arXiv:2305.02057v1 [math.NA] 3 May 2023

三角剖分上的超光滑三次 B样条的提取与应用

Jan Gro˘selj[†,‡] 和 Hendrik Speleers[⋆]

[†] *Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Slovenia*
[‡] *Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana, Slovenia*
[⋆] *Department of Mathematics, University of Rome Tor Vergata, Italy*

摘要

C^1 三次 Clough–Tocher 样条空间是用于求解偏微分方程的经典三角剖分有限元逼近空间。然而，这类空间没有可用的 B样条基，而 B样条基是计算机辅助几何设计和等几何分析中的首选。B样条基是一种局部支撑基，构成凸单位分解。本文探讨了若干配备 B样条基的三角剖分上备选的 C^1 三次样条空间。它们定义在 Powell–Sabin细化三角剖分上，并呈现出不同类型的 C^2 超光滑性。超光滑 B样条通过提取过程获得，即用光滑性较低的基函数表示。与 Clough–Tocher 样条相比，这些备选样条空间保持了相同的最优逼近能力。本文通过若干数值算例加以说明，涉及最小二乘逼近，以及针对二阶和四阶边值问题的有限元逼近。

Keywords: 三角形有限元， C^1 三次样条，B样条基，超光滑性

1 引言

三角剖分上的样条是二元近似中的常用工具。它们与有限元分析密不可分，在其中以三角形单元的形式出现，并用于求解偏微分方程的近似解。对于许多标准问题，使用连续（甚至不连续）样条就已足够，因为它们易于表示。然而，高阶问题需要更光滑的单元，其中一个突出的例子是 C^1 三次 Clough–Tocher 单元（Clough 和 Tocher，1965）。

等几何分析的出现使人们特别关注用样条基函数表示近似。该方法的核心思想是在设计和分析中使用相同的样条模型（Cottrell 等，2009）。在计算机辅助几何设计中，B样条函数是表示几何对象的标准工具；这里我们广义地理解这些函数，指局部支撑且构成凸单位分解的函数。此外，B样条通常具有高阶光滑性；事实证明，与自由度数量相比，这有助于实现优异的精度，并且相较于光滑性较低的有限元，能够获得更好的谱特性；参见 Hughes 等（2008）；Evans 等（2009）；Bressan 和 Sande（2019）；Sande 等（2019）；Manni 等（2022）。

在等几何分析的背景下，多篇论文（Speleers 等，2012；Jaxon 和 Qian，2014；Beir˜ao da Veiga 等，2015；Speleers 和 Manni，2015；Liu 和 Jeffers，2018；Zareh 和 Qian，2019）研究了三角剖分上的光滑样条空间的潜力，但其潜力尚未得到充分发挥。与张量积样条空间相比，使用三角剖分铺设区域，在描述几何和进行局部细化方面具有更大的灵活性，

然而，这需要付出样条构造更加复杂的代价。在一般的非结构化三角剖分上，C^1 样条空间的维数取决于三角剖分的几何（Lai 和 Schumaker，2007年），因此，即使只是确定正确的基函数数量，也可能是一项繁琐的工作，并可能受到数值不稳定性的影响。为此，通常会采用特定的分割来细化三角剖分（例如，将每个三角形分割为三个较小三角形的 Clough–Tocher分割），以便为样条划分提供一定的结构，并使自由度能够与拓扑属性相关联，即三角剖分的顶点、边和三角形。

将三角形单元进一步融入等几何分析理念的下一步，是建立合适的基函数。尽管近年来有限元中的 B 样条技术取得了进展（Dierckx，1997年；Speleers，2010a,b，2013年；Groˇselj和 Knez，2021年，2022年），标准的 C^1 三次 Clough–Tocher 单元仍缺少 B 样条表示，甚至尚不清楚这种表示是否存在。鉴于此，本文探索了定义在三角剖分上的其他 C^1 三次样条空间，这些空间可直接配备 B 样条基函数（Groˇselj and Speleers，2017）。它们定义在 Powell–Sabin细化三角剖分上，可视为 Clough–Tocher分割的延续。此外，我们着重研究 C^2 超光滑性，并提出一种提取过程，使 B 样条基函数能够从较低光滑度简单过渡到较高光滑度。

Groˇselj and Speleers（2021年）指出，在三方向网格上应用一般的 C^1 三次 Powell–Sabin B样条时，它们具有额外的 C^2 超光滑性；通过组合并约化某些B样条，还可以获得进一步的光滑性。本文旨在提供一种提取程序，在可能的情况下将这些技术应用于非结构化三角剖分，并通过数值实验展示该程序在逼近方法中的优势。作为主要框架，我们考虑初始三角剖分上的B样条表示；出于逼近目的，该三角剖分可以进行均匀细化。这样，我们便能在每个初始三角形上得到一个三方向三角剖分，并利用其中的对称性来减少自由度，进而施加局部C^2 超光滑性。

一般而言，要使三角剖分上的样条相对于多项式次数达到最大光滑性，已被证明非常困难。最接近这一目标的技术是基于单纯形样条的。作为单变量B样条的一种推广，单纯形样条目前正处于令人振奋的发展阶段（近期进展参见 Neamtu，2007年；Liu和Snoeyink，2007年；Schmitt，2021年；Barucq等，2022年；Lyche等，2022年），并已被考虑用于有限元方法和等几何分析（Cao等，2019年；Wang等，2022年）。然而，它们的缺点似乎在于其底层节点线配置相当复杂，这使得建立线性系统时的组装和（数值）积分成为一项繁琐的工作。

近期文献中，也有研究针对由大型结构化区域组成的非结构化四边形划分提出了多种样条构造。在这种情形下，通常会在划分的结构化区域上使用标准（张量积）B样条基函数，并在结构化区域之间的界面附近使用专门设计的基函数（其光滑性通常较低）；例如参见 Karˇciauskas 等人（2016年）；Toshniwal 等人（2017）；Wei 等人（2018）；Chan 等人（2018）；Kapl 等人（2019年）；Weinm¨uller 和 Takacs（2022年）。后一类基函数通常存在一些缺点，例如可能需要局部提高次数、可能不具非负性、可能不具 C^1 光滑性，和/或可能会削弱所得空间的逼近能力。本文反其道而行之：我们从适用于一般非结构化划分且没有这些缺点的基函数出发，然后对划分结构化区域上的基函数进行缩减，以实现局部更高的光滑性。此过程由提取矩阵描述，从而能够在两个近似空间之间快速转换。

更具体地说，我们从 Groˇselj and Speleers (2017) 引入的 C^1 三次 Powell–Sabin B样条所张成的全空间出发；这些样条与三角剖分的顶点和边相关联。首先，我们缩减与边相关联的 B样条，由此得到 Speleers (2015) 引入的样条空间；随着

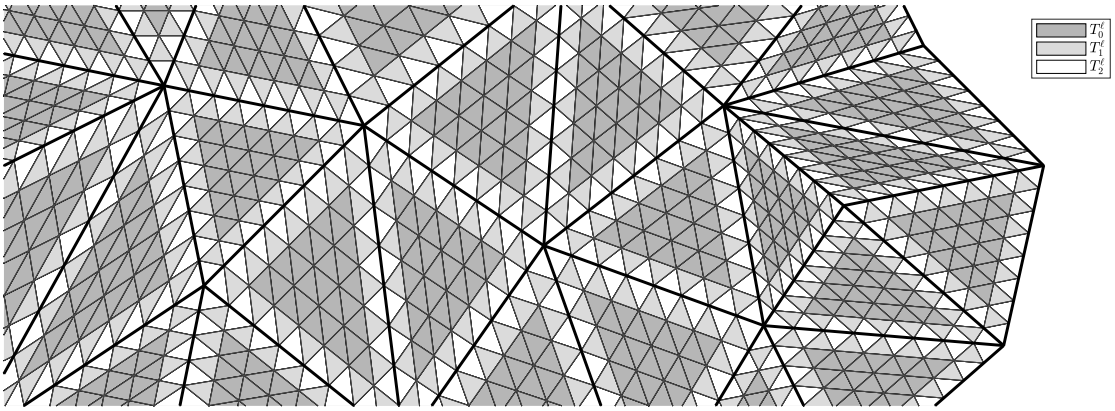


图1：三角剖分 $\triangle$ （以较粗的线条表示）的一部分，该部分经过细化后形成三角剖分$\triangle^\ell$，其中包含 $\ell = 8$。 $\triangle^\ell$中三角形的颜色决定了该三角形所属的集合 T_r^ℓ、 $r \in \{0, 1, 2\}$。

初始三角剖分的细化），全空间的维数渐近地缩减为原来的 $5/3$。其次，我们将先前缩减的边B样条组合起来，覆盖所有具有特定几何对称性的三角形。所得空间在局部上与 Groˇselj and Speleers (2021年) 引入的空间相同，并且全空间的维数渐近地缩减为原来的 3。

所研究的这三种空间均能够再现三次多项式，并具有最优的逼近能力。我们通过一系列数值算例对此进行了说明，具体涉及二阶和四阶边值问题中的最小二乘逼近与有限元逼近。通过这些算例，我们还证明，局部光滑性的提高能够在自由度数量相同的情况下提升逼近精度，即约化空间在计算效率方面表现得更优。

本文其余部分组织如下。第2节介绍 C^1 三次 Powell–Sabin B样条，并阐述其提取过程。第3节推导所研究空间的维数公式，并考察其渐近行为。第4节介绍提取过程在若干逼近方法中的应用，并给出一些数值算例。最后，第5节总结全文并提出一些相关见解。

2 基函数

设 $\triangle$ 是平面有界区域 Ω 的任意三角剖分， $\triangle^\ell$、 $\ell \in \mathbb{N}$是通过将 $\triangle$ 中的每个三角形均匀分割而得到的细化，使得 $\triangle$ 的每条边都被分成 $\triangle$ 个区间，如图1所示。在本节中，我们将讨论三角剖分 ℓ 上的不同集合的 C^1 三次 B样条基函数。

2.1 Powell–Sabin 细分

我们用三元组（ $\triangle^\ell$、 E^ℓ、 T^ℓ）表示三角剖分，其中$V^\ell = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_v^\ell}\}$是顶点集，$E^\ell = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n_e^\ell}\}$是边集，$T^\ell = \{t_1, t_2, \ldots, t_{n_t^\ell}\}$是三角形集。注意， n_v^ℓ、 n_e^ℓ和 n_t^ℓ分别表示 V^ℓ、 E^ℓ和 T^ℓ中元素的数量。我们进一步将三角形集 T^ℓ分为三个子集 T_r^ℓ、 $r = 0$，1，2。若三角形 $t_k \in T^\ell$满足：存在 $\triangle$ 的一条边包含 r个 t_k的顶点，且 r 是满足该条件的最大数，则称 $t_k \in T^\ell$属于 T_r^ℓ；示意见图1。

为了在 $\triangle^\ell$ 上引入基函数，我们通过应用 Powell–Sabin 6 分裂（Powell 和 Sabin，1977年）对 $\triangle^\ell$ 进行细化。对于每个三角形 $t_k \in T^\ell$，我们在 t_k 内选择一个分裂点 v_k^t，使得对于任意相邻三角形 $t_{k'} \in T^\ell$，连接 v_k^t 和 $v_{k'}^t$ 的直线与该边的内部相交。

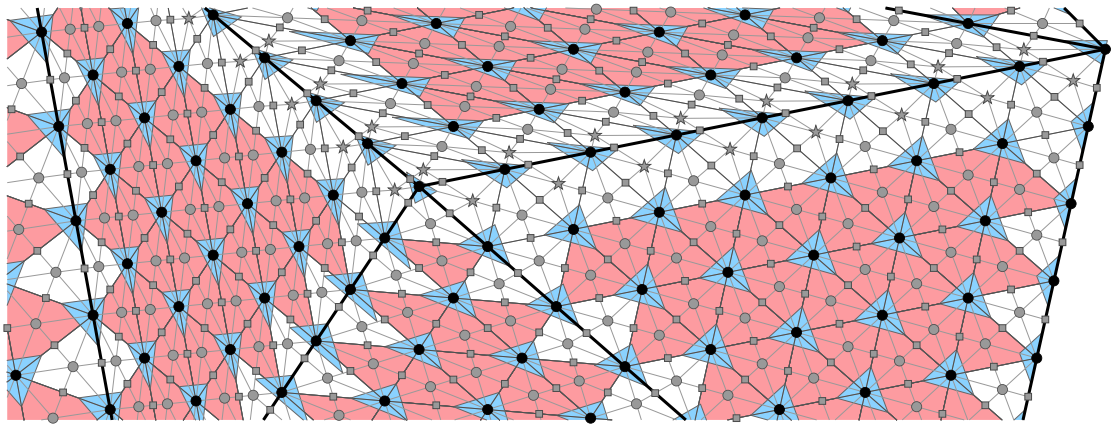


图2：图1所示三角剖分 $\triangle^\ell$ 及其 Powell–Sabin 细化$\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}$的局部示例。 $\triangle^\ell$ 中的每个三角形（以深灰色线条表示）都被分割成 $\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}$中的六个较小三角形（以浅灰色线条表示）。分裂点以灰色标示。 $\triangle^\ell$ 中三角形内部的分裂点为重心或内心，分别用圆圈或星形表示。边上的分裂点用方块标示。属于 T^ℓ_{sym} 的三角形以红色阴影标示。 $\triangle^\ell$ 的顶点用黑点表示。对于每个 $v_i \in V^\ell$，都有一个以蓝色表示的三角形 q^v_i。

$e_j \in E^\ell$ 是 t_k 和 $t_{k'}$的公共边。交点记为 v^e_j。如果 e_j 是边界边，则分裂点 v^e_j 是该边的中点。

在我们的配置中， v^t_k 的优选位置是 t_k的重心；当$t_k \in T^\ell_0 \cup T^\ell_1$ 作为均匀子三角剖分中的任意两个相邻三角形构成严格凸四边形时，这始终是一个有效选择。然而，一般而言，选择 $t_k \in T^\ell_2$ 的重心可能会导致退化或病态细分配置。另一方面，将 v^t_k 选为t_k 的内心可保证交点性质。

通过将 v^t_k 与 t_k 的顶点以及 t_k各边上的分裂点相连，每个 t_k 被分成六个较小的三角形。我们将由此诱导出的 $\triangle^\ell$ 细化记为 $\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}$。图2展示了这种细化的一个示例。

假设 $\triangle^\ell$ 中的一个三角形 t_k 位于均匀子三角剖分内，也就是说，如果 t_k的顶点为 v_{i_1}、 v_{i_2}、 v_{i_3} ，那么它在 $\triangle^\ell$ 中的三个相邻三角形由这些顶点确定

$$v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_1} + v_{i_2} - v_{i_3}, \qquad v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_2} + v_{i_3} - v_{i_1}, \qquad v_{i_3}, v_{i_1}, v_{i_3} + v_{i_1} - v_{i_2}.$$

再假设这四个三角形的分裂点是重心。此时，我们称 t_k 具有对称配置。 $\triangle^\ell$ 中所有具有对称配置的三角形组成的集合记为 T^ℓ_{sym}；示意见图2。

2.2 全空间

对于区域Ω的三角剖分 $\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}$ ，我们考虑空间 $\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$，它由满足以下条件的 C^1函数构成：在 $\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}$ 的任意三角形上的限制都是总次数小于或等于3的二元多项式。该空间的维数为 $3n^\ell_v + 4n^\ell_e$；更多详情请参阅Groˇselj and Speleers（2017）。

空间 $\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 可由基函数 $B_1, B_2, \ldots, B_m$, $m = 3n^\ell_v$ 表示，这些基函数与 $\triangle^\ell$ 的顶点相关；还可由基函数 $B^0_1, B^0_2, \ldots, B^0_{m_0}$, $m_0 = 4n^\ell_e$ 表示，这些基函数与 $\triangle^\ell$ 的边相关。我们采用 Groˇselj and Speleers (2017) 的方法构造这些基函数。

对于每个顶点 $v_i \in V^\ell$，我们指定一个包含 v_i 以及对每条边 $e_j \in E^\ell$ 和每个附着于 v_i的三角形 $t_k \in T^\ell$ 所对应的点 $\frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v^e_j$ 和 $\frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v^t_k$ 的三角形 q^v_i；此类三角形的示意见图2。 q^v_i 的顶点恰好是Greville点（详情参见 Groˇselj and

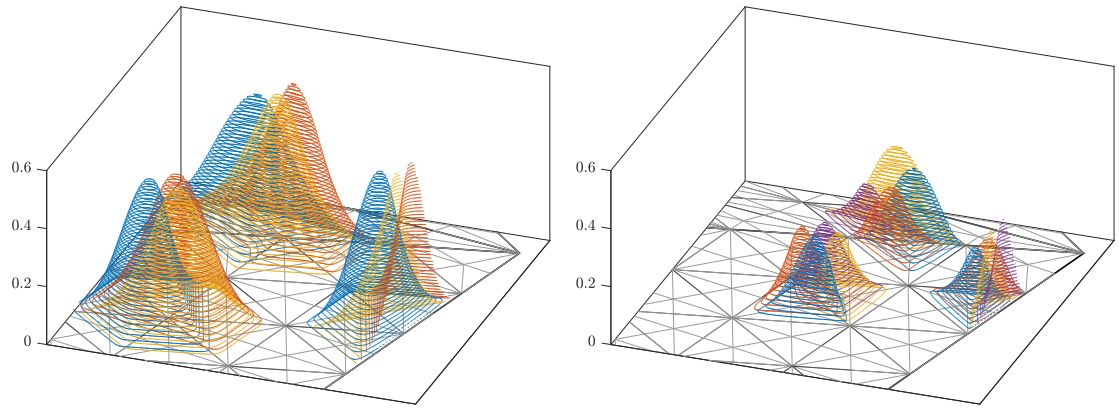


图 3：图2所示的 B_1、B_2、.....、B_m（左）和 B_1^0、B_2^0、.....、$B_{m_0}^0$（右）上的基函数示例。左图展示了与 $\triangle^\ell$ 的三种不同类型顶点相关联的基函数三元组：被来自 T_{sym}^ℓ 的三角形环绕的顶点、位于 $\triangle$ 内部边上的顶点，以及区域边界上的顶点。右图展示了与 $\triangle^\ell$ 的三种不同类型边相关联的基函数四元组：由来自 T_{sym}^ℓ 的三角形共享的边、位于 $\triangle$ 内部边上的边，以及区域边界上的边。

Speleers，2017）。为描述构造中的其他参数，考虑端点为 $v_i, v_{i'} \in V^\ell$、分裂点为 v_j^e 的边 $e_j \in E^\ell$。对于由顶点 v_i、v_j^e、v_k^t 确定的 $\triangle_{\text{PS}}$ 中的每个三角形，我们可以选取参数 $\sigma_{i,j,k} > 0$；对于由端点 v_i、v_j^e 确定的 $\triangle_{\text{PS}}$ 中可能存在的边界边，我们可以选取参数 $\sigma_{i,j} > 0$。由此得到点 $\frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v_k^t + \frac{2}{3}\sigma_{i,j,k}(v_{i'} - v_i)$ 和 $\frac{2}{3}v_i + \frac{1}{3}v_j^e + \frac{2}{3}\sigma_{i,j}(v_{i'} - v_i)$，它们再次起到 Greville点的作用。本文余下部分均假设采用以下可接受的选取：$\sigma_{i,j,k} = \sigma_{i,j} = \frac{1}{2}$。

与 $v_i \in V^\ell$ 相关联的任意三角形 q_i^v 都确定三个基函数。此类函数三元组的示例见图 3（左）。这些基函数 B_1、B_2、.....、B_m 具有以下超光滑性；参见 Groˇselj and Speleers（2017, 2021年）。

Th定理 1. 函数 B_1、B_2、.....、B_m 具有以下超光滑性。

1. 对于每个 $t_k \in T^\ell$，函数在分裂点 v_k^t 处是 C^2 光滑的。 *2.* 对于每个 $t_k \in T^\ell$ 以及 t_k的每条边 e_j，函数在连接 v_j^e 和 v_k^t的边两侧是 C^2 光滑的。 *3.* 对于每个 $t_k \in T_{\text{sym}}^\ell$，函数在三角形 t_k 的三角形内部是 C^2 光滑的。

此外，$\triangle^\ell$的每条边都关联四个基函数。图 3（右）展示了它们的示例。为了区分这些基函数 $B_1^0, B_2^0, \ldots, B_{m_0}^0$，我们将它们分配给 $\triangle_{\text{PS}}^\ell$的三角形和边界边。令 Ξ_0 为 $V^\ell \times E^\ell \times (T^\ell \cup \{\emptyset\})$的一个子集，其中包含 m_0 个元素。对于 $\triangle^\ell$的每条边 e_j，它包含四个三元组 (v_i, e_j, t_k)、$(v_{i'}, e_j, t_k)$、$(v_i, e_j, t_{k'})$、$(v_{i'}, e_j, t_{k'})$，用于标识

- $\triangle^\ell$的四个三角形$_{\text{PS}}$ 连接到 e_j 如果 e_j 不是边界边，或者
- 两个三角形和 $\triangle^\ell{}_{\text{PS}}$ 的两条边界边，如果 e_j 是边界边（$t_{k'} = \emptyset$）。

我们将从 Ξ_0 到 $\{1, 2, \ldots, m_0\}$ 的双射记为 ξ_0。

与 B_1、B_2、.....、B_m不同，函数 B_1^0、B_2^0、.....、$B_{m_0}^0$ 通常不具备任何额外的超光滑性。然而，它们以如下方式补充与顶点相关联的基函数；参见 Groˇselj and Speleers（2017）。

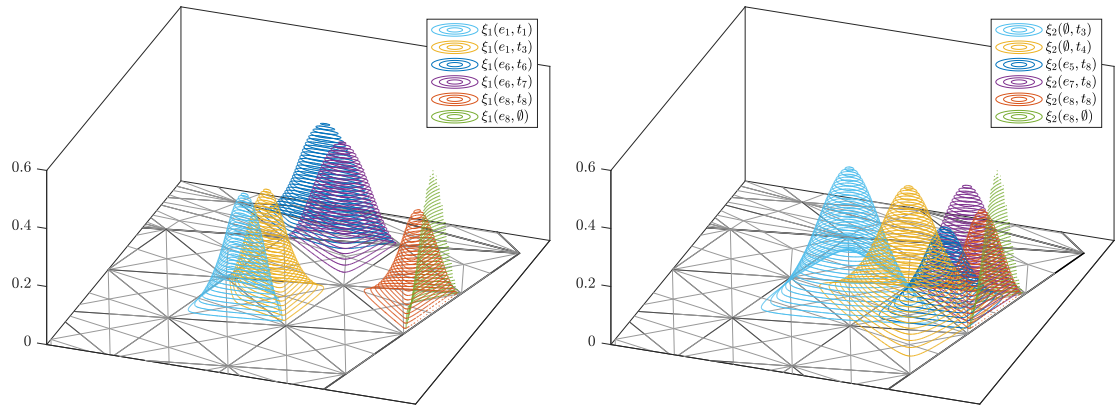


图4：图2所示的$\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}}$上的基函数 B^1_1，B^1_2，……，$B^1_{m_1}$（左）和 B^2_1，B^2_2，……，$B^2_{m_2}$（右）的示例。左图展示了与 $\triangle^{\ell}$的三种不同类型的边相关联的基函数二元组：一条由 T^{ℓ}_{sym}中的三角形共享的边、一条位于 $\triangle$内部边上的边，以及一条位于区域边界上的边。右图展示了六个函数：两个基函数张成 $\triangle^{\ell}$ 的四个三角形，这些三角形与 T^{ℓ}_{sym}中的两个三角形相关联；一个基函数张成 $\triangle^{\ell}$ 的两个三角形，其中一个属于 T^{ℓ}_{sym}，另一个不属于 T^{ℓ}_{sym}；以及三个在第二次约简后保持不变的基函数（其中两个已在左图中展示）。有关图例中索引的解释，请参见图5和图6。

定理2。函数 B_1、B_2、……、B_m和函数 B^0_1、B^0_2、……、$B^0_{m_0}$构成凸单位分解，并形成 $\mathbb{S}_0(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$的局部支撑基。

在接下来的章节中，我们考虑两种具有额外局部超光滑性的空间约简。约简基函数通过提取过程获得，即将其表示为光滑性较低的基函数。

2.3 第一次空间约简

考虑 $E^{\ell} \times (T^{\ell} \cup \{\emptyset\})$ 的一个子集 Ξ_1，其中含有 $m_1 = 2n^{\ell}_e$ 个元素。对于其中的每条边 $e_j \in E^{\ell}$，它包含两个二元组 $(e_j,\ t_k)$、$(e_j,\ t_{k'})$，其中 t_k 和 $t_{k'}$ 是附着于 e_j 的 $\triangle^{\ell}$ 的三角形。如果 e_j 是一条边界边，那么 $t_{k'} = \emptyset$。设 ξ_1 是从 Ξ_1 到 $\{1, 2, \ldots, m_1\}$ 的一个双射。

设 $\mathcal{B}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^{m_0}$ 是一个映射，它将点 $p \in \Omega$ 映射到列向量$[B^0_1(p)\ B^0_2(p) \ldots, B^0_{m_0}(p)]^T$。此外，设 $H_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_0}$ 为一个矩阵，对于每个 $(e_j, t_k) \in \Xi_1$，其在位置 $(\xi_1(e_j, t_k)\ \xi_0(v_i, e_j, t_k))$ 和 $(\xi_1(e_j, t_k)\ \xi_0(v_{i'}, e_j, t_k))$ 处的矩阵元素均为 1，其中$v_i, v_{i'} \in V^{\ell}$ 是 e_j 的端点。H_1 的所有其他矩阵元素均为 0。映射$\mathcal{B}_1 : \Omega \to \mathbb{R}^{m_1}$ 定义为

$$\mathcal{B}_1(p) = H_1 \cdot \mathcal{B}_0(p)$$

这决定了一组新的函数，我们将其记为 B^1_1，B^1_2，……，$B^1_{m_1}$。图4（左）展示了其中的一些示例。该过程得到了 Speleers（2015）提出的缩减基函数集。关于两组基函数 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{B}_1$ 之间关系的更多详情，请参阅 Groˇselj and Speleers（2017）。

Th定理 3. 函数 B^1_1、B^1_2、……、$B^1_{m_1}$ 具有以下超光滑性 .

1. 对于每个 $t_k \in T^{\ell}$，这些函数在分裂点 v^t_k 处是 C^2 光滑的。

2. 对于每个 $t_k \in T^{\ell}$ 以及 t_k 的每条边 e_j，这些函数在连接 v^e_j 和 v^t_k 的边两侧是 C^2 光滑的。

令 $\mathbb{S}_1(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$ 为函数 B_1、B_2、……、B_m 以及函数 B^1_1、B^1_2、……、$B^1_{m_1}$所张成的空间。该空间的维数为 $3n^{\ell}_v + 2n^{\ell}_e$。根据 Speleers（2015），我们还知道以下性质。

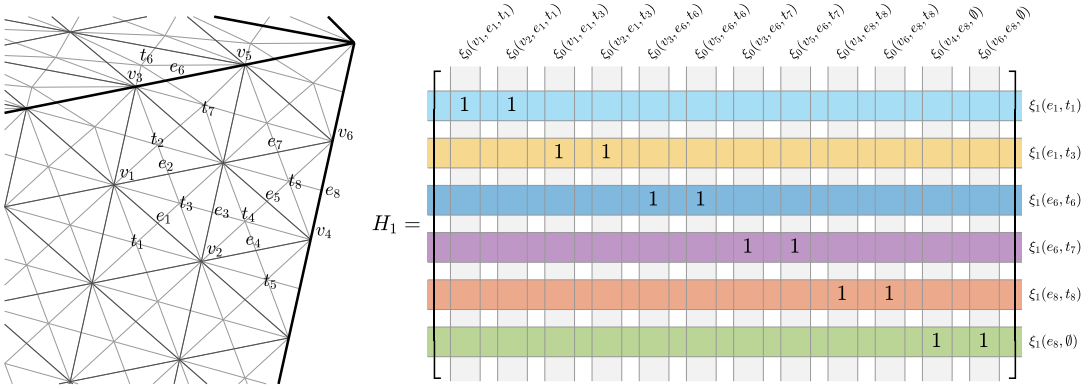


图 5：第一次约化的一个示例。图 4 左图所示的基函数由图 3 右图所示的基函数得到。矩阵 H_1 的一个摘录包含描述这次约化的六行。

定理4。 函数 B_1、B_2、……、B_m 以及函数 B_1^1、B_2^1、……、$B_{m_1}^1$ 构成 $\mathbb{S}_1(\triangle_{\mathrm{PS}}^\ell)$的凸单位分解和局部支撑基。

例5. 图 *5* 展示了矩阵 H_1 的几行和几列，该矩阵用于将图 *3*（右）所示的三个基函数四元组约化为图 *4*（左）所示的三个基函数二元组。得益于原始基函数的性质（见定理*2*），该矩阵清楚地证实了约简基函数构成凸单位分解。事实上，其所有矩阵元素均为非负数，且每一列的矩阵元素之和均为 *1*。约简基函数的局部支撑源于该矩阵的稀疏性。

注6. 用一组（光滑性较低的）基函数表示另一组基函数的矩阵，通常称为提取矩阵。*Borden* 等人（*2011*年）和 *Scott* 等人（*2011*年）引入了这一术语，用于表示以 *Bernstein* 多项式表示样条函数的提取过程。在 *Speleers*（*2019*年）以及 *Speleers* 和 *Toshniwal*（*2021*年）中可以找到较新的提取矩阵示例。

2.4 第二空间约化

Let $\Xi_2 \subset (E^\ell \cup \{\emptyset\}) \times (T^\ell \cup \{\emptyset\})$ 是 $\{\emptyset\} \times T^\ell_{\text{对称}}$ 与 $\Xi_1 \cap (E^\ell \times (T^\ell \setminus T^\ell_{\text{对称}} \cup \{\emptyset\}))$ 的并集，并且 let m_2 表示该集合中元素的数量。假设 ξ_2 是从 Ξ_2 到 $\{1, 2, \ldots, m$的双射 $_2\}$.

令 $H_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_1}$ 为矩阵，其矩阵元素定义如下。对于每个 $t_k \in T^\ell_{\mathrm{sym}}$ 以及 t_k的一条边 e_j，位置 $(\xi_2(\emptyset, t_k)\ \xi_1(e_j, t_k))$ 处的元素等于 2 3。对于附接到 e_j的第二个三角形 $t_{k'} \preceq T^\ell$，位置 $(\xi_2(\emptyset, t_k)\ \xi_1(e_j, t_{k'}))$ 处的元素等于 1 3。此外，若 $t_{k'} \notin T^\ell$对称，则位置 $(\xi_2(e_j, t_{k'})\ \xi_1(e_j, t_{k'}))$ 处的元素等于 2 3，位置 $(\xi_2(e_j, t_{k'})\ \xi_1(e_j, t_k))$ 处的元素等于 1 3。最后，对于满足 t_k和 $t_{k'}$均属于 $T^\ell \setminus T^\ell$对称 $\cup \{\emptyset\}$的每一对 (e_j, t_k)、$(e_j, t_{k'})$，位置 $(\xi_2(e_j, t_k)\ \xi_1(e_j, t_k))$ 和 $(\xi_2(e_j, t_{k'})\ \xi_1(e_j, t_{k'}))$ 处的元素均等于 1。 H_2 的所有其他元素均等于 0。注意，若 T^ℓ_{sym} 为空，则 H_2 是单位矩阵的一个置换。

由下式定义的映射 $\mathcal{B}_2 :\ \Omega \to \mathbb{R}^{m_2}$

$$\mathcal{B}_2(p) = H_2 \cdot \mathcal{B}_1(p)$$

确定了一组新函数，我们将其记为 B_1^2、B_2^2、……、$B_{m_2}^2$。图4（右）展示了其中的一些示例。对于所有 $t_k \in T^\ell_{\mathrm{sym}}$，新函数 $B^2_{\xi_2\ (\emptyset,\ t_k)}$ 均与 Groˇselj and Speleers（2021年）所描述的基函数一致。

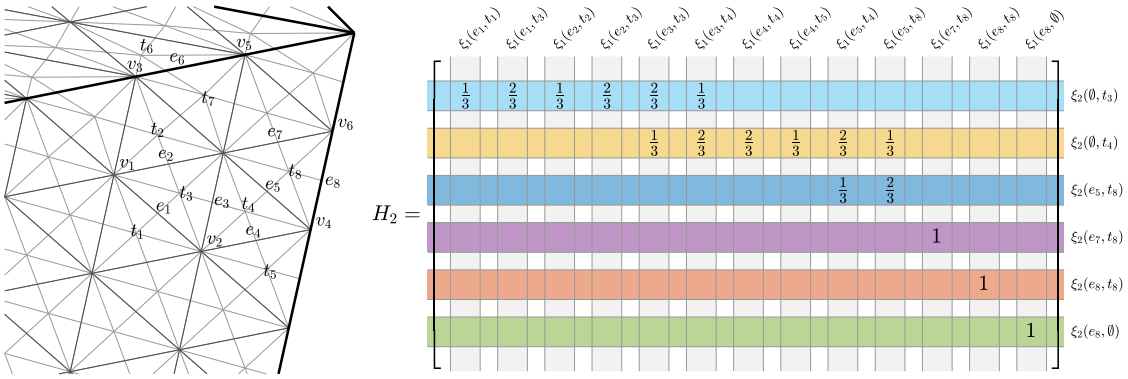


图6：第二次约简的一个示例。图4右图中所示的基函数由图4左图中所示的基函数以及第一次约简中的若干额外基函数生成。矩阵 H_2 的一个节选包含描述这次约简的六行。

Th定理 7. 函数 $B_1^2, B_2^2, \ldots, B_{m_2}^2$ 具有以下超光滑性。 .

1. 对于每个 $t_k \in T^\ell$，函数在分裂点 v_k^t 处是 C^2 光滑的。*2.* 对于每个 $t_k \in T^\ell$ 以及 t_k 的每条边 e_j，函数在连接 v_j^e 和 v_k^t 的边上是 C^2 光滑的。*3.* 对于每个 $t_k \in T^\ell_{\mathrm{sym}}$，函数在三角形 t_k 内部是 C^2 光滑的。

令 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 为函数 B_1、B_2、……、B_m 以及函数 B_1^2、B_2^2、……、$B_{m_2}^2$的张成空间。结合 Groˇselj and Speleers（2021年）和 Speleers（2015）的研究结果，可以推导出以下性质。

定理8。 函数 B_1、B_2、…、B_m 以及函数 B_1^2、B_2^2、…、$B_{m_2}^2$ 构成 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的凸单位分解和局部支撑基。

例9. 图*6*展示了矩阵 H_2 的几行几列，该矩阵决定了图*4*（右）所示的*6*个约简基函数。得益于第一组约简基函数的性质（见定理*4*），这个矩阵清楚地表明，第二组约简基函数构成了凸单位分解。事实上，其所有矩阵元素均非负，且每列的矩阵元素之和均为一。第二组约简基函数的局部支撑由该矩阵的稀疏性决定。

在附录A中，我们证明样条空间 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 包含所有总次数小于或等于3的二元多项式。这意味着，此处提出的空间约简与其他样条空间 $\mathbb{S}_1(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}) \subset \mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$具有相同的最优逼近能力。

3 维数公式

上一节讨论的三个样条空间在局部超光滑性方面有所不同，但它们都能再现三次多项式，且具有最优的四阶逼近阶。本节将分析并比较它们的维数。

设 $\triangle$ 为任意一个三角剖分，它由 n_v 个顶点、n_e 条边、$n_{\partial e}$ 条边界边和 n_t 个三角形组成。回顾一下，$\triangle^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$ 是通过对 $\triangle$ 中的每个三角形进行均匀细分得到的：将 $\triangle$ 中的每条边分成 ℓ 个区间。该细化三角剖分有 n_v^ℓ

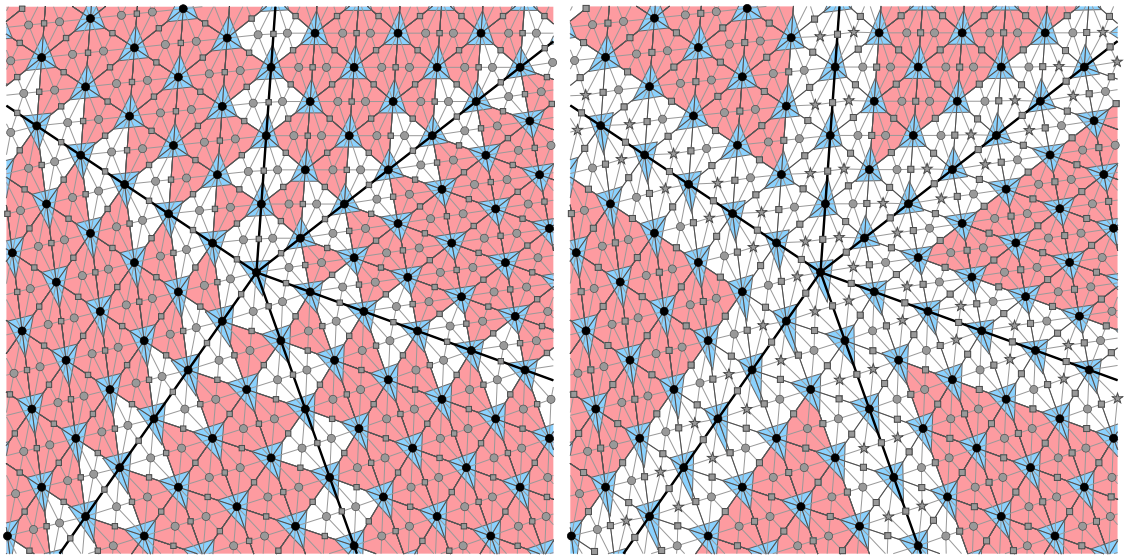


图7： T^{ℓ}_{sym} 的两种极端情形示意图。标记和颜色编码与图2相同。

顶点、 n^{ℓ}_{e} 条边、 $n^{\ell}_{\partial e}$ 条边界边和 n^{ℓ}_{t} 个三角形，其中

$$
\begin{aligned}
n^{\ell}_{v} &= n_v + (\ell-1)n_e + \frac{1}{2}(\ell-2)(\ell-1)n_t,\\
n^{\ell}_{e} &= \ell\, n_e + \frac{3}{2}(\ell-1)\ell\, n_t,\\
n^{\ell}_{\partial e} &= \ell n_{\partial e} = 2\ell n_e - 3\ell n_t,\\
n^{\ell}_{t} &= \ell^2\, n_t.
\end{aligned}
$$

此外，令 n^{ℓ}_{sym} 为 T^{ℓ}_{sym} 中三角形的数量。为便于说明，我们假设 $\triangle$ 中的三角形不构成局部均匀子三角剖分。

全样条空间 $\mathbb{S}_0(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$ 的维数为

$$
\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})) = 3n^{\ell}_{v} + 4n^{\ell}_{e} = 3n_v + (7\ell-3)n_e + \frac{3}{2}(5\ell-2)(\ell-1)n_t.
$$

同样地，我们推导出第一次约简 $\mathbb{S}_1(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$ 后的样条空间维数为

$$
\dim(\mathbb{S}_1(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})) = 3n^{\ell}_{v} + 2n^{\ell}_{e} = 3n_v + (5\ell-3)n_e + \frac{3}{2}(3\ell-2)(\ell-1)n_t.
$$

最后，第二个约化样条空间 $\mathbb{S}_2(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$ 的维数等于

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathbb{S}_2(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})) = {} & 3n^{\ell}_{v} && \text{(corresponding to vertices)}\\
& + n^{\ell}_{\mathrm{sym}} && \text{(corresponding to symmetric triangles)}\\
& + 3(n^{\ell}_{t} - n^{\ell}_{\mathrm{sym}}) + n^{\ell}_{\partial e}, && \text{(corresponding to asymmetric triangles)}
\end{aligned}
$$

其中，数值 n^{ℓ}_{sym} 取决于 $\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}}$的几何性质。在例10中，我们展示了 n^{ℓ}_{sym}的两种极端情况。

例10。 如果 $\triangle$ 中的所有三角形都按图7左图所示进行细化，那么$T^{\ell}_{\mathrm{sym}} = T^{\ell}_{0} \cup T^{\ell}_{1}$，且 $T^{\ell}{}_{\mathrm{sym}}$ 中的三角形数量达到最大，即

$$
n^{\ell}_{\mathrm{sym}} = [\ell^2 - 3(\ell-1)]n_t, \quad \ell \geq 2.
$$

另一方面，如果按照图7右图所示细化 $\triangle$ 中的所有三角形，那么 $T^\ell_{\mathrm{sym}} = T^\ell_0$ 和 T^ℓ对称中的三角形数量最少，即

$$n^\ell_{\mathrm{sym}} = (\ell-3)^2 n_t, \quad \ell \geq 3.$$

一般来说，我们有

$$(\ell-3)^2 n_t \leq n^\ell_{\mathrm{sym}} \leq [\ell^2 - 3(\ell-1)] n_t, \quad \ell \geq 3.$$

一般构型的示意图见图2。

在下文中，我们固定 $\ell \geq 3$。我们可以重写上述 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的维数公式。 as

$$\dim(\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) = 3n_v + (5\ell-3)n_e + \frac{3}{2}(3\ell^2 - 5\ell + 2)n_t - 2n^\ell_{\mathrm{sym}},$$

并由例10中给出的 n^ℓ_{sym} 的界，我们得到

$$\dim(\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) \geq 3n_v + (5\ell-3)n_e + \frac{1}{2}(5\ell^2 - 3\ell - 6)n_t$$

and

$$\dim(\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) \leq 3n_v + (5\ell-3)n_e + \frac{1}{2}(5\ell^2 + 9\ell - 30)n_t.$$

通过比较不同的维数公式，我们得出

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) - \dim(\mathbb{S}_1(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) &= 2\ell\, n_e + 3(\ell-1)\ell\, n_t > 0, \\
\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) - \dim(\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})) &\geq 2\ell\, n_e + (5\ell^2 - 15\ell + 18) n_t > 0.
\end{aligned}$$

我们还观察到

$$\begin{aligned}
\lim_{\ell\to\infty} \frac{\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}))}{\dim(\mathbb{S}_1(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}))} &= \frac{15/2}{9/2} = \frac{5}{3}, \\
\lim_{\ell\to\infty} \frac{\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}))}{\dim(\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}))} &= \frac{15/2}{5/2} = 3.
\end{aligned}$$

因此，从渐近意义上讲，对于这两个约化空间，维数分别缩减为原来的 $5/3$ 分之一和 3 分之一，同时不会损失近似阶数。

注11. 三次 *Clough–Tocher* 样条空间是三角剖分上的一个众所周知的空间；参见 *Clough* 和 *Tocher (1965)*；*Lai* 和 *Schumaker (2007)*。在这种情况下，三角剖分$\triangle^\ell$ 进一步细化为一个三角剖分，记为 $\triangle^\ell_{\mathrm{CT}}$，其中每个三角形 $t_k \in T^\ell$ 通过连接其内部的一个分裂点 v^t_k 与 t_k的顶点而被分割成三个较小的三角形。我们将相应的 C^1 三次样条空间记为 $\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{CT}})$。当划分 $\triangle^\ell_{\mathrm{CT}}$ 和 $\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}$相容时，*Speleers (2015)* 已证明，$\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{CT}})$ 是 $\mathbb{S}_1(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的一个子空间，因此也是 $\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的一个子空间。$\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{CT}})$ 的维数等于

$$\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{CT}})) = 3n^\ell_v + n^\ell_e = 3n_v + (4\ell-3)n_e + 3(\ell-1)^2 n_t.$$

它渐近地略大于 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的维数。更确切地说，

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{\dim(\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{CT}}))}{\dim(\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}}))} = \frac{3}{5/2} = \frac{6}{5}.$$

此外，对于空间 $\mathbb{S}_0(\triangle^\ell_{\mathrm{CT}})$，不存在可用的 *B* 样条基。部分 *B* 样条结果可见于 *Speleers*（*2010b*）以及 *Lyche* 和 *Merrien*（*2018* 年）的研究中。

4 应用

在本节中，我们将给出数值算例，以展示所考虑的样条空间在二阶和四阶边值问题的最小二乘逼近与有限元逼近中的性能。首先，我们将说明如何利用第 2.3 节和第 2.4 节中提出的约化方法。

4.1 基缩减的实际方面

类似于第2.2节中定义的映射 $\mathcal{B}_0$，我们将 $\mathcal{B}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ 记作将点 $p \in \Omega$ 映射到列向量 $[B_1(p)\ B_2(p)\ldots\ldots,\ B_m(p)]^T$ 的映射。设 $\mathcal{S}_r\colon \Omega \to \mathbb{R}^{m+m_r}$, $r \in \{0,1,2\}$ 是将 $p \in \Omega$ 映射到由向量 $\mathcal{B}(p)$ 和 $\mathcal{B}_r(p)$ 组合而成的列向量的映射。那么，$\mathcal{S}_r$ 确定了 $\mathbb{S}_r(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的一个基，并且对于每个 $s_r \in \mathbb{S}_r(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$，都存在一个列向量 $c_r \in \mathbb{R}^{m+m_r}$，使得

$$s_r(p) = \mathcal{S}_r(p)^T \cdot c_r. \tag{1}$$

映射 $\mathcal{S}_r$ 可通过扩展提取矩阵联系起来，如下所示：

$$\mathcal{S}_1(p) = \widetilde{H}_1 \cdot \mathcal{S}_0(p), \quad \mathcal{S}_2(p) = \widetilde{H}_2 \cdot \mathcal{S}_1(p),$$

其中

$$\widetilde{H}_1 = \begin{bmatrix} I & \\ & H_1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{H}_2 = \begin{bmatrix} I & \\ & H_2 \end{bmatrix},$$

并且 $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 表示单位矩阵。此外，对于 $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\alpha,\ \beta \le \gamma$，令$\mathcal{M}_r^{(\alpha,\beta,\gamma)}\colon \Omega \to \mathbb{R}^{(m+m_r)\times(m+m_r)}$ 为由下式定义的映射

$$\mathcal{M}_r^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p) = \left(D_x^\alpha D_y^{\gamma-\alpha}\mathcal{S}_r(p)\right)\cdot\left(D_x^\beta D_y^{\gamma-\beta}\mathcal{S}_r(p)\right)^T. \tag{2}$$

由于

$$\mathcal{M}_1^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p) = \widetilde{H}_1 \cdot \mathcal{M}_0^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p)\cdot\widetilde{H}_1^T,$$
$$\mathcal{M}_2^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p) = \widetilde{H}_2 \cdot \mathcal{M}_1^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p)\cdot\widetilde{H}_2^T,$$

只需计算 $\mathcal{M}_0^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p)$ 即可。随后，通过矩阵乘法即可轻松得到 $\mathcal{M}_1^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p)$ 和 $\mathcal{M}_2^{(\alpha,\beta,\gamma)}(p)$。所考虑的映射可用于表示逼近方法中通常出现的矩阵。例如，正如我们将在接下来的章节中所展示的，质量矩阵和刚度矩阵可以通过对这些映射进行逐元素积分来获得。

4.2 最小二乘近似

对于函数 $f \in L^2(\Omega)$，其在 $\mathbb{S}_r(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 中的最小二乘逼近 s_r 由正交条件给出。

$$\int_\Omega \mathcal{S}_r(p)\cdot\left(f(p) - s_r(p)\right)\,\mathrm{d}p = 0,$$

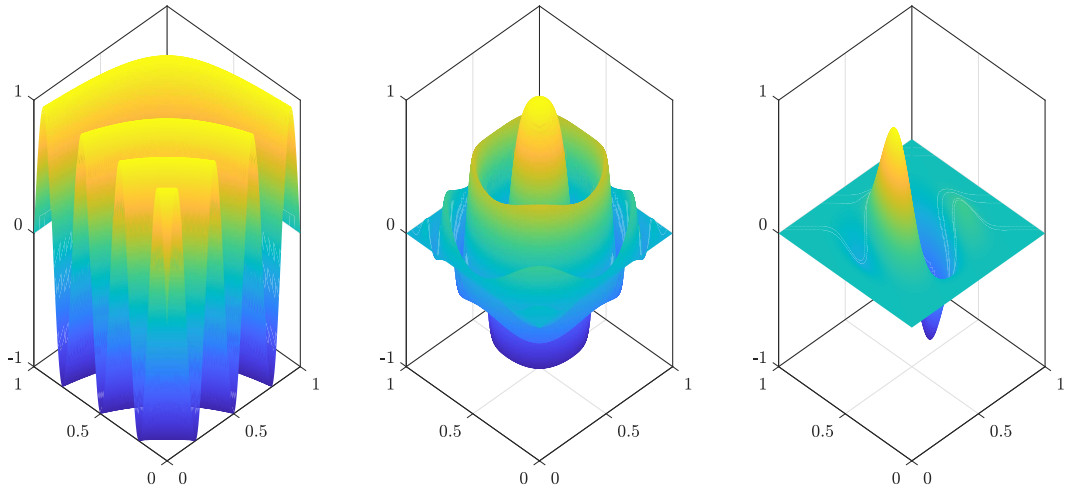
其中积分按单元逐个计算。根据（1）和（2），这与以下内容相同：

$$\left(\int_\Omega \mathcal{M}_r^{(0,0,0)}(p)\,\mathrm{d}p\right)\cdot c_r = \int_\Omega \mathcal{S}_r(p)\cdot f(p)\,\mathrm{d}p.$$

例 12. 我们近似这个函数

$$f(x,y) = \sin\left(7\pi(1-x)(1-y)\right) \tag{3}$$

在 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$上；见图 *8*（左）。该区域最初由图 *9* 所示的三角剖分$\triangle$ 划分，随后通过三角剖分 $\triangle^\ell$ 分别针对 $\ell = 2^k$、 $k = 1$、<*style id="8"*>*2*、<*style id="10"*>*3*进行细化。



Fig图 8：数值示例中使用的函数 (3)、(6)、(8) 的图像（从左到右） es.

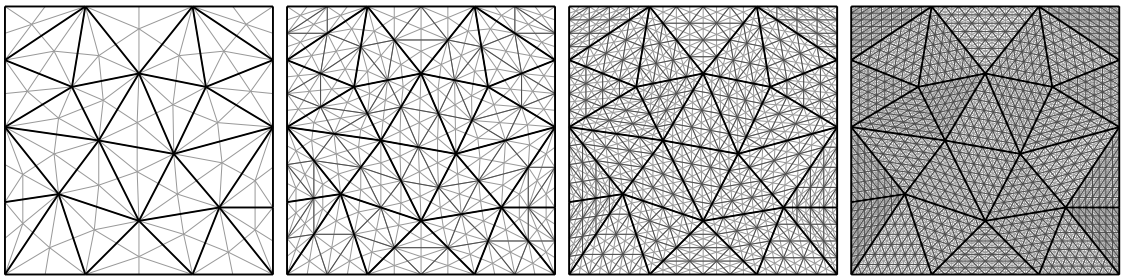


图 9：单位正方形的一个非结构化三角剖分 $\triangle = \triangle^1$ （左）以及随后进行的三次一致加细 $\triangle^\ell$，分别对应 $\ell = 2^k$、 $k = 1$，2，3（从左至右）。 $\triangle^\ell$ 的 Powell–Sabin 加细以浅灰色显示。

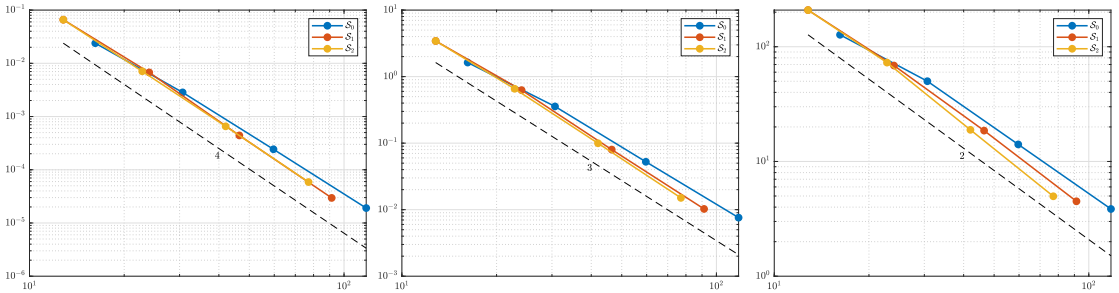


图 10：在例 12 的最小二乘逼近问题中， L^2、 H^1 和 H^2 的误差（从左到右）相对于自由度数平方根的变化。

图 *10* 展示了最小二乘逼近在空间$\mathbb{S}_r(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$、 $r = 0$、1、2中的 L^2、 H^1和 H^2 误差，这些误差对应于与各空间相关的自由度数（*NDOF*）的平方根。由于 *NDOF* 的平方根与三角剖分中最长边的长度成反比，我们观察到，就这三种误差而言，三种情况下的收敛率均达到最优。我们还看到，就相对于 *NDOF* 的精度而言，约化空间的解优于全空间的解。

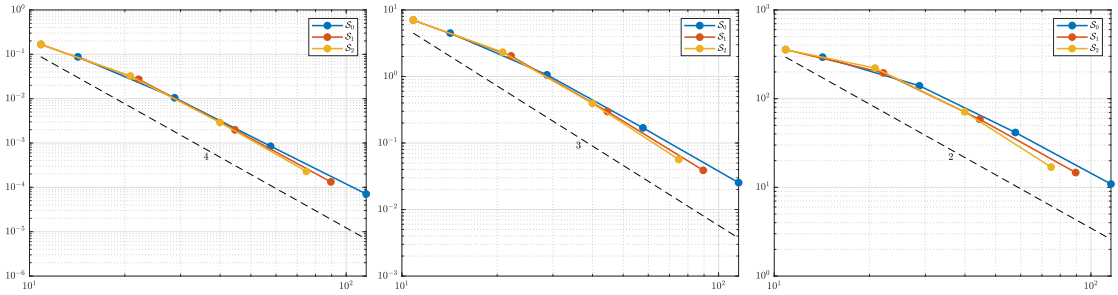


图11： L^2、 H^1和 H^2 误差（从左到右）与二阶边值问题（例 13）中自由度数平方根的关系。

4.3 二阶边值问题的近似解

对于函数 $f \in L^2(\Omega)$，通常通过考虑二阶边值问题的变分形式，得到其解 u 在 $\mathbb{S}_r(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$中的近似 s_r

$$\begin{cases} -\nabla^2 u(p) = f(p) & \text{if } p \in \Omega, \\ u(p) = 0 & \text{if } p \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

来求解。

$$\int_\Omega \nabla u(p) \cdot \nabla v(p)\,\mathrm{d}p = \int_\Omega f(p) v(p)\,\mathrm{d}p, \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

设 $\mathcal{S}_r$ 是由 $\mathcal{S}_r$ 中在Ω边界上为零的基函数组成的列向量。用 $\mathring{\mathcal{S}}_r$的各分量张成的空间离散化 $H_0^1(\Omega)$时，条件（5）可表示为线性方程组

$$\left(\int_\Omega \left(\mathring{\mathcal{M}}_r^{(1,1,1)}(p) + \mathring{\mathcal{M}}_r^{(0,0,1)}(p) \right) \mathrm{d}p \right) \cdot \mathring{c}_r = \int_\Omega \mathring{\mathcal{S}}_r(p) \cdot f(p)\,\mathrm{d}p,$$

其中， $\mathring{\mathcal{M}}_r^{(1,1,1)}$和 $\mathring{\mathcal{M}}_r^{(0,0,1)}$的定义方式与（2）中的 $\mathcal{M}_r^{(1,1,1)}$和 $\mathcal{M}_r^{(0,0,1)}$相同，但将$\mathcal{S}_r$ 替换为 $\mathring{\mathcal{S}}_r$。方程组的解 $\mathring{c}_r$ 确定了近似 $s_r = \mathring{\mathcal{S}}_r^T \cdot \mathring{c}_r$。

例 13. 我们对制造解进行近似。

$$u(x,y) = 16x(1-x)y(1-y)\cos\left(16\pi\left((x-\tfrac{1}{2})^2 + (y-\tfrac{1}{2})^2\right)\right), \tag{6}$$

如图 *8*（中）所示，将其应用于区域为正方形、划分方式如例 *12*（图 *9*）所示的问题 (4) 。图 *11* 给出了样条近似 $\mathbb{S}_r(\triangle^{\ell}_{\mathrm{PS}})$ 的 L^2、 H^1 和 H^2 误差。我们再次看到，收敛率达到最优；相对于自由度数，约化空间所得解的精度更高。

4.4 四阶边值问题的近似解

最后，对于 $f \in L^2(\Omega)$，我们考虑四阶边值问题。

$$\begin{cases} \nabla^4 u(p) = f(p) & \text{if } p \in \Omega, \\ u(p) = 0 & \text{if } p \in \partial\Omega, \\ \nabla u(p) \cdot \nu = 0 & \text{if } p \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。解 u 可通过变分形式描述

$$\int_\Omega \nabla^2 u(p)\,\nabla^2 v(p)\,\mathrm{d}p = \int_\Omega f(p) v(p)\,\mathrm{d}p, \quad v \in H_0^2(\Omega).$$

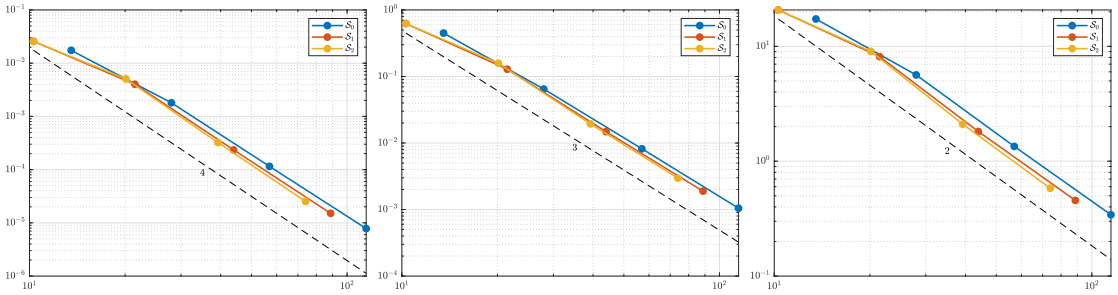


图 12：例 14 的四阶边值问题中， L^2、 H^1 和 H^2 的误差（从左到右）随自由度数平方根的变化。

°现在令 $\mathcal{S}_r$ 为由 $\mathcal{S}_r$ 中的基函数组成的列向量，这些基函数在 Ω 的边界上为零，且法向导数在 Ω 的边界上为零。用 $\mathring{\mathcal{S}}_r$的分量张成的空间对 $H_0^2(\Omega)$ 进行离散化后，我们得到线性方程组

$$\left(\int_\Omega \left(\mathring{\mathcal{M}}_r^{(2,2,2)}(p)+\mathring{\mathcal{M}}_r^{(2,0,2)}(p)+\mathring{\mathcal{M}}_r^{(0,2,2)}(p)+\mathring{\mathcal{M}}_r^{(0,0,2)}(p)\right)\,\mathrm{d}p\right)\cdot \mathring{c}_r=\int_\Omega \mathring{\mathcal{S}}_r(p)\cdot f(p)\,\mathrm{d}p,$$

其中，左侧积分中出现的映射定义为式（2）中对应项的类似形式，其中用 $\mathcal{S}_r$ 替换 $\mathcal{S}_r$。方程组 $\mathring{c}_r$ 的解给出了 $\mathbb{S}_r(\triangle_{\mathrm{PS}}^\ell)$ 中 u 的一个近似 $s_r=\mathring{\mathcal{S}}_r^T\cdot\mathring{c}_r$。

例 14。与例 *12* 和例 *13* 一样，我们考虑由图 *9* 所示的一系列三角剖分划分的正方形区域。图 *12* 显示了问题 (7) 的近似解 L^2、 H^1和 H^2 误差，其中制造解

$$u(x,y)=\sin\left(2\pi(2x-y)\right)\sin(\pi x)^4\sin(\pi y)^4 \tag{8}$$

绘于图 *8*（右）。结果表明，空间 $\mathbb{S}_r(\triangle_{\mathrm{PS}}^\ell)$ 中的近似表现出与前述示例相同的行为。事实上，它们都呈现出最优收敛率，而缩减有助于获得相对于自由度数更高的精度。

<escape>°</escape>**注 15.** 此处用于 $\mathcal{S}_r$ 四阶问题的基函数与第 *4.3* 节中用于二阶问题的基函数不同。下面针对$r=2$对此进行更详细的说明。对于每条边界边 $e_j\in E^\ell$ 及包含 e_j的相应三角形 $t_k\in T^\ell$，基函数 $B^2_{\xi_2(e_j,t_k)}$ 在边界上的函数值为零，但法向导数不为零。图*4*（右）中以红色展示了这样一个基函数的示例。此外，对于连接两条共线边界边的每个边界顶点 $v_i\in V^\ell$，以及适当选取的三角形 q_i^v（其中一条边位于边界上），三个相应的基函数中也有一个在边界上的函数值为零，但法向导数不为零。图 *3*（左）中以蓝色展示了这样一个基函数的示例。

5 结论

样条方法所应用的区域大部分采用规则划分，这种情况十分常见；也就是说，只有少数小区域采用非规则网格剖分。尽管这些非规则部分所占面积往往微不足道，但它们在样条构造中绝非无关紧要；若处理不当，可能会导致精度降低和形状缺陷。本文通过采用非结构化样条技术，并对规则细化区域施加额外的光滑性条件，以减少相关自由度，从而解决这一问题。

本文的主要贡献是提出一种基于三次 Powell–Sabin B样条的提取过程。凭借线性无关性、局部支撑、 C^1 连续性、非负性、单位分解和三次精度，这些样条函数为任意给定的三角剖分提供了稳健可靠的近似框架。从初始基函数集合中提取更光滑的函数，不会损害最优逼近能力；数值算例表明，在自由度数量相同的情况下，这种方法能够获得更高的精度。

提取过程分为两个步骤。首先，在三角形内部，即在 Powell–Sabin 细分的某些边和分裂点处，获得部分 C^2 光滑性。其次，在具有对称配置的每个三角形内部，获得完整的 C^2 光滑性。完整基函数集与两种简化方案之间的转换很简单，可用稀疏提取矩阵表示。这些矩阵可直接用于逼近方法。本文以最小二乘逼近方法和有限元方法为例，展示了如何利用它们求解二阶和四阶边值问题。

尽管本文研究的是在初始非结构化三角剖分上进行的提取过程，且该三角剖分随后经过均匀细化，但只要能够识别出具有对称配置的三角形集合，本文所述技术便适用。此外，当 Powell–Sabin 细分的边在三角形分裂点处仅呈现三种不同斜率时，对称配置这一概念很可能可以放宽为更一般的几何对称性。为保持三次精度，这种扩展需要对基函数进行不同的重组，是未来研究的一个课题。

致谢

J. Gro˘selj 部分得到了斯洛文尼亚共和国研究活动公共署（ARRS）研究计划 P1-0294 的资助。H. Speleers 部分得到了意大利国家高等数学研究所（GNCS – INdAM）科学计算国家小组（GNCS）的 GNCS 2022 项目（CUP E55F22000270001）资助，以及授予罗马第二大学数学系的 MUR 卓越系项目 MatMod@TOV（CUP E83C23000330006）的资助。

三次多项式再现

在本附录中，我们证明第二个约化样条空间 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 包含总次数小于或等于 3 的二元多项式空间 $\mathbb{P}_3$。Speleers (2015) 给出的第一个约化样条空间 $\mathbb{S}_1(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$ 的刻画告诉我们，任意 $g \in \mathbb{P}_3$ 都属于 $\mathbb{S}_1(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$。考虑 (1)，它可以唯一表示为

$$g(p) = \mathcal{S}_1(p)^T \cdot c_1$$

对于某个列向量 $c_1 \in \mathbb{R}^{m+m_1}$。按照第2.4节中的约化步骤，我们看到基函数 $B_1, B_2, \ldots, B_m$ 在基 $\mathcal{S}_2$中保持不变。对于每一对 (e_j, t_k),$(e_j, t_{k'})$，只要 t_k和 $t_{k'}$ 都属于 $T^\ell \setminus T^\ell_{\mathrm{sym}} \cup \{\emptyset\}$，基函数 $B^1_{\xi_1(e_j, t_k)}$、$B^1_{\xi_1(e_j, t_{k'})}$ 也同样如此。因此，为了验证 $g(p)$ 能否用 $\mathcal{S}_2(p)$ 表示，我们只需关注剩余的基函数集合。

设 $t_k \in T^\ell_{\mathrm{sym}}$ 为一个三角形，其顶点为 v_{i_1}、v_{i_2}和 v_{i_3}。此外，设 $t_{k'} \in T^\ell$ 为相邻三角形，其顶点为 v_{i_1}、v_{i_2}和 $v_{i'_3}$。最后，设 $e_j \in E^\ell$ 为连接顶点 v_{i_1} 和 v_{i_2}的边。由于 t_k 具有对称配置，我们知道

$$\begin{aligned} v^t_k &= \frac{v_{i_1} + v_{i_2} + v_{i_3}}{3} = \frac{2v_{i_3} + v_{i'_3}}{3}, \\ v^t_{k'} &= \frac{v_{i_1} + v_{i_2} + v_{i'_3}}{3} = \frac{v_{i_3} + 2v_{i'_3}}{3}. \end{aligned}$$

设 $\mathfrak{B}[g]$ 表示多项式 $g \in \mathbb{P}_3$ 的极点；关于极点的更多详细信息，请参见 Seidel (1993) 和 Speleers (2011)。根据 Groˇselj and Speleers (2017)，我们知道 $g(p)$ 可以用 $\mathcal{S}_1(p)$ 表示为

$$g(p) = \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_k^t) B^1_{\xi_1(e_j,t_k)}(p) + \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{k'}^t) B^1_{\xi_1(e_j,t_{k'})}(p) + R_1(p),$$

其中， $R_1(p)$ 汇集了 $\mathcal{S}_1(p)$ 中其余基函数的贡献。利用 blossom 的多仿射性质，我们得到

$$\begin{aligned} g(p) &= \mathfrak{B}[g]\Big(v_{i_1}, v_{i_2}, \frac{2v_{i_3} + v_{i_3'}}{3}\Big) B^1_{\xi_1(e_j,t_k)}(p) + \mathfrak{B}[g]\Big(v_{i_1}, v_{i_2}, \frac{v_{i_3} + 2v_{i_3'}}{3}\Big) B^1_{\xi_1(e_j,t_{k'})}(p) + R_1(p) \\ &= \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3})\Big[\frac{2}{3} B^1_{\xi_1(e_j,t_k)}(p) + \frac{1}{3} B^1_{\xi_1(e_j,t_{k'})}(p)\Big] \\ &\quad + \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3'})\Big[\frac{1}{3} B^1_{\xi_1(e_j,t_k)}(p) + \frac{2}{3} B^1_{\xi_1(e_j,t_{k'})}(p)\Big] + R_1(p). \end{aligned}$$

对所有至少有一个三角形属于 T^ℓ_{sym} 的三角形二元组重复上述论证后，我们得到

$$g(p) = \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}) B^2_{\xi_2(\emptyset,t_k)}(p) + \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3'}) B^2_{\xi_2(\emptyset,t_{k'})}(p) + R_2(p)$$

若 $t_{k'} \in T_{\mathrm{sym}}$，或

$$g(p) = \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}) B^2_{\xi_2(\emptyset,t_k)}(p) + \mathfrak{B}[g](v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3'}) B^2_{\xi_2(e_j,t_{k'})}(p) + R_2(p)$$

若 $t_{k'} \in T^\ell \setminus T^\ell{}_{\text{对称}}$，其中两种情况下， $R_2(p)$ 均汇集了 $\mathcal{S}_2(p)$ 中其余基函数的贡献。这意味着每个多项式 $g \in \mathbb{P}_3$ 都可以用基 $\mathcal{S}_2$表示，因此属于空间 $\mathbb{S}_2(\triangle^\ell_{\mathrm{PS}})$。

参考文献

Barucq, H., Calandra, H., Diaz, J., Frambati, S., 2022年。由细 zonotopal 铺砌生成的多项式再生样条空间。《计算与应用数学杂志》402，113812。

Beir˜ao da Veiga, L., Hughes, T.J.R., Kiendl, J., Lovadina, C., Niiranen, J., Reali, A., Speleers, H., 2015. 一种适用于 Reissner–Mindlin 板的无锁定模型：通过 NURBS 和三角形 NURPS 进行分析与等几何实现。《数学模型与应用方法》25，1519–1551。

Borden, M.J., Scott, M.A., Evans, J.A., Hughes, T.J.R., 2011. 基于 NURBS 的 B´ezier 提取的等几何有限元数据结构。《国际数值方法工程杂志》87，15–47。

Bressan, A.，Sande, E.，2019年。有限元法、DG 和等几何分析中的近似：理论比较。《Numer. Math.》143，923–942。

Cao, J., Chen, Z., Wei, X., Zhang, Y.J., 2019年. 一种基于三角形配置上的二元单纯形样条的有限元框架. 计算方法与应用力学工程 357, 112598.

Chan, C.L., Anitescu, C., Rabczuk, T., 2018年。具有强多片 C^1-耦合的等几何分析。计算机辅助几何设计 62，294–310。

Clough, R.W.、Tocher, J.L.，1965。《用于弯曲板分析的有限元刚度矩阵》，载于：结构力学中的矩阵方法会议，美国俄亥俄州赖特-帕特森空军基地，第515–545页。

Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y., 2009年. 等几何分析：迈向计算机辅助设计与有限元分析的集成. 约翰·威立父子出版公司.

Dierckx, P., 1997年. 关于规范化 Powell–Sabin B样条的计算. 计算机辅助几何设计 15, 61–78. Evans, J.A., Bazilevs, Y., Babuska, I., Hughes, T.J.R., 2009. n-宽度、上确界-下确界以及等几何有限元方法 k版本的最优性比率. 计算方法与应用力学工程 198, 1726–1741. Groˇselj, J., Knez, M., 2021年. 两个三角形上的 C^1 多项式样条边缘B样条函数的构造及其在Argyris型样条中的应用. 计算数学及其应用 99, 329–344. Groˇselj, J., Knez, M., 2022年. 面向计算机辅助几何设计和有限元方法的广义 C^1 Clough–Tocher样条. 计算方法与应用力学工程 395, 114983. Groˇselj, J., Speleers, H., 2017. 三次 Powell–Sabin B样条的构造与分析. 计算机辅助几何设计 57, 1–22. Groˇselj, J., Speleers, H., 2021年. 三方向三角剖分上的超光滑三次 Powell–Sabin样条：B样条表示与细分. 计算与应用数学杂志 386, 113245. Hughes, T.J.R., Reali, A., Sangalli, G., 2008年. 结构动力学与波传播中离散近似的对偶性和统一分析：比较 p方法有限元与 k方法NURBS. 计算方法与应用力学工程 197, 4104–4124. Jaxon, N., Qian, X., 2014年. 三角剖分上的等几何分析. 计算机辅助设计 46, 45–57. Kapl, M., Sangalli, G., Takacs, T., 2019年. 非结构化多片平面域上的等几何 C^1 子空间. 计算机辅助几何设计 69, 55–75. Karˇciauskas, K., Nguyen, T., Peters, J., 2016年. 推广双三次样条，用于具有不规则布局的建模与等几何分析. 计算机辅助设计 70, 23–35. Lai, M.J., Schumaker, L.L., 2007. 三角剖分上的样条函数. 剑桥大学出版社. Liu, N., Jeffers, A.E., 2018年. 几何精确等几何Kirchhoff板：特征保持自动网格划分与 C^1 有理三角形B´ezier样条离散. Int. J. Numer. Methods Eng. 115, 395–409. Liu, Y., Snoeyink, J., 2007. 通过推广高阶Voronoi图构造二次和三次B样条，载于：第23届计算几何年度研讨会论文集，美国计算机协会。第150–157页。 Lyche, T., Manni, C., Speleers, H., 2022. 任意三角剖分上 C^2 三次样条的构造. 计算数学基金会 22, 1309–1350. Lyche, T., Merrien, J.L., 2018年. Clough–Tocher单元上的单形样条. 计算机辅助几何设计 65, 76–92. Manni, C., Sande, E., Speleers, H., 2022年. 将最优样条子空间应用于消除等几何离散中的虚假离群值. 计算方法与应用力学工程 389, 114260. Neamtu, M., 2007. Delaunay构型与多元样条：对B. N. Delaunay一项结果的推广. 美国数学会会刊 359, 2993–3004. Powell, M.J.D., Sabin, M.A., 1977年. 三角形上的分片二次近似. 美国计算机协会数学软件汇刊 3, 316–325.

Sande, E., Manni, C., Speleers, H.，2019年。样条近似的精确误差估计：显式常数、 n-宽度与特征函数收敛。数学模型与方法及应用科学 29，1175–1205。Schmitt, D.，2021年。凸构形生成的双变量 B 样条。计算机系统科学杂志 120，42–61。Scott, M.A., Borden, M.J., Verhoosel, C.V., Sederberg, T.W., Hughes, T.J.R.，2011年。基于 T 样条 B´ezier 提取的等几何有限元数据结构。国际数值方法工程杂志 88，126–156。Seidel, H.P.，1993年。极形式简介。IEEE 计算机图形与应用 13，38–46。Speleers, H.，2010a。一种五次 Powell–Sabin 样条的规范化基。计算机辅助几何设计 27，438–457。Speleers, H.，2010b。一种约化 Clough–Tocher 样条的规范化基。计算机辅助几何设计 27，700–712。Speleers, H.，2011年。Bernstein–B´ezier 形式的多元多项式与张量代数。计算与应用数学杂志 236，589–599。Speleers, H.，2013年。构造 Powell–Sabin 三角剖分上一族光滑样条空间的规范化 B 样条。构造近似 37，41–72。Speleers, H.，2015年。一种 Powell–Sabin 三角剖分上三次样条的新 B样条表示。计算机辅助几何设计 37，42–56。Speleers, H.，2019年。算法 999：多次数 B 样条的计算。美国计算机协会数学软件汇刊 45，43。Speleers, H., Manni, C.，2015年。基于 Powell–Sabin 样条优化等几何分析中的区域参数化。计算与应用数学杂志 289，68–86。Speleers, H., Manni, C., Pelosi, F., Sampoli, M.L.，2012年。采用 Powell–Sabin 样条对对流-扩散-反应问题进行等几何分析。计算方法与应用力学工程 221–222，132–148。Speleers, H., Toshniwal, D.，2021年。一类通用的 C^1 光滑有理样条：在精确构造椭圆和椭球中的应用。计算机辅助设计 132，102982。Toshniwal, D., Speleers, H., Hughes, T.J.R.，2017年。无结构四边形网格上的光滑三次样条空间，特别关注非普通点：几何设计与等几何分析方面的考量。计算方法与应用力学工程 327，411–458。Wang, Z., Cao, J., Wei, X., Zhang, Y.J.，2022年。基于 TCB 样条的高质量参数化等几何分析方法。计算方法与应用力学工程 393，114771。Wei, X., Zhang, Y.J., Toshniwal, D., Speleers, H., Li, X., Manni, C., Evans, J.A., Hughes, T.J.R.，2018年。无结构四边形和六面体网格上的混合 B样条构造，在等几何分析中具有最优收敛率。计算方法与应用力学工程 341，609–639。Weinm¨uller, P., Takacs, T.，2022年。用于等几何分析的近似 C^1 多片空间，并与 Nitsche 方法进行比较。计算方法与应用力学工程 401，115592。Zareh, M., Qian, X.，2019年。基于三角形等几何分析的 Kirchhoff–Love 壳体公式。计算方法与应用力学工程 347，853–873。