \tau_1$
  - $t^{G_1}(\bar{W}_1) \leq g_{\omega_1}(t, \trianglelefteq)$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \leq g_{\omega_2}(t, \trianglelefteq)$, $t^{G_1}(\bar{W}_1) \geq g_{\omega_1}(t, \trianglerighteq)$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \geq g_{\omega_2}(t, \trianglerighteq)$, 以及

- 对于所有 $t' \in \tau_2$ 和所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$
  - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \leq g_{\omega_1}(t', \psi_1, \trianglelefteq)$, 以及
  - $\max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \leq g_{\omega_2}(t', \psi_2, \trianglelefteq)$, 以及
  - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \geq g_{\omega_1}(t', \psi_1, \trianglerighteq)$, 以及
  - $\min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'^{2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \geq g_{\omega_2}(t', \psi_2, \trianglerighteq)$。

检查 $\mathrm{FV}^{\forall}(\omega)$ 的定义后，我们看到，任意两个公式 $\omega_1, \omega_2 \in T$ 当且仅当 $(\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{FV}^{\forall}(\omega)$ 时，都满足上方方框中所述的要求。我们据此替换第一个子框。□

- 存在 $(\omega_1, \omega_2) \in$ 自由变量集$^{\forall}(\omega)$ 使得

  - 对于所有 $t \in \tau_1$
    - $t^{G_1}(\bar{W}_1) \leq g_{\omega_1}(t, \leq)$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \leq g_{\omega_2}(t, \leq)$, $t^{G_1}(\bar{W}_1) \geq g_{\omega_1}(t, \geq)$, $t^{G_2}(\bar{W}_2) \geq g_{\omega_2}(t, \geq)$, 以及

  - 对所有 $t' \in \tau_2$ 以及对所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$
    - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \leq g_{\omega_1}(t', \psi_1, \leq)$, 和
    - $\max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \leq g_{\omega_2}(t', \psi_2, \leq)$, 和
    - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \geq g_{\omega_1}(t', \psi_1, \geq)$, 和
    - $\min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'^{G_2}(\bar{W}_2\bar{U}_2) \geq g_{\omega_2}(t', \psi_2, \geq)$。

现在我们只需将这些语句重新分组，分为依赖于 G_1 的语句和依赖于 G_2的语句。

- 存在 $(\omega_1, \omega_2) \in$ 自由变量集$^{\forall}(\omega)$, 使得

  - 对所有 $t \in \tau_1$
    - $G_1 \models t(\bar{W}_1) \leq g_{\omega_1}(t, \leq)$, $G_1 \models t(\bar{W}_1) \geq g_{\omega_1}(t, \geq)$, 并
  - 对于所有 $t' \in \tau_2$ 和所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$
    - $\max_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_1}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \leq g_{\omega_1}(t', \psi_1, \leq)$, 以及
    - $\min_{\{\bar{U}_1 \mid G_1 \models \neg\psi_1(\bar{W}_1\bar{U}_1)\}} t'^{G_2}(\bar{W}_1\bar{U}_1) \geq g_{\omega_1}(t', \psi_1, \geq)$, 和

  - 对于所有 $t \in \tau_1$
    - $t(\bar{W}_2) \leq g_{\omega_2}(t, \leq)$, $t(\bar{W}_2) \geq g_{\omega_2}(t, \geq)$, 并且
  - 对于所有 $t' \in \tau_2$ 和所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$
    - $\max_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'(\bar{W}_2\bar{U}_2) \leq g_{\omega_2}(t', \psi_2, \leq)$, 和
    - $\min_{\{\bar{U}_2 \mid G_2 \models \neg\psi_2(\bar{W}_2\bar{U}_2)\}} t'(\bar{W}_2\bar{U}_2) \geq g_{\omega_2}(t', \psi_2, \geq)$.

现在，这终于与公式ω_1 和 ω_2 分别在 G_1 和 G_2上的单独评估结果的合取相匹配。

- 存在 $(\omega_1, \omega_2) \in$ 自由变量集$^{\forall}(\omega)$ 使得

  $G_1 \models \omega_1(W_1)$
  和 $G_2 \models \omega_2(W_2)$。

□

6.3 细粒度组合

假设（如同我们稍后对原始输入所作的假设）公式的权重比较中出现的所有阈值和系数都是整数，那么可以使用定理 8 的一个有限性限制，来计算不相交并节点处精确求值 $\forall$CMSO$_1$ 公式所需的动态规划记录，从而得到一个 XP 算法。然而，对 $\forall$CMSO$_1$ 查询进行 $(1+\varepsilon)$- 近似求值，则需要考虑非整数表公式。这时粒度就变得重要了。请记住，如果一个数 $q \in \mathbb{Q}$ 可以写成 $\frac{a}{\gamma}$（其中 $a, \gamma \in \mathbb{N}$），那么它具有粒度 γ。

定义 6（粒化表）。令 σ 为一个 CMSO$_1$-签名，$q \in \mathbb{N}$ 为一个量词秩，X, Y 为集合变量元组，$\gamma \in \mathbb{N}$ 为一个粒度，τ_1 和 τ_2 分别为 X 和 XY 上的一组 γ-粒化权重项。我们将所有形如 $\omega(X)$ 的 γ粒度表公式 定义为一个 γ-粒化表 $T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$。

$$\omega(\bar{X}) := \Big(\bigwedge_{t\in\tau_1} t(\bar{X}) \le g_{t,\le} \wedge t(\bar{X}) \ge g_{t,\ge}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{t\in\tau_2} \bigwedge_{\psi\in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y}\psi(\bar{X}\bar{Y}) \vee \big(t(\bar{X}\bar{Y}) \le g_{t,\psi,\le} \wedge t(\bar{X}\bar{Y}) \ge g_{t,\psi,\ge}\big)\Big),$$

其中 $g_{t_1,\le}$，$g_{t_1,\ge}$，$g_{t_2,\psi,\le}$，$g_{t_2,\psi,\ge}$ 是粒度为 γ 的数字，对所有 $t_1 \in \tau_1$、$t_2 \in \tau_2$ 和 $\psi \in$ CMSO$_1(\sigma, q, XY)$ 均成立。

注意，在粒度为 $\gamma = 1$ 的情况下，$T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2) = T(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$。我们还将粒化表的 Feferman–Vaught 集的定义加以扩展。

定义 7（粒化扩展 Feferman–Vaught 集）。设 $T := T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 是一个 γ-粒化表，且 $\omega(X) \in T$ 是一个 γ-粒度表公式。那么，令 FV$^{\forall}_\gamma(\omega) \subseteq T \times T$ 为满足以下条件的所有元组 (ω_1, ω_2) 的集合：

- 对于所有 $t \in \tau_1$，我们有 $g_{\omega_1}(t,\le) + g_{\omega_2}(t,\le) \le g_\omega(t,\le)$，并且 $g_{\omega_1}(t,\ge) + g_{\omega_2}(t,\ge) \ge g_\omega(t,\ge)$，并且
- 对于所有 $t \in \tau_2$, $\psi \in$ CMSO1(σ, q, XY)，以及 $(\psi_1, \psi_2) \in$ 自由变量集(ψ)，我们有 $g_{\omega_1}(t,\psi,\le) + g_{\omega_2}(t,\psi,\le) \le g_\omega(t,\psi,\le)$，并且 $g_{\omega_1}(t,\psi,\ge) + g_{\omega_2}(t,\psi,\ge) \ge g_\omega(t,\psi,\ge)$。

将权重比较中的所有阈值和系数都乘以因子 γ，应用定理 13，再乘以 $\frac{1}{\gamma}$ 还原，我们便可立即表述该定理的以下推广。

推论 11. 令 $T := T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$。对于每个 $\omega(X) \in T$，集合 自由变量集$_\gamma^{\vee}(\omega)$ 满足以下性质：对于所有图 G_1、 G_2 和 $\bar{W}_1 \in \mathcal{P}(V(G_1))^{|\bar{X}|}$、 $\bar{W}_2 \in \mathcal{P}(V(G_2))^{|\bar{X}|}$，

$$G_1 \cup G_2 \models \omega(\ \bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \iff G_1 \models \omega_1(\bar{W}_1) \text{ and } G_2 \models \omega_2(\bar{W}_2) \text{ for some } (\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{FV}_\gamma^{\boxtimes}(\omega).$$

本节最后，我们给出一个有用的观察，稍后将借此界定扩展 Feferman–Vaught 集中公式的阈值对。

观察 7. 令 $T := T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$、 $\omega(X) \in T$和 $(\omega_1, \omega_2) \in$自由变量集$_\gamma^{\vee}(\omega)$。对于 $i \in \{1, 2\}$，令 ω_i' 为由 ω_i 得到的粒度表公式：将 ω_i 中的每个阈值分别以上界 ω取代，即 $g_{\omega_i'}(t, \psi, \geq) := \min(g_{\omega_i}(t, \psi, \geq)\ g_\omega(t, \psi, \geq))$（$g_{\omega_i'}(t, \geq)$ 也类似）。那么

1. $(\omega_1', \omega_2') \in$ 自由变量集$_\gamma^{\vee}(\omega)$，并且
2. 若 $G_i \models \omega_i(W_i)$，则也有 $G_i \models \omega_i'(W_i)$。

证明。 第一点直接由定义 7 得出。第二点由表公式的定义以及以下事实得出： ω_i' 中的每个权重比较都不比 ω_i中相应的权重比较更难满足。

□

7 近似扩展 Feferman–Vaught

虽然表公式的定义是我们方法的核心概念，但表公式具有无限性，因此无法直接用于算法。下面我们将定义表公式的一种近似且有限的版本，作为算法中使用的对象。

7.1 近似表的定义

直观而言，我们的目标是使用非负有理数作为阈值，其分母始终为前面引入的粒度 γ，分子则为不超过某个非零上限 $N \in \mathbb{N}$ 的数，并具有针对 $b \in \mathbb{N}$的“精度” $\alpha := 1 + \frac{1}{b}$。在计算针对 $\forall$CMSO$_1$查询的 $(1+\varepsilon)$-近似时，数值 b 之后将大致等于 $\log(|V(G)|)/\varepsilon$。为此，我们定义

$$\tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,N,\gamma} := \Big([0, N] \cap \big\{\lceil \alpha^j \rceil / \gamma \mid j \in \mathbb{N}\big\}\Big) \cup \Big([0, N] \cap \big\{\lfloor \alpha^j \rfloor / \gamma \mid j \in \mathbb{N}\big\}\Big) \cup \{0, N\}.$$

观察 8。 $|\tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,\ N,\ \gamma}| \leq \mathcal{O}\big(\text{对数}_\alpha(\gamma \cdot N)\big)$.

对于每个分母为 γ 的有理数，我们都可以在 $\mathbb{N}_{\alpha,N,\gamma}$ 中找到足够接近的上界和下界。更准确地说，将其表述为关于参数的一般形式：

观察9。 设 $\alpha > 1$ 是一个有理数，且 $N, \gamma \in \mathbb{N}$。对于每个粒度为 γ 的有理数 $0 \le m \le N$，都存在 $\tilde{m} \in \mathbb{N}_{\alpha,N,\gamma}$，使得 $m \le \tilde{m} \le m \cdot \alpha$。

证明。 令 j 为满足 $\binom{\alpha^j}{\gamma} \ge m$ 的最小整数。于是 $m \le \binom{\alpha^j}{\gamma} \le m \cdot \alpha$。若 $m \cdot \alpha > N$，则令 $\tilde{m} := N \in \tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,\,N,\,\gamma}$。否则，$\binom{\alpha^j}{\gamma} \le N$，因此 $\tilde{m} := \binom{\lfloor \alpha^j \rfloor}{\gamma} \in \tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,\,N,\,\gamma}$。由于 m 的分子是整数且其分母为 γ，$m \le \binom{\alpha^j}{\gamma}$ 蕴含 $m \le \binom{\lfloor \alpha^j \rfloor}{\gamma}$。我们得出 $m \le \tilde{m} \le m \cdot \alpha$，如所要求。□

现在我们可以继续定义近似表。

定义8（近似表）。 令 σ 为一个 CMSO_1-签名，$q \in \mathbb{N}$ 为量词秩，令 X，Y 为集合变量的元组，τ_1 为 X 上的权重项集合，并令 τ_2 为 XY 上的权重项集合。进一步固定粒度 $\gamma \in \mathbb{N}$、非零上限 $N \in \mathbb{N}$ 以及精度 $\alpha > 1$。

近似表 $T_{\alpha,N,\gamma}(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 定义为所有近似表公式 $\omega(X) \in T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 的子集，其中所有权重比较的阈值都属于 $\mathbb{N}_{\alpha,N,\gamma}$。换言之，表公式 $\omega(X) \in T_\gamma(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 属于 $T_{\alpha,N,\gamma}(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 当且仅当

$$g_\omega(t_1, \le), g_\omega(t_1, \ge), g_\omega(t_2, \psi, \le), g_\omega(t_2, \psi, \ge) \in \tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,N,\gamma},$$

对于所有 $t_1 \in \tau_1$, $t_2 \in \tau_2$, $\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, XY)$。

关键的是，这些近似表的大小按定义有如下界限。

观察10。 $|\tilde{T}_{\alpha,\,N,\,\gamma}(\sigma,\ q,\ \bar{X},\ \bar{Y},\ \tau_1,\ \tau_2)| \le |\tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,\,N,\,\gamma}|^{|\tau_1|+|\tau_2|\cdot|\mathrm{CMSO}_1(\sigma,\ q,\ \bar{X}\bar{Y})|}$。

7.2 组合

类似于将我们考虑的表公式的阈值限制为值从 $\mathbb{N}_{\alpha,\,N,\,\gamma}$，我们也可以对其 Feferman–Vaught 集中的公式成对元素进行同样的限制。注意，为了使我们能够将公式限制为具有某种粒度 γ 阈值的公式，在近似表公式 ω 的粒状 Feferman–Vaught 集中，根据定义 6，ω 中所有项的粒度必须至多为 γ。

定义 9（近似扩展 Feferman–Vaught 集）。 考虑一个表公式 $\omega(X) \in T_{\alpha,\,N,\,\gamma'}(\sigma,\ q,\ X,\ Y,\ \tau_1,\ \tau_2)$。对于 $\alpha > 1$、$N \in \mathbb{N}$ 和 $\gamma \in \mathbb{N}$，且 $\gamma' \le \gamma$，我们定义舍入后的 *Feferman–Vaught* 集

$$\mathrm{F\tilde{V}}^{\boxtimes}_{\alpha,N,\gamma}(\omega) := \mathrm{FV}^{\boxtimes}_{\gamma}(\omega) \cap \left(\tilde{T}_{\alpha,N,\gamma}(\sigma, q, \bar{X}, \bar{Y}, \tau_1, \tau_2)\right)^2,$$

也就是说，作为表公式的 Feferman–Vaught 成对元素，其中所有阈值都属于 $\mathbb{N}_{\alpha,N,\gamma}$。

下面我们将为近似表公式建立定理 13（及推论 11）的近似版本。回顾公式 φ 的 α-满足不足（$\models_\alpha$）和 α-过度满足（$\models^\alpha$）的定义会很有帮助：直观地说，前者表示 φ 本身可能不满足，但其 α 放宽版本 φ_α 满足；而后者表示不仅 φ，

甚至其 α收紧版本 φ^{α} 也满足。下面的陈述大致表示：如果我们能够以 $(1+\frac{1}{b})^s$ 的“精度”计算 G_1和 G_2上的公式，那么在它们的并集 $G_1 \cup G_2$上，我们就能以稍低的 $(1+\frac{1}{b})^{s+1}$“精度”计算公式，其中应将 s 视为团宽表达式当前的深度。

正如证明中将会显而易见的，我们需要考虑粒度更大的舍入 Feferman–Vaught 集合——特别是，该粒度将取决于近似表公式的精度。

定理 14. 设 $b \in \mathbb{N}$，并固定任意一个 $s \in \mathbb{N}$ 以及一个近似表 $T := T_{1+\frac{1}{b},\mathbb{N},\gamma}(\sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$。对于每个 $\omega(X) \in T$，集合 $FV^{\gamma}(\omega) := FV^{\gamma}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma\cdot(b(b+1))^{4s+4}}(\omega)$ 满足以下性质。对于所有图 G_1 G_2 $\bar{W}_1 \in \mathcal{P}\ V\ G_1$ $\bar{W}_2 \in$ 以及所有 $(\circ)^{|\bar{X}|}, (\square)^{|\bar{X}|} \mathcal{P}\ V\ G_2$

$$G_1 \cup G_2 \models^{(1+\frac{1}{b})^{s+1}} \omega(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \implies$$
$$G_1 \models^{(1+\frac{1}{b})^{s}} \omega_1(\bar{W}_1) \text{ and } G_2 \models^{(1+\frac{1}{b})^{s}} \omega_2(\bar{W}_2) \text{ for some } (\omega_1, \omega_2) \in \tilde{\mathrm{FV}}^{\square}(\omega),$$

$$G_1 \cup G_2 \models_{(1+\frac{1}{b})^{s}} \omega(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2) \impliedby$$
$$G_1 \models_{(1+\frac{1}{b})^{s}} \omega_1(\bar{W}_1) \text{ and } G_2 \models_{(1+\frac{1}{b})^{s}} \omega_2(\bar{W}_2) \text{ for some } (\omega_1, \omega_2) \in \tilde{\mathrm{FV}}^{\square}(\omega).$$

证明。

第一类蕴含。设 $\omega(\bar{X}) \in \tilde{T}$，并假设 $G_1 \cup G_2 \models^{(1+\frac{1}{b})^{s+1}} \omega(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)$。回顾第3.4节中的记号，后者等价于 $G_1 \cup G_2 \models \omega^{(1+\frac{1}{b})^{s+1}}(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)$，其中 $\omega^{(1+\frac{1}{b})^{s+1}}$ 是一个公式，它由 ω 通过将所有权重项乘以和/或除以 $\binom{b+1}{b}^{s+1}$ 得到。将这些因子移至含有阈值的权重比较两侧后可知，对于 $\circ$ 和 $\square$ 的每种相关取值，所有形如 $g_{\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}(\circ,\square,\leq)}$ 的阈值都可表示为 $g_{\omega}(\circ,\square,\leq) \cdot \binom{b}{b+1}^{2s+2}$，而所有形如 $g_{\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}(\circ,\square,\geq)}$ 的阈值都可表示为 $g_{\omega}(\circ,\square,\geq)\cdot\binom{b+1}{b}^{2s+2}$。对于分别形如 $g_{\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}(\circ,\geq)}$ 和 $g_{\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}(\circ,\leq)}$ 的阈值，也有类似结论。

由此可见，粒度表公式 $\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}$ 中的每个阈值，其粒度要么为 $\gamma \cdot b^{2s+2}$，要么为 $\gamma \cdot (b+1)^{2s+2}$。因此，$\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}$ 包含在粒度表 $T_{\gamma\cdot(b(b+1))^{2s+2}}(\sigma, q, \bar{X}, \bar{Y}, \tau_1, \tau_2)$中。由于我们假设 $G_1 \cup G_2 \models \omega^{(1+\frac{1}{b})^{s+1}}(\bar{W}_1 \cup \bar{W}_2)$，现在可以应用推论 11 给出的 Feferman–Vaught 定理的粒度版本，得到一组成对公式 (δ_1', δ_2')，其粒度为 $\gamma \cdot (b(b+1))^{2s+2}$，满足 $G_1 \models \delta_1'(\bar{W}_1)$ 和 $G_2 \models \delta_2'(W_2)$。接下来应用观察 7，得到一组成对公式 (δ_1, δ_2)，它们具有相同的性质，但还满足每个阈值都不超过 $\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}$中对应的阈值。特别地，对于每个 $i \in \{1,2\}$，都有 $g_{\delta_i}(\circ,\square,\leq) \leq g_{\omega}(\circ,\square,\leq) \cdot \binom{b}{b+1}^{2s+2}$，类似地，$g_{\delta_i}(\circ,\square,\geq) \leq g_{\omega}(\circ,\square,\geq) \cdot \binom{b+1}{b}^{2s+2}$（对于形如 $g_{\delta_i}(\circ,\leq)$ 和 $g_{\delta_i}(\circ,\geq)$ 的阈值也同样成立）。

接下来，我们的任务是直观地“放宽”公式 δ_1 和 δ_2。具体而言，对于$i \in \{1,2\}$，我们通过将阈值（针对每种相关的 $\circ$ 和 $\square$选择）设为如下形式，来定义粒度表公式 ζ_i

- $g_{\zeta_i}(\circ,\square,\leq) := g_{\delta_i}(\circ,\square,\leq)\cdot(\frac{b+1}{b})^{2s+2}$, and
- $g_{\zeta_i}(\circ,\square,\geq) := g_{\delta_i}(\circ,\square,\geq)\cdot(\frac{b}{b+1})^{2s+2}$,

其中，形如 $g_{\omega_i}(\circ,\ \leq)$ 和 $g_{\omega_i}(\circ,\ \geq)$ 的阈值，再一次——与证明的其余部分一样——被视为上述三元组的退化特殊情况。注意，满足 ζ_i 比满足 δ_i更容易。由于 δ_1 和 δ_2中所有阈值的粒度均为 $\gamma\cdot(b(b+1))^{2s+2}$，因此可将 ζ_1 和 ζ_2 中所有阈值的粒度统一设为$\gamma\cdot(b(b+1))^{4s+4}$。此外，我们注意到，由于 ω中的每个阈值都以 N 为上界，并且 δ_i 中对阈值的界保证了 ζ_i、 $i\in\{1,2\}$中的每个阈值都以 N 为上界（也就是说，所应用的乘法“相互抵消”）。

作为构造所寻求的公式成对元素的最后一步，我们应用观察9，以便为每个 $g_{\zeta_i}(\circ,\square,\leq)$ 和 $g_{\zeta_i}(\circ,\square,\geq)$ 识别出 $i\in\{1,2\}$ 个有理数 $g_{\omega_i}(\circ,\square,\leq)$ $g_{\omega_i}(\circ,\square,\geq)\in\mathbb{N}_{\frac{b+1}{b},N,\gamma\cdot(b(b+1))^{4s+4}}$ 使得

- $g_{\zeta_i}(\circ,\square,\leq)\cdot\frac{b}{b+1}\leq g_{\omega_i}(\circ,\square,\leq)\leq g_{\zeta_i}(\circ,\square,\leq)$, and
- $g_{\zeta_i}(\circ,\square,\geq)\leq g_{\omega_i}(\circ,\square,\geq)\leq g_{\zeta_i}(\circ,\square,\geq)\cdot\frac{b+1}{b}$.

令 $\omega_i, i\in\{1,2\}$ 为由上一段中确定的阈值 $g_{\omega_i}(\circ,\square,\leq)$ 和$g_{\omega_i}(\circ,\square,\geq)$ 所定义的粒度表公式。特别地，每个 ω_i 都是关于 $T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma\cdot(b(b+1))^{4s+4}}(\sigma,q,X,Y,\tau_1,\tau_2)$ 的近似表公式，并且可以直观地看作“对带有舍入数字的 ζ_i 进行轻微收紧”。为了完成证明，我们现在将论证 (A) $(\omega_1,\omega_2)\in$自由变量集$^{\forall}(\omega)$，以及 (B) $G_i\models\omega^{(\frac{b+1}{b})_i}{}^{s}(\bar{W}_i)$ 对于 $i\in\{1,2\}$ 成立。在进行形式论证之前，我们指出，在直观层面上，(A) 成立是因为 ω_i 是对 ζ_i 的收紧，而 (ζ_1,ζ_2) 属于 ω 的 Feferman–Vaught 集合，这是由于它由 (δ_1,δ_2) 得到；同时，(B) 成立是因为 ω_i 只是对 ζ_i 的“轻微”收紧。

为建立 (A)，我们根据定义 9 回顾 $(\omega_1,\omega_2)\in$自由变量集$^{\forall}(\omega)$ 当且仅当 $\models\forall\sigma,q,X,Y,\tau_1,\tau_2\left(\tilde{T}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma\cdot(b(b+1))^{4s+4}}(\tilde{\sigma},q,\bar{X},\bar{Y},\tau_1,\tau_2)\right)^2$。因此，只需证明 $(\omega_1,\omega_2)\in$自由变量集$^{\forall}_{\gamma\cdot(b(b+1))^{4s+4}}(\omega)$。根据定义 5，这等价于证明

- $g_{\omega_1}(\circ,\square,\leq)+g_{\omega_2}(\circ,\square,\leq)\leq g_{\omega}(\circ,\square,\leq)$, and
- $g_{\omega_1}(\circ,\square,\geq)+g_{\omega_2}(\circ,\square,\geq)\geq g_{\omega}(\circ,\square,\geq)$,

再次对所有适当的 $\circ$和 $\square$成立。我们先证明第一类不等式。由于 (δ_1,δ_2) 是由 $\omega^{(\frac{b+1}{b})^{s+1}}$ 得到的，应用推论 11 可得

$$g_{\delta_1}(\circ,\square,\leq)+g_{\delta_2}(\circ,\square,\leq)\leq g_{\omega}(\circ,\square,\leq)\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+2}.$$

此外，根据 ζ_i的定义，$g_{\zeta_i}(\circ,\ \square,\ \leq)=g_{\delta_i}(\circ,\ \square,\ \leq)\cdot(\frac{b+1}{b})^{2s+2}$。因此，

$$g_{\zeta_1}(\circ,\square,\leq)\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+2}+g_{\zeta_2}(\circ,\square,\leq)\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+2}\leq g_{\omega}(\circ,\square,\leq)\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+2},$$

$$g_{\zeta_1}(\circ,\square,\leq)+g_{\zeta_2}(\circ,\square,\leq)\leq g_{\omega}(\circ,\square,\leq).$$

回顾一下，$g_{\omega_i}(\circ, \square, \leq) \leq g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq)$。由此可得

$$g_{\omega_1}(\circ, \square, \leq) + g_{\omega_2}(\circ, \square, \leq) \leq g_{\omega}(\circ, \square, \leq).$$

对于第二个不等式，我们回顾一下 $g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq) = g_{\delta_i}(\circ, \square, \geq) \cdot (\frac{b}{b+1})^{2s+2}$。回顾一下，$(\delta_1, \delta_2)$ 是通过应用推论 11 从 $\omega^{(\frac{b+1}{b})^{2s+2}}$ 得到的，我们同样可以得到

$$g_{\delta_1}(\circ, \square, \geq) + g_{\delta_2}(\circ, \square, \geq) \geq g_{\omega}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+2},$$

$$g_{\zeta_1}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+2} + g_{\zeta_2}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+2} \geq g_{\omega}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+2},$$

$$g_{\zeta_1}(\circ, \square, \geq) + g_{\zeta_2}(\circ, \square, \geq) \geq g_{\omega}(\circ, \square, \geq).$$

由于 $g_{\omega_i}(\circ, \square, \geq) \geq g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq)$，我们得出

$$g_{\omega_1}(\circ, \square, \leq) + g_{\omega_2}(\circ, \square, \leq) \geq g_{\omega}(\circ, \square, \leq).$$

由此证明了 (A)。

接下来，我们转向 (B)。首先回顾一下 $G_i \models \delta_i(W_i)$。这里，我们的目标是证明，对于 G_i 中 XY 的任意变量赋值，子公式

$$t(\bar{X}\bar{Y}) \leq g_{\delta_i}(\circ, \square, \leq) \wedge t(\bar{X}\bar{Y}) \geq g_{\delta_i}(\circ, \square, \geq)$$

δ_i 的子公式蕴含相应的子公式

$$t(\bar{X}\bar{Y}) \leq g_{\omega_i^{(\frac{b+1}{b})^s}}(\circ, \square, \leq) \wedge t(\bar{X}\bar{Y}) \geq g_{\omega_i^{(\frac{b+1}{b})^s}}(\circ, \square, \geq)$$

$\omega^{(\frac{b+1}{b})^s}_i$ 中的子公式，其中我们再次假设 $\omega^{(\frac{b+1}{b})^s}_i$ 中的所有权重比较都已将包含 b 的因子移至阈值。鉴于这些子公式 (1) 只在表公式中以正向形式出现，且 (2) 构成 $\omega^{(\frac{b+1}{b})^s}_i$ 与 δ_i 之间的唯一差异，证明上述蕴含即可得到 $G_i \models \omega^{(\frac{b+1}{b})^s}_i(\bar{W}_i)$。

根据 ζ_i 的构造，我们有 $g_{\delta_i}(\circ, \square, \leq) = g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq) \cdot (\frac{b}{b+1})^{2s+2}$。此外，由于 $g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq) \cdot \frac{b}{b+1} \leq g_{\omega_i}(\circ, \square, \leq) \leq g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq)$，我们有

$$g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq) \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+2} \leq g_{\omega_i}(\circ, \square, \leq) \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+1} \leq g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq) \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2s+1}.$$

第一个不等式保证，只要 $t(\bar{X}\bar{Y}) \leq g_{\delta_i}(\circ, \square, \leq) = g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq) \cdot (\frac{b}{b+1})^{2s+2}$ 成立，那么 $t(\bar{X}\bar{Y}) \leq g_{\omega_i}(\circ, \square, \leq) \cdot (\frac{b}{b+1})^{2s+1}$ 也成立。特别是，这保证了 $t(\bar{X}\bar{Y}) \leq g_{\omega_i^{(\frac{b+1}{b})^s}}(\circ, \square, \leq) = g_{\omega_i}(\circ, \square, \leq) \cdot (\frac{b}{b+1})^{2s}$.

至于子公式中的另一个不等式，我们有 $g_{\delta_i}(\circ, \square, \geq) = g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq) \cdot (\frac{b+1}{b})^{2s+2}$。此外，$g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq) \leq g_{\omega_i}(\circ, \square, \geq) \leq g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq) \cdot \frac{b+1}{b}$ 可以改写为

$$g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+1} \leq g_{\omega_i}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+1} \leq g_{\zeta_i}(\circ, \square, \geq) \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2s+2}.$$

这里，第二个不等式保证：只要 $t(XY) \geq g_{\delta_i}(\circ, \square, \geq) = g_{\zeta_i}(\circ, \square, \leq) \cdot (\frac{b+1}{b})^{2s+2}$ 成立，$t(\bar{X}\bar{Y}) \geq g_{\omega_i}(\circ, \square, \geq) \cdot (\frac{b+1}{b})^{2s+1} \geq g_{\omega_i}(\circ, \square, \geq) \cdot (\frac{b+1}{b})^{2s} = g_{\omega^{(\frac{b+1}{b})}_i}(\circ, \square, \geq)$ 也成立。这就完成了对为何 $G_i \models \delta_i(\bar{W}_i)$ 蕴含 $G_i \models \omega^{(\frac{b+1}{b})}_i(\bar{W}_i)$ 的论证。因此，性质 (B) 也成立，且第一类蕴含成立。

第二类蕴含。考虑某个 $(\omega_1, \omega_2) \in$ 自由变量集(ω)，使得 $G_i \models (\omega_i)_{(1+\frac{1}{b})^s}(W_i), i \in \{1, 2\}$。注意，对于某个 γ'，$(\omega_1, \omega_2) \in$ 自由变量集(ω) 蕴含 $((\omega_1)_{(1+\frac{1}{b})^s}, (\omega_2)_{(1+\frac{1}{b})^s}) \in$ 自由变量集$_{\gamma'}(\omega_{(1+\frac{1}{b})^s})$，因为定义 5 中的所有不等式都成立。证明现在可直接由推论 11 的反向蕴含得出。 □

8 表计算

上一节的结果使我们能够沿着团宽表达式通过动态规划聚合记录。直观而言，我们的记录由一个映射构成，它为每个表公式指定图中的一个见证，该见证 (1) 保证至少满足放宽后的公式，并且 (2) 就优化目标而言，至少与收紧后公式的最优见证同样“好”。将下述定理与从输入查询导出的表结合使用（使用两次，分别得到保守估计和积极估计），我们便可获得近似解。

定理 15。给定

- $\tilde{T} := \tilde{T}_{1+\frac{1}{b},\, N,\, \gamma}(\sigma, q, \bar{X}, Y, \tau_1, \tau_2)$ 对于正的 $b, N, \gamma \in \mathbb{N}$，
- 一个优化目标 $\hat{t}(\bar{X})$，以及
- 一个图 G，它对应一个深度为 d 的 k-表达式 χ，

可以计算一个函数 见证$_G$： $\tilde{T} \to \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|} \cup \{\perp\}$，使得对于所有 $\omega \in \tilde{T}$，

- 过度满足$(G, \omega, \hat{t}, (1 + \frac{1}{b})^d) \leq \hat{t}$(见证$_G(\omega)$)，
- 如果见证$_G(\omega) \neq \perp$ 那么$G \models_{(1+\frac{1}{b})^d} \omega$(见证$_G(\omega)$)，

其中我们定义 $\hat{t}(\perp) := -\infty$。此外，存在一个可计算函数 $f(|\sigma|, k, q, |\bar{X}\bar{Y}|)$，使得上述算法的运行时间有如下界定。

$$|\chi| \cdot f(|\sigma|, k, q, |\bar{X}\bar{Y}|) \cdot |\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}, N, \gamma \cdot (b(b+1))^{4d^2+4d}}|^{3|\tau_1|+|\tau_2| \cdot f(|\sigma|, k, q, |\bar{X}\bar{Y}|)}.$$

证明。与这类证明的常见做法一样，我们将 k-表达式的标签视为图自身的额外颜色 $P_1, \ldots, P_k$。因此，如果签名 σ 原本允许图 G 具有 c 种颜色，我们就将其视为具有 $c + k$ 种颜色的图，并将额外颜色纳入扩展签名 σ'，即 $\sigma' := \sigma \cup \{P_1, \ldots, P_k\}$。

对于 $\ell \leq d$，我们定义函数 $\gamma(\ell) := \gamma \cdot (b(b+1))^{(4d+4)(d-\ell)}$。给定一个具有 $c+k$种颜色的图 H以及一个深度为 $\ell \leq d$的相应 k-表达式，我们计算函数见证$_H$: $\tilde{T}_{1+\frac{1}{b}, N, \gamma(\ell)}(\sigma', q, \bar{X}, \bar{Y}, \tau_1, \tau_2) \to \mathcal{P}(V(H))^{|\bar{X}|} \cup \{\perp\}$ 使得对于 $\omega \in \tilde{T}$，

- 过度满足$(H, \omega, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{d}) \leq \hat{t}$(见证$_H(\omega)$),
- 若见证$_H(\omega) \neq \perp$则 $H \models_{(1+\frac{1}{b})^{d}} \omega$(见证$_H(\omega)$)。

对于 $\ell = d$，我们有 $\gamma(\ell) = \gamma$。在这种情况下，我们只需将见证$_G\tilde{}$的定义域限制为 T（也就是说，忽略提及 k 额外颜色的公式），即可得到最终输出。因此，在证明的其余部分中，我们通过对 $\ell \leq d$进行归纳，着重于为这个更大的定义域求得见证$_H$ 。具体而言，作为归纳假设，我们假定该命题对所有深度低于当前深度 ℓ的情形都成立。

在涵盖了 H 为单顶点图的基本情形后，我们假设 H 由 $\rho_{i\to j}(H_1)$、$\eta_{i,\ j}(H_1)$ 或 $H_1 \cup H_2$给出，并假设该命题对深度较小的 k-表达式成立，特别是对 H_1 和 H_2成立，作为归纳假设。我们将在证明末尾给出所有情形的运行时间上界。

基本情况。 对于基本情况，考虑一个单顶点图 H。这里我们只需枚举见证$_H$ 的域中的所有公式 ω ，并通过穷举法计算相应的条目见证$_H(\omega)$，所需时间仅取决于 ω。

重新标记。 回顾一下， $\rho_{i\to j}$ 将图的 k-表达式中的所有标签 P_i 更改为 P_j 。考虑一个图 $H = \rho_{i\to j}(H_1)$。设 ω 来自见证$_H$ 的定义域，并设 $\rho_{i\to j}(\omega)$ 为通过将 ω 中的所有原子公式 $P_i(x)$ 替换为“假”，并将所有原子公式 $P_j(x)$ 替换为 $P_j(x) \vee P_i(x)$ 而得到的公式。那么，对于每个 $\bar{W} \subseteq \mathcal{P}(V(H))^{|\bar{X}|}$,

$$H \models \omega(\bar{W}) \iff H_1 \models \rho_{i\to j}(\omega)(\bar{W}).$$

此外，对于 $\ell \leq d$ 的每一种选择,

$$\begin{aligned} H \models^{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \omega(\bar{W}) &\iff H_1 \models^{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \rho_{i\to j}(\omega)(\bar{W}) \quad \text{and} \\ H \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \omega(\bar{W}) &\iff H_1 \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \rho_{i\to j}(\omega)(\bar{W}). \end{aligned}$$

这意味着过度满足$(H, \omega, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{\ell})$-=过度满足$(H_1, \rho_{i\to j}(\omega), \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{\ell})$。-根据归纳假设，我们已经计算出一个条目见证$_{H_1}(\rho_{i\to j}(\omega)) = W$，使得

- $\text{oversatisfy}(H_1, \rho_{i\to j}(\omega), \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{\ell-1}) \leq \hat{t}(\bar{W})$,
- 如果 $\bar{W} \neq \perp$那么$H_1 \models_{(1\mp\frac{1}{b})^{\ell-1}} \rho_{i\to j}(\omega)(\bar{W})$。

请注意，如果将 $(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}$ 替换为 $(1+\frac{1}{b})^{\ell}$ 来弱化这两个陈述，它们仍然成立。由此，我们得到:

- 过度满足$(H, \omega, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{\ell})$-=过度满足$(H_1, \rho_{i\to j}(\omega), \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{\ell}) \leq \hat{t}(\bar{W})$,
- 若 $\bar{W} \neq \perp$则 $H_1 \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell}\text{-}\rho_{i\to j}(\omega)(\bar{W})}$，这反过来意味着 $H \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \omega(\bar{W})$。

因此，通过设置，我们得到具有所有所需性质的入口见证$_H(\omega)$。

$$\text{witness}_H(\omega) := \bar{W}.$$

添加边。回顾一下，函数 $\eta_{i,j}$ 在所有标签为 P_i 的顶点与所有标签为 P_j 的顶点之间添加边，其中 $i \neq j$。考虑一个图 $H = \rho_{i\to j}(H_1)$。设 $\eta_{i,j}(\omega)$ 为通过将 ω 中的所有原子公式 $E(x,y)$ 替换为 $E(x,y) \vee (P_i(x) \wedge P_j(y)) \vee (P_i(x) \wedge P_j(y))$ 所得到的公式。我们定义

$$\mathrm{table}_H(\omega) = \mathrm{table}_{H_1}(\eta_{i,j}(\omega)).$$

其正确性可通过采用与重新着色相同的论证得出。

不相交并。考虑一个图 $H = H_1 \cup H_2$，并令 $\ell \leq d$ 为 k-表达式树当前的深度。我们对 $\ell - 1$ 应用归纳假设，构造函数 见证$_{H_1}$ 和见证$_{H_2}$，使得对于所有 $\omega' \in T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell)}(\sigma', q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 和 $i \in \{1,2\}$，

- 过度满足$(H_i, \omega', \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{\ell-1}) \leq \hat{t}$(见证$_{H_i}(\omega')$)，
- 若见证$_{H_i}(\omega') \neq \perp$ 则 $H_i \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega'$(见证$_{H_i}(\omega')$)。

注意，$\gamma(\ell-1) = \gamma(\ell) \cdot (b(b+1))^{(4d+4)}$。因此，我们对归纳假设所应用的公式的粒度变化，与定理 14 中考虑某个公式的近似 Feferman–Vaught 集所引起的变化相匹配。固定 $\omega \in T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell)}(\sigma', q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$，并选择 $(\omega_1, \omega_2) \in$ 自由变量集$_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)$，使得

$$\hat{t}(\mathrm{witness}_{H_1}(\omega_1)) + \hat{t}(\mathrm{witness}_{H_2}(\omega_2)) = \max_{(\omega_1',\omega_2') \in \mathrm{FV}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)} \hat{t}(\mathrm{witness}_{H_1}(\omega_1')) + \hat{t}(\mathrm{witness}_{H_2}(\omega_2')), \quad (6)$$

若出现平局，则任意打破平局。

我们定义

$$\mathrm{witness}_H(\omega) := \mathrm{witness}_{H_1}(\omega_1) \cup \mathrm{witness}_{H_2}(\omega_2),$$

其中，$\perp$ 按照预期通过以下规则传播：$\perp \cup$见证$_{H_2}(\omega_2) =$见证$_{H_1}(\omega_1) \cup \perp = \perp$。这意味着

$$\hat{t}(\mathrm{witness}_H(\omega)) = \hat{t}(\mathrm{witness}_{H_1}(\omega_1)) + \hat{t}(\mathrm{witness}_{H_2}(\omega_2)). \quad (7)$$

根据定理 14，集合 $\mathrm{FV}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)$ 保证对于每个 W，

$$H \models^{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \omega(\bar{W}) \Longrightarrow H_1 \models^{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega_1'(\bar{W} \cap V(H_1)) \text{ and } H_2 \models^{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega_2'(\bar{W} \cap V(H_2)) \text{ for some } (\omega_1', \omega_2') \in \mathrm{FV}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega),$$

这意味着

$$\mathrm{oversatisfy}\left(H, \omega, \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\ell}\right) \leq \max_{(\omega_1',\omega_2') \in \mathrm{FV}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)} \left(\mathrm{oversatisfy}\left(H_1, \omega_1', \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\ell-1}\right) + \mathrm{oversatisfy}\left(H_2, \omega_2', \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^{\ell-1}\right)\right).$$

由于根据归纳假设，对于 $i \in \{1,2\}$，过度满足$(H_i,\ \omega_i,\ \hat{t},\ (1+\frac{1}{b})^{\ell-1}) \leq \hat{t}$(见证$_{H_i}(\omega_i)$)，因此这意味着

$$\operatorname{oversatisfy}\left(H,\omega,\hat{t},\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\ell}\right) \leq \max_{(\omega_1',\omega_2')\in \mathrm{FV}^{\boxtimes}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)} \left(\hat{t}(\operatorname{witness}_{H_1}(\omega_1')) + \hat{t}(\operatorname{witness}_{H_2}(\omega_2'))\right).$$

回顾 (6) 和 (7)，上述不等式可以改写为

$$\operatorname{oversatisfy}\left(H,\omega,\hat{t},\left(1+\frac{1}{b}\right)^{\ell}\right) \leq \hat{t}(\operatorname{witness}_{H_1}(\omega_1)) + \hat{t}(\operatorname{witness}_{H_2}(\omega_2)) = \hat{t}(\operatorname{witness}_{H}(\omega)).$$

此外，若 witness$_H(\omega) \neq \perp$，则 witness$_{H_1}(\omega_1) \neq \perp$ 且 witness$_{H_2}(\omega_2) \neq \perp$。归纳假设表明 $H_1 \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega_1$(witness$_{H_1}(\omega_1)$) 且 $H_2 \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega_1$(witness$_{H_1}(\omega_1)$)。由于 $(\omega_1,\omega_2) \in$ 自由变量集 $(1+\frac{1}{b})_{N,\gamma(\ell-1)}(\omega)$，根据定理 14 的第二个蕴含，$H_1 \cup H_2 \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega($witness$_{H_1}(\omega_1) \cup$witness$_{H_1}(\omega_1))$。换言之，$H \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell-1}} \omega$(witness$_H(\omega)$)。由于增大 ℓ只会弱化该陈述，因此 $H \models_{(1+\frac{1}{b})^{\ell}} \omega$(witness$_H(\omega)$)，如所求。

运行时间。根据观察 2 和定理 8，存在一个函数 $f_1(|\sigma|,k,q,|XY|)$，使得对于每个公式 $\psi(X) \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma',q,|XY|)$，都可以在至多 $f_1(|\sigma|,k,q,|XY|)$ 时间内计算集合 FV(ψ)。判定是否存在某个 $\omega \in T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell)}(\sigma',q,X,Y,\tau_1,\tau_2)$ 和 $\omega_1,\omega_2 \in T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\sigma',q,X,Y,\tau_1,\tau_2)$，使得 $(\omega_1,\omega_2) \in \mathrm{FV}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)$，因此需要 $f_1(|\sigma|,k,q,|XY|)$ 时间，外加执行由定义 5 和定义 9 引出的基本数值检查所需的时间。我们可以用某个函数 $f_2(|\sigma|,k,q,|XY|)$ 来界定该时间。因此，对于所有 $\omega \in T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell)}(\sigma',q,X,Y,\tau_1,\tau_2)$，我们可以在 $f_2(|\sigma|,k,q,|\bar{X}\bar{Y}|)\cdot|T_{\alpha,N,\gamma(\ell)}(|\sigma'|,q,\bar{X},\bar{Y},\tau_1,\tau_2)|\cdot|T_{\alpha,N,\gamma(\ell-1)}(|\sigma'|,q,\bar{X},\bar{Y},\tau_1,\tau_2)|^2$ 时间内计算 $\mathrm{FV}_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(\ell-1)}(\omega)$。注意，对于所有考虑的值 $\ell \leq d$，都有 $\gamma(\ell) \leq (b(b+1))^{4d^2+4d}$，而较小的粒度值只会减小我们的表的大小。总而言之，存在一个函数 $f_3(|\sigma|,k,q,|XY|)$，使得本证明中描述的算法能够对在某个 k-表达式节点处得到的每个带标签且带颜色的图 H，在 $f_3(|\sigma|,k,q,|XY|)\cdot|T_{1+\frac{1}{b},N,\gamma(b(b+1))^{4d^2+4d}}(\sigma',q,\bar{X},\bar{Y},\tau_1,\tau_2)|^3$ 时间内计算出见证 $_H$。来自

1. 草稿（针对单个顶点），或 2. 当 H 是通过重新标记或添加边从 H_1 得到时的函数 witness$_{H_1}$，或 3. 当 H 被得到为 $H_1 \cup H_2$ 时的函数 witness$_{H_1}$ 和 witness$_{H_2}$。

事实上，对于情况 1.，计算是平凡的；对于情况 2.，计算仅涉及对见证$_{H_1}$进行重新排列；而情况 3. 则可以通过根据扩展的 Feferman–Vaught 集合组合见证$_{H_1}$和见证$_{H_2}$来处理，而无需访问图H 本身。

我们可以将 k-表达式 χ 看作一棵由 $\mathcal{O}(|\chi|)$ 个节点组成的树，而上述观察给出了每个节点所需处理时间的界。回顾观察 10，它给出了

近似表公式数量的界，因此，对于某个可计算函数 f，我们可以将处理这棵树的一个节点所需的时间界定为 $f(|\sigma|,\ k,\ q,\ |\bar{X}\bar{Y}|)\cdot|\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}\ N,\ \gamma\cdot(b\ (b+1)\ )\ _{4d^2+4d}}|^{3|\tau_1|+|\tau_2|\cdot f\ (|\sigma|,\ k,\ q,\ |\bar{X}\bar{Y}|)}$。因此，整个算法的总运行时间可以界定为

$$|\chi|\cdot f(|\sigma|,k,q,|\bar{X}\bar{Y}|)\cdot|\tilde{\mathbb{N}}_{\alpha,N,\gamma\cdot(b(b+1))^{4d^2+4d}}|^{3|\tau_1|+|\tau_2|\cdot f(|\sigma|,k,q,|\bar{X}\bar{Y}|)}.$$ □

9 从表中推导答案

定理 15 使我们能够计算一个函数见证$_G$ ，对于每个表公式 ω，它基本上都提供了近似求值 ω所需的全部信息。然而，输入查询通常并不具有表公式的形式。本节最终旨在说明如何利用定理 15，获取可能出现在 $\forall$CMSO$_1$-查询中的任何公式的必要信息。

□

为此，将一般 $\forall$CMSO$_1$ 查询的约束（至少在一定程度上放宽或收紧）仅用近似表公式表示将很有用。下面的定理 16 实现了这一点；与定理 14 类似，这会导致粒度增加，该粒度表示为精度 $(1+\frac{1}{b})^d$ 的函数，而精度与我们从定理 15 得到的答案相关。本节最后的总结性陈述由定理 17 给出。

定义 10. 给定一个权重项集合 τ_1 （定义在 X 上），以及一个权重项集合 τ_2 （定义在 上）XY，我们用 Block$(\gamma,\ \sigma,\ q,\ X,\ Y,\ \tau_1,\ \tau_2)$ 表示所有形如 $\forall Y\varphi(XY)$ 的块公式，其中 φ 的签名包含于 σ，量词秩至多为 q，所有权重项均为非负且粒度为 γ，自由变量来自 X 的普通权重项包含于 τ_1， ，并且自由变量来自 XY 的可能的附加权重项包含于 τ_2。

定理 **16** $\varphi\ X\ \in\ \gamma\ \sigma\ q\ X\ Y\ \tau_1\ \tau_2\ b\ d\ N\ \in$。给定一个公 $\mathbb{N}$ $|\tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b}\ d\ \lceil\ 1+\frac{1}{b}\ ^{2d\cdot}\ N+1\ \rceil\ \gamma\cdot\ b\ b+1\ \ ^{3d}}|^{\mathcal{O}(|\tau_1|^2}\ \cdot\ |\varphi|^{\mathcal{O}(1)}$ 式 $()$ Block$(,,,,,,)$ 以及$,,,$ 我们可以在时间 $),(\,)(\,),((\,))$ 内计算出一个 for- 公式 $\xi(X)$，它由 $T_{(1+\frac{1}{b})^d,\lceil(1+\frac{1}{b})^{2d}\cdot(N+1)\rceil,\gamma\cdot(b(b+1))^{3d}}(\sigma,q,X,Y,\tau_1,\tau_2)$中的公式通过合取和析取得到，并且对于每个其 $(\tau_1\cup\tau_2)$-值域包含于 $\{0,\ldots,N\}$ 中的图 G，以及每个 $\bar{W}\in\mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，

$$\begin{aligned} G\models^{(1+\frac{1}{b})^{2d}}\varphi(\bar{W}) \quad&\Longrightarrow\quad G\models^{(1+\frac{1}{b})^{d}}\tilde{\xi}(\bar{W}),\\ G\models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}}\varphi(\bar{W}) \quad&\Longleftarrow\quad G\models_{(1+\frac{1}{b})^{d}}\tilde{\xi}(\bar{W}). \end{aligned}$$

证明。 $\varphi(X)$ 是一个块公式，因此具有 $\forall Y\varphi'(XY)$ 的形式。证明分两步进行：

1. 首先，我们描述粒化表 $T_\gamma(q,c,X,Y,\tau_1,\tau_2)$ 中公式的析取 ξ，其中每个公式的长度都不超过 $\mathcal{O}(|\varphi|)$，使得对于每个 $\bar{W}\in\mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$， $G\models\varphi(W)$ 当且仅当 $G\models\xi(W)$。

2. 接着，我们修改这些表公式各自的阈值，以确保包含关系 in $T_{(1+\frac{1}{b})^d,\ \lceil(1+\frac{1}{b})^{2d}\cdot(N+1)\rceil,\ \gamma\cdot(b(b+1))^{3d}}(q,\ c,\ X,\ Y,\ \tau_1,\ \tau_2)$，代价是它们的析取 ξ 与定理陈述中所述的 $\varphi(X)$ 之间存在“非精确等价- 性”。

步骤 1。 我们首先将每个使用严格比较运算符 $<$ （或 $>$）的权重比较，转换为等价的、使用非严格比较运算符 $\leq$ （或 $\geq$）的权重比较；这是通过注意到，对于两个数 p， q 其粒度为 γ, $p < q$ 当且仅当 $p + \frac{1}{\gamma} \leq q$ 来实现的。注意，具有 $(\tau_1 \cup \tau_2)$ 值域且取值于 $\{0, \ldots, N\}$ 的图，其 $(\tau_1' \cup \tau_2')$ 值域为 $\{0, \ldots, N+1\}$，其中 τ_1' 和 τ_2' 是经过上述重写得到的权重项。此外，由于 φ 是块公式，它至多包含一个权重比较 $t_2 \bowtie t_1$ 或 $t_1 \bowtie t_2$，其中 t_2 是一个涉及至少一个全称量化变量的权重项，且 $\bowtie \in \{\leq, \geq\}$；如果不存在这样的权重比较，我们不失一般性地假设 $XY(= t_1) : X$，并任意固定 $= 0$ 。然后，我们对每个不涉及 $\bowtie$ 的权重比较进行语法重写，将比较运算符固定为 t_2 ；并将唯一一个涉及 $\leq$ 的权重比较重写为形式 t_2 。

从现在起，我们将 φ 视为完成上述修改后的公式。令 $\not\bowtie$ 为 $\bowtie$ 的否定，即若 $\bowtie = \leq$, 则 $\not\bowtie = >$ ；若 $\bowtie = \geq$ ，则 $\not\bowtie = <$。

令 $\mathrm{comp}(\varphi, X)$ 为仅涉及 X 的所有权重比较的集合（即排除涉及 Y 的唯一一个权重比较）。通过完整指定 $\mathrm{comp}(\varphi, X)$ 中每个元素可能的取值，我们得到 $\varphi(X)$ 在逻辑上等价于

$$\bigvee_{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} \Big(\big(\bigwedge_{t \leq t' \in S} t(\bar{X}) \leq t'(\bar{X}) \big) \wedge \big(\bigwedge_{t \leq t' \in \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X}) \setminus S} t(\bar{X}) > t'(\bar{X}) \big) \wedge (\forall \bar{Y} \chi_S(\bar{X}\bar{Y})) \Big) \tag{8}$$

其中， $\chi_S(XY)$ 是将 S 中的所有权重比较替换为真，并将 $\mathrm{comp}(\varphi, X)$ 中的所有权重比较 $\setminus S$ 替换为假后，由 φ' 得到的。此外，通过完整指定 $t_2 \bowtie t_1$ 的取值，这等价于

$$\begin{aligned} \bigvee_{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} & \big(\bigwedge_{t \leq t' \in S} t(\bar{X}) \leq t'(\bar{X}) \big) \wedge \big(\bigwedge_{t \leq t' \in \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} t(\bar{X}) > t'(\bar{X}) \big) \\ & \wedge \forall \bar{Y} \Big((t_2(\bar{X}\bar{Y}) \bowtie t_1(\bar{X}) \rightarrow \chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})) \wedge (t_2(\bar{X}\bar{Y}) \not\bowtie t_1(\bar{X}) \rightarrow \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})) \Big) \end{aligned} \tag{9}$$

其中， $\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})$ 由 $\chi_S(\bar{X}\bar{Y})$ 将 $t_2 \bowtie t_1$ 替换为真得到，而 $\chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})$ 由 $\chi_S(\bar{X}\bar{Y})$ 将 $t_2 \bowtie t_1$ 替换为假得到。注意， $\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})$ $\chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, XY)$。接下来，我们将蕴含式改写为析取，以得到与.....等价的形式

$$\begin{aligned} \bigvee_{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} & \big(\bigwedge_{t \leq t' \in S} t(\bar{X}) \leq t'(\bar{X}) \big) \wedge \big(\bigwedge_{t \leq t' \in \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X}) \setminus S} t(\bar{X}) > t'(\bar{X}) \big) \\ & \wedge \forall \bar{Y} \Big((t_2(\bar{X}\bar{Y}) \not\bowtie t_1(\bar{X}) \vee \chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})) \wedge (t_2(\bar{X}\bar{Y}) \bowtie t_1(\bar{X}) \vee \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})) \Big). \end{aligned} \tag{10}$$

请注意，尽管该公式等价于 $\varphi(X)$，但它包含 $\varphi(X)$ 中没有的权重比较——具体来说，是形式为 $t > t'$ 和 $t_2 \not\bowtie t_1$ 的权重比较。对于证明第二步中将进行的收紧和放宽，这些比较会产生不利影响。幸运的是，我们证明了可以进一步简化该公式，从而省去这些新的权重比较。为此，我们将使用以下一般性观察。

对于二进制变量 A_0, A_1, B，使得 A_0 蕴含 A_1，

$$\begin{aligned}
&(\neg B \vee A_1) \wedge (B \vee A_0) \\
\equiv\ &(\neg B \vee A_1) \wedge \Big((B \vee A_1) \wedge (B \vee A_0)\Big) \\
\equiv\ &\Big((\neg B \vee A_1) \wedge (B \vee A_1)\Big) \wedge (B \vee A_0) \\
\equiv\ &A_1 \wedge (B \vee A_0).
\end{aligned} \tag{11}$$

为简化（10）中的公式，我们现在将对 B:
$t_2\ \bar{X}\bar{Y}\ \bowtie t_1\ \bar{X} \quad A_0 \ = \ \chi_S^{t_1 \not\bowtie t_2}\ \bar{X}\bar{Y} \qquad A_1 \ = \ \chi_S^{t_2 \bowtie t_1}\ \bar{X}\bar{Y}$ = ( ) ( )、: ( ) 和 : ( ) 应用（11）中的观察。这是可行的，因为 $t_2(\ \bar{X}\bar{Y}) \bowtie t_1(\ \bar{X})$ 作为一个正原子公式出现在 φ' 中，这保证了 $\chi_S^{t_1 \not\bowtie t_2}(\ \bar{X}\bar{Y})$ 蕴含 $\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\ \bar{X}\bar{Y})$。应用（11）可得（10）的等价表述。

$$\begin{aligned}
\bigvee_{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} \Big(\big(\bigwedge_{t \le t' \in S} t(\bar{X}) \le t'(\bar{X}) \big) \wedge \big(\bigwedge_{t \le t' \in \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X}) \setminus S} t(\bar{X}) > t'(\bar{X}) \big) \\
\wedge \forall \bar{Y} \big(\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \wedge \big(t_2(\bar{X}\bar{Y}) \bowtie t_1(\bar{X}) \vee \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \big) \big) \Big).
\end{aligned} \tag{12}$$

我们的下一项任务是去掉（12）中第一行的后半部分，即证明其等价于

$$\begin{aligned}
\bigvee_{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} \Big(\big(\bigwedge_{t \le t' \in S} t(\bar{X}) \le t'(\bar{X}) \big) \\
\wedge \forall \bar{Y} \big(\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \wedge \big(t_2(\bar{X}\bar{Y}) \bowtie t_1(\bar{X}) \vee \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \big) \big) \Big).
\end{aligned} \tag{13}$$

为论证这种等价性，我们注意到，（12）中的公式立即蕴含（13）中的公式，因为对于 S 的每一种取值，后者都是关于原子公式子集的合取。反过来，假设任意图 H models 公式 in（13），其中 W of X 取了某种实例化。这意味着存在某个 $S_1 \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, X)$，使得 S_1 中的所有权重比较均由 W 在 H 中满足，并且第二行的子公式成立。现在，我们将 $S_2 \supseteq S_1$ 定义为 comp(φ, X) 中由 W 在 H 中满足的所有权重比较的集合。根据定义，对于 $S := S_2$ 的这一取值，我们可以保证（12）中公式第一行的所有原子公式均得到满足。此外，由于所有权重比较都作为正原子公式出现在 $\varphi(X)$ 中，并且由于 $S_2 \supseteq S_1$，$\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\ \bar{X}\bar{Y})$ 的定义保证了 $\chi_{S_1}^{t_2 \bowtie t_1}(\ \bar{X}\bar{Y})$ 蕴含 $\chi_{S_2}^{t_2 \bowtie t_1}(\ \bar{X}\bar{Y})$。因此，在将 X 解释为 W 时，H 也满足（12）中的公式，从而证明了所需的等价性。

接下来，我们需要确保所有权重比较都只在一侧包含自由变量。直观上，实现这一点的方法是将所有涉及自由变量的项简单地移到同一侧（就精确解而言，这样做是可行的），但在近似情形下，这种做法并不可行，因为我们的目标是保留过度满足和不足满足。事实上，可以考虑一个说明性示例：对于某个 X_1，$X_2 \subseteq V(G)$ 和某个 $\circ > 1$，$G \models_{\lfloor} |X_1| \le |X_2|$ 与 $G \models_{\circ} |X_1| - |X_2| \le 0$ 在本质上是不同的，因为即使 $|X_1| < |X_2|$ 不成立，前者仍可能成立，而后者则不成立。

为了以兼容欠满足和过度满足的方式处理这个问题，我们将项之间的每个权重比较表示为若干权重比较的合取，其中一侧没有自由变量，也就是说，是一个数。具体而言，对于每个变量赋值，

每个权重比较 $t \le t' \in \mathsf{comp}(\varphi, X)$ 都可以等价地替换为 $t \le g(t \le t') \wedge g(t \le t') \le t'$ 对于某个整数 $0 \le g(t \le t') \le N+1$。特别地，如果对于 $a, b \in \mathbb{N}$ 我们用 $Q_{a,b}$ 表示所有粒度为 $b \in \mathbb{N}$ 且满足 $0 \le q \le a$的数的集合 q，那么$g(t \le t') \in Q_{N+1,\gamma}$。

此外，对于 $t_2(XY) \bowtie t_1(X)$ 也同样成立，因为我们可以假设 $g(t_2 \bowtie t_1) = t_1(X)$，无论 $t_2(XY)$ 如何，或 Y 如何实例化。因此，权重比较 $g(t_2 \bowtie t_1) \bowtie t_1(X)$ 可以出现在对 Y 量化的范围之外。现在，我们将通过对这些数值 g 的所有取值添加一个全局析取，来改写公式 (13)。为避免混淆，我们指出，这确实会使公式的总长度增加一个 $\mathcal{O}(N)$ 倍的因子，但构成该析取的原子公式的每个子公式的长度仍有 $\mathcal{O}(|\varphi|)$ 的上界。

$$\bigvee_{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X})} \Bigg(\bigvee_{g : S \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to Q_{N+1,\gamma}} \Big(\bigwedge_{t \le t' \in S} \big(t(\bar{X}) \le g(t \le t') \wedge g(t \le t') \le t'(\bar{X})\big) \tag{14}$$

$$\wedge\, g(t_2 \bowtie t_1) \bowtie t_1(\bar{X}) \wedge \forall \bar{Y} \big(\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \wedge \big((t_2(\bar{X}\bar{Y}) \bowtie g(t_2 \bowtie t_1) \vee \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})) \big) \big) \Big) \Bigg).$$

为了真正将 (14) 转换为表公式的析取，对于 $g\colon S \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to Q_{N+1,\gamma}$和 $t \in \tau_1$，我们引入一组阈值，它们将应用于 (14) 中出现的各个权重项，而不是权重比较。为此，我们希望为单个权重项选择由涉及该项的比较所隐含的最严格阈值；在 t_1 的情况下，这可能包括为 $t_1 \bowtie t_2$ 引入的阈值。此外，如果权重比较的阈值没有为某个项隐含上限或下限，我们希望选择一个极端阈值，使其显然能够满足。为此，我们使用由 G 的有界（$\tau_1 \cup \tau_2$）值域所隐含的上限或下限。对于 $t \in \tau_1$ 和 $\le$，这意味着我们可以将 $g_{t,\le}^{g}$ 用作阈值，即 t 位于左侧的权重比较中 g 值的最小值（对应于最严格的阈值）；而对于 t，显然能够满足的上限是 $N+1$。因此，我们可以通过如下简洁定义，将上述意图形式化。

$$g_{t,\le}^{g} := \min\Big(\{ g(t \le t') \mid t \le t' \in S \} \cup \{ g(t_2 \bowtie t_1) \mid \bowtie = \ge \wedge\, t = t_1 \} \cup \{ N+1 \} \Big).$$

类似地，对于权重比较中出现的每个权重项 $t(X)$，若该比较的形式为$g(t' \le t) \le t(X) \in S$，我们将其阈值 $g_{t,\ge}^{g}$ 设为所有 t'选择中 $g(t' \le t)$ 的最大值，同时也纳入 $\bowtie = \le$ 且 $t_1(X) = t(X)$这一特殊情况。形式上，

$$g_{t,\ge}^{g} := \max\Big(\{ g(t' \le t) \mid t' \le t \in S \} \cup \{ g(t_2 \bowtie t_1) \mid \bowtie = \le \wedge\, t = t_1 \} \cup \{ 0 \} \Big).$$

在表公式中使用时，上述阈值涵盖了公式 (14) 中出现的所有权重比较，但由 Y量化的公式部分中出现的权重比较除外。为处理这些权重比较，我们将使用形式的表公式阈值 $g_{\circ,\psi,\circ}$（遍历 $\psi(XY) \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma,\ q,\ XY$ 的所有选择）。在给出阈值的形式化定义之前，我们将再次说明其工作原理的直观理解。

由于公式 (14) 要求对 $\bar{Y}$ 的所有选择，$\chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})$ 都成立，因此对于 $\psi(\bar{X}\bar{Y}) = \chi_S^{t_2 \bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})$ 的情况，我们设置阈值，使权重比较不可满足，从而迫使

$$\psi\ \bar{X}\bar{Y} \qquad \left(t_2\ \bar{X}\bar{Y}\ \bowtie g\ t_2 \bowtie t_1\ \vee (\ )\right.$$

成立。此外，

$$\left.\chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}\ \bar{X}\bar{Y}\ \right) \qquad \bowtie = \leq \qquad \bowtie = \geq$$

为了编码 (( ) ( ) ( )，我们将 $\psi(\bar{X}\bar{Y}) = \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1}(\bar{X}\bar{Y})$ 的其中一个阈值（取决于是否为 or ）设置为 $g(t_2 \bowtie t_1)$ 的值；另一个阈值并不需要，因此将其设置为使相应的权重比较显然成立的形式。对于 $\psi(XY)$ 的所有其他选择，我们不关心其是否成立，因此将相应阈值设置为使两个比较都显然成立的形式。

为了 形式化上一段，对于每个 $\psi(\bar{X}\bar{Y}) \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})$ 我们设t

$$g^g_{t_2,\psi,\leq} := \begin{cases} g(t_2 \bowtie t_1) & \text{if } \bowtie = \leq \text{ and } \psi = \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1} \\ 0 & \text{if } \psi = \chi_S^{t_2 \bowtie t_1} \\ N+1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$g^g_{t_2,\psi,\geq} := \begin{cases} g(t_2 \bowtie t_1) & \text{if } \bowtie = \geq \text{ and } \psi = \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1} \\ N+1 & \text{if } \psi = \chi_S^{t_2 \bowtie t_1} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

总的来说，这使我们能够将公式（14）重写为长度为 $\mathcal{O}(|\varphi|)$ 的表公式的析取

$$\xi(\bar{X}) = \bigvee_{\substack{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi,\bar{X}) \\ g: S \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to Q_{N+1,\gamma}}} \left(\bigwedge_{t \in \tau_1} t(\bar{X}) \leq g^g_{t,\leq} \wedge t(\bar{X}) \geq g^g_{t,\geq} \right) \tag{15}$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \quad \psi(\bar{X}\bar{Y}) \vee (t_2(\bar{X}\bar{Y}) \leq g^g_{t_2,\psi,\leq} \wedge t_2(\bar{X}\bar{Y}) \geq g^g_{t_2,\psi,\geq}) \right).$$

总而言之，对于每个 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，$G \models \varphi(\bar{W})$ 当且仅当 $G \models \xi(W)$，从而完成了我们的第一步目标。

步骤 2。 现在，考虑某个函数 $h: S \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to Q_{N+1,\gamma\cdot(b(b+1))^{2d}}$。直观地说，这样的 h 可以看作是从上一步的 g 中进行选择，但还额外允许采用更高的粒度（这一性质稍后会派上用场）。我们的目标是以一种仅使用圆整集合 $\mathbb{N}_{1+\frac{1}{b},\circ,\square}$ 中的数的方式来修改 h，其中 $\circ$ 将是一个略大于 $N+1$ 的上界，而粒度 $\square$ 将略大于 $\gamma \cdot (b(b+1))^{2d}$。

特别地，根据观察9，我们可以找到一个数 $t \leq t' \in \mathrm{comp}(\varphi,$

$$\tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \in \left[\left(\frac{b}{b+1} \right)^d \cdot h(t \leq t'), h(t \leq t') \right] \cap \tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^d \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot b^{2d}(b+1)^{3d}}$$

以及集合 $\tilde{h}_{\leq}(t \leq t') := \min\{a \in \tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b})^d,\ \lceil (1+\frac{1}{b})^d \cdot (N+1) \rceil,\ \gamma \cdot b^{3d}(b+1)^{3d}} \mid a \geq \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \cdot \binom{b+1}{b}^d\}$。注意，对区间 $[\tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \cdot \binom{b+1}{b}^d, \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \cdot \binom{b+1}{b}^{2d}]$ 应用观察9后，

（其中 $h_{\geq}(t \leq t') \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^d$ 的粒度为 $\gamma \cdot b^{3d}(b+1)^{3d}$），我们可以得到保证 $\tilde{h}_{\leq}(t \leq t') \leq \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \cdot (\frac{b+1}{b})^{2d}$。特别是，这确保了

$$\tilde{h}_{\leq}(t \leq t') \in \left[h(t \leq t'), \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2d} \cdot h(t \leq t')\right] \cap \tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^d \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot b^{3d}(b+1)^{3d} \cdot}$$

为方便起见，我们可以将所有这些数字都视为粒度为 $\gamma \cdot (b(b+1))^{3d}$。我们用这些数字来定义步骤 1 中得到的阈值的“舍入”版本，并将上界稍微增加到 $(1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1)$，

$$\tilde{g}^h_{t,\leq} = \min\left(\{\tilde{h}_{\leq}(t \leq t') \mid t \leq t' \in S\} \cup \{\tilde{h}_{\leq}(t_2 \bowtie t_1) \mid \bowtie = \geq \wedge\, t = t_1\} \cup \{(N+1)\left(1+\frac{1}{b}\right)^{2d}\}\right),$$
$$\tilde{g}^h_{t,\geq} = \max\left(\{\tilde{h}_{\geq}(t' \leq t) \mid t' \leq t \in S\} \cup \{\tilde{h}_{\geq}(t_2 \bowtie t_1) \mid \bowtie = \leq \wedge\, t = t_1\} \cup \{0\}\right),$$

并且对于每个 $\psi \in \mathsf{CMSO}_1(\sigma, q, XY)$，我们定义

$$\tilde{g}^h_{t_2,\psi,\leq} = \begin{cases} \tilde{h}_{\leq}(t_1 \bowtie t_2) & \text{if } \bowtie = \leq \text{ and } \psi = \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1} \\ 0 & \text{if } \psi = \chi_S^{t_2 \bowtie t_1} \\ (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$\tilde{g}^h_{t_2,\psi,\geq} = \begin{cases} \tilde{h}_{\geq}(t_1 \bowtie t_2) & \text{if } \bowtie = \geq \text{ and } \psi = \chi_S^{t_2 \not\bowtie t_1} \\ (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) & \text{if } \psi = \chi_S^{t_2 \bowtie t_1} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们可以使用这些“舍入后的”阈值，以类似于证明第一步的方式，在近似表 $T_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{3d}}(q, c, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 中得到一个公式的析取，特别是得到公式

$$\bigvee_{\substack{S \subseteq \mathrm{comp}(\varphi, \bar{X}) \\ h\colon S \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to Q_{N+1, \gamma \cdot (b(b+1))^{2d}}}} \left(\bigwedge_{t \in \tau_1} t(\bar{X}) \leq \tilde{g}^h_{t,\leq} \wedge t(\bar{X}) \geq \tilde{g}^h_{t,\geq}\right) \wedge \left(\bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \quad \psi(\bar{X}\bar{Y}) \vee \left(t_2(\bar{X}\bar{Y}) \leq \tilde{g}^h_{t_2,\psi,\leq} \wedge t_2(\bar{X}\bar{Y}) \geq \tilde{g}^h_{t_2,\psi,\geq}\right)\right). \tag{16}$$

请注意，上述公式最开头的析取表明，其长度至少为 $\left((N+1) \cdot \gamma \cdot (b(b+1))^{2d}\right)^{|\tau_1|}$，因此不可能在定理陈述所声称的运行时间内构造出来。幸运的是，h 的许多选择会产生相同的 $h_{\geq}$ 值（因此也会产生相同的 $h_{\leq}$ 值），所以我们可以通过直接考虑 $h_{\geq}$ 的值来改变析取的值域，从而得到以下公式 ξ

$$\bigvee_{\substack{z\colon (\mathrm{comp}(\varphi, \bar{X}) \cup \{t_2 \bowtie t_1\}) \to \{\bot\} \cup \\ \tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot b^{2d}(b+1)^{3d}} \\ \text{such that } z(t_2 \bowtie t_1) \neq \bot}} \left(\bigwedge_{t \in \tau_1} t(\bar{X}) \leq \tilde{g}^z_{t,\leq} \wedge t(\bar{X}) \geq \tilde{g}^z_{t,\geq}\right) \wedge \left(\bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \quad \psi(\bar{X}\bar{Y}) \vee \left(t_2(\bar{X}\bar{Y}) \leq \tilde{g}^z_{t_2,\psi,\leq} \wedge t_2(\bar{X}\bar{Y}) \geq \tilde{g}^z_{t_2,\psi,\geq}\right)\right), \tag{17}$$

其中阈值的获取方式如下。

- $\tilde{g}^{z}_{t,\geq}$ 的获取方式与$\tilde{g}^{h}_{t,\geq}$ 类似，但将 $\tilde{h}_{\geq}$ 替换为 z，即：

$$\tilde{g}^{z}_{t,\geq} = \max\Big(\{z(t' \leq t) \mid z(t' \leq t) \neq \bot\} \cup \{z(t_2 \bowtie t_1) \mid \bowtie = \leq \wedge\, t = t_1\} \cup \{0\}\Big).$$

- $\tilde{g}^{z}_{t,\leq}$ 以类似于 $\tilde{g}^{h}_{t,\leq}$ 的方式得到，但将 $\tilde{h}_{\leq}$ 替换为 $z^{\uparrow}(t \leq t') := \min\{a \in \mathbb{N}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^d \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot b^{3d}(b+1)^{3d}} \mid a \geq \tilde{z}(t \leq t') \cdot \left(\frac{b+1}{b}\right)^d\}$，即，

$$\tilde{g}^{z}_{t,\leq} = \min\Bigg(\Big\{z^{\uparrow}(t \leq t') \;\Big|\; z(t \leq t') \neq \bot\Big\} \cup \Big\{z^{\uparrow}(t_2 \bowtie t_1) \;\Big|\; \bowtie = \geq \wedge\, t = t_1\Big\} \cup \Big\{(N+1) \cdot \Big(1 + \frac{1}{b}\Big)^{2d}\Big\}\Bigg).$$

- $\tilde{g}^{z}_{t_2,\,\psi,\,\leq}$，$\tilde{g}^{z}_{t_2,\,\psi,\,\geq}$ 分别以与 $\tilde{g}^{h}_{t_2,\,\psi,\,\leq}$，$\tilde{g}^{h}_{t_2,\,\psi,\,\geq}$相同的方式得到，其中将 $\tilde{h}_{\geq}(\circ)$ 解释为 $z(\circ)$，将 $\tilde{h}_{\leq}(\circ)$ 解释为 $z^{\uparrow}(\circ)$，并将 S 解释为 $\mathsf{comp}(\varphi, \bar{X})$ 中未被 z 映射到 $\bot$ 的子集。

请注意，对于公式 (16) 中由 S 和 h 的选择所定义的每个备选项，我们都可以在公式 (17) 中找到一个 z 的选择，使其产生相同的阈值；换句话说，(17) 包含 (16) 中的所有备选项。与此同时，对于 (17) 中由 z 的选择所定义的每个备选项，我们都可以在 (16) 中找到 S 和 h 的选择，使其产生相同的阈值；换句话说，(16) 包含 (17) 中的所有备选项。这意味着 (16) 和 (17) 等价。

现在我们继续证明。为此，我们只考虑 $\bowtie = \leq$ 的情形，因为 $\bowtie = \geq$ 可以对称地处理。设 G 是一个图，其签名与 φ 匹配，并且 φ 中的所有权重比较仅包含 $\leq$ 和 $\geq$，且它们的 $(\tau_1 \cup \tau_2)$-值域包含于 $\{0, \ldots, N+1\}$。

第一类蕴含。 如果 $G \models^{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{X})$，则由 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$ 作为见证。我们可以执行与步骤 1 中相同的构造，直到包括步骤 (14)，对于 $\varphi^{(1+\frac{1}{b})^{2d}}$ 而不是 φ，从而将 $^{-}G \models^{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{W})$ 等价地写为

$$\begin{aligned} G \models \bigvee_{\substack{S \subseteq \mathsf{comp}(\varphi, \bar{X}) \\ h\colon S \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to Q_{(N+1)\cdot(1+\frac{1}{b})^{2d}, \gamma \cdot (b(b+1))^{2d}}}} & \bigwedge_{t \leq t' \in S} \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2d} \cdot t(\bar{W}) \leq h(t \leq t') \wedge h(t \leq t') \leq \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2d} \cdot t'(\bar{W}) \\ & \wedge\, h(t_2 \leq t_1) \leq \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2d} \cdot t_1(\bar{W}) \\ & \wedge\, \forall \bar{Y} \chi_S^{t_2 \leq t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \wedge \left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^{2d} \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \leq h(t_2 \leq t_1) \vee \chi_S^{t_2 > \cdot\, t_1}(\bar{W}\bar{Y})\right). \end{aligned}$$

这里，我们利用了以下事实：$\varphi(\frac{b+1}{b})^{2d}$中的每个权重比较 $\left(\frac{b+1}{b}\right)^{2d} \cdot t \leq \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2d} \cdot t'$都直接对应于 φ中的一个权重比较 $t \leq t'$。

现在，让我们考虑 h 的选择：$S \cup \{t_2 \le t_1\} \to Q_{(N+1)\cdot(1+\frac{1}{b})^{2d},\ \gamma\cdot(b(b+1))^{2d}}$和$S \subseteq \mathsf{comp}(\varphi,\ X)$，使得上述析取中相应的选项成立。由此得到

$$
\begin{aligned}
G \models \bigwedge_{t \le t' \in S} & \left(\frac{b+1}{b}\right)^{2d} \cdot t(\bar{W}) \le h(t \le t') \wedge h(t \le t') \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2d} \cdot t'(\bar{W}) \\
& \wedge h(t_2 \le t_1) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{2d} \cdot t_1(\bar{W}) \\
& \wedge \forall \bar{Y} \chi_S^{t_2 \le t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \wedge \left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^{2d} \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \le h(t_2 \le t_1) \vee \chi_S^{t_2 > t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

为此，我们首先将不等式两边分别乘以 $\left(\frac{b+1}{b}\right)^d$或 $\left(\frac{b}{b+1}\right)^d$，从而改写（18）中的公式（针对上述 h 和S 的选择），得到

$$
\begin{aligned}
G \models \bigwedge_{t \le t' \in S} & \left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot t(\bar{W}) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot h(t \le t') \wedge \left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot h(t \le t') \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot t'(\bar{W}) \\
& \wedge \left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot h(t_2 \le t_1) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot t_1(\bar{W}) \\
& \wedge \forall \bar{Y} \chi_S^{t_2 \le t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \wedge \left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot h(t_2 \le t_1) \vee \chi_S^{t_2 > t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \right).
\end{aligned} \tag{19}
$$

回顾第二步中 $h_{\le}(t \le t')$ 和 $h_{\ge}(t \le t')$ 的定义，可得以下公式（特别是，下面的每个权重比较都由（19）中对应的权重比较推出）

$$
\begin{aligned}
G \models \bigwedge_{t \le t' \in S} & \left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot t(\bar{W}) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot \tilde{h}_{\le}(t \le t') \wedge \left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot \tilde{h}_{\ge}(t \le t') \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot t'(\bar{W}) \\
& \wedge \left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot \tilde{h}_{\ge}(t_2 \le t_1) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot t_1(\bar{W}) \\
& \wedge \forall \bar{Y} \chi_S^{t_2 \le t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \wedge \left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^{d} \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^{d} \cdot \tilde{h}_{\le}(t_2 \le t_1) \vee \chi_S^{t_2 > t_1}(\bar{W}\bar{Y}) \right).
\end{aligned}
$$

注意到，由于 G 的 $(\tau_1 \cup \tau_2)$值域以及我们为 g_t^h 定义上界的方式，每当将形如 $g_{t,\circ,\le}^h$ 的阈值设为 $(1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1)$ 时，$G \models \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot t \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^d \cdot g_{t,\circ,\le}^h$。此时，我们利用先前的观察：对于公式 (16) 中 S 和 h 的每一种选择，公式 (17) 中都存在相应的 z 选择，从而

~证明确实存在 z 的一种选择（即 ξ 中的一个替代方案），使得

$$
\begin{aligned}
G \models \quad & \Big(\bigwedge_{t \in \tau_1} \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot t(\bar{W}) \le \left(\frac{b}{b+1}\right)^d \cdot \tilde{g}^z_{t,\le} \wedge \left(\frac{b}{b+1}\right)^d \cdot t(\bar{W}) \ge \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot \tilde{g}^z_{t,\ge} \Big) \\
& \wedge \Big(\bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \quad \psi(\bar{X}\bar{Y}) \\
& \qquad \vee \Big(\Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \le \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d \cdot \tilde{g}^z_{t_2,\psi,\le} \\
& \qquad\quad \wedge \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \ge \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \cdot \tilde{g}^z_{t_2,\psi,\ge} \Big) \Big).
\end{aligned}
$$

第一类蕴含的证明至此完成。

第二类蕴含。 假设 $G \models_{(1+\frac{1}{b})^d} \tilde{\xi}(\bar{W})$ 对某个 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$ 成立，并考虑 ~一个 z 的选择，该选择使得 ξ 中的析取式出现一个由 W 在 G 中满足的备选项。具体而言，这意味着

$$
\begin{aligned}
G \models \quad & \Big(\bigwedge_{t \in \tau_1} \left(\frac{b}{b+1}\right)^d t(\bar{W}) \le \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot \tilde{g}^z_{t,\le} \wedge \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot t(\bar{W}) \ge \left(\frac{b}{b+1}\right)^d \cdot \tilde{g}^z_{t,\ge} \Big) \quad (20) \\
& \wedge \Big(\bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{W}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \quad \psi(\bar{W}\bar{Y}) \\
& \qquad \vee \Big(\Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d t_2(\bar{W}\bar{Y}) \le \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \cdot \tilde{g}^z_{t_2,\psi,\le} \\
& \qquad\quad \wedge \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \ge \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d \cdot \tilde{g}^z_{t_2,\psi,\ge} \Big) \Big).
\end{aligned}
$$

再次注意，由于 G 的 $(\tau_1 \cup \tau_2)$-值域以及我们定义 $g^h_{t,\le}$ 上界的方式，每当形如 $g^h_{t,\cdot,\le}$ 的阈值被设为 $(1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1)$ 时，$G \models \binom{b+1}{b}^d \cdot t \le \binom{b}{b+1} \cdot g^h_{t,\cdot,\le}$。现在我们利用这一事实：对于 (17) 中 z 的每个选择，都可以确定 (16) 中相应的 S 和 h 的选择，使得现在必然有

$$
\begin{aligned}
G \models \quad & \Big(\bigwedge_{t \in \tau_1} \left(\frac{b}{b+1}\right)^d t(\bar{W}) \le \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot \tilde{g}^h_{t,\le} \wedge \left(\frac{b+1}{b}\right)^d \cdot t(\bar{W}) \ge \left(\frac{b}{b+1}\right)^d \cdot \tilde{g}^h_{t,\ge} \Big) \quad (21) \\
& \wedge \Big(\bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma,q,\bar{W}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \quad \psi(\bar{W}\bar{Y}) \\
& \qquad \vee \Big(\Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d t_2(\bar{W}\bar{Y}) \le \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \cdot \tilde{g}^h_{t_2,\psi,\le} \\
& \qquad\quad \wedge \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \cdot t_2(\bar{W}\bar{Y}) \ge \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d \cdot \tilde{g}^h_{t_2,\psi,\ge} \Big) \Big).
\end{aligned}
$$

此公式与第一步终点处得到的公式 (15) 形式相同，因此我们可以反向撤销引入阈值的最后一次变换，使其恢复为原来的形式。

~ ~将公式 (14) 转换为直接使用 $h_{\geq}(t \leq t')$ 和 $h_{\leq}(t \leq t')$ 的公式,

$$G \models \bigwedge_{t \leq t' \in S} \Big(\Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d t(\bar{X}) \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \wedge \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d \tilde{h}_{\leq}(t \leq t') \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d t'(\bar{X})\Big) \tag{22}$$

$$\wedge \Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d \tilde{h}_{\leq}(t_2 \leq t_1) \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d t_1(\bar{X})$$

$$\wedge \forall \bar{Y} \Big(\chi_S^{t_2 \leq t_1}(\bar{X}\bar{Y}) \wedge \Big(\Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d t_2(\bar{X}\bar{Y}) \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \tilde{h}_{\geq}(t_2 \leq t_1) \vee \chi_S^{t_2 \not\leq t_1}(\bar{X}\bar{Y})\Big)\Big).$$

回顾根据 $\tilde{h}_{\leq}(t \leq t')$ 的定义,$\tilde{h}_{\leq}(t \leq t') \geq \binom{b+1}{b}^d \cdot \tilde{h}_{\geq}(t \leq t')$, (22) 中出现的每一对权重比较 $\binom{b}{b+1}^d t(\bar{X}) \leq \binom{b+1}{b}^d \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \wedge \binom{b}{b+1}^d \tilde{h}_{\leq}(t \leq t') \leq \binom{b+1}{b}^d t'(\bar{X})$ 都意味着

$$\Big(\frac{b}{b+1}\Big)^d t(\bar{X}) \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \wedge \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^d t'(\bar{X}),$$

这进而等价于

$$\Big(\frac{b}{b+1}\Big)^{1.5d} t(\bar{X}) \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^{0.5d} \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \wedge \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^{0.5d} \tilde{h}_{\geq}(t \leq t') \leq \Big(\frac{b+1}{b}\Big)^{1.5d} t'(\bar{X}).$$

这进而保证存在一个数 $g(t \leq t')$, 使得 $\binom{b}{b+1}^{2d} t(\bar{X}) \leq g(t \leq t') \wedge g(t \leq t') \leq \binom{b+1}{b}^{2d} t'(\bar{X})$。从此处开始，我们通过反向执行从公式 (14) 到第一类步骤起始处的每个变换继续推导（注意，从 (14) 到 (13) 的步骤中， $g(t \leq t')$ 的粒度并不重要——在这个方向上，只需存在这样一个数即可）。最终得到的公式为 $\varphi_{(1+\frac{1}{b})^{2d}}$，特别地，我们得出 $G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi$，正如所需。

运行时间。 我们遍历所有 $|\tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{3d}}|^{\mathcal{O}(|\tau_1|^2)} \cdot |\varphi|^{\mathcal{O}(1)}$ 个 z φ $X \cup \{t_2 \bowtie t_1\} \to \{\perp\} \cup \mathbb{N}_{(1+\frac{1}{b})^d \lceil 1+\frac{1}{b} \rceil^{2d} \cdot N+1 \rceil \gamma \cdot b\, b+1^{3d}}$ z $t_2 \bowtie t_1 \neq$ 的选择: $\perp$ (comp(,))),()(),(()), z ( ) 。对于每个这样的 ，我们构造相应的近似表公式，将其纳入析取中，所需时间关于 $|\varphi|$ 为多项式。 □

除了可能涉及存在量化的情况外，定理 16 使我们能够推导出表中各项的布尔组合，然后对其进行求值。然而，在为满足赋值构造见证时，简单的析取会更加有用。我们首先在下一个引理中处理这一问题。为此，需要回顾的是，通过 c 过度满足等价于通过 $\frac{1}{c}$ 满足不足。

引理2。 给定一个公式 $\xi(X)$ ，该公式由 $\tilde{T}: = \tilde{T}_{\alpha, N, \gamma}(\sigma, q, \bar{X}, \bar{Y}, \tau_1, \tau_2)$ 中的公式通过合取和析取得到，可以在时间 $\mathcal{O}(|\xi| \cdot |\tilde{T}|^2)$ 内计算出一个集合 $\Omega \subseteq \tilde{T}$，使得对于任意图 G、任意 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$ 以及任意 $c > 0$

$$G \models^c \xi(\bar{W}) \iff there\ is\ \omega \in \Omega\ such\ that\ G \models^c \omega(\bar{W}).$$

证明。我们对 ξ 进行结构归纳。如果 $\xi \in T$，则只需令 $\Omega = \{\xi'\}$，命题显然成立。如果 $\xi = \xi_1 \vee \xi_2$ 或 $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2$，那么根据归纳假设，我们可以计算出集合 $\Omega_1 \subseteq T$ 和 $\Omega_2 \subseteq T$，使得对于所有 G、W 和 $c > 0$

$$G \models^c \xi_i(\bar{W}) \iff \text{there is } \omega \in \Omega_i \text{ such that } G \models^c \omega(\bar{W}).$$

假设 $\xi = \xi_1 \vee \xi_2$。在这种情况下，我们令 $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$。注意，$G \models^c \xi(W)$ 等价于 $G \models^c \xi_1(W)$ 或 $G \models^c \xi_2(W)$。当且仅当存在 $\omega \in \Omega_1$ 使得 $G \models^c \omega(W)$，或者存在 $\omega \in \Omega_2$ 使得 $G \models^c \omega(W)$ 时，这一条件成立。等价地，存在 $\omega \in \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$，使得 $G \models^c \omega(W)$，这证明了在这种情况下我们构造 Ω 的正确性。

假设 $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2$。在这种情况下，我们令 Ω 为所有可由元组 $(\omega_1, \omega_2) \in (\Omega_1 \times \Omega_2)$ 得到的公式的集合，这些公式

$$\bigwedge_{t \in \tau_1} t(\bar{Z}\bar{X}) \leq \min\big(g_{\omega_1}(t, \leq), g_{\omega_2}(t, \leq)\big) \wedge t(\bar{Z}\bar{X}) \geq \max\big(g_{\omega_1}(t, \geq), g_{\omega_2}(t, \geq)\big) \wedge$$
$$\bigwedge_{t \in \tau_2} \bigwedge_{\psi \in \mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{X}\bar{Y})} \forall \bar{Y} \psi(\bar{Z}\bar{X}\bar{Y}) \vee \Big(t(\bar{Z}\bar{X}\bar{Y}) \leq \min\big(g_{\omega_1}(t, \psi, \leq), g_{\omega_2}(t, \psi \leq)\big) \wedge$$
$$t(\bar{Z}\bar{X}\bar{Y}) \geq \max\big(g_{\omega_1}(t, \psi, \geq), g_{\omega_2}(t, \psi \geq)\big) \Big).$$

这些公式包含于 T，且等价于 $\omega_1 \wedge \omega_2$。不难验证，这种等价关系在 c-收紧近似下仍保持不变，因为该构造与构造 c-收紧相交换。我们从 $G \models^c \xi(W)$ 出发，当且仅当 $G \models^c (\xi_1(W) \wedge \xi_1(W))$。根据 Ω_1, Ω_2, 的选取，这又等价于存在 $\omega_1 \in \Omega_1$，$\omega_2 \in \Omega_2$，使得 $G \models^c (\omega_1(W) \wedge \omega_2(W))$。因此，等价于存在一个 $\omega \in \Omega$，使得 $G \models^c \omega(W)$，正如所需。

运行时间。我们可以在 $\mathcal{O}(|\xi|)$ 时间内将公式转换为一棵至多包含 $|\xi|$ 个合取或析取节点的树。对于每个节点，运行时间主要取决于 Ω 的构造；在合取的情况下，需要在 $\mathcal{O}(|\tilde{T}|^2)$ 时间内组合两个近似表公式。 □

定义 11。令 $\forall\mathrm{CMSO}_1(\gamma, \sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 表示所有这样的 $\forall\mathrm{CMSO}_1$ 公式的集合：这些公式可由 $\mathrm{Block}(\gamma, \sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 中的公式（如定义 10 所定义）通过迭代应用合取、析取和存在量化得到。

定理 17。*给定 $\varphi(X) \in \forall\mathrm{CMSO}_1(\gamma, \sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$ 以及 $b, d, N \in \mathbb{N}$，我们可以计算出一个集合 $\Omega \subseteq T_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{3d}}(\sigma, q, ZX, Y, \tau_1, \tau_2)$，其中 $|Z| \leq |\varphi|$，使得对于每个图 G（其 $(\tau_1 \cup \tau_2)$-值域包含于 $\{0, \ldots, N\}$ 中）以及每个 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，*

$$G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{W}) \implies \text{存在 } \omega \in \Omega \text{ 和 } \bar{A} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{Z}|}, \text{ 使得 } G \models^{(1+\frac{1}{b})^d} \omega(\bar{A}\bar{W}),$$
$$G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{W}) \impliedby \text{存在 } \omega \in \Omega \text{ 和 } \bar{A} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{Z}|}, \text{ 使得 } G \models_{(1+\frac{1}{b})^d} \omega(\bar{A}\bar{W}).$$

计算耗时 $|\tilde{\mathbb{N}}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))_{3d}}|^{\mathcal{O}(|\tau_1|^2 + |\tau_2| \cdot |\mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{Z}\bar{X}\bar{Y})|)} \cdot |\varphi|^{\mathcal{O}(1)}$.

证明。注意，φ 是通过对块公式反复进行合取、析取和存在量化得到的。作为第一步，我们通过改写 $\varphi(X)$来消除存在量化，仅保留合取和析取：首先，我们引入一组变量符号 Z、$|Z| \leq |\varphi|$，作为存在量化变量，这些变量两两不同于 X 中的条目，并且为 φ中的每个存在量化顶点集变量分别唯一指定。此后，我们通过从 $\varphi(X)$中移除所有存在量化，并将先前量化的变量保留为自由变量，得到 $\varphi'(ZX)$。由于对作用域内唯一变量的存在量化可以与合取、析取以及对不同变量的存在量化交换，并且这种性质在权重比较缩放下保持不变，因此我们得出

$$\text{对于所有 } c > 0\text{: } G \models^c \varphi(\bar{W}) \iff \text{there is } \bar{A} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{Z}|} \text{ such that } G \models^c \varphi'(\bar{A}\bar{W})$$

因此，只需构造 Ω，使得

$$G \models^{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi'(\bar{A}\bar{W}) \implies \text{there is } \omega \in \Omega \text{ such that } G \models^{(1+\frac{1}{b})^{d}} \omega(\bar{A}\bar{W}),$$
$$G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi'(\bar{A}\bar{W}) \impliedby \text{there is } \omega \in \Omega \text{ such that } G \models_{(1+\frac{1}{b})^{d}} \omega(\bar{A}\bar{W}).$$

我们将 $\varphi'(ZX)$ 的每个 Block 替换为定理 16 的相应输出。由于合取和析取与过满足和不足满足可交换，我们得到一个公式 $\xi(ZX)$，使得

$$G \models^{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi'(\bar{A}\bar{W}) \implies G \models^{(1+\frac{1}{b})^{d}} \xi(\bar{A}\bar{W}),$$
$$G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi'(\bar{A}\bar{W}) \impliedby G \models_{(1+\frac{1}{b})^{d}} \xi(\bar{A}\bar{W}).$$

我们观察到，$\xi(ZX)$ 是通过对 T中的表公式进行合取和析取得到的：$= T_{(1+\frac{1}{b})^{d},\ \lceil(1+\frac{1}{b})^{2d}\cdot N\rceil,\ \gamma\cdot(b(b+1))^{3d}}(\sigma,\ q,\ ZX,\ Y,\ \tau_1,\ \tau_2)$。因此，我们可以应用引理2，得到一个集合 $\Omega \subseteq T$，使得对于和任意 $c > 0$,

$$G \models^c \xi(\bar{A}\bar{W}) \iff \text{there is } \omega \in \Omega \text{ such that } G \models^c \omega(\bar{A}\bar{W}).$$

这证明了该构造的正确性。运行时间界由定理 16 的界（这是指数中第一项加性项的来源）以及引理2结合观察10所得的界（这是指数中第二项加性项的来源）共同得到。

□

10 最终算法

在为计算动态规划表（第 8 节）和从中提取答案（第 9 节）奠定基础后，我们现在可以将两者结合起来，最终回答$\forall$CMSO$_1$查询。第一步，我们只需结合定理 15 和定理 17。这将得到查询答案的“一半”。请注意，虽然 $\forall$CMSO$_1$查询在技术上只包含作为系数的非负整数，但我们也会讨论 γ-粒度 $\forall$CMSO$_1$查询，在这类查询中，我们将这一假设放宽为粒度为 γ 的非负数。直观地说，引理 3 使我们能够正确判定一个 $\forall$CMSO$_1$ 公式的收紧版本无法满足，或者给出放宽后的公式的一个解，且该解不劣于收紧后的公式的任何解。

引理 3。存在一种算法，其输入为一个 γ-粒度的 $\forall CMSO_1$查询 $(\varphi(\bar{X}), \hat{t})$ ，其中 $\varphi(X) \in \forall CMSO_1(\gamma, \sigma, q, X, Y, \tau_1, \tau_2)$，一个数 $b \in \mathbb{N}$，一个图 G（其 $\tau_1 \cup \tau_2$-值域为 $\{0, \ldots, N\}$），以及一个深度为 d 的 G 的 k-表达式 χ；算法要么正确输出 $\mathit{oversatisfy}(G, \varphi, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{2d}) = -\infty$，要么输出 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，且 $G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \omega(\bar{W})$，并且 $\mathit{oversatisfy}(G, \varphi, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{2d}) \leq \hat{t}(\bar{W})$。存在一个可计算函数 f，使得该算法的运行时间以如下表达式为上界

$$|\chi| \cdot |\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}, \lceil (1+\frac{1}{b})^2 \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{4d^2+7d}}|^{f(|\varphi|+k)}.$$

证明。我们定义两个近似表

$$\tilde{T}^d := \tilde{T}_{(1+\frac{1}{b})^d, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{3d}}(\sigma, q, \bar{Z}\bar{X}, \bar{Y}, \tau_1, \tau_2),$$
$$\tilde{T} := \tilde{T}_{1+\frac{1}{b}, \lceil (1+\frac{1}{b})^{2d} \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{3d}}(\sigma, q, \bar{Z}\bar{X}, \bar{Y}, \tau_1, \tau_2).$$

由于一个精度是另一个精度的幂，且所有其他参数都相同，因此有$\tilde{T}^d \subseteq \tilde{T}$。调用定理 15 可得到一个函数见证$_G$，使得对于所有 $\omega \in \tilde{T}$，

$$\text{oversatisfy}\left(G, \omega, \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^d\right) \leq \hat{t}\big(\text{witness}_G(\omega)\big), \tag{23}$$

$$\text{if witness}_G(\omega) \neq \bot \text{ then } G \models_{(1+\frac{1}{b})^d} \omega\big(\text{witness}_G(\omega)\big), \tag{24}$$

其中 $\hat{t}(\bot)$ 定义为 $-\infty$。

由于 G 的 $\tau_1 \cup \tau_2$-值域包含于 $\{0, \ldots, N\}$ 中，我们可以调用定理 17 来计算一个集合 $\Omega \subseteq \tilde{T}^d$，使得对于所有 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$

$$G \models^{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{W}) \implies \text{存在 } \omega \in \Omega, \quad \bar{A} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{Z}|} \text{ 使得 } G \models^{(1+\frac{1}{b})^d} \omega(\bar{A}\bar{W}), \tag{25}$$

$$G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{W}) \impliedby \text{ there is } \omega \in \Omega,\ \bar{A} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{Z}|} \text{ such that } G \models_{(1+\frac{1}{b})^d} \omega(\bar{A}\bar{W}). \tag{26}$$

优化目标 $\hat{t}$ 没有对 $\bar{Z}$ 赋予权重，因此对其进行优化相当于仅对 $\bar{A} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{Z}|}$进行存在量化。因此，由 (25) 得

$$\text{oversatisfy}\left(G, \varphi, \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^{2d}\right) \leq \max_{\omega \in \Omega} \text{ oversatisfy}\left(G, \omega, \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^d\right). \tag{27}$$

我们有 $\tilde{T}^d \subseteq \tilde{T}$，因此 $\Omega \subseteq \tilde{T}$，这意味着对每个 $\omega \in \Omega$，见证$_G(\omega)$ 都有定义。选择 $W \in \{\text{见证}_G(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \cup \{\bot\}$，使得

$$\hat{t}(\bar{W}) = \max_{\omega \in \Omega} \hat{t}(\text{witness}_G(\omega)). \tag{28}$$

结合 (23)、(27) 和 (28) 得

$$\text{oversatisfy}\left(G, \varphi, \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^{2d}\right) \leq \max_{\omega \in \Omega} \text{ oversatisfy}\left(G, \omega, \hat{t}, \left(1+\frac{1}{b}\right)^d\right) \leq \hat{t}(\bar{W}).$$

如果 $\bar{W} = \bot$，那么这意味着 $\hat{t}(\bar{W}) = -\infty$。因此，我们可以正确地返回 $\mathit{oversatisfy}(G, \varphi, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{2d}) = -\infty$。如果 $\bar{W} \neq \bot$，那么根据 $\bar{W}$ 的定义，存在 $\omega \in \Omega$，使得 $W =$见证$_G(\omega)$。因此，根据 (24)，$G \models_{(1+\frac{1}{b})^d} \omega(W)$。于是，(26) 蕴含$G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(W)$。

运行时间。该过程的运行时间主要由定理 15 和定理 17 的运行时间决定。将定理 15 应用于表 T，其运行时间为

$$|\chi| \cdot f(|\sigma|, k, q, |\bar{X}\bar{Y}|) \cdot |\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}, \lceil (1+\frac{1}{b})^2 \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{4d^2+7d}}|^{3|\tau_1|+|\tau_2| \cdot f'(|\sigma|, k, q, |\bar{X}\bar{Y}|)},$$

对于某个可计算函数 f'。此外，定理 17 的运行时间为

$$|\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}, \lceil (1+\frac{1}{b})^2 \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^3}|^{\mathcal{O}(|\tau_1|^2+|\tau_2| \cdot |\mathrm{CMSO}_1(\sigma, q, \bar{Z}\bar{X}\bar{Y})|)} \cdot |\varphi|^{\mathcal{O}(1)}.$$

我们可以假设 $|\sigma|$，q，$|Z|$，$|X|$，$|Y|$，$|\tau_1|$，$|\tau_2|$ 可以用 $|\varphi|$ 表示为有界的，因此选择（根据观察 2）一个函数 f，将总运行时间界定为

$$|\chi| \cdot |\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}, \lceil (1+\frac{1}{b})^2 \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1))^{4d^2+7d}}|^{f(|\varphi|+k)}. \qquad \square$$

我们现在着手实现目标固定参数运行时间，并用精度 $0 < \varepsilon \leq 0.5$ 来描述运行时间。

引理 *4.* 存在一种算法，其输入为 γ-粒度的 $\forall$*CMSO*$_1$-查询 $(\varphi(\bar{X}), \hat{t})$、精度 $0.5 \geq \varepsilon > 0$、一个图 G，以及一个深度为 d 的 G 的 k-表达式 χ；该算法要么正确输出过度满足$(G, \varphi, \hat{t}, 1+\varepsilon) = -\infty$，要么输出 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，其中 $G \models_{1+\varepsilon} \varphi(\bar{W})$ 且过度满足$(G, \varphi, \hat{t}, 1+\varepsilon) \leq \hat{t}(\bar{W})$。存在一个可计算函数$f$，使得该算法的运行时间有界于

$$|\chi| \cdot \left(\frac{d \cdot \log(\gamma+2) \cdot \log(M+|V(G)|)}{\varepsilon} \right)^{f(|\varphi|,k)},$$

其中 f 是可计算函数，而 M 是比 φ中任意权重项里出现的最大数，或作为 G中任意权重的最大数，大 *2* 的数。

证明。令 $n = |V(G)|$，并定义 $N := M + |\varphi|^2 \cdot M^2 \cdot n$。当 τ是 φ的大小项时，根据引理 1，G的 τ-值域包含于 $\{0, \ldots, N\}$中。令 $b \in \mathbb{N}$为满足 $\frac{1}{b} \leq \frac{\varepsilon}{5d}$的最小值。这意味着 $\frac{1}{b} \geq \frac{\varepsilon}{10d}$，否则 $b/2$或 $(b+1)/2$（取决于 b的奇偶性）会是一个更小的有效选择。我们应用引理 3，得到的答案要么是 oversatisfy$(G, \varphi, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{2d}) = -\infty$，要么得到 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，使得 $G \models_{(1+\frac{1}{b})^{2d}} \varphi(\bar{W})$ 且 oversatisfy$(G, \varphi, \hat{t}, (1+\frac{1}{b})^{2d}) \leq \hat{t}(\bar{W})$。

我们使用众所周知的界 $(1+\frac{x}{n})^n \leq e^x$，并且还使用 $e^{x/2} \leq 1+x$ for $0 \leq x \leq 1/2$（此处 $\varepsilon \leq 0.5$ 很重要），从而得到

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^{2d} \leq \left(1+\frac{\varepsilon/2}{2d}\right)^{2d} \leq e^{\varepsilon/2} \leq 1+\varepsilon.$$

这意味着该算法要么正确地输出 oversatisfy$(G, \varphi, \hat{t}, 1+\varepsilon) = -\infty$，要么给出 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，其中 $G \models_{1+\varepsilon} \varphi(\bar{W})$，且 oversatisfy$(G, \varphi, \hat{t}, 1+\varepsilon) \leq \hat{t}(\bar{W})$。这正是我们最初要做的。

我们来分析运行时间。引理 3 的运行时间为

$$d \cdot |\chi| |\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b}, \lceil (1+\frac{1}{b}) \cdot (N+1) \rceil, \gamma \cdot (b(b+1)^{4d^2+7d})}|^{f'(|\varphi|+k)}$$

其中 f' 是某个可计算函数。由于对所有 $0 \le x \le 1/2,\ \ \varepsilon \le 0.5$ 和 $\log(1+x) \ge x/2$，

$$\log\left(1+\frac{1}{b}\right) \ge \log\left(1+\frac{\varepsilon}{10d}\right) \ge \frac{\varepsilon}{20d}.$$

对所有 x，利用 $|\varphi| \ge 1$ 和 $\log(x^{\mathcal{O}(1)}) \le \mathcal{O}(\log(x))$，我们可以界定

$$\log(N) = \log\big(M + |\varphi|^2 \cdot M^2 \cdot n\big) \le \mathcal{O}\big(|\varphi| \cdot \log\big(M+n\big)\big).$$

因此，利用观察 8，$1/\log(1+\frac{1}{b}) \le \frac{20d}{\varepsilon}$ 和 $b \le \frac{10d}{\varepsilon}$，

$$|\tilde{\mathbb{N}}_{1+\frac{1}{b},\lceil(1+\frac{1}{b})^2\cdot(N+1)\rceil,\gamma\cdot(b(b+1))^{4d^2+7d}}| \le \mathcal{O}\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{b}\right)^2 \cdot (N+1)\cdot\gamma\cdot\big(b(b+1)\big)^{4d^2+7d}\right)\right)$$

$$\le \mathcal{O}\left(\big(\log(N)+\log(\gamma)+bd^2\big)/\log\left(1+\frac{1}{b}\right)\right) \le \mathcal{O}\left(\frac{d^4\cdot\log(\gamma+2)\cdot|\varphi|\cdot\log(M+n)}{\varepsilon^2}\right).$$

因此，存在一个可计算函数 f，将引理 3 中此前所述的运行时间界定为

$$|\chi|\cdot\mathcal{O}\left(\frac{d\cdot\log(\gamma+2)\cdot\log(M+n)}{\varepsilon}\right)^{f(|\varphi|+k)}. \qquad \square$$

前一个引理为我们提供了查询答案的“一半”，且其精度仅为元定理所声称精度的“一半”。为了证明主要结果，我们通过对输入查询稍作平移，将该引理调用两次。

定理 18 (基础元定理)。给定一个 $\forall\mathrm{CMSO}_1$-查询 (φ,t)、精度 $0<\varepsilon\le 0.5$、一个具有匹配签名的图 G，以及相应的深度为 d 的 k-表达式 χ，我们可以在 G 上计算 (φ,t) 的 $(1+\varepsilon)$-近似答案，运行时间为

$$|\chi|\cdot\left(\frac{d\cdot\log(|V(G)|+M)}{\varepsilon}\right)^{f(|\varphi|,k)},$$

其中，f 是一个可计算函数，而 M 是 φ 的任意权重项中或 G的任意权重中出现的最大数。

证明。对于 $0<\varepsilon\le 0.5$，我们有 $1+\varepsilon \ge (1+\varepsilon/3)^2$。因此，对于所有 $p,\ q$（它们是查询自由变量上的自然权重项）以及 $\lhd \in \{\le, <\}$，

$$G \models p \lhd q \iff G \models_{1+\varepsilon/3} p\cdot(1+\varepsilon/3) \lhd q/(1+\varepsilon/3),$$

$$G \models^{1+\varepsilon} p \lhd q \Longrightarrow G \models^{(1+\varepsilon/3)^2} p \lhd q \iff G \models^{1+\varepsilon/3} p\cdot(1+\varepsilon/3) \lhd q/(1+\varepsilon/3).$$

因此，将每个比较 $p \lhd q$ 替换为 $p\cdot(1+\varepsilon/3) \lhd q/(1+\varepsilon/3)$，我们从 φ 得到一个 $\forall\mathrm{CMSO}_1$-公式 φ^-，使得对于每个 G 和 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，

$$G \models \varphi(\bar{W}) \iff G \models_{1+\varepsilon/3} \varphi^-(\bar{W}),$$

$$G \models^{1+\varepsilon} \varphi(\bar{W}) \Longrightarrow G \models^{1+\varepsilon/3} \varphi^-(\bar{W}).$$

通过对 ε稍作缩放，我们可以不失一般性地假设 $\varepsilon = 3/b$ 对于某个$b \in \mathbb{N}$成立。因此，从 φ 到 φ^-时，所有数都按 $\frac{b+1}{b}$ 或 $\frac{b}{b+1}$缩放。注意， φ 的粒度为 1，因此 φ^- 的粒度为~~γ~~:= b(~~$b+1$~~)。

应用精度为 $\varepsilon/3$、粒度为 γ 的引理 4 于 φ^-，我们要么得到 oversatisfy($G\ \varphi^-\ t\ 1+\varepsilon/3\ = -\infty$ $\bar{W}^- \in \mathcal{P}\ V\ G$ $G \models_{1+\varepsilon/3},,\hat{},)$ 的答 $\varphi^-\ \bar{W}^-$ $G\ \varphi^-\ t\ 1+\varepsilon/3\ \leq t\ \bar{W}^-$ $G \models^{1+\varepsilon} \varphi\ \bar{W}^- \iff G \models^{1+\varepsilon/3}$ 案，要么得到 (( ))$^{|\bar{X}|}$，其中有 ( )，并且 oversatisfy(,,$\hat{}$,) $\hat{}$( )。由于 ( ) φ^-($\bar{W}^-$)，我们有 oversatisfy($G, \varphi, \hat{}t, 1+\varepsilon$) =oversatisfy($G, \varphi^-, \hat{}t, 1+\varepsilon/3$)。因此，根据 φ^- 的构造，

a) 我们要么知道 oversatisfy($G, \varphi, \hat{}t, 1+\varepsilon$) $= -\infty$，要么

b) 我们得到 $\bar{W}^-$，满足 $G \models \varphi$($\bar{W}^-$)，并且过度满足($G, \varphi, \hat{}t, 1+\varepsilon$) $\leq \hat{}t$($\bar{W}^-$)。

与证明开头类似，我们注意到

$$G \models p \lhd q \iff G \models^{1+\varepsilon/3} p/(1+\varepsilon/3) \lhd q \cdot (1+\varepsilon/3),$$

$$G \models_{1+\varepsilon} p \lhd q \Longleftarrow G \models_{(1+\varepsilon/3)^2} p \lhd q \iff G \models_{1+\varepsilon/3} p/(1+\varepsilon/3) \lhd q \cdot (1+\varepsilon/3).$$

因此，与之前一样，我们得到一个 $\forall$CMSO$_1$-公式 φ^+，使得对于每个 G 和 $\bar{W} \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，

$$G \models \varphi(\bar{W}) \iff G \models^{1+\varepsilon/3} \varphi^+(\bar{W}),$$

$$G \models_{1+\varepsilon} \varphi(\bar{W}) \Longleftarrow G \models_{1+\varepsilon/3} \varphi^+(\bar{W}).$$

将引理 4 应用于 φ^+（精度为 $\varepsilon/3$、粒度为 γ），我们要么得到答案：过度满足($G, \varphi^+, \hat{}$ $t, 1+\varepsilon/3$) $= -\infty$；要么得到 $\bar{W}^+ \in \mathcal{P}(V(G))^{|\bar{X}|}$，满足$G \models_{1+\varepsilon/3} \varphi^+$($\bar{W}^+$)，并且过度满足($G, \varphi^+, \hat{}t, 1+\varepsilon/3$) $\leq \hat{}t$($\bar{W}^+$)。根据与上文相同的论证，

c) 我们要么知道 max($G, \varphi^+, \hat{}t$) $= -\infty$,

d) 或者我们得到 $\bar{W}^+$，其中 $G \models_{1+\varepsilon} \varphi$（$\bar{W}^+$），且 max($G, \varphi^+, \hat{}t$) $\leq \hat{}t$（$\bar{W}^+$）。

查询答案。 根据定义 3，对 G 上的 ($\varphi, \hat{}t$) 的 $(1+\varepsilon)$-近似答案 包括满足条件的值 max$^-$, max$^- \in \mathbb{N}$，其中

$$\text{oversatisfy}(G, \varphi, \hat{t}, 1+\varepsilon) \leq \max^- \leq \max(G, \varphi, \hat{t}) \leq \max^+ \leq \text{undersatisfy}(G, \varphi, \hat{t}, 1+\varepsilon), \tag{29}$$

以及 $\bar{W}^-$with $G \models \varphi$($\bar{W}^-$) 和 $\hat{}t$($\bar{W}^-$) =max$^-$(if max$^- \neq -\infty$)，以及 $\bar{W}^+$with$G \models_\alpha \varphi$($\bar{W}^+$) 和 $\hat{}t$($\bar{W}^+$) =max$^+$(if max$^+ \neq -\infty$)。

当 a) 成立时，即过度满足(G, φ, $\hat{}t$, $1+\varepsilon$) $= -\infty$，我们设 max$^- := -\infty$，满足 (29) 中对 max$^-$ 的上界和下界要求。当 b) 成立时，我们设 max$^-$:=$\hat{}t$($\bar{W}^-$) $\geq$过度满足(G, φ, $\hat{}t$, $1+\varepsilon$)，并额外返回见证 $\bar{W}^-$with $G \models \varphi$($\bar{W}^-$) and $\hat{}t$($\bar{W}^-$) =max$^-$。由于 $G \models \varphi$($\bar{W}^-$)，我们有 max$^-$ =$\hat{}t$($\bar{W}^-$) $\leq$max(G, φ, $\hat{}t$)，满足 (29) 中对 max$^-$ 的两项要求。

类似地，当 c) 成立时，也就是说，max(G, φ, $\hat{}t$) $= -\infty$，我们设定 max$^+ := -\infty$，使其满足 (29) 中关于 max$^+$ 的两个要求。当 d) 成立时，我们设定 max$^+$:=$\hat{}t$($\bar{W}^+$) $\geq$max(G, φ, $\hat{}t$)，并额外返回见证 $\bar{W}^+$，使得 $G \models_{1+\varepsilon} \varphi$($\bar{W}^+$) 和 $\hat{}t$($\bar{W}^+$) =max$^+$。由于$G \models_{1+\varepsilon} \varphi$($\bar{W}^+$)，我们有 max$^+$ =$\hat{}t$($\bar{W}^+$) $\leq$ 满足不足 (G, φ, $\hat{}t$, $1+\varepsilon$)，使其满足 (29) 中关于 max$^+$ 的两个要求。这意味着在所有情况下，我们都返回一个合适的答案。

运行时间。 我们的算法的运行时间主要由两次调用带有公式 φ^-、φ^+、精度 $1+\varepsilon/3$ 和粒度 $\gamma = b(b+1)$ 的引理 4 决定，其中$b = 3/\varepsilon$。从 φ 构造 φ^- 和 φ^+ 时，任何权重项中出现的最大数字最多增加了 $1+\varepsilon/3 \leq 2$ 倍。此外，公式φ^-、φ^+ 和 φ 的长度都相同。因此，运行时间上界为

$$2 \cdot |\chi| \cdot \left(\frac{d \cdot \log(\gamma) \cdot \log(|V(G)| + 2M)}{\varepsilon/3} \right)^{f'(|\varphi|,k)} = |\chi| \cdot \left(\frac{d \cdot \log(|V(G)| + M)}{\varepsilon} \right)^{f(|\varphi|,k)},$$

对于适当选取的可计算函数 f。 □

10.1 我们算法元定理的证明

我们在本节最后说明，定理 18 如何推出第4节中针对团宽和树宽给出的元定理的更明确表述。为此，我们将利用以下众所周知的观察，以避免对数项指数中的参数依赖。

观察11。 对于每个 $\delta > 0$ 和每个函数 $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，都存在一个函数$f_\delta\colon \mathbb{N}^2 \to N$，使得对于所有 $Z, a, b \in \mathbb{N}$，均有 $\log(Z)^{g(a,b)} \leq f_\delta(a,b) \cdot Z^\delta$。

证明。 我们先回顾一个众所周知的事实：对于每个固定的 $\ell \in \mathbb{N}$，$(\log Z)^\ell / Z^\delta \xrightarrow{Z\to\infty} 0$。因此，对于每个 ℓ，都存在一个 $h_\delta(\ell)$，使得对于每个 $n \geq h_\delta(\ell)$，$(\log n)^\ell / n^\delta \leq 1$。令$f_\delta(a,b) := (h_\delta(g(a,b)))^{g(a,b)}$。为说明该不等式成立，我们来考虑以下分类讨论。如果 $Z \geq h_\delta(g(a,b))$，那么根据 h_δ 的定义，$(\log Z)^{g(a,b)} = (\log z)_{Z^\delta}^{g(a,b)} \cdot Z^\delta \leq 1 \cdot Z^\delta$。另一方面，如果 $Z < h_\delta(g(a,b))$，那么我们立即可知 $Z^{g(a,b)} \leq h_\delta(g(a,b))^{g(a,b)}$，进而推出 $(\log(Z))^{g(a,b)} \leq (h(g(a,b)))^{g(a,b)}$。与此同时，$(h(g(a,b)))^{g(a,b)} \leq (h(g(a,b)))^{g(a,b)} \cdot Z^\delta = f_\delta(a,b) \cdot Z^\delta$，因此 $(\log(Z))^{g(a,b)} \leq f_\delta(a,b) \cdot Z^\delta$，如所愿。 □

我们可以利用定理 4 去掉输入必须提供一个 k-表达式的要求，并将此与观察11结合，得到关于团宽的算法元定理。我们再次强调，对 $|V(G)|$ 的二次依赖源于已知的团宽表达式计算算法具有二次运行时间；如果给定了合适的分解，则对图规模的依赖可以降低到例如 $|V(G)|^{1.001}$。

定理 10 (对 $\forall\mathrm{CMSO}_1$的近似。 给定一个 $\forall\mathrm{CMSO}_1$-查询$(\varphi, \hat{t})$，精度$0 < \varepsilon \leq 0.5$ 以及一个具有匹配签名的图 G，我们可以在不超过以下时间内，计算出$(\varphi, \hat{t})$ 在 G 上的$(1+\varepsilon)$-近似答案

$$\left(\frac{\log(M)}{\varepsilon} \right)^{f_1(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))} \cdot |V(G)|^2,$$

尤其是在至多.....时间内

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{f_2(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))} \cdot |V(G)|^2 \cdot M^{0.001}$$

其中 f_1、f_2 是可计算函数，而 M 是比 φ 的任意权重项中出现的最大数，或 G 中任意权重大 2 的数。

证明。我们首先使用定理 4 计算一个深度至多为 $f'(\mathrm{cw}(G))\cdot\log(|V(G)|$、长度至多为 $f'(\mathrm{cw}(G))\cdot|V(G)|$ 的 $2^{\mathrm{cw}(G)+2}$-表达式，所需运行时间至多为 $f'(\mathrm{cw}(G))\cdot|V(G)|^2$，其中 f' 是某个函数。由于 $M\geq 2$，并且我们也可以假设 $|V(G)|\geq 2$，将此表达式输入定理 18 后，运行时间至多为

$$f'(\mathrm{cw}(G))\cdot|V(G)|^2+(f'(k)\cdot|V(G)|)\cdot\left(\frac{\left(f'(\mathrm{cw}(G))\cdot\log(|V(G)|)\right)\cdot\log(M)}{\varepsilon}\right)^{f^\star(|\varphi|,2^{\mathrm{cw}(G)+2})},$$

其中，$f^\star$ 是定理 18 中运行时间界所涉及的函数。通过将 f'' 设置为 $f^\star$ 和 f' 的一个足够宽松的组合，并重新排列分数中的各项，我们可以将该界的第二部分改写为

$$f'(\mathrm{cw}(G))\cdot|V(G)|^2+\left(\frac{\log(M)}{\varepsilon}\right)^{f''(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))}\cdot\log(V(G))^{f^\star(|\varphi|,2^{\mathrm{cw}(G)+2})}\cdot|V(G)|.$$

现在可以通过 $Z:=V(G)$ 和 $\delta:=0.001$ 调用观察11，以确定一个函数 f°，使得 $\log(|V(G)|)^{f^\star(|\varphi|,2^{\mathrm{cw}(G)+2})}\leq f^\circ(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))\cdot|V(G)|^{0.001}$。通过将 f_1 设置为适当地涵盖 f'、f'' 和 f°，我们得到所声称的第一种运行时间。

$$\left(\frac{\log(M)}{\varepsilon}\right)^{f_1(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))}|V(G)|^2.$$

对于第二个界限，我们对 $Z:=M$ 和 $\delta:=0.001$ 应用观察11，并汇总所得函数，从而得到一个函数 f_2，使得上述运行时间可由以下内容给出上界。

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{f_2(|\varphi|,\mathrm{cw}(G))}\cdot M^{0.001}\cdot|V(G)|^2.$$ □

定理 11（$\forall\mathrm{CMSO}_2$的近似）。给定一个 $\forall\mathrm{CMSO}_2$-查询 $(\varphi,\hat{}t)$、精度$0<\varepsilon\leq 0.5$ 以及一个具有匹配签名的图 G，我们可以在至多为.....的时间内，计算出 $(\varphi,\hat{}t)$ 在 G 上的 $(1+\varepsilon)$-近似答案。

$$\left(\frac{\log(M)}{\varepsilon}\right)^{f_1(|\varphi|,\mathrm{tw}(G))}\cdot|V(G)|^{1.001},$$

特别是，时间不超过

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{f_2(|\varphi|,\mathrm{tw}(G))}\cdot M^{0.001}\cdot|V(G)|^{1.001}$$

其中，f_1、f_2 是可计算函数，而 M 是 φ 的任意权重项中或 G的任意权重中出现的最大数加二。

证明。 众所周知（且不难看出），在边着色图 G 上对任意 CMSO$_2$-公式 ψ 的解释，都可以改写为图 G' 上的 CMSO$_1$-公式 ψ'，其长度与 ψ 的长度成正比；图 G' 由 G的细分图得到，其中新创建的顶点用辅助颜色标记。实际上，只需将每个边（集合）变量替换为顶点（集合）变量，并使用辅助颜色来区分 G中的顶点和 G中的边即可。对于边着色边加权图上的 $\forall$CMSO$_2$-公式，也有类似的结论，其中细分顶点继承其所细分边的权重。该构造不会影响公式的权重项中或图上的权重中出现的最大数。如果在将 φ' 转换为 φ时使用相同的变量名，则该转换不会影响 φ 的自由变量中的任何权重项的解释（这些自由变量随后与φ'中的自由变量相同）。这意味着，我们可以将在 G 上的（φ，$\hat{}t$）改写为 $\forall$CMSO$_1$-查询（φ'，$\hat{}t$），其作用于 G 的细分图G' 上，并带有一种额外颜色，且将边权重重新解释为顶点权重。因此，在 G' 上对（φ'，$\hat{}t$）的（$1+\varepsilon$）近似答案，等价于在 G上对（φ，$\hat{}t$）的（$1+\varepsilon$）近似答案。

我们可以利用观察 1 和定理 6，得到某个可计算的 f' 所对应的 f'(tw(G))-表达式 G'，然后像定理 10 的证明中那样将其输入定理 18。证明的其余部分也可类似于定理 10 的证明得出。调用定理 6 所需的运行时间仅对 $|V(G)|$ 呈线性依赖，这意味着在引入 f_1 的步骤中，运行时间对 $|V(G)|$ 的依赖可以上界为 $|V(G)|^{1.001}$，而非 $|V(G)|^2$。φ 与 φ' 的长度差异以及额外的颜色，都可以通过适当增大函数 f_1 和 f_2 来处理。

□

通过选择依赖于实例的精度，我们可以为 $\forall$CMSO-查询的非近似答案推导出逐片多项式结果。 □

定理 12 (精确计算查询)。 给定一个 $\forall$CMSO$_1$-查询（或 $\forall$CMSO$_2$-查询）$(\varphi,\hat{}t)$ 以及一个匹配签名且团宽（或树宽）至多为 k 的图 G，我们可以在以下时间内计算出 G 上 $(\varphi,\hat{}t)$ 的答案。

$$(M+|V(G)|)^{f(|\varphi|,k)}$$

其中，f 是某个可计算函数，M 是在 φ 的任意权重项中或作为 G 的任意权重出现的最大数。

证明。 让我们固定定理陈述中的 $(\varphi,\hat{}t)$ 和 G。我们首先通过将所有形如 $t<t'$ 的权重比较替换为逻辑等价的比较 $t+1\leq t'$，并类似地将所有形如 $t>t'$ 的权重比较替换为逻辑等价的比较$t\geq t'+1$，来改写约束 φ，使其不包含任何严格不等式。注意，这使得 φ 的任意权重项中出现的最大数增至至多 $M+1$。令 N 为满足以下条件的最小值：对于 φ 的自由变量 τ，G 的 τ-值域包含于 $\{0,\ldots,N\}$。根据引理 1，N 有上界 $(M+|V(G)|)^{g(|\varphi|)}$，其中 g 是某个可计算函数。

我们设定 $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2N}$，并应用定理 10（或定理 11），在 G 上求得 $(1+\varepsilon)$-近似答案 ($\bar{W}^-$, max$^-$, $\bar{W}^+$, max$^+$)，对应于 (φ, $\hat{}t$)；若 max$^+\neq-\infty$，则返回 $\bar{W}^+$，并作出判定

否则判定不存在解。注意，将我们选择的 ε 代入定理 10（定理 11）的运行时间界，并适当选择 f，可得运行时间界为

$$(M+|V(G)|)^{f(|\varphi|,k)}$$

对于某个可计算函数 f，如所需。

在证明的其余部分，我们将论证，对于 φ 中自由变量在 G 中的任意解释 W，$G \models \varphi(W)$ 当且仅当 $G \models_{1+\frac{1}{2N}} \varphi(W)$。完成后，我们有 $\max(G,\varphi,\hat{t}) =$ 满足不足$(G,\varphi,\hat{t},1+\frac{1}{2N})$，因此二者都等于 $\max^+$。这意味着，如果 $\max^+ \neq -\infty$，那么 $\bar{W}^+$ 确实是 $(\varphi,\hat{t})$ 在 G 上的一个（非近似）答案；而如果 $\max^+ = \max = -\infty$，那么确实不存在 φ 在 G 上的解。特别地，我们返回了该查询的精确答案。

只需证明 $G \models_{1+\frac{1}{2N}} \varphi(\bar{W})$ 蕴含 $G \models \varphi(\bar{W})$，反向蕴含也成立。考虑如下形式的自然数权重比较：( ) ( )。现在，如果 $G \models_{1+\frac{1}{2N}} \psi(\bar{W})$，那么 $\frac{2N}{2N+1}t^G(\bar{W}) \leq \frac{2N+1}{2N}t'^G(\bar{W})$。由于 ( ) 和 ( ) 必须是严格小于 $N+1$ 的数，

$$t(\bar{W})-0.5 < \frac{2N}{2N+1}t(\bar{W}) \leq \frac{2N+1}{2N}t'(\bar{W}) \leq t'(\bar{W})+0.5.$$

因此，

$$t^G(\bar{W})-1 < t'^G(\bar{W}),$$

并且由于这些权重项被解释为自然数，这意味着

$$t^G(\bar{W}) \leq t'^G(\bar{W}).$$

总而言之，我们已经证明 $G \models_{1+\frac{1}{2N}} \psi(W)$ 蕴含 $G \models \psi(W)$。

由于 φ 中的每个权重比较都以非否定形式出现（这是因为 CMSO 公式的否定规范化假设，详见第 3.2 节），因此我们有 $G \models_{1+\frac{1}{2N}} \varphi(W)$ 蕴含 $G \models \psi(W)$，正如所需。 □

11 更一般公式的困难性

由我们的元定理及其配套逻辑 ∀CMSO 引出一个自然的问题：对公式施加的限制是否确有必要？我们对∀CMSO 的定义规定，最外层的全称量化变量只能出现在单个比较的一侧的权重项中（对每个块而言）。下面我们将证明，即使只是稍微放宽这一限制，在通常的复杂性理论假设下，也会导致问题变得不可处理。具体而言：

1. 只要允许最外层的全称量化变量出现在两个比较中，即使将范围限制在路径上，近似也不是 FPT（定理19）。
2. 我们还排除树上精确求值也存在类似 XP 结果的可能性（定理 20）.

注意，定理19证明了路径上的困难性，而定理 20 证明了深度为三的树上的困难性。稍作修改即可调整这两个证明，从而证明路径和深度为三的树上的困难性。这些结果可以轻易推广到涉及更深交替深度的集合变量的比较，例如 $\forall Y\psi(Y)$ 等价于$\forall Y\exists Z(Y = Z) \wedge \psi(Z)$。

为了正式陈述我们的困难性结果，我们将 ∀CMSO- 查询的近似概念（第 3.3 节和定义 3）按预期扩展到更一般的 CMSO[≶]-查询情形。证明通过构造图 G 和公式 $\varphi(X)$ 来编码困难问题，并确保它们对 α-放宽或 α-收紧具有鲁棒性；也就是说，对于所有输入 W，$G \models \varphi(W) \iff G \models \varphi^{\alpha}(W) \iff G \models \varphi_{\alpha}(W)$。我们指出，以下下界中使用的精度 α 大于我们的元定理中考虑的数值 $(1+\varepsilon)$；而大数值的下界意味着小数值的下界。因此，即使精度差得多，我们也排除了定理 10、11 中那种形式的固定参数可处理性。

定理19. 对于任意满足 $\alpha > 1$ 的常数精度 $\alpha \in \mathbb{N}$，在所有顶点着色路径构成的类上，寻找 $\mathrm{CMSO}_1[\leqslant]$-查询 $(\varphi(X),0)$ 的 α-近似答案是W[1]-困难的，参数为 $|\varphi(X)|$；即使要求 $\varphi(X)$ 具有以下形式，也仍然如此

$$\forall Y_1 \forall Y_2 \big(|Y_1| > |Y_2| \cdot \alpha^2 \vee |Y_2| > |Y_1| \cdot \alpha^2 \vee \psi(XY_1Y_2)\big)$$

其中 $\psi(XY_1Y_2)$ 是一个单子二阶逻辑$_1$-公式。

*Pr*糟糕。 我们从以下 W[1]-难问题 [11, 定理 14.28 推导。].

GRID TILING

输入： n， $k \in \mathbb{N}$ 以一元编码表示，$S_{i,\ j} \subseteq [n] \times [n]$ 对于每个成对元素（i， j）$\in [k] \times [k]$。参数： k问题：是否存在一个集合 $\{s_{i,j} \in S_{i,j} \mid i,j \in [k]\}$，使得

- 如果 $s_{i,\ j} = (a,\ b)$，那么存在某个 $b' \in [k]$，使得 $s_{i+1,\ j} = (a,\ b')$，并且
- 如果 $s_{i,j} = (a,b)$ 那么存在某个 $a' \in [k]$，使得 $s_{i,j+1} = (a',b)$。

直观而言，这个问题要求我们从每个网格单元格中选取一对数字，使得每一列中的第一坐标相同，而每一行中的第二坐标相同。

假设 α 是一个任意的固定常数。在证明中，我们将描述如何根据给定的 GRID TILING实例构造一条路径 G 和一个公式 $\varphi(X)$，然后验证成对元素 (G,φ) 满足用于证明该定理陈述的要求。我们首先解释归约的一般思路。第一步，我们观察如何使用一条包含 $\lceil \log(n) \rceil$ 个“位”顶点的位串路径，按照这些数字的二进制编码为其着色，从而对 $S_{i,j}$ 中的每一对数字进行编码。使用 k^2 种额外的颜色，我们可以为每条位串路径确定该数字对所来自的行 i 和列 j。我们的公式$\varphi(X)$ 将以一种迫使 X 恰好为每个网格单元格 (i,j) 包含一条位串路径的方式构造，从而在 X 与一个“ 解

集合”之间建立一一对应关系，其中该解属于 Grid Tiling。因此，剩下要做的就是比较两条位串路径是否确实描述了同一个数字（在其第一类或第二类坐标中）。通过使“位”顶点沿位串路径以指数级间隔排列，只需检查两个“位”顶点沿各自位串路径的“偏移量”是否大致相同即可。这一性质可以用一种对近似具有鲁棒性的方式表达。现在我们继续进行形式化构造并给出论证。

数字编码。 我们将数字 $s \in [n]$ 编码为零填充二进制位串$x_{\lceil \log(n) \rceil}, \ldots, v_{x_1}$，其中 x_1 是最低有效位，$x_{\lceil \log(n) \rceil}$ 是最高有效位。我们在前面补零，也就是说，$x_{\lceil \log(n) \rceil}, \ldots, x_{\lceil \log(s) \rceil + 1}$ 完全由零组成。举例来说，如果 $s = 3$ 且 $n = 13$，则得到 $x_3 = x_4 = 0$ 和 $x_1 = x_2 = 1$。我们称$x_\ell \in \{0, 1\}$ 为 s的第 位。

的构造 G。 对于每个 $i, j \in [k]$ 以及每个 $(a, b) \in S_{i,j}$，我们定义一种所谓的位串路径。这是一条顶点着色无向路径，依次经过以下顶点（另见图 4）：

$$v_{\text{start}}, v_1, \ldots, v_{\alpha^{5\lceil \log(n) \rceil}}, v_{\text{end}}.$$

为表示正在对 $S_{i,\ j}$ 的一个条目进行编码，路径上的所有顶点都配有颜色 $C_{i,\ j}$。起点和终点顶点 v_{start} 和 v_{end} 分别配有额外的颜色`start` 和 `end`。此外，对于 $\ell \in [\lceil \log(n) \rceil]$，每个顶点 $v_{\alpha^{5\ell}}$ 都有额外的颜色

- `bit`,
- `bit-a-one` 当且仅当 a 的第 ℓ 位为 1,
- `bit-b-one` 当且仅当 b 的第 ℓ 位为 1。

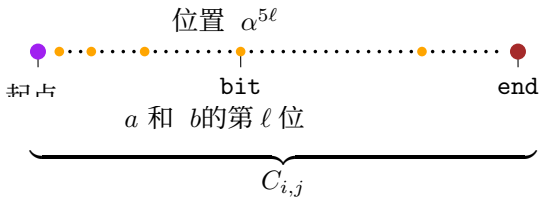

图 4: 定理19证明中位串路径的可视化，该路径编码了 $(a,\ b) \in S_{i,\ j}$。对 a 和 b 的取值进行编码的位以指数级距离间隔排列，因此即使在以精度 α进行近似时，我们也能识别它们。

为了得到一条单路径 G，我们按任意顺序拼接所有位串路径的副本（对所有 $i, j \in [k]$和 $(a, b) \in S_{i,j}$），并用一条边将每条路径的端点连接到其后继路径的起始顶点。至此，G 的描述完成。注意，颜色数量有上界 $k^2 + 5$，顶点数量有上界 $k^2 n^2(\alpha^{5\lceil \log(n) \rceil} + 2)$ $\leq k^2 \cdot n^{\mathcal{O}(\log(\alpha))}$（回忆一下，$\alpha$ 是一个固定常数）。

构造 φ。 首先，我们将定义一个 CMSO_1 公式 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$，用于表达 X 恰好由每个 $i, j \in [k]$ 对应的一条颜色为 $C_{i,j}$ 的位串路径的顶点集构成。因此，满足 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$ 的集合 X 会为 $i, j \in [k]$ 选出恰好一个元组 $s_{i,j} \in S_{i,j}$，使其成为我们解的一部分。具体做法是将表示 $s_{i,j}$ 的位串路径上的所有顶点纳入 X，同时让 X 与所有 $s' \in S_{i,j} \setminus \{s_{i,j}$ 的顶点不相交。

为了构造公式 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$，我们回顾一个众所周知的事实：常数长度的 MSO_1 公式可以表达某个顶点是否位于另外两个顶点之间的一条路径上（也就是说，该顶点不是另外两个 [9]之间的分隔点）。因此，我们可以通过断言它们之间不存在 start色或 end色顶点，来判断两个顶点是否属于同一条位串路径。我们首先对每个 $i, j \in [k]$ 表达：在 X 中，恰有一个start色顶点和一个 end色顶点具有颜色$C_{i,j}$。然后，对于每个$C_{i,j}$，我们要求 X 包含所选 start 顶点和 end顶点之间路径上的所有顶点；此外（为确保我们选择的是同一条位串路径上的 start顶点和 end顶点），还要求额外的$C_{i,j}$色顶点非空，且全部都是 bit 顶点。公式$\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$的长度为 $\mathcal{O}(k^2)$。

接下来，我们将定义公式 $\varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$。为了呈现该公式，我们将同时给出公式的“伪代码”定义（左侧）以及对每一行的相应解释（右侧）；这里我们已假设集合 X 满足 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$。这是合理的，因为我们的最终公式将是合取 $\varphi(X) := \varphi_{\mathsf{choice}}(X) \wedge \varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$。之后，我们将讨论如何将该公式转换为定理所要求的受限结构。在描述 $\varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$ 时，我们将使用一个常数长度的单子二阶逻辑$_1$-公式 $\psi_{\mathsf{offset}}(x, Y)$ 作为子公式，用来表达 Y 是 x 的位串路径的一个子集，该路径恰好包含起点顶点与 x之间的顶点，其中包括 x，但不包括起点顶点（见图5）。

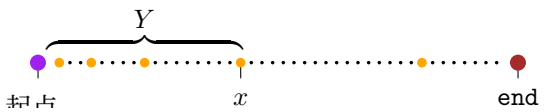

图5： $\psi_{\mathsf{offset}}(x, Y)$的接受输入示意图：集合 Y包含沿着 x 的位串路径直至并包括 x的所有顶点，但不包括起点顶点。

对于所有 $i, i', j \in [k]$，

对于所有列 j 和单元格 i, i' 在该列中，

对于所有满足条件的 x_1, x_2

$x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge$
$\texttt{bit}(x_1) \wedge \texttt{bit}(x_2) \wedge C_{i,j}(x_1) \wedge C_{i',j}(x_2)$，

对于编码中的所有“位” x_1、x_2
解元素的 $s_{i,j} \in S_{i,j}$
以及 $s_{i',\ j} \in S_{i',\ j}$，由 X 选出，

对于所有满足条件的 Y_1, Y_2

$\psi_{\text{offset}}(x_1,\ Y_1) \wedge \psi_{\text{offset}}(x_2,\ Y_2) \wedge$
$|Y_1| = |Y_2|$，

对于所有见证这一点的集合 Y_1、Y_2
x_1 和 x_2 是相同的位。
其位串路径中的偏移量，

$\texttt{bit-a-one}(x_1) \leftrightarrow \texttt{bit-a-one}(x_2)$。

a_1 的 x_1位与 a_2 的 x_2位相等，
其中 $(a_1, \circ) = s_{i,j}$ 和 $(a_2, \circ) = s_{i',\ j}$。

此外，对于所有 $i, j, j' \in [k]$，

此外，对于所有行 i和该行中的单元格 j, j'，

对于所有满足以下条件的 x_1, x_2

$x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge$
$\texttt{bit}(x_1) \wedge \texttt{bit}(x_2) \wedge C_{i,\ j}(x_1) \wedge C_{i,\ j'}(x_2)$，

编码中的所有“位” x_1, x_2
解元素$s_{i,j} \in S_{i,j}$
以及 $s_{i,\ j'} \in S_{i,\ j'}$，由 X 选出，

对于所有满足以下条件的 Y_1, Y_2

$\psi_{\text{offset}}(x_1,\ Y_1) \wedge \psi_{\text{offset}}(x_2,\ Y_2) \wedge$
$|Y_1| = |Y_2|$，

对于所有见证这一点的集合 Y_1、Y_2
x_1 和 x_2 是相同的位。
其位串路径中的偏移量，

$\texttt{bit-b-one}(x_1) \leftrightarrow \texttt{bit-b-one}(x_2)$。

b_1 的 x_1位与 b_2 的 x_2位相等，
其中$(\circ, b_1) = s_{i,\ j}$ 以及 $(\circ,\ b_2) = s_{i,\ j'}$。

集合 W 满足 $G \models \varphi_{\text{choice}}(W)$，与为每个单元格$i,\ j \in [k]$选择元组 $s_{i,\ j}$ 直接对应。$\varphi_{\text{gridtiles}}(W)$ 的前半部分编码（其中 $\circ$是任意数字的占位符）

- if $s_{i,j} = (a_1, \circ)$ and $s_{i',j} = (a_2, \circ)$ then $a_1 = a_2$.

同样，公式的后半部分编码了

- if $s_{i,j} = (\circ, b_1)$ and $s_{i,j'} = (\circ, b_2)$ then $b_1 = b_2$.

因此，Grid Tiling 实例是是实例，当且仅当存在一个顶点集W，使得 $G \models \varphi_{\text{choice}}(W) \wedge \varphi_{\text{gridtiles}}(W)$。

通过交换全称量词，我们可以将 $\varphi_{\text{choice}}(X) \wedge \varphi_{\text{gridtiles}}(X)$ 等价地改写如下。

对于所有满足 $|Y_1| = |Y_2|$ 的 Y_1, Y_2，以下性质成立：

我们要求 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$ 成立。

对于所有 $i, i', j \in [k]$，以及满足 $x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge \mathtt{bit}(x_1) \wedge \mathtt{bit}(x_2) \wedge C_{i,j}(x_1) \wedge C_{i',j}(x_2) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_1, Y_1) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_2, Y_2)$ 的所有 x_1, x_2，我们要求 $\mathtt{bit\text{-}a\text{-}one}(x_1) \leftrightarrow \mathtt{bit\text{-}a\text{-}one}(x_2)$ 成立。

对于所有 $i, j, j' \in [k]$，以及满足 $x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge \mathtt{bit}(x_1) \wedge \mathtt{bit}(x_2) \wedge C_{i,j}(x_1) \wedge C_{i,j'}(x_2) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_1, Y_1) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_2, Y_2)$ 的所有 x_1, x_2，我们要求 $\mathtt{bit\text{-}b\text{-}one}(x_1) \leftrightarrow \mathtt{bit\text{-}b\text{-}one}(x_2)$ 成立。

“对于所有 Y_1, Y_2 满足 $|Y_1| = |Y_2|$ 的情况，我们有 [...]”等价于“对于所有Y_1, Y_2，要么 $|Y_1| > |Y_2|$，要么 $|Y_2| > |Y_1|$，要么 [...]”。将上述 Block 中第二至第四段合并为一个长度为 $\mathcal{O}(k^3)$ 的单子二阶逻辑$_1$公式 $\psi(XY_1Y_2)$ 后，这等价于 CMSO$[\leqslant]_1$公式

$$\xi(X) := \forall Y_1 \forall Y_2 \big((|Y_1| > |Y_2|) \vee (|Y_2| > |Y_1|) \vee \psi(XY_1Y_2) \big).$$

因此，当且仅当存在一个集合 W 满足 $G \models \xi(W)$ 时，我们得到一个 Grid Tiling 是实例。我们将最终公式 $\varphi(X) := \xi^{\alpha}(X)$ 定义为 $\xi(X)$ 的 α-收紧。

关于近似的稳健性。所有组成部分都已就绪，现在我们可以证明该归约的正确性。具体而言，我们将证明：实例 $n, k, \{S_{i,j} \subseteq [n] \times [n] \mid i, j \in [k]\}$ 是 Grid Tiling 的是实例，当且仅当路径 G 上 CMSO$_1[\leqslant]$-查询（φ,0）的 α-近似答案为 $(0, 0)$（而不是 $(-\infty, -\infty)$）。我们已经证明，当且仅当 $\max(G, \xi, 0) = 0$（而不是 $-\infty$）时，该实例为是实例。根据第3.4节开头的定义，只需证明，对于所有 $W \subseteq V(G)$，$G \models \varphi(W) \iff G \models \varphi^{\alpha}(W) \iff G \models \varphi_{\alpha}(W)$。等价地，我们证明 $G \models \xi(W) \iff G \models \xi^{\alpha^2}(W)$。

回想一下，将“伪代码”翻译成我们的 CMSO$[\leqslant]_1$-公式 ξ时，限制 的量化的比较条件 $|Y_1| = |Y_2|$ Y_1 Y_2 $|Y_1| > |Y_2| \vee |Y_2| >$被否定为 $|Y_1|$ α^2。ξ^{α^2} W-收紧后的公式 ( ) 则包含更难满足的陈述$|Y_1|/\alpha^2 > |Y_2| \cdot \alpha^2 \vee |Y_2|/\alpha^2 > |Y_1| \cdot \alpha^2$。这等价于 $|Y_1| > |Y_2| \cdot \alpha^4 \vee |Y_2| > |Y_1| \cdot \alpha^4$；注意，这个条件的否定恰好是 $|Y_1| \leq |Y_2| \cdot \alpha^4 \wedge |Y_2| \leq |Y_1| \cdot \alpha^4$。因此，公式$\xi^{\alpha^2}(X)$ 可以等价地表述为 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$ 与以下对 $\varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$ 的修改的合取，我们沿用之前相同的“伪代码记法”给出。我们只标出改动的部分。

[...]

对于所有 Y_1, Y_2 使得
$\psi_{\mathsf{offset}}(x_1,\ Y_1) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_2,\ Y_2) \wedge$
$|Y_1| \leq |Y_2| \cdot \alpha^4 \wedge |Y_2| \leq |Y_1| \cdot \alpha^4$,

对于所有见证这一点的集合 Y_1、Y_2
x_1 和 x_2 是大致相等的位，具有“大约”的彩票下载
位串路径中相同的偏移量，

[...]

对于所有 Y_1, Y_2 ，使得
$\psi_{\mathsf{offset}}(x_1,\ Y_1) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_2,\ Y_2) \wedge$
$|Y_1| \leq |Y_2| \cdot \alpha^4 \wedge |Y_2| \leq |Y_1| \cdot \alpha^4$,

对于所有见证这一点的集合 Y_1、Y_2
x_1 和 x_2 是“约”位的】【。
其位串路径中的相同偏移量，

[...]

顶点 x_1 和 x_2 的颜色为 `bit`，因此它们沿位串路径以因子 α^5呈指数间隔分布。存在唯一的集合 Y_1和 Y_2满足 $\psi_{\mathsf{offset}}(x_1,\ Y_1) \wedge \psi_{\mathsf{offset}}(x_2,\ Y_2)$。如果 x_1 和 x_2 的偏移量不同，也就是 $|Y_1| \neq |Y_2|$，那么指数间隔意味着它们实际上相距很远，即 $|Y_1| \geq |Y_2| \cdot \alpha^5$ 或 $|Y_2| \geq |Y_1| \cdot \alpha^5$。因此，$|Y_1| > |Y_2| \cdot \alpha^4$ 或 $|Y_2| > |Y_1| \cdot \alpha^4$，这当然又意味着 $|Y_1| \neq |Y_2|$。对这两个陈述取否定后可知，在我们所考虑的图上，条件 $|Y_1| \leq |Y_2| \cdot \alpha^4 \wedge |Y_2| \leq |Y_1| \cdot \alpha^4$ 可以等价地替换为$|Y_1| = |Y_2|$。因此，对所有集合 W，都有 $G \models \xi(W) \iff G \models \xi^{\alpha^2}(W)$。

□

如果我们关心的是寻找精确答案而非近似答案的难度，那么只需用线性数量的顶点来编码数字，而不是用呈指数间隔的对数数量顶点来编码。因此，在精确情形下，我们可以得到一种更简单的归约，它甚至排除了对固定公式进行多项式时间查询求值的可能性。为阐明定理 20 与我们的逻辑之间的联系，我们指出，下述表述中使用的“$\neq$”（“$=$”）算子可以很容易地用两个权重比较的析取（合取）来建模。

定理 20. 在所有深度为三的顶点着色树构成的类上，对一个固定的 $\mathrm{CMSO}_1[\leqslant]$-查询 $(\varphi(X),0)$ 寻找精确答案是NP-困难的，即使要求 $\varphi(X)$ 具有如下形式

$$\psi_1(X) \wedge \forall Y_1 \forall Y_2 \forall Y_3 \forall Y_4 \big((|Y_1| \neq |Y_2|) \vee (|Y_3| = |Y_4|) \vee \psi_2(XY_3Y_4) \big),$$

其中，ψ_1 和 ψ_2 是单子二阶逻辑$_1$-公式。

证明。 我们从 non-parameterized Grid Tiling 问题归约而来。利用用于证明参数化版本 [11, 定理 14.28]的 W[1]-困难性的同一归约，可以看出该问题是 NP-困难的。

给定 non-parameterized Grid Tiling 的一个实例，我们将说明如何构造一棵树 G 和一个公式 φ，然后验证这些实例满足要求，从而证明该定理陈述。

构造 G。我们首先向树中添加一个根节点。对于每个 $i,\ j \in [k]$，我们在根节点下方添加一个子节点 $v_{i,\ j}$，其颜色为 `cell`。为了检查两个单元格是否位于同一行

或同一列，我们向 $v_{i,\ j}$添加 i 个颜色为 row 的叶节点和 j 个颜色为 column的叶节点。此外，对于每个 $(a,\ b) \in S_{i,\ j}$，我们向 $v_{i,\ j}$ 添加一个颜色为 pair 的顶点，并为其添加 a 个颜色为 first 的子节点和 b 个颜色为 second的子节点。图6展示了示意图。注意，G 在网格铺砖实例中的深度为3，且规模为多项式规模。

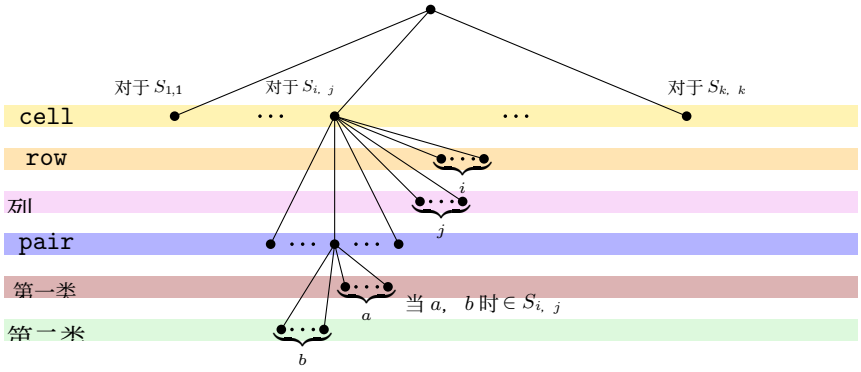

图6：定理 20 证明中树 G 的可视化。不同颜色的层表示顶点的颜色，花括号下方的括号表示其数量。

构造 φ。我们首先定义一个 CMSO_1 公式 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$，用于表达 X 中所有顶点的颜色均为 pair ，且每个 cell 色顶点都恰好有一个位于 X 中的邻点。因此，与定理19的证明一样，满足 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$ 的集合 X 会恰好选出一个元组$s_{i,\ j} \in S_{i,\ j}$，使其成为我们解的一部分。然后，我们将 $\varphi(X)$ 定义为 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X)$ 与以下公式 $\varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$ 的合取；后者以类似于前一个证明中“伪代码”的风格给出：

对于所有 x_1，x_2 以及所有 Y_1，Y_2，Y_3，Y_4，使得

- x_1，x_2 用 `cell`着色，
- Y_1 正是 x_1 下方的 `row`子节点，
- Y_2 正是 x_2 下方的 `row`子节点，
- Y_3 恰好是 `first`子节点，位于 x_1下方的 X 中，且处于 `pair`顶点下方，且
- Y_3 恰好是 X 中位于 x_2 下方的 `pair`-顶点以下的 `first`-子节点，

我们要求 $|Y_1| = |Y_2| \to |Y_3| = |Y_4|$。

“也就是说，如果 x_1 和 x_2 对应同一行的单元格，那么选定元组的第一坐标相同。”

此外，对于所有 x_1，x_2 以及所有 Y_1，Y_2，Y_3，Y_4 满足以下条件的情况，

- x_1, x_2 使用 `cell`着色，
- Y_1 恰好是 x_1下方的 `column`个子节点，
- Y_2 正是 x_2 下方的 `column`子节点，
- Y_3 恰好是 X 中位于 x_1下方的 `pair`-顶点之下的 `second`-子节点，并且
- Y_3 恰好是 `second`子节点，位于 X 中 x_2下方的 `pair`顶点之下，

我们要求 $|Y_1| = |Y_2| \to |Y_3| = |Y_4|$。

“也就是说，如果 x_1 和 x_2 对应同一列中的单元格，那么选定元组的第二个坐标相同。”

从我们的构造可以清楚地看出，Grid Tiling 实例是是实例，当且仅当存在一个顶点集 W，使得 $G \models \varphi_{\mathsf{choice}}(W) \wedge \varphi_{\mathsf{gridtiles}}(W)$。接下来需要将该公式转化为所需形式。注意，

$$\text{for all } x_1, x_2, Y_1, \ldots, Y_4 \text{ such that } \rho_1 \vee \rho_2, \text{ we require } |Y_1| = |Y_2| \to |Y_3| = |Y_4|$$

等价于

$$\text{for all } x_1, x_2, Y_1, \ldots, Y_4, \text{ either } |Y_1| = |Y_2| \to |Y_3| = |Y_4| \text{ or } \neg\rho_1 \wedge \neg\rho_2.$$

因此，如果我们使用 ρ_1 和 ρ_2 来表示伪代码描述中捕获前五个和后五个要点的 MSO_1 公式 $\varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$，我们可以将 $\varphi_{\mathsf{choice}}(X) \wedge \varphi_{\mathsf{gridtiles}}(X)$ 重写为

$$\varphi_{\mathsf{choice}}(X) \wedge \forall Y_1 \forall Y_2 \forall Y_3 \forall Y_4 \big(|Y_1| = |Y_2| \to |Y_3| = |Y_4|\big) \vee \big(\forall x_1 \forall x_2 \neg\rho_1 \wedge \neg\rho_2\big).$$

此时，还需要将上述内容改述为

$$\varphi(X) := \psi_1(X) \wedge \forall Y_1 \forall Y_2 \forall Y_3 \forall Y_4 \big((|Y_1| \neq |Y_2|) \vee (|Y_3| = |Y_4|) \vee \psi_2(XY_3Y_4) \big). \qquad \square$$

参考文献

[1] Zhao An、Qilong Feng、Iyad Kanj 和 Ge Xia。树划分的复杂性。*Algorithmica*，82(9):2606–2643，2020。 doi:10.1007/s00453-020-00701-x.[2] Stefan Arnborg、Jens Lagergren 和 Detlef Seese。树可分解图的简单问题。*J. Algorithms*，12(2):308–340，1991。 doi:10.1016/0196-6774(91)90006-K.[3]Nadja Betzler、Robert Bredereck、Rolf Niedermeier 和 Johannes Uhlmann。关于以树宽为参数的有界度顶点删除。*Discret. Appl. Math.*，160(1-2):53–60，2012。 doi:10.1016/j.dam.2011.08.013.[4] Hans L. Bodlaender 和 Fedor V. Fomin。有界树宽图的均衡着色。*Theor. Comput. Sci.*，349(1):22–30，2005。 doi:10.1016/j.tcs.2005.09.027.[5] ´Edouard Bonnet 和 Florian Sikora。以输入图结构为参数的图模体问题。*Discret. Appl. Math.*，231:78–94，2017。 doi:10.1016/j.dam.2016.11.016.[6]Derek G. Corneil 和 Udi Rotics。团宽与树宽之间的关系。*SIAM J. Comput.*，34(4):825–847，2005。 doi:10.1137/S0097539701385351.[7] B. Courcelle 和 R. Vanicat。有界团宽图的查询高效实现。*Discrete Applied Mathematics*，131(1):129–150，2003。第二届国际研讨会，梅斯计算机科学研讨会：图算法。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X02004213, doi:https://doi.org/10.1016/S0166-218X(02)00421-3.[8] Bruno Courcelle。图的单子二阶逻辑。I. 有限图的可识别集合。*Inf. Comput.*，85(1):12–75，1990。 doi:10.1016/0890-5401(90)90043-H.[9] Bruno Courcelle 和 Joost Engelfriet。图结构与单子二阶逻辑：一种语言理论方法。剑桥大学出版社，美国，第1版，2012年。[10] Bruno Courcelle、Johann A. Makowsky 和 Udi Rotics。有界团宽图上的线性时间可解优化问题。*Theory Comput. Syst.*，33(2):125–150，2000。 doi:10.1007/s002249910009.[11]Marek Cygan、Fedor V Fomin、 ˛Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Micha˙l Pilipczuk 和 Saket Saurabh。参数化算法。施普林格，2015。

[12] Mateus de Oliveira Oliveira. 满足 CMSO 性质的超图。逻辑方法与计算机科学，17(4)，2021。 doi:10.46298/lmcs-17(4:14)2021.[13] Erik D. Demaine、Timothy D. Goodrich、Kyle Kloster、Brian Lavallee、Quanquan C. Liu、Blair D. Sullivan、Ali Vakilian 和 Andrew van der Poel。结构舍入：适用于接近算法上易处理类的图的近似算法。载于 Michael A. Bender、Ola Svensson 和 Grzegorz Herman 编，第*27*届欧洲算法年会（*ESA 2019*），*2019*年*9*月*9*日至*11*日，德国慕尼黑/加兴，LIPIcs 第144卷，第37:1–37:15页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2019。 doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2019.37.[14] Anders Dessmark、Klaus Jansen 和 Andrzej Lingas。最大 k-依赖集和 f-依赖集问题。载于 Kam-Wing Ng、Prabhakar Raghavan、N. V. Balasubramanian 和 Francis Y. L. Chin 编，算法与计算：第四届国际研讨会，*ISAAC '93*，香港，*1993*年*12*月*15*日至*17*日，论文集，计算机科学讲义第762卷，第88–98页。施普林格，1993。doi:10.1007/3-540-57568-5_238.[15] Michael Dom、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh 和 Yngve Villanger。容量约束支配与覆盖：一种参数化视角。载于 Martin Grohe 和 Rolf Niedermeier 编，参数化与精确计算：第三届国际研讨会，*IWPEC 2008*，加拿大维多利亚，*2008*年*5*月*14*日至*16*日，论文集，计算机科学讲义第5018卷，第78–90页。施普林格，2008。 doi:10.1007/978-3-540-79723-4_9.[16]Jan Dreier 和 Peter Rossmanith。一阶计数查询的近似求值。载于*2021*年 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第1720–1739页。SIAM，2021。[17] Tom´as Ebenlendr、Marek Krc´al 和 Jir´ı Sgall。图平衡：无关并行机调度的一个特例。*Algorithmica*，68(1)：62–80，2014。 doi:10.1007/s00453-012-9668-9.[18] Rosa Enciso、Michael R. Fellows、Jiong Guo、Iyad A. Kanj、Frances A. Rosamond 和 Ondrej Such´y。是什么让均衡连通划分变得容易。载于 Jianer Chen 和 Fe-dor V. Fomin 编，参数化与精确计算：第四届国际研讨会，*IWPEC 2009*，丹麦哥本哈根，*2009*年*9*月*10*日至*11*日，修订版精选论文，计算机科学讲义第5917卷，第122–133页。施普林格，2009。 doi:10.1007/978-3-642-11269-0_10.[19] Louis Esperet、Laetitia Lemoine 和 Fr´ed´eric Maffray。将图公平划分为诱导森林。离散数学，338(8)：1481–1483，2015。 doi:10.1016/j.disc.2015.03.019.[20] S. Feferman 和 R. Vaught。代数系统乘积的一阶性质。*Fundamenta Mathematicae*，47(1)：57–103，1959。网址： http://eudml.org/doc/213526。

[21] Michael R. Fellows、Guillaume Fertin、Danny Hermelin 和 St´ephane Vialette。在顶点着色图中寻找连通模式的上界与下界。J. Comput. Syst. Sci.，77(4)：799–811，2011。 doi:10.1016/j.jcss.2010.07.003.[22] Michael R. Fellows、Jiong Guo、Hannes Moser 和 Rolf Niedermeier。Nemhauser 和 Trotter 局部优化定理的一种推广。J. Comput. Syst. Sci.，77(6)：1141–1158，2011。 doi:10.1016/j.jcss.2010.12.001.[23] Fedor V. Fomin 和 Tuukka Korhonen。树宽的快速 FPT 近似。载于 Stefano Leonardi 和 Anupam Gupta 编，STOC '22：第54届 ACM SIGACT 计算理论研讨会，意大利罗马，2022年6月20日至24日，第886–899页。ACM，2022。 doi:10.1145/3519935.3519996.[24]Jakub Gajarsk´y 和 Petr Hlinen´y。固定高度树的单子二阶逻辑性质的核化及其若干推论。Log. Methods Comput. Sci.，11(1)，2015。doi:10.2168/LMCS-11(1:19)2015.[25] Robert Ganian。将顶点覆盖作为图参数加以改进。Discret. Math. Theor. Comput. Sci.，17(2)：77–100，2015。网址：http://dmtcs.episciences.org/2136.[26] Robert Ganian、Fabian Klute 和 Sebastian Ordyniak。关于有界度顶点删除问题的结构参数化。Algorithmica，83(1)：297–336，2021。doi:10.1007/s00453-020-00758-8.[27] Robert Ganian 和 Jan Obdrz´alek。拓展受限图类上单子二阶逻辑的表达能力。载于 Thierry Lecroq 和 Laurent Mouchard 编，《组合算法——第24届国际研讨会 IWOCA 2013》，法国鲁昂，2013年7月10日至12日，修订版精选论文，计算机科学讲义第8288卷，第164–177页。施普林格，2013。 doi:10.1007/978-3-642-45278-9_15.[28] Robert Ganian、Sebastian Ordyniak 和 C. S. Rahul。少数代理类型下的群体活动选择。载于 Michael A. Bender、Ola Svensson 和 Grzegorz Herman 编，2019年9月9日至11日于德国慕尼黑/加兴举行的第27届欧洲算法年会（ESA 2019），LIPIcs 第144卷，第48:1–48:16页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2019。 doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2019.48.[29] Robert Ganian、Sebastian Ordyniak 和 M. S. Ramanujan。关于边不相交路径问题的结构参数化。Algorithmica，83(6)：1605–1637，2021。doi:10.1007/s00453-020-00795-3.[30] Sudipto Guha、Refael Hassin、Samir Khuller 和 Einat Or。容量化顶点覆盖。J. Algorithms，48(1)：257–270，2003。 doi:10.1016/S0196-6774(03)00053-1.[31] Mong-Jen Kao、Han-Lin Chen 和 Der-Tsai Lee。容量约束支配：问题复杂性与近似算法。Algorithmica，72(1)：1–43，2015。 doi:10.1007/s00453-013-9844-6。

[32] Hemanshu Kaul、Jeffrey A. Mudrock 和 Tim Wagstrom。关于星图不相交并的均衡选择着色性。Graphs Comb., 38(5):163，2022。 doi:10.1007/s00373-022-02571-2.
[33]Hans Kellerer、Renata Mansini、Ulrich Pferschy 和 Maria Grazia Speranza。子集和问题的高效全多项式近似方案。计算机与系统科学杂志，66(2):349–370，2003。URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022000003000060, doi:https://doi.org/10.1016/S0022-0000(03)00006-0.[34] Dusan Knop、Martin Kouteck´y、Tom´as Masar´ık 和 Tom´as Toufar。超越单子二阶逻辑的简化算法元定理：树宽与邻域多样性。逻辑方法与计算机科学，15(4)，2019。 doi:10.23638/LMCS-15(4:12)2019.[35] Tuukka Korhonen。一种用于树宽的单指数时间 2-近似算法。载于第 62 届 IEEE 年度计算机科学基础研讨会（FOCS 2021），美国科罗拉多州丹佛，2022 年 2 月 7—10 日，页码 184–192。IEEE，2021。 doi:10.1109/FOCS52979.2021.00026.[36] Michael Lampis。利用图宽度的参数化近似方案。载于 Javier Esparza、Pierre Fraigniaud、Thore Husfeldt 和 Elias Koutsoupias（编），《自动机、语言与编程——第 41 届国际研讨会（ICALP 2014）论文集》，第一部分，丹麦哥本哈根，2014 年 7 月 8—11 日，《计算机科学讲义》第 8572 卷，页码 775–786。施普林格，2014。 doi:10.1007/978-3-662-43948-7_64.[37] Rong Luo、Jean-S´ebastien Sereni、D. Christopher Stephens 和 Gexin Yu。稀疏平面图的均衡着色。SIAM 离散数学杂志，24(4):1572–1583，2010。 doi:10.1137/090751803.[38] Johann A Makowsky。Feferman–Vaught 定理的算法应用。《纯粹与应用逻辑年刊》，126(1-3):159–213，2004。[39] Stefan Szeider。具有局部基数约束的图上的单子二阶逻辑。ACM 计算逻辑汇刊，12(2):12:1–12:21，2011。 doi:10.1145/1877714.1877718.[40] Ren´e van Bevern、Andreas Emil Feldmann、Manuel Sorge 和 Ondrej Such´y。关于计算图的均衡划分的参数化复杂性。计算机系统理论，57(1):1–35，2015。 doi:10.1007/s00224-014-9557-5。