arXiv:2305.02066v1 [eess.SY] 3 May 2023

非线性常微分方程系统模块化反步控制设计方法综述

预印本

Zhengru Ren清华大学深圳国际研究生院海洋工程研究所，中国深圳 518055，
zhengru.ren@sz.tsinghua.edu.cn

2023年5月4日

摘要

反步法是一种针对特定系统的成熟且强大的基于李雅普诺夫函数的设计方法。在三十年的发展过程中，创新性的理论与实践已将反步法扩展到复杂性不断增加的非线性系统的镇定与跟踪问题中。反步类方法的吸引力在于其递归设计过程和模块化设计。非线性系统可以被转化为一组简单问题，并通过依次叠加针对各个问题的相应方法加以求解。为处理复杂性，反步设计通常结合自适应控制和鲁棒控制。本综述旨在回顾数千篇出版物中的里程碑式理论成果，这些成果使复杂常微分方程系统的状态反馈反步设计变得系统化和模块化。本文评述了若干精选的优雅方法：从一般设计出发，继而介绍提高收敛率的有限时间控制、用于估计系统未知量的模糊逻辑系统和神经网络、处理未知控制系数的Nussbaum函数、解决状态约束的障碍李雅普诺夫函数，以及应用于鲁棒设计的双曲正切函数。文中还回顾了相关假设、李雅普诺夫函数候选函数、不等式及推导中的关键要点。非线性与复杂性体现在状态约束、扰动、输入非线性、时滞效应、纯反馈系统、事件触发系统和随机系统等方面。与网络化系统不同，本综述聚焦于独立系统。

关键词 反步法 法、自适应控制 ·鲁棒控制 · 非线性系统 · 李雅普诺夫方法 · 严格反馈形式系统 · 纯反馈 系统 · 输入非线性

1 引言

反步法于1991年首次提出，是一种基于李雅普诺夫方法、针对三角严格反馈形式系统的递归设计过程。简而言之，其主要思想是将整个系统划分为若干个子系统，并根据前一个子系统递归地设计全局控制器。当系统中包含不确定性时，则引入自适应控制。该方法已广泛应用于各种非线性系统。控制器与自适应更新律可以同时设计，从而改善瞬态性能。

经过三十多年的研究与发展，大量研究论文极大地拓展了反步法的应用领域。在最初的五年中，基本反步法方案以及针对参数不确定性的重新设计受到了广泛关注。随后，研究重点转向方法论的改进以及更为复杂的参数不确定性问题。进入2000年代，研究重点转向具有不确定性和非光滑特性的系统、神经自适应控制、时滞效应等。创新性的设计技术为解决各种非光滑效应和复杂不确定性提供了有效方案。在最近十年中，反步设计方法的应用范围进一步扩大至

更复杂的系统，例如包含若干上述不确定性的系统、切换系统、随机系统、时间触发系统、多智能体系统等。

文献中已有关于反步法和自适应控制的综述论文及教材，例如 [3–6]。然而，此后又开展了大量研究，例如执行器和传感器非线性 [7],非光滑系统和输入非线性 [8], 偏微分方程（PDE） [9], 神经自适应控制 [10],容错控制 [11]。目前仍缺乏对最先进研究进展的系统性总结。尽管网上已有数千篇论文，但其中能够提取出的重要贡献数量有限。每种方法都针对非线性系统的某种特定形式。相关创新通常依赖一系列假设。由于许多研究结合了若干已有方法，这些工作的篇幅大多集中于一些重复的假设、引理、定义、李雅普诺夫函数候选项（LFC）以及递归推导。在本综述中，我们试图指出不同方法的本质，并体现出便于设计者理解和应用的特点。

因此，我们认为，及时综述适用于具有各种非线性的常微分方程（ODE）系统的最新反步法类技术，将会很有帮助。本综述的另一个目标是帮助感兴趣的读者以系统化、模块化的方式找到适当的方法来处理复杂非线性系统。复杂非线性系统可以分解为若干简化问题，并通过整合基本方法与相应的李雅普诺夫函数分量来求解。具体方法的选择取决于所构造的李雅普诺夫函数。设计步骤概述如下：（i）将系统划分为若干典型的小问题，并将每个小问题转化为典型形式；（ii）为每个小问题选择合理的方法，以及相应的假设和李雅普诺夫函数候选；（iii）通过整合所有方法，递归设计类反步法控制。诚然，本综述所列参考文献并非详尽无遗。由于一些在概念上更为深奥的方法难以系统分类，且推导与证明过程复杂，妨碍了它们的模块化应用，因此未将其纳入。尽管如此，我们相信本综述包含许多重要方法，学术界的后来者也会对此感兴趣。

本综述的大部分内容写于我2019年博士研究的最后阶段，并于2020年稍作修订。它曾被用作挪威挪威科技大学博士课程的讲义。博士生们给予了非常积极的反馈，他们表示，理解高级反步法算法从未如此简单。

本文其余部分组织如下。第二节回顾了几种广泛使用且优雅的方法，包括积分器反步控制、动态面控制、指令滤波反步法、有限时间控制、模糊逻辑系统、神经网络、Nussbaum函数、障碍李雅普诺夫函数和双曲正切函数。第三节介绍并讨论了一类系统的关键理论与方法创新，即状态约束、扰动、输入非线性、时滞效应、纯反馈系统和随机系统。大多数复杂性问题均被转化为可通过上述优雅方法求解的形式。第四节对相关进展进行了总结和讨论。

为使综述简洁且结构清晰，以下内容中将采用一些不再另行说明的简化处理。首先，仅综述单输入单输出（SISO）系统，因为多输入多输出（MIMO）系统的设计方法通常与之类似。MIMO 系统的结果可相应调整。此外，由于状态估计器设计 [12, 13], 并非本综述的重点，因此不予讨论，而它是输出反馈控制所必需的。为证明整个系统的稳定性，还应将估计误差纳入 LFC。

1.1 符号说明

向量 x 的欧几里得范数和矩阵 A 的弗罗贝尼乌斯范数分别记为 $|x|$ 和 $|A|_F$。黑板粗体变量表示集合和定义域，例如， $\mathbb{R}^n$、 $\mathbb{R}_+$和 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 分别表示 n 维实数空间、非负实数集和 $n\times m$ 实数空间。 $a^{(b)}$ 表示 a的 b^{th} 导数。 C^i 表示所有具有连续 i^{th} 阶可微性的函数的集合，而 $C^{i,\ 1}$ 表示在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times S$ 上取值为非负函数 $V(x,\ t,\ r)$ 的函数族，这些函数在 x 上属于 C^i，且在 t上属于 C^1。大小为 $m\times n$ 的单位矩阵和零矩阵分别记为 $I_{m\times n}$ 和 $0_{m\times n}$。特别地， I_n 和 0_n 分别是 $I_{n\times n}$ 和 $0_{n\times n}$的单位矩阵和零矩阵的简写。指标集定义为 $\mathcal{I}=\{\underline{1},2,\cdots,n-1\}$。函数 V关于 f的李导数定义为 $L_fV=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)$。

带帽号和波浪号的变量分别表示估计值和估计误差。它们之间的关系为，. ˜ ˆ ˜ˆ 例如，可由 $\theta=\theta-\theta$ 给出。当 θ 是常数时， $\theta=-\theta$。上划线和下划线（例如， c 和 c）分别表示最大值和

变量 c的极小值。符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(a)=\begin{cases}1, & \text{if } a>0\\ 0, & \text{if } a=0\\ -1, & \text{if } a<0.\end{cases}$$

1.2 预备知识

由于未知的非线性难以得到充分估计并予以抵消，因此将最广泛使用的稳定性引理更新如下。

引理1 如果初始条件 $V(0)$ 有界， $V(x)$ 正定且连续，并且满足类李雅普诺夫不等式，即，则 *LFC* $V(x)$ 有界。

$$\dot{V}(x)\leq -\gamma V(x)+\delta, \tag{1}$$

其中 $\gamma>0$ 和 $\delta>0$。定义 $\rho:=\delta/\gamma$,

$$0\leq V(t)\leq \rho+(V(0)-\rho)\exp(-\gamma t). \tag{2}$$

而这意味着 *that*

$$V(t)\leq e^{-\gamma t}V(0)+\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\rho(\tau)d\tau,\ \forall t\geq 0, \tag{3}$$

对于任意有限常数 γ。

证明 在等式两边同时乘以 $\exp(-\gamma t)$，由（1）式可得 $\dot{V}\exp(-\gamma t)+\gamma V\exp(\gamma t)\leq \delta\exp(\gamma t)$。对两边积分，得到 $\frac{d}{dt}V\exp(\gamma t)\leq \frac{\delta}{\gamma}\frac{d}{dt}\exp(\gamma t)$。因此，我们有 $V(t)\exp(\gamma t)-V(0)\leq \rho(\exp(\gamma t)-1)$。

引理1对于证明全局半稳定性至关重要，而这正是大量论文的基础。本综述中的许多研究都利用引理1来证明最终稳定性。跟踪误差会收敛到原点附近的一个小邻域，而不会恰好停留在平衡点。 γ 的值可以通过一个简单的不等式 $c_{\min}\sum_{i=1}^n x_i^2\leq c_1x_1^2+\cdots+c_nx_n^2\leq c_{\max}\sum_{i=1}^n x_i^2$求得，其中 $c_{\min}=\min\{c_1,c_2,c_3,\cdots c_n\}$ 且 $c_{\max}=\max\{c_1,c_2,c_3,\cdots c_n\}$。根据式（3）， γ的选择不仅会影响最终跟踪误差的界限，还会决定收敛率。针对形式类似的更复杂系统，已有若干种变换方法被提出。

此外，还有许多其他证明有界性的方法；不过，引理1应用最为广泛，其推导复杂度较低、限制相对宽松，并启发了许多其他系统化方法。

2 优雅的方法

反步法可分为基于抵消的反步法和基于无源性的反步法[14]。根据发表论文的数量，前一种方法占据主导地位。本节回顾了若干优雅的设计方法，数以千计的论文从中受益；见图1。这些方法构成了大量论文的基础。每种方法都可应用于复杂程度和非线性各异的问题。如果一种方法能够应用于各种问题，并与其他设计方法相结合，我们就认为它是优雅的。每种方法都从积分器链出发，逐步扩展到越来越复杂的系统，例如，从线性系统扩展到非线性系统，从完全已知的系统扩展到未知且受扰动的系统，以及从二阶或三阶系统扩展到大型系统的递归设计。由于大多数非线性无法完全抵消，大多数方法都适用于引理1，且设计过程和稳定性证明遵循类似的方法。

实现抵消主要有两种思路。第一种是尽可能抵消非线性，从而采用鲁棒性方法。第二种是利用在线神经网络（NN）或模糊逻辑系统（FLS）近似所有内容，并抵消这些估计值。

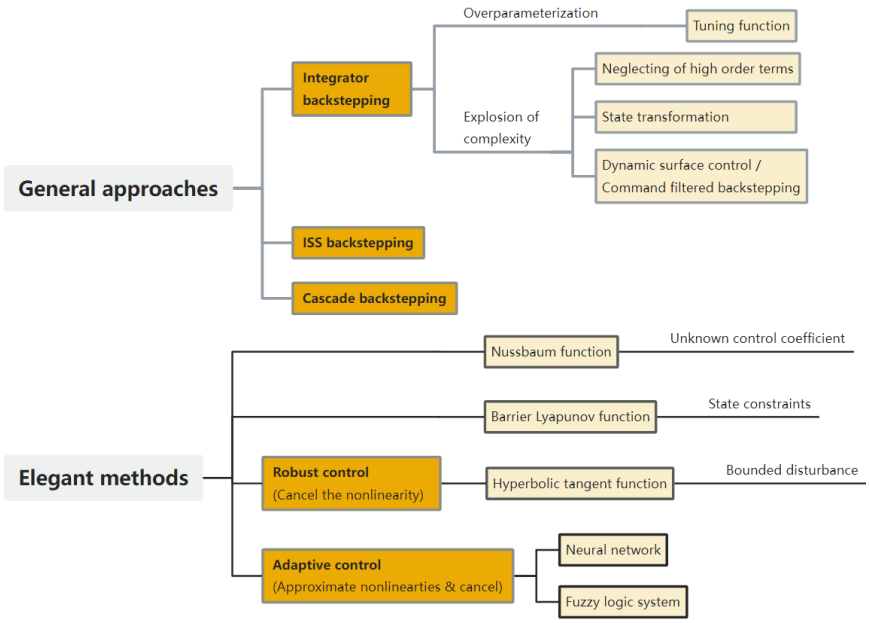

图 1：反步设计中采用的优雅模块化方法。

2.1 通用设计方法

作为反步设计的起点，具有三角结构的严格反馈非线性系统表示如下：

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + \phi_i(\bar{x}_i)^\top \theta, i \in \mathcal{I} \tag{4a}$$

$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + \phi_n(\bar{x}_n)^\top \theta, \tag{4b}$$

$$y = x_1, \tag{4c}$$

其中，x_1、$\cdots$、x_n为状态，f_1、$\cdots$、f_n、g_1、$\cdots$、g_n为光滑函数，g_i为控制系数函数，$\bar{x}_i = [x_1, x_2, \cdots, x_i]^\top$、$\theta \in \mathbb{R}^p$为未知常向量，假设 $\phi_i(\cdot): \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}^p$ 已知，u和 y分别为输入和输出。项$\theta^\top \phi_i(\bar{x}_i)$表示参数不确定性，即满足参数线性条件 [15]。除非另有说明，以下输出信号均为 $y = x_1$。当 $f_1 = \cdots = f_n = 0$和$g_1 = \cdots = g_n = 1$时，系统可简化为积分器链，即布鲁诺夫斯基形式。误差状态定义为 $z_1 = x_1 - x_{1d}$和 $z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i$，其中 x_{id}为期望轨迹，α_i为稍后将定义的虚拟控制律。控制目标是使 y 跟踪 x_{1d}，当 $t \to \infty$时，即 $t \to \infty$时满足 $z_1 = x_1 - x_{1d} \to 0$。定义新变量 $\bar{x}_{1d} = [x_{1d}^{(1)}, x_{1d}^{(2)}, \cdots, x_{1d}^{(i)}]^\top$、$\bar{z}_i = [z_1, z_2, \cdots, z_i]^\top$和 $\bar{z}_{i:j} = [z_i, z_{i+1}, \cdots, z_j]^\top$。

反步跟踪控制的一项常见假设是期望轨迹足够光滑，即参考信号 $x_d(t)$ 及其所需阶数以内的导数均已知、有界且连续。此外，假设 g_1、$\cdots$、g_n 的符号已知且为常数，即对所有 t，$|g_i| > 0$。本节将回顾三种基本方法，包括（自适应）积分器反步控制、带调谐函数的自适应反步法，以及动态面控制/指令滤波反步法。可以实现系统 (4) 的渐近跟踪自适应反步设计。

对每种方法的研究都始于积分器链，其中虚拟控制系数始终为 $g_i = 1$。随后，算法进一步引入了控制系数 g_i。一个常见的假设是，控制系数是已知的，且其符号保持不变，即存在未知的正常数 $\underline{g}_i$ 和 g_i，使得 $0 < \underline{g}_i \leq |g_i| \leq g_i$。因此，$g_i$ 的偏导数严格为正或严格为负。此外，奇异性问题也被忽略。

2.1.1 积分器反步控制与 ISS反步控制

常用的二次李雅普诺夫函数及其时间导数表示为 $V_{i,\ QF} = \frac{1}{2}z_i^2$，以及 $\dot{V}_{i,\ QF} = z_i \dot{z}_i$。步骤 i中的李雅普诺夫函数由前一步的李雅普诺夫函数与 $V_{i,\ QF}$叠加而成，即 $V_i = V_{i-1} + V_{i,\ QF}$。代入控制律后，原点的全局渐近稳定性在 [1] 中得到验证。当系统中包含内部系统时，$L_g V$ 反步法采用基于无源性理论的类似设计步骤 [16]。

当未知部分无法完全抵消时，采用 ISS 稳定性来证明跟踪误差的有界性[17]。可以设定增益以确保跟踪精度 [18]。

积分器反步控制的两个主要缺点是：

(i) 参数过多问题：因此会出现参数过多问题。通过使用调节函数，最后一步估计所有未知参数，可以缓解这一问题，从而显著降低控制器的阶数 [19]。然而，该方法对非参数非线性的鲁棒性较弱。

(ii) 复杂度激增：这源于对虚拟控制律的反复求导。需要计算虚拟控制信号 α_i 的导数。随着非线性系统阶数增加，求导计算会变得难以承受。当系统阶数 n 大于 3 时，解析推导既繁琐又冗长。为避免复杂度激增，有几种方法。首先，在实际实现中忽略高阶项是降低计算成本的一种可行方法；然而，这无法从理论上保证李雅普诺夫稳定性，甚至可能导致不稳定性。其次，可以通过定义一系列状态来采用状态变换

将 定义为 $\tilde{x}_1 = x_1 - x_{1d}$，将 $\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1}$ 定义为 $t \to \infty$，控制目标 $\tilde{x}_1 \to 0$ 为 $t \to \infty$。然后，系统 col$(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$ 处于积分链形式。误差状态定义为 $z_1 = \tilde{x}_1$ 和 $z_i = \tilde{x}_i - \alpha_{i-1}$ [20]。然而，对 f_i 进行复杂的时间微分仍不可避免。第三，为了系统性地避免此类问题，人们做出了诸多努力，例如动态面控制（动态表面控制，DSC） [21] 和指令滤波反步法 [22, 23]。

2.1.2 级联反步法

与积分器反步控制不同，级联反步法是另一种 [24]。对于动力学 $\dot{z}_i$， z_{i+1} 被视为输入。虚拟控制基于李雅普诺夫函数候选$V_i = V_{i,\ QF}$进行设计。如果 $z_i = 0$ 且系统（$\dot{z}_1$， $\cdots$， $\dot{z}_{i-1}$）是稳定的，并且如果 $z_{i+1} = 0$ 且系统 $\dot{z}_i$ 的稳定性被证明是稳定的，那么系统（$\dot{z}_1$， $\cdots$， $\dot{z}_i$）作为级联系统的稳定性得以证明。

2.1.3 动态面控　制与指令滤波反步　法

在早期阶段，动态面控制是多重曲面滑模控制的一种扩展，用于克服满足跟踪误差半全局有界性时的项爆炸问题。相关研究聚焦于一个不太一般的系统。随后，指令滤波反步法以一种更一般的三角形式被提出。其控制律与采用调节函数的控制律相似。这两种方法之间的差异在于稳定性证明。误差状态也具有相似的定义，即 $\tilde{x}_1 = x_1 - x_d$ 和 $\tilde{x}_i = x_i - x_i^c$，其中 x_i^c 是 α_i 的滤波信号。在设计过程的每一步中，都采用一阶低通滤波器对输入进行合成。低通滤波器的总数为 $n-1$。虚拟控制信号的导数由滤波信号替代；因此，不再需要进行解析微分，也不再需要常数-g_i 假设。此外，非Lipschitz系统也可以实现稳定。对于Lipschitz系统，动态面控制方法能够使系统实现全局指数稳定，并实现任意有界跟踪；对于非Lipschitz系统 [25]，则能够实现半全局任意有界调节与跟踪。

指令滤波器具有多种结构，例如，

- 一阶低通滤波器 [22]

$$\dot{x}_i^c = -\omega_i(x_i^c - \alpha_{i-1}), \tag{5}$$

- 二阶低通滤波器 [23]

$$\dot{\varphi}_{i,1} = -\omega_n \varphi_{i,2}, \tag{6a}$$
$$\dot{\varphi}_{i,2} = -2\zeta\omega_n\varphi_{i,2} - \omega_n(\varphi_{i,1} - \alpha_i), \tag{6b}$$

- 具有有限时间收敛特性的一阶Levant微分器 [26]

$$\dot{\varphi}_{i,1} = -a_i|\varphi_{i,1} - \alpha_i|^{1/2}\text{sign}(\varphi_{i,1} - \alpha_i) + \varphi_{i,2}, \tag{7a}$$
$$\dot{\varphi}_{i,2} = -b_i\text{sgn}(\varphi_{i,2} - \dot{\varphi}_{i,1}),\ i \in \mathcal{I}, \tag{7b}$$

其中 a_i 和　b_i 为整定系数， ζ 为阻尼比， ω_n 为固有频率，且$x_{i+1}^c = \varphi_{i,\ 1}$。
虚拟控制律和自适应律 α_i 使用 $\dot{x}_i^c$得以简化。稳定性通过 LFC $V = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}v_i^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^\top\Gamma^{-1}\tilde{\theta}$ 以及 $v_i = z_i - \xi_i$ 得到证明，而 ξ_i通常定义为

$$\dot{\xi}_1 = -k_1\xi_1 + g_1\xi_2 + (x_2^c - \alpha_2)g_1, \tag{8a}$$
$$\dot{\xi}_i = -k_i\xi_i + g_i\xi_{i+1} - g_{i-1}\xi_{i-1} + (x_{i+1}^c - \alpha_i)g_i, \tag{8b}$$
$$\dot{\xi}_n = -k_n\xi_n + g_{n-1}\xi_{n-1}. \tag{8c}$$

动态表面控制和命令滤波反步控制可以与其他技术结合使用。除了反馈抵消之外，增加幂积分器技术也是另一种可行的解决方案 [27, 28]。

2.1.4 参数分离

杨氏不等式是反步设计中最广泛使用的参数分离技术。如果 $\dot{V}_i$ 中存在项 $z_i a_i$，其中 a_i 是有界变量或常数，则根据杨氏不等式，有 $z_i a_i \leq \frac{1}{2}\varepsilon_i^2 z_i^2 + \frac{1}{2}\frac{a_i^2}{\varepsilon_i^2}$，其中 $\varepsilon_i > 0$。项 $\frac{1}{2}\varepsilon_i^2 z_i^2$可以通过虚拟控制律 α_i轻松抵消，而 $\frac{1}{2}\frac{a_i^2}{\varepsilon_i^2}$作为 $\delta = \sum_{i=1}^{n}\delta_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{a_i^2}{\varepsilon_i^2} \geq 0$留在最终李雅普诺夫函数 V_n 中。因此，当 δ 中的参数有界时，可以证明稳定性。根据引理1，在选择足够大的增益 $c_i > 0$时，γ 增大以减小 V_n 的边界，并且 ρ 减小，以确保误差具有更小的区域。ε_i 的选择不会影响总体控制增益 $\bar{c}_i = c_i + \frac{\varepsilon_i^2}{2}$ 和最终跟踪性能。较小的 ε_i 会导致较低的 $\frac{\varepsilon_i^2}{2}$ 和较大的 δ_i。为确保相同的边界，需要更高的 c_i 来在(1)中实现更高的 γ，反之亦然。

2.2 有限时间控制

众所周知，渐近稳定性意味着系统轨迹在 $t \to \infty$ 时收敛到平衡点 $t \to \infty$，因此在平衡点附近的收敛率较慢。有时，相较于渐近稳定性，人们更青睐快速响应和高精度的跟踪性能。与保证渐近收敛的典型反步法相比，有限时间控制技术响应更快，且具有更强的扰动抑制能力，从而确保系统在有限时间内收敛到平衡点，即对于任意 $t \geq T$，$\lim_{t\to T} x(t,\ x_0) = 0$ 且 $x(t,\ x_0) = 0$

其中，T是稳定时间。此外，有限时间稳定性具有更高的抗扰能力，并且即使存在多个平衡点，也能使系统收敛到原点。在早期阶段，局部有限时间设计方法齐次近似仅限于二维或三维系统 [29], ，例如终端滑模（TSM）控制 [30]。随后， [31] 将这些结果扩展到了全局域。

若有限时间收敛和李雅普诺夫稳定性均成立，则称自治系统 $\dot{x} = f(x(t))$ 的原点 $f(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ 是有限时间稳定平衡点。文献 [32] 提出了一种基于李雅普诺夫的有限时间稳定性定理。若存在连续正定函数 $V(x)$、实数 $\gamma > 0$ 和 $r \in (0,\ 1)$，使得，原点即为有限时间稳定平衡点，

$$\dot{V}(x) \leq -\gamma V^r(x), \forall x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \tag{9}$$

其中 $\gamma > 0$，且 $\mathbb{N}$ 是原点 [33] 的一个开邻域。镇定时间函数是 $\mathrm{LF}^T \leq \gamma^{\frac{1}{(1-r)V(x_0)^{1-r}}},\ x \in \mathbb{N}$ 初始值的函数。r 的选取决定了李雅普诺夫函数的收敛率。与情形 $r = 1$ (引理1) 相比，当 $r \in (0,\ 1)$ 时，在原点附近的小邻域内收敛率更快，而在远离原点的区域内则更慢。此外，式（9）的扩展形式为

- $\dot{V}(x) \leq -\gamma_1 V(x) - \gamma_2 V^r(x)$ [30] (10)
- $\dot{V}(x) \leq -\gamma_1 V^{r'}(x) - \gamma_2 V^r(x)$ [34] (11)

其中 $\gamma_1 > 0$、$\gamma_2 > 0$和 $r' > 1$。当跟踪误差远离原点时，它们可确保更高的收敛率，且对于（10），稳定时间为 $T = \frac{1}{\gamma_1(1-r)}\ln\frac{\gamma_1 V^{1-r}(x_0)+\gamma_2}{\gamma_2}$；对于（11），稳定时间为 $T = \frac{1}{\gamma_2(1-r)}\ln\frac{\gamma_1 V^{1-r'}(x_0)+\gamma_2}{\gamma_2}$。对于随机系统，若满足 $\mathcal{L}V(x) \leq -\gamma_2\gamma V^r(x)$ [35, 36]，则可保证概率意义下的有限时间稳定性。

通过在 V中引入有限常数 $\delta > 0$，可以扩展有限时间稳定性。与（1）类似，若满足 $\dot{V}(x) \leq -\gamma_1 V(x) - \gamma_2 V^r(x)$ [26]，则可保证实际有限时间稳定性。然而，在考虑所有渐近稳定系统都能在有限时间内达到某个值时，有限时间稳定性中“实际”这一概念可能存在问题 [37]。渐近稳定性仅表示系统无法在有限时间内收敛到零，而收敛速度可通过设定控制增益进行调整。

与典型的反步法类似，有限时间反步法要求通过分数阶项消除这些项。因此，始终需要满足以下假设之一。

- $|f_i| \leq (\sum_{j=1}^{i}|x_j|)\rho_i(\bar{x}_i)$ [31]

- $|f_i| \leq \frac{1}{2}|x_{i+1}|^{r_i} + \sum_{j=1}^{i} |x_j|\rho_i(\bar{x}_i))\sigma$ [38]
- $|f_i| \leq \sigma\rho_i(\bar{x}_i))$ [39]
- $|f_i| = \varphi(t)\sum_{j=1}^{i} |x_j|^{m_{ij}} + \sigma\sum_{j=1}^{i} |x_j|^{n_{ij}}$ (time-varying system) [40]

其中， $\rho_i(\bar{x}_i)$为光滑的已知 C^1 正函数， $\sigma \geq 1$ 为一个不确定常数。第四个假设用于处理时变系统。所有系统的阶数都应在设计过程开始前确定。所设计的参数始终为 $r_1 > \cdots > r_n$，因为高维动态应当比低维动态响应得更快。

用于有限时间稳定性的 LFC 的选择可以是

- [FT1] $V_{i,FT} = \int_{\alpha_i}^{x_i} \left(s^{1/q_k} - \alpha_i^{1/q_i}\right) ds$
- [FT2] $V_{i,FT} = \int_{\alpha_i}^{x_i} \left(s^{\beta_{i-1}} - \alpha_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right) ds$ [39]
- [FT3] $V_{i,FT} = \int_{\alpha_i}^{x_i} \left(s^{1/q_k} - \alpha_i^{1/q_i}\right)^{2-q_k} ds$ [31]
- [FT4] $V_{i,FT} = \int_{\alpha_i}^{x_i} \left(s^{1/q_k} - \alpha_i^{1/q_i}\right)^{2-q_k-\tau} ds$ (order-1) where τ is a ratio of two numbers.

除了递归设计方法外，有限时间镇定通常采用归纳方法进行设计，即 根据假设的已知形式相应地设计虚拟控制律 α_i V_{i-1}，并令 V_i 和 V_{i-1} 具有类似的归纳形式 [38]。这是因为控制律的形式以及由此得到的李雅普诺夫函数时间导数形式较为复杂。大多数设计都依据 [41]中的类似杨氏不等式的不等式。有限时间稳定性和递归设计的另一项应用是有限时间扰动观测器 [42]。

2.3 基于估计的反步法——神经网络和模糊逻辑系统

在（4）中设计函数 ϕ_i 始终是一项困难的工作。基于估计的方法是解决这一问题的一种方案。与反步法结合使用最广泛的逼近理论是神经网络和模糊逻辑系统。它们的方向和理论各不相同。然而，从数学角度来看，它们在反步法中的推导非常相似。因此，本节将一并介绍这两种方法。

神经网络广泛应用于各种反步设计中，以逼近不确定性，即神经自适应控制。根据通用逼近性质，紧集中的任意光滑函数均可通过具有足够多节点的神经网络以任意小的误差进行逼近。换言之，未知函数的自变量从任意初始紧超集 Ω^0 出发，始终保持在紧集 Ω 内。简而言之，其核心思想是利用神经网络估计所有非线性，并通过虚拟控制律将其抵消。
文献中广泛使用两种神经网络，分别是:

- 双层径向边界函数神经网络（RBFNN） [43]

$$f(z) = W^\top S(z) + \varepsilon, \tag{12}$$

- 多层神经网络（MNN） [44, 45] 和三层小波神经网络（WNN） [46]

$$f(z) = W^\top S(D^\top z + T) + \varepsilon = W^\top S(U^\top \bar{z}) + \varepsilon, \tag{13}$$

其中， $W = [w_1, \cdots, w_l]^\top \in \mathbb{R}^l$和 $V = [v_1, \cdots, v_l]^\top \in \mathbb{R}^{q\times l}$分别为第一层至第二层、第二层至第三层的权重向量， $S(z) = [s_1(z) \cdots, s_l(z)]^\top$、 $T = [t_1, \cdots, t_l]^\top \in \mathbb{R}^l$和 ε为相应的重构误差。MNN 和 WNN 采用状态变换 $U^\top = [D^\top, T]$和 $\bar{z} = [z^\top, 1]^\top$，具有类似的形式。不同神经网络（NN）的区别在于基函数 s_i的选择。对于 RBFNN， $s_i(z)$定义为 $s_i(z) = \exp\left[-\frac{(z-\mu_i)^\top (z-\mu_i)}{r_i^2}\right]()$，其中 $\mu_i = [\mu_{i1}, \cdots, \mu_{in}]^\top$为感受野的中心， r_i为高斯函数的宽度。于是，函数 f可近似为 $\hat{f} = \hat{W}^\top S(Z)$ 和 $\hat{W}^\top S(\hat{U}^\top \bar{z})$。神经自适应控制的基本假设是权重矩阵 W具有有界性。

假设理想权重 W 有界，且其 W_m已知，即 $\|W\|_F \leq W_m$。NN 近似由虚拟控制进行补偿。定义权重误差向量为 $\tilde{W} = W - \hat{W}$，并在 LFC 中加入二次项 $\frac{1}{2}\tilde{W}^\top\tilde{W}$。为确保引理1中的 γ 足够大，采用 σ-修正，即在自适应更新律 W 中加入一个额外项 $-\Gamma\sigma W$，其中 $\sigma > 0$；该更新律与积分器反步控制中的 θ 类似。最终稳定性证明中的关键不等式为 $\tilde{W}^\top\hat{W} = \tilde{W}^\top W - \tilde{W}^\top\tilde{W} \leq \frac{1}{2}(-\tilde{W}^\top\tilde{W} + W^\top W)$ 和 $\mathrm{tr}\{\tilde{W}^\top\hat{W}\} \leq \frac{1}{2}(-|\tilde{W}|_F + |W|_F)$，可由 $\tilde{W}^\top W \leq \frac{1}{2}(\tilde{W}^\top\tilde{W} + W^\top W)$证明。结合 W有界的假设，项 $-\frac{1}{2}\sigma\tilde{W}^\top\tilde{W}$和 $\frac{1}{2}\sigma W^\top W$分别并入引理1中的 $-\gamma V$和 δ。该关系对 θ同样成立，即 $\tilde{\theta}^\top\hat{\theta} \leq \frac{1}{2}(-\tilde{\theta}^\top\tilde{\theta} + \theta^\top\theta)$。同样，它们分别并入引理1中的 $-\gamma V$和 δ。

模糊逻辑系统是输入变量的隶属函数线性组合与隶属函数之和的比值，其表达式为 $f(x) = \theta^\top\varphi(x) + \varepsilon$或 $f(x) = W^\top S(x) + \varepsilon$以及 $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$其中 $\bar{\varepsilon}$是有界常数，$\theta = [\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_N]^\top$, $\bar{y}_l = s_i = \max_{y\in\mathbb{R}} \mu_{G^l}(y)$，模糊隶属函数 $\mu_{G^l}(x_i) = \exp[-\frac{x_i - a_i^l}{b_i^l}]$, $\varphi^\top = [\varphi_1, \cdots, \varphi_N]$，模糊基函数 $\varphi_l = \frac{\prod_{i=1}^N \mu_i^l}{(x_i)\sum_{l=1}^N \prod_{i=1}^N \mu_i^l(x_i)}$[47]。函数 φ可以是傅里叶级数展开，其形式与三层神经网络相似 [48]。其重要性质为 $0 \leq \varphi^\top\varphi \leq 0$ 和 $z_i\theta^\top\varphi \leq \frac{z_i^2}{4\lambda}|\theta|^2 + \lambda$。

基于估计的方法的缺点在于，为了获得足够的逼近精度，需要大量的神经网络节点（NN nodes）和自适应参数，从而导致学习时间较长。对于高阶系统，会出现状态爆炸问题，导致实现困难。案例研究中的大多数示例都是二阶系统。为了缩小自适应控制问题的规模，可以使用 $|W|$ 代替 W [49]。此外，设计过程基于权重矩阵上界存在这一假设。稳定性被限制为局部稳定，因为 NN 近似仅在特定的紧集内有效。另一个难点在于项 $\frac{\partial\alpha_i}{\partial\hat{\theta}_i}$。对于多输入多输出系统，$\hat{\theta}_i$ 是所有状态的函数。它不能合并到其他需要由后续神经网络估计的项中。

使用神经网络和模糊逻辑系统的另一个不足是，它们缺乏提取非线性函数内在结构的能力，尽管其估计结果与非线性函数拟合良好。典型的自适应控制可通过使用一些预设的重要支配项来辨识系统。如果基函数库的猜测准确，就能明确辨识函数结构。另一方面，神经网络或模糊逻辑系统的估计则不需要准确猜测基函数库。

2.4 Nussbaum函数

在前述各节中，自适应反步设计的一个棘手假设是已知控制增益的符号保持不变，即控制方向恒定。Nussbaum函数最初由 [50] 提出，并由 [51]引入自适应反步设计中。它已用于为控制方向未知的系统设计控制律，例如，缺乏控制方向先验知识的系统。

若函数 $\mathcal{N}(\chi)$满足 $\limsup_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s \mathcal{N}(\chi)d\chi = +\infty$ 和 $\liminf_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s \mathcal{N}(\chi)d\chi = -\infty$，则称其为 Nussbaum 型函数。其积分定义为 $\mathcal{M}(\chi) := \int_0^\chi \mathcal{N}(\tau)d\tau$..

Nussbaum 型函数有两种类型，即幅值延展和时间延展[52]。通常采用幅值延展 Nussbaum 型函数，它们是某一类 $\mathcal{K}_\infty$ 函数与三角函数的乘积，例如，

- $\mathcal{N}(\chi) = \chi^2\cos(\chi)$,
- $\mathcal{N}(\chi) = \chi^2\sin(\chi)$,
- $\mathcal{N}(\chi) = \exp(\chi^2)\cos(\chi\pi/2)$ [50],
- $\mathcal{N}(\chi) = \frac{1}{2}e^{-\sigma\chi}$余弦 $\chi - \frac{1}{2}e^{\sigma\chi}$余弦 χ [53],
- $\mathcal{N}(\chi) =$双曲余弦$(\lambda\xi)$ 正弦(ξ) [54],
- $\mathcal{N}(\chi) = \exp(\xi^2/2)(\xi^2 + 2)\sin(\chi)$ [55]。

设计虚拟控制律，将 LFC 的时间导数变换为某种形式，例如，在 $V(t) \leq c_0 + e^{-c_1 t}\int_0^t (g_i(t)\mathcal{N}(\chi) + 1)\dot{\chi}e^{c_1\tau}d\tau$ 中。将 $e^{c_1 t}$ 乘以等式两边后，可利用 [51, 56] 中提出的引理证明项 $g_1 z_1 z_2$ 的有界性。类似于引理1，进一步可证明 $V(t)$、$\chi_i(t)$ 在 $[0, t_f)$ 上的有界性，

如果满足以下不等式，则给出 $\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int_0^t\mathcal{N}(\chi_i(\tau))\,\dot{\chi}_i(\tau)d\tau$ [54],

$$\begin{aligned}V(t)\leq&\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int_0^t\mathcal{N}(\chi_i(\tau))\dot{\chi}_i(\tau)d\tau\\&+\sum_{i=1}^{n}a_i\int_0^t\dot{\chi}_i(\tau)\,\tau+\delta,\ \forall t\in[0,t_f),\end{aligned}\tag{14}$$

其中，a_i 和 η_i 是常数，$a_i>0$、η_i 符号相同，且 $|\eta_i|\in[\eta_{\min},\eta_{\max}]$。

该设计通过将 $g_i\alpha_i$ 替换为 $g_i\alpha_i=g_i\mathcal{N}(\chi)\bar{\alpha}_i=(g_i\mathcal{N}(\chi)-1)\bar{\alpha}_i+\bar{\alpha}_i$，并通过设计 α_n来消除非线性项，从而实现。随后，将 χ 的更新律设为 $\dot{\chi}=z_i\bar{\alpha}_i$，并证明稳定性。变量 χ 不进入LFC。

Nussbaum增益技术已成功应用于第3节介绍的许多问题。Nussbaum增益的一个缺点是，扰动无法直接补偿。

2.5 障碍李雅普诺夫函数

受 [57] 启发并由 [58], 提出的障碍李雅普诺夫函数（BLF）是类反步设计中非常流行的LFC工具。它几乎兼容本综述中的所有技术。大量研究使用BLF处理具有部分或完整状态约束的渐近稳定问题。与具有全局径向无界性质的典型李雅普诺夫函数不同，当任一状态趋近其边界时，BLF趋于无穷大。

障碍李雅普诺夫函数是一个标量函数 $V_{BLF}(x):\mathbb{D}_x\to\mathbb{R}_+$，相对于开区域 $\mathbb{D}_x$ 上的系统 $\dot{x}=f(x)$ 定义，其中 $\mathbb{D}_x$ 包含原点，并满足：(i) 连续且正定；(ii) 在 $\mathbb{D}_x$ 的每个点处具有连续的一阶偏导数；(iii) 当 x趋近于 $\mathbb{D}_x$的边界时，具有如下性质：$V(x)\to\infty$ x；(iv) 对于沿着系统 $\dot{x}=f(x)$ 的解的所有$t\geq 0$，若 $x(0)\in\mathbb{D}_x$，则满足 $V_{BLF}(x)\leq b$，其中 b 是某个正常数。障碍李雅普诺夫函数如图 2 所示。对于任意正常数 k_{ai} 和 k_{bi}，令 $\mathbb{D}_{zi}:=\{z_i\in\mathbb{R}|-k_{ai}<z_i<k_{bi}\}\subset\mathbb{R}$，障碍李雅普诺夫函数 $V_{i,BLF}(z_i)\to\infty$，当$z_i\to-k_{ai}$ 或 $z_i\to k_{bi}$时。已证明，若. $\dot{V}\leq 0$ 成立，则跟踪误差 $z_i(t)$ 对所有 $t\geq 0$ 均保持在开集 $z_i\in\mathbb{D}_{zi}$ 内。同样，若不等式 $V\leq-\gamma V+\delta$ 成立 [58]，则 $z_i(t)$ 对所有 $t\geq 0$ 均保持有界。

根据约束类型，障碍李雅普诺夫函数的构造方法有多种。以下列出了三种常用的障碍李雅普诺夫函数及其时间导数:

- [BLF1] Symmetric barriers ($k_{ai}=k_{bi}$)
  - $V_{i,BLF}(z_i)=\frac{1}{2}\log\frac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2-z_i^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\xi_b^2}$,
  - $\dot{V}_{i,BLF}(z_i)=\frac{z_i}{k_{bi}^2-z_i^2}\dot{z}_i$,
- [BLF2] Asymmetric barriers, ($k_{ai}\neq k_{bi}$)
  - $V_{i,BLF}(z_i)=\frac{q}{p}\log\frac{k_{bi}^p}{k_{bi}^p-z_i^p}+\frac{1-q}{p}\log\frac{k_a^p}{k_{ai}^p-z_i^p}$,
  - $\dot{V}_{i,BLF}(z_i)=\frac{qz_i^{p-1}}{k_{bi}^p-z_i^p}\dot{z}_i+\frac{(1-q)z_i^{p-1}}{k_{ai}^p-z_i^p}\dot{z}_i$,
- [BLF3] Time-varying constrain situation ($\dot{k}_{ai}\neq 0$ and $\dot{k}_{bi}\neq 0$)
  - $V_{i,BLF}(z_i)=\frac{q}{p}\log\frac{1}{1-\xi_b^p}+\frac{1-q}{p}\log\frac{1}{1-\xi_a^p}$,
  - $\dot{V}_{i,BLF}(z_i)=\frac{q\xi_b^{2p-1}}{k_{bi}(1-\xi_b^2p)}(\dot{z}_i-\frac{z_i}{k_{bi}}\dot{k}_{bi})+\frac{(1-q)\xi_a^{2p-1}}{k_{ai}(1-\xi_a^2p)}(\dot{z}_i-\frac{z_i}{k_{ai}}\dot{k}_{ai})$,

其中，log(·)表示自然对数，$p\geq n$ 为偶整数，切换函数 $q(z_i)=\begin{cases}1, & if\ z_i>0\\ 0, & if\ z_i\leq 0\end{cases}$、$\xi_a=\frac{z_i}{k_{ai}}$ 和 $\xi_b=\frac{z_i}{k_{bi}}$。于是，障碍李雅普诺夫函数3可改写为更简洁的形式$V_{i,BLF}(z_i)=\frac{1}{2p}\log\frac{1}{1-\xi^{2p}}$，其中 $\xi=q\xi_b+(1-q)\xi_a$。新型障碍李雅普诺夫函数为$V_{i,BLF}=\frac{k_{bi}^2}{\pi}\tan(\frac{\pi z_i^2}{2k_{bi}^2})$ [59] 和$V_{i,BLF}=\cot\frac{\pi}{2}(1-(\frac{z_i}{k_{bi}})^2)$ [60]。

基于障碍李雅普诺夫函数的方法可在两个假设下应用。首先，当 $x_1(t)\in\mathbb{D}_{x_1}$ 时，控制系数 g_i 始终为正或负，不会改变符号，即 $|g_i(\bar{x}_i)|>g_0>0$，其中 g_0 为正数。其次，存在正数 A_0、x_{1d}、x_{1d} 和 x_{id}、$i=2,\ \cdots,\ n$，满足 $\max\{x_{1d},x_{1d}\}\leq A_0\leq k_{c1}$ 和$-x_{1d}\leq x_{1d}(t)\leq x_{1d}$ 以及 $|x_{1d}^{(i)}(t)|<x_{id}$，对所有 $k_{c1}>0$ 和 $t\geq 0$ [58, 61]均成立。在设计过程中，障碍李雅普诺夫函数，例如，

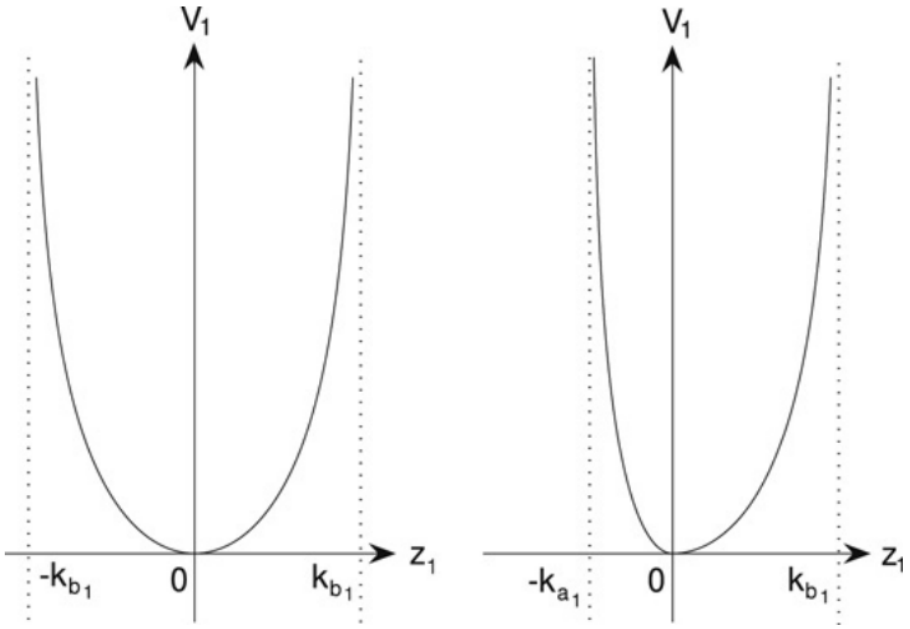

图 2：障碍李雅普诺夫函数。

例如，在步骤 i 中，当误差状态 z_i 受到约束时，即 $V_i = V_{i-1} + V_{i,\ BLF}$，则采用该方法。否则，采用二次 LFC。

对于一个未知系统，有一个重要的不等式，对所有 $|\xi| < 1$ 和任意正整数 p [61]均成立，其表达式为

$$\log \frac{1}{1-\xi^{2p}} < \frac{\xi^{2p}}{1-\xi^{2p}}. \tag{15}$$

对于任意正数 k_{bi}，代入 $\xi = \frac{z_i}{k_{bi}}$ 可得 $\log \frac{k_{bi}^2}{k_{bi}^2 - z_i^2} < \frac{z_i^2}{k_{bi}^2 - z_i^2}$ 和 $\log \frac{k_{bi}^{2p}}{k_{bi}^{2p} - z_i^{2p}} \leq \frac{z_i^{2p}}{k_{bi}^{2p} - z_i^{2p}}$。该公式通过去除对数运算符简化了控制律，并避免了过度参数化问题 [62]。当系统存在未建模动态时，应用该不等式可从虚拟控制中去除 $k_{b1}^2 - z_1^2$，从而简化控制律。V_n 中的分子 $-\frac{c_i z_i^2}{k_{bi}^{2p} - z_i^{2p}}$ 被替换为 $-c_i \log \frac{z_i^2}{k_{bi}^2 - z_i^2} = -c_i V_{i,\ BLF}$。因此，根据引理 1 [61]可以证明有界性。 (15)

对于 MIMO 系统，任意正常数向量 $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$，对于区间 $|z_i| < |k_{bi}|$内的任意向量$z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$，以下不等式成立：$\log \frac{k_{bi}^\top k_{bi}}{k_{bi}^\top k_{bi} - z_i^\top z_i} \leq \frac{z_i^\top z_i}{k_{bi}^\top k_{bi} - z_i^\top z_i}$ [63]。于是，误差信号有界，$|z_2|, \cdots, |z_n| \leq \sqrt{2V(0)}\exp(-\rho t)$，且 $k_{a1}(t)(1 - e^{-2pV(0)\exp(-\rho t)})^{\frac{1}{2p}} \leq z_1 \leq k_{b1}(t)(1 - e^{-2pV(0)\exp(-\rho t)})^{\frac{1}{2p}}$。当 $t \to \infty$ 时，$|z_1(t)| \leq k_{b1}\sqrt{1 - \exp(-2(\rho + (V(0) - \rho)\exp(-\gamma t)))} \leq k_{b1}\sqrt{1 - \exp(-2\rho)}$。因此，跟踪误差 z_1 的上限随 ρ 减小。因此，当 γ 足够大时，$|z_1|$ 可以任意小。

当状态接近边界时，可能会产生较大的控制作用。障碍李雅普诺夫函数（BLF）的另一个缺点是，假设其上下限已知，而在实际应用中这些限值可能是未知的。另一个值得关注的问题是初始状态的保守性。初始状态必须保持在约束范围内，即 $x_i(0) \in (-k_{ai}, k_{bi})$。在靠近障碍边界的区域，$V_i$ 将变得极大。积分型障碍李雅普诺夫泛函（iBLF）$V_{i,iBLF} = \int_0^{z_i} \frac{\sigma k_{ai}^2}{k_{ai}^2 - (\sigma + \alpha_{i-1})_2^2}\, d\sigma$ 显著放宽了可行性条件 [64]。iBLF 的性质包括：(i) $\frac{z_i^2}{2} \leq V_{i,iBLF} \leq z_i^2 \int_0^1 \frac{\beta k_{ai}^2}{k_{ai}^2 - \beta z_i + (\mathrm{sgn}(z_i)A_{i-1})_2^2}\, d\beta$，以及 (ii) $\dot{V}_{i,iBLF} = \frac{k_{ai}^2 z_i}{k_{ai}^2 - x_i^2}\dot{z}_i + z_i\left(\frac{k_{ai}^2}{k_{ai}^2 - x_i^2} - \rho_i\right)\dot{\alpha}_{i-1}$，其中 $A_i < k_{ai}$是 $|x_{id}|$ 的上界，且 $\rho_i = \frac{k_{ai}}{2z_i}\ln\frac{(k_{ai}+z_1+x_{id})(k_{ai}-x_{id})}{(k_{ai}-z_i-x_{id})(k_{a1}+x_{id})}\dot{x}_{id}$。

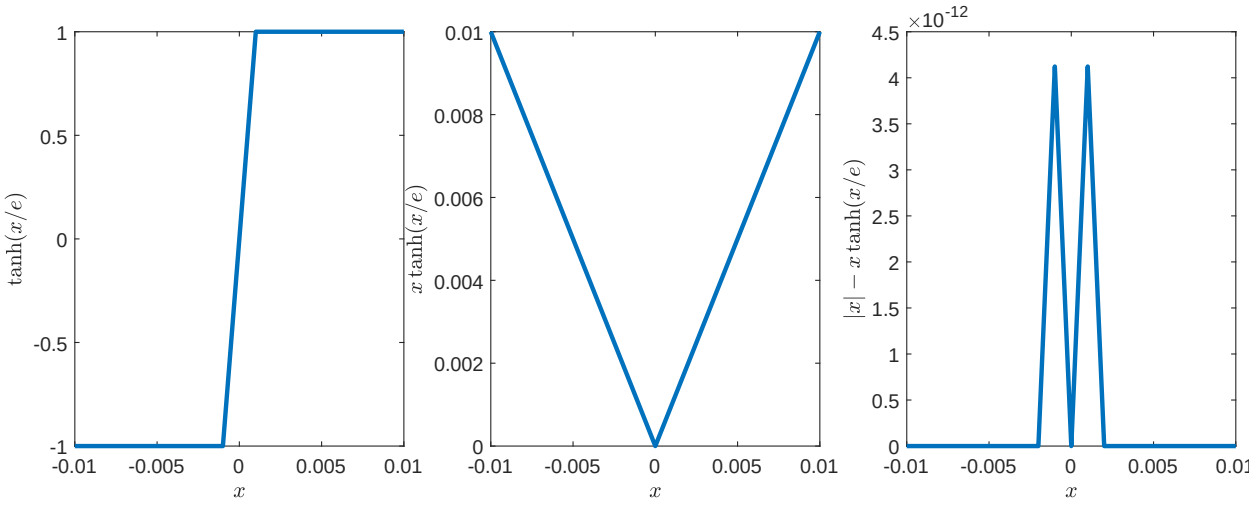

图 3：tanh(·) 函数（$e = 0.001$）。

2.6 双曲正切函数

类似反步法的抵消便于抵消状态项，例如 z_i^2。然而，它无法抵消未知标量项，例如外部扰动 d_i。与早期研究中使用的复杂投影算子相比，这里采用了一种创新的不等式来处理参数有界扰动。如果扰动有界，反步设计过程主要依赖于一个适用于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\eta \in \mathbb{R}$的不等式，即:

$$0 \leq |\eta| - \eta \tanh(\frac{\eta}{\varepsilon}) \leq k_p \varepsilon, \tag{16}$$

其中， k_p 是满足 $k_p = e^{-(kp+1)}$的常数，例如 $k_p = 0.2758$。该不等式旨在将标量与误差状态的乘积，即 $d_i z_i$，转换为包含显式 z_i 和有界常数的形式（ V_i）。第一部分可以轻松抵消，后一部分则可以并入式（1）中的 δ。绝对值与其双曲正切近似之间的误差如图 3 所示。在递归设计中，引入的 tanh(·) 由虚拟控制律补偿，并且可以利用引理1证明最终的 LFC 有界。

系统不确定性和模型误差可以等效为扰动 d_i，例如输入死区效应。此外，使用 tanh(·) 函数近似对称输入饱和与绝对值算子，以避免时间导数不光滑。

奇异性问题给反步设计带来了挑战。如果 V_i 中存在正的未知项 a ，导致虚拟控制中出现$-\frac{a}{z_i}$ ，那么当 $z_i = 0$时，系统会面临奇异性问题，从而无法估计项 $-\frac{a}{z_i}$。为避免这一问题，给出如下性质：对于任意常数 $\eta > 0$ 和变量 $z_i \in \mathbb{R}$，$\lim_{z_i \to 0} \frac{1}{z_i} \tanh^2(\frac{z_i}{\eta}) = 0$ [65]。项 a 可以改写为$a = \frac{2}{z_i} \tanh^2(z_i/\eta) a z_i + \left(1 - 2 \tanh^2(z_i/\eta)\right) a$。前一部分$\frac{2}{z_i} \tanh^2(z_i/\eta) a z_i$ 可以估计。另一个有用的性质是，当$|z_i| \geq 0.8814\eta$时， $1 - 2 \tanh^2(z_i/\eta) \leq 0$。此外，如果 $|z_i| < 0.8814\eta$，则 z_i 已由 η 界定。

tanh(·)函数的另一个性质是，对于 $|z_i| \leq 0.2554 v_i$ [65]，不等式$1 - 16 \tanh(\frac{z_i}{v_i}) \leq 0$成立。它用于补偿 $\dot{V}_i$中的根式无界项，例如 $z_i^2 = [1 - 16 \tanh(\frac{z_i}{v_i})] z_i^2 + 16 \tanh(\frac{z_i}{v_i}) z_i^2$，而后一项$16 \tanh(\frac{z_i}{v_i}) z_i^2$可由神经网络近似。

此外，tanh(·)函数可避免奇异性，后文将对此进行讨论。

3 针对各种非线性的系统化反步设计

本节讨论适用于一类系统的反步设计。具有各种非线性的系统被转换为适用于上述优雅方法的特定形式。图4给出了总结。

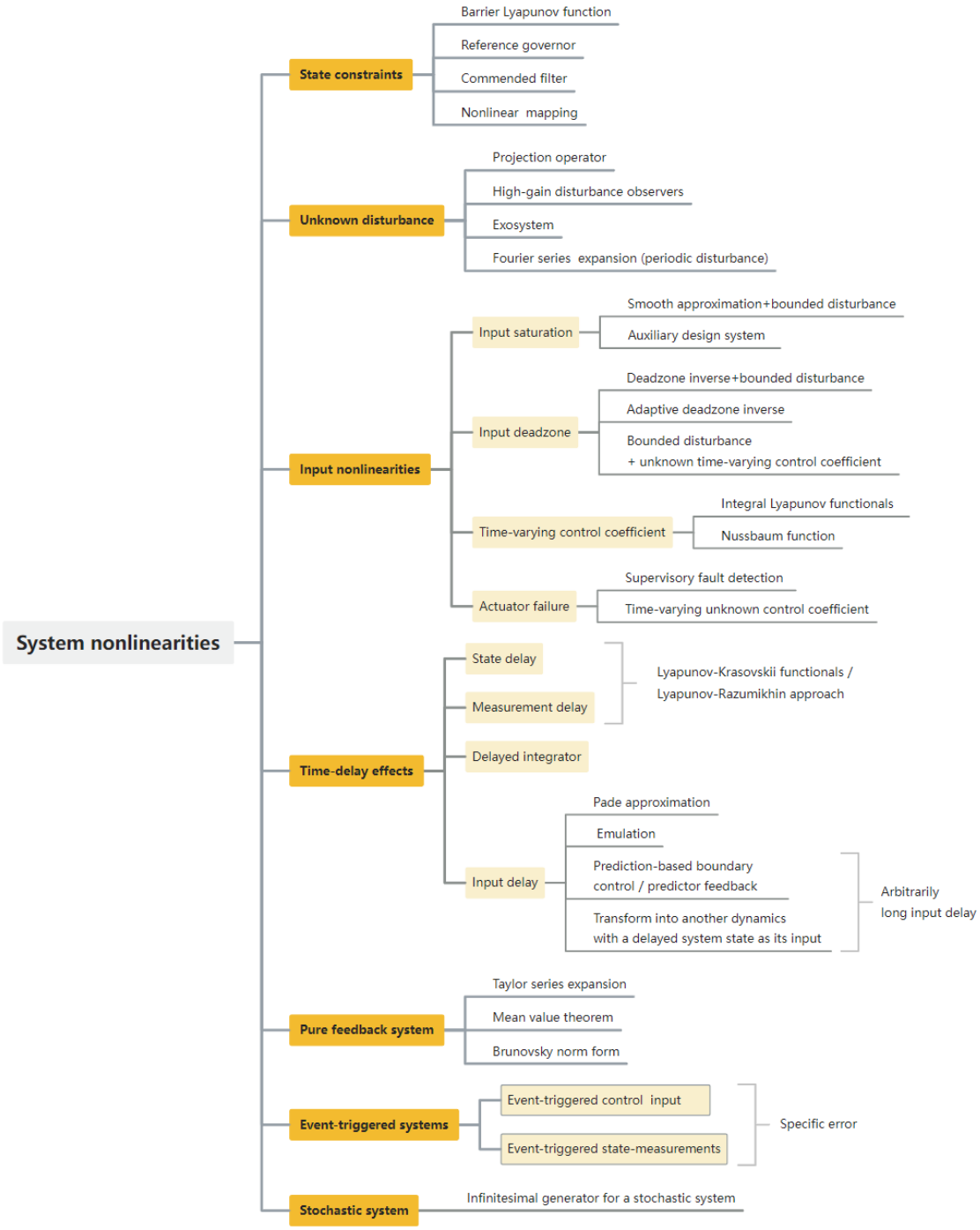

图 4：非线性及相应设计方法的总结。

3.1 状态约束

由于执行器物理限制和运行限制的存在，在某些应用中，状态或跟踪误差能够达到的范围有明确的边界，即 $x(t) \in \mathcal{D}_x$ 或 $z_1(t) = y(t) - y_d(t) \in \mathcal{D}_{z1}$。状态约束源于物理限制或性能要求。例如，在系统 (4) 中，要求输出 $y(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 始终保持在集合 $|y| \leq k_{c1}$ 内，其中 k_{c1} 是一个正常数。然而，典型的反步设计方法无法确保状态约束。除模型预测控制外，也有少数李雅普诺夫方法可用于处理状态约束。

障碍李雅普诺夫函数是最常用的方法，因为它推导系统且形式简单。数百篇论文采用障碍李雅普诺夫函数来处理状态约束。第 2.5 节对此进行了深入综述。
参考调节器是处理状态约束问题的另一种方法。为了避免违反系统约束，使用在线优化 [66] 对参考信号进行调节。然而，这种方法并非专门针对自适应反步设计。

所推荐的滤波器可通过调节 α_i 状态的变化率来使用。这是通过使用若干饱和算子 [67]修改滤波器来实现的。然而，状态约束尚未得到证明。通过选择临界阻尼，滤波器中的饱和算子可能会削弱整个系统的稳定性。

通过引入非线性映射，可以消除状态约束，将受约束非线性系统转换为不含输出或状态约束的纯反馈形式 [68]。

3.2 未知扰动

扰动是实际系统中由于外部环境而产生的一种十分常见的未建模动态。此外，由建模不确定性导致的估计误差通常也被建模为未知扰动。一个典型的受扰非线性系统表示为

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} + d_i,\ i = \mathcal{I}, \tag{17a}$$
$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + d_n, \tag{17b}$$

其中，$d_i (i = 1, \cdots, n-1)$ 和 d_n 分别表示非匹配扰动和匹配扰动。扰动无法直接测量，导致鲁棒性遭到破坏，直接补偿方法失效。当扰动 d_i 与控制输入 u从不同的状态进入系统时，该扰动称为非匹配扰动；否则，称为匹配扰动。利用等效输入扰动技术 [69]，可以将具有非匹配扰动的系统转换为具有匹配扰动的系统。
这些设计通常依赖于有界扰动假设。常用的假设总结如下：

- $|d_i| \leq \bar{d}_i$ [70],
- $|d_i| \leq \rho_i(\bar{x}_i)\theta_i$ [71],
- $|d_i| \leq (\rho_{i1}(\bar{x}_i) + \rho_{i2}(\bar{z}_i))\theta_i$ [72],

第一种假设认为 d_i 的上限为 d_i。$\bar{}$ 根据第二种和第三种假设，扰动可分解为未知有界常数 θ_i 和已知光滑函数 $\rho_i(\bar{x}_i) \in \mathbb{R}_+$，其中 $t > t_0$。扰动抑制控制可分为基于鲁棒性的方法和基于估计（或基于近似）的方法。

3.2.1 基于鲁棒性的方法

投影算子广泛应用于鲁棒自适应控制的早期阶段。两个向量θ, $y \in \mathbb{R}^k$ 的投影算子定义为

$$\text{Proj}(\theta, y, f) = \begin{cases} y - \frac{\bigtriangledown f(\theta)\bigtriangledown f(\theta)^\top}{\|\bigtriangledown f(\theta)\|^2} y f(\theta), \\ \quad \text{if } f(\theta) > 0 \bigwedge y^\top \bigtriangledown f(\theta) > 0, \\ y, \qquad \text{otherwise}, \end{cases} \tag{18}$$

其中，f: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$是一个凸函数，且 $\bigtriangledown f(\theta_b) = [\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta) \cdots \frac{\partial f}{\partial \theta_k}(\theta)]^\top$。投影算子$\theta(\text{Proj}(\theta, y, f) - y) \leq 0$ 的核心性质可用于设计自适应更新律。除了基本投影算子外，还有几种不同的投影算子，例如 Γ–投影 [73] 和参数投影 [74, 75]。凸函数 f 的具体结构并不重要。在反步设计中使用投影算子时，充分

需要可微性。投影算子与其他优雅的方法协同工作。然而，2000年以后，这种方法已不再流行。其原因之一是涉及拉普拉斯算子的项的计算较为复杂 $\bigtriangledown f$。
结合引理1，可提出更简单的控制算法，例如 [70]。一种更常用的方法是第2.6节介绍的 tanh(·)函数。当出现有界不确定项 d_i 时， V_i中的该项 $|d_i||z_i|$ 的大部分可以得到补偿，而无法消除的部分则并入式（1）中的 δ。

3.2.2 基于估计的方法

尽管无法直接测量系统扰动，但可以利用测量值通过若干技术对扰动进行估计。通过结合控制律与观测器，可以证明系统整体稳定。因此，应将估计误差纳入李雅普诺夫函数。

如前所述，神经网络和模糊逻辑系统可用于逼近各种有界非线性。因此，相关方法在文献中得到了深入研究和广泛应用。此处不再赘述，因为第2.3节已对其进行了综述。

基于线性系统理论设计了几种形式相似的高增益扰动观测器 [76, 77]。另一种方法是使用低通滤波器对误差 $\dot{z}_i - (f_i + g_i - \dot{\alpha}_{i-1})$进行滤波，并将其用作扰动观测器。然而， $\dot{z}_i$测量值并非总是可用。一种可能的解决方案是用 $-\mu_i z_i$替换 $\dot{z}_i$ ，估计的扰动 $\hat{d}_i$ 为低通滤波器的输出加上 $\mu_i z_i$ [78]。针对步骤 i 的 LFC 修改为 $V_i = V_{i-1} + V_{i,QF} + \frac{1}{2}\tilde{d}_i^2$， $\hat{}$并由虚拟控制律直接抵消 d_i。

根据内模原理，波形先验已知的确定性扰动可以表示为外系统的一种形式 [79], ，通过在反馈回路中引入外系统即可补偿该扰动。该问题首先通过提出一种未知外部扰动的非线性观测器，并采用状态反馈自适应调节器 [80] 得以解决。与神经网络/模糊逻辑系统不同，基于外系统的未知扰动参数相关观测器具有更简单的结构。有界扰动可以表示为 $d = \vartheta + \delta_d$，其中 δ_d 是一个有界函数， ϑ 是由以下方程给出的线性外系统的输出。

$$\dot{\chi} = \Gamma\chi, \tag{19a}$$
$$\vartheta = c^\top \chi, \tag{19b}$$

其中， $\chi \in \mathbb{R}^q$ 为状态向量，常数 $q \times q$ 矩阵 Γ 的所有特征值均位于虚轴上， c 为常向量。不失一般性，假设$(c^\top, \Gamma)$是可观测的。这里，外系统 q 的维数是一个设计参数， c 和 Γ 是未知的。与基于估计的方法类似，当涉及复杂扰动时，采用高阶外系统。该扰动观测器技术可应用于非匹配扰动和匹配扰动 [81, 82]。

一个具体案例是周期性扰动。周期性扰动常存在于许多机械控制系统中，例如工业机器人和船舶系统。可以采用傅里叶级数展开对扰动进行建模，即 $d(t) = B^\top \Phi(t) + \delta_d(t)$，其有界截断误差为 $|\delta_d(t)| \leq \delta_d$，其中 $\Phi = [\phi_1, \cdots, \phi_q]^\top$、 $\phi_1 = 1$sin$(2\pi jt/T)$以及 $\phi_1 = 1$、 $\phi_{2j+1} = \sqrt{2}\cos(2\pi jt/T)$ [48]。

然而，基于观测器的方法面临的一个常见挑战是对快速变化的扰动进行建模。观测器的响应速度可能不够快，无法估计高频扰动。有人认为，如果观测器动态远快于系统动态，控制器很可能能够估计并抵消扰动。此外，训练时间还取决于系统复杂度。较大的模型失配可能会降低整个闭环系统的稳定性。

3.3 输入非线性

对于执行器性能完美的系统，执行器输出 u 等于控制信号 v，即 $u(t) = v(t)$。然而，由于执行器特性和限制， u 是 v 的函数，其形式为 $u(v(t - \tau_d(t)))$，其中 τ_d 是时间延迟。本节将回顾几种输入非线性，并假设 $\tau_d = 0$。

3.3.1 输入饱和

物理执行器必然存在其限制，也称为输入约束。当控制输入保持在有界范围内时，输入饱和效应可以忽略。输入饱和的主要挑战在于断点处的不光滑性以及输入范围有限。使具有有界控制输入的系统实现稳定，对于

实际工业应用具有重要意义。输入饱和的一般形式表示为

$$u(v) = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{min}, & \text{if } v \le u_{min}, \\ g_s(v), & \text{if } u_{min} < v < u_{max}, \\ u_{max}, & \text{if } v \ge u_{max}, \end{cases} \tag{20}$$

其中， g_s 是一个光滑函数， u_{min} 和 u_{max} 分别是 u的最小值和最大值。对于具有对称限值的最简单线性饱和，即 $g_s(v) = v$ 和 $-u_{min} = u_{max} = u_m > 0$，输入饱和可简化为

$$u(v(t)) = \text{sat}(v(t)) = \begin{cases} v(t), & \text{if } |v| < u_m, \\ \text{sgn}(v(t))u_m, & \text{if } |v| \ge u_m. \end{cases} \tag{21}$$

采用光滑近似来克服非光滑性。

- 对称饱和(21)可近似为 [83, 84]

$$\text{sat}(v) \cong \eta_{sat}(v) = u_m \tanh(\frac{v}{u_m}) = u_m \frac{e^{v/u_m} - e^{-v/u_m}}{e^{v/u_m} + e^{-v/u_m}}. \tag{22}$$

- 非对称饱和的近似形式为

$$\text{sat}(v) \cong \eta_{sat}(v) = \frac{2\overline{u}}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi v}{2\overline{v}}\right), \tag{23}$$

其中， $\overline{u} = u_{max}$， $\overline{v} = v_{max}$ 若 $u_{max}/v_{max} \ge u_{min}/v_{min}$ ，且 $u \equiv u_{min}$， $v \equiv v_{min}$ 若 $u_{max}/v_{max} \le u_{min}/v_{min}$[60]。

近似误差 $d_{sat}(v) = \text{sat}(v) - \eta_{sat}(v)$ 是一个有界函数，其上限为 $|d_{sat}(v)| \le u_m(1 - \tanh(1)) = d_{sat}$。采用平滑近似后，可以通过几种方法继续处理，即：(i) 将d_{sat} 视为有界扰动，然后使用第 3.2 节所示的扰动抑制控制，借助引理1证明系统的鲁棒性。(ii) 为系统增设一个状态方程 $\dot{v} = -cv + w$ ，并且$z_{n+1} = u - v$。采用 Nussbaum函数处理由 $\partial \eta_{sat}(v)/\partial v$ 引起的非线性，而这无法用于基于抵消的设计方法 [85]。

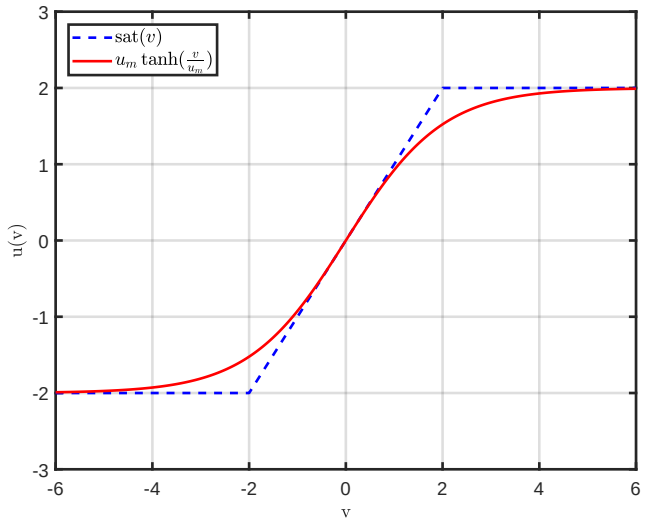

图 5：饱和近似（$u_m = 2$）。

如果饱和模型已知，则引入辅助设计系统，将控制律从常规反步法修改为 $v = g_n^{-1}[g_{n-1}z_{n-1} + f_n + \dot{\alpha}_{n-1} - \phi_n^{\top}\hat{\theta}_n - c_n(z_n - e)]$,，并引入辅助状态 e。当 e 大于特定边界 [86]时，状态动态$\dot{e}$ 将通过 $\Delta u = u - v$ 进行更新。

3.3.2 输入死区

死区现象在工业应用中十分常见，例如齿轮传动伺服系统、直流电机、液压航空器升降舵控制系统和阀门。死区是一种无记忆、不可微的非线性，对较小的控制输入不敏感。因此，死区会产生不期望的抖振，这是高精度控制中的一个问题。在实际应用中，死区边界通常未知。

处理死区效应的方法有多种，例如死区逆、结合神经网络的自适应控制，以及结合线性输入和有界扰动的鲁棒控制。

图 6 给出了死区算子的一般表达式，其形式如下：

$$u = \text{Dead}(v) = \begin{cases} g_r(v), & \text{if } v \geq b_r, \\ 0, & \text{if } b_l < \theta < b_r, \\ g_l(v), & \text{if } v \leq b_l, \end{cases} \tag{24}$$

其中， g_r 和 g_l 分别是右侧和左侧的函数， b_l 和 b_r 分别是右侧和左侧的边界。死区非线性的难点在于求出死区逆，即 $v = \text{Dead}^{-1}(u)$。死区算子的参数包括转折点 b_r 和 b_l，以及 g_r 和 g_l的斜率。下文中， $b_r > 0$ 和 $b_l < 0$。转折点可以是已知或未知的、对称或非对称的。 g_r 或 g_l 的斜率可以是常数或函数，并且在正、负定义域内可以相同，也可以不同。本文将讨论三种从简单到复杂的死区类型。

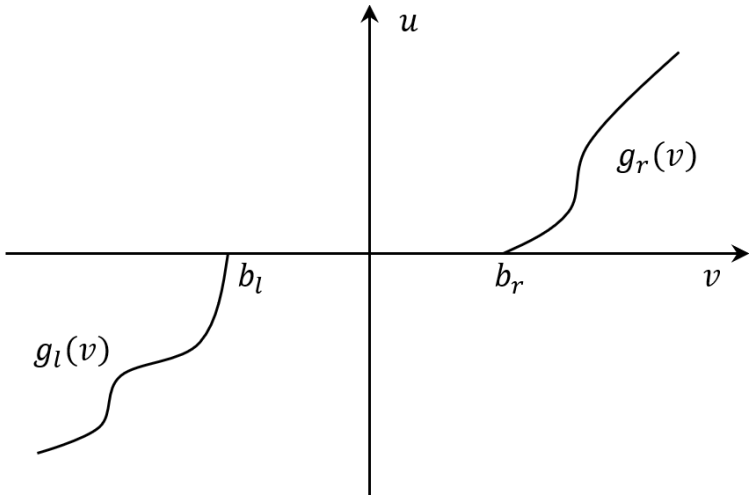

图 6：一般死区算子。

我们从两侧斜率均为线性时的最简单形式开始，即：

$$u = \text{Dead}(v) = \begin{cases} k_r(v - b_r), & \text{if } v \geq b_r, \\ 0, & \text{if } -b_l < \theta < b_r, \\ k_l(v - b_l), & \text{if } v \leq b_l, \end{cases} \tag{25}$$

其中， k_r 和 k_l 分别是右侧和左侧的斜率。当所有参数均已知时，可直接应用死区逆 [7] ，其表达式为

$$v = \text{Dead}^{-1}(u) = \begin{cases} u/k_r + b_r, & \text{if } u \geq 0, \\ 0, & if u = 0, \\ u/k_l + b_l, & \text{if } v \leq 0. \end{cases} \tag{26}$$

然而，死区逆（26）不是光滑函数。对于斜率为常数且宽度已知的不对称死区逆，其近似形式可写为 $v \approx \eta_{dead}(u) = \frac{u+k_r b_r}{k_r}\phi_r + \frac{u+k_l b_l}{k_l}\phi_l$，其中 $\phi_r = \frac{e^{u/e_0}}{e^{u/e_0}+e^{-u/e_0}}$、$\phi_l = \frac{e^{-u/e_0}}{e^{u/e_0}+e^{-u/e_0}}$ 和 e_0 是一个设计参数—[87]。更一般的死区逆模型列于表1[88]。近似误差定义为 $d_{dead}(v) = \text{Dead}(v) - \eta_{dead}(v)$，该误差有界，并且可以任意

表1：微分非对称死区近似模型 [88]。

$k_r = k_l = k_{dz}$	$b_r = b_l = b_{dz}$	$\eta_{dead}(v) = k_{dz}v + \frac{k_{dz}}{2\rho_{dz}} \ln \frac{\text{双曲余弦 } \rho_{dz}(\theta_{dz}-b_{dz})}{\cosh -\rho_{dz}k_{dz}(v+b_{dz})}$
$k_r = k_l = k_{dz}$	$b_r \neq b_l$	$\eta_{dead}(v) = k_{dz}\left(v + \frac{b_l-b_r}{2}\right) + \frac{k_{dz}}{2\rho_{dz}} \ln \frac{\text{双曲余弦 } \rho_{dz}(v-b_r)}{\cosh -\rho_{dz}k_{dz}\ (v+b_l)}$
$k_r \neq k_l$	$b_r \neq b_l$	$\eta_{dead}(v) = \frac{1}{\rho_{dz}} \ln \frac{1+e^{\rho_{dz}k_r(v-b_r)}}{1+e^{-\rho_{dz}k_l(v+b_l)}}$

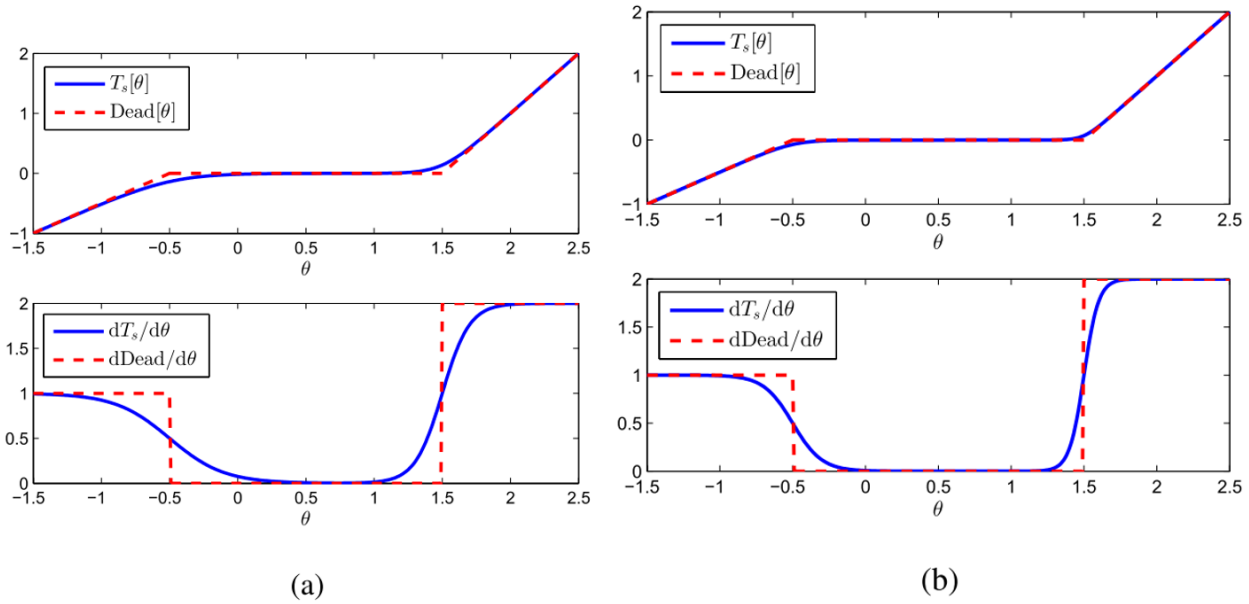

图7：不同软化程度的死区近似： $k_l = 1$、 $k_r = 2$、 $a_l = 0.5$和 $a_r = 1.5$。(a) $\rho_{dz} = 5$。(b) $\rho_{dz} = 10$。 [88]

小，只要参数 ρ_{dz} 足够大，即 $\lim_{\rho_{dz}\to\infty} |\eta_{dead}(v)| = 0$。对于表1中的第二个方程，$d_{dead}(v) < k_{dz} \ln \frac{2}{\rho_{dz}}$。然而，较大的 ρ_{dz} 会导致闭环响应过于激进，可能会使系统性能下降。

在实际应用中，死区的断点始终是未知的。早期的自适应解决方案假设斜率和断点均为未知参数，即自适应死区逆。采用自适应律来估计参数 k_r、 k_l、 $k_r b_r$ 和 $k_l b_l$ [89]。死区被划分为独立的光滑区域，且 LFC 为 $V = V_n + \tilde{\theta}_r^\top \Gamma_r^{-1} \tilde{\theta}_r + \tilde{\theta}_l^\top \Gamma_l^{-1} \tilde{\theta}_l$，其中自适应状态为 $\theta_r = [k_r, k_r b_r]^\top$ 和 $\theta_l = [k_l, k_l b_l]^\top$，而 Γ_r 和 Γ_l为正定矩阵。

或者，也有研究利用引理 1 [90, 91]提出鲁棒自适应控制方法。当 k_l、 k_r、 b_l 和 b_r 未知但处于已知范围内时，可以将死区函数分解为线性项和有界扰动，

$$\mathrm{Dead}(v) = k_{dz}v + d_{dead}(v) \tag{27}$$

其中， $d_{dead}(v) = \begin{cases} -k_r b_r & \text{，若 } v \geq b_r, \\ -k_{dz}v & \text{，若 } -b_l < v < b_r, \\ -k_l b_l & v \leq b_l. \end{cases}$ ，若且 $k_{dz} = \begin{cases} k_r & \text{若 } v \geq b_r \\ k_l & v \leq b_l \end{cases}$ 若。基于假设 $k_{dz} \in [k_{\min}, k_{\max}]$， $b_r \in [b_{r\text{最小值}}\ b_{r\text{最大值}}]$，且$b_l \in [b_{l\min}, b_{l\text{最大值}}]$，，可得 $|d_{dead}| \leq$最大值$\{k_{\max} b_{r\text{最大值}}\ -k_{\max} b_{l\text{最大值}}\}$。除了鲁棒自适应控制外，还可以采用基于估计的方法处理扰动 d_{dead}。

一个更复杂的情形是未知的非线性 g_r 和 g_l。当死区宽度参数 b_r 和 b_l 是有界常数时， g_r 和 g_l 是斜率有界的光滑函数，与式（27）类似的分离模型 [92] 可表示为 $\mathrm{Dead}(v) = K^\top \Phi v + d_{dead}$，其中 K、 Φ和 d 的定义见 [93]。由于 d_{dead} 有界，死区问题转化为与有界扰动和未知时变控制系数相关的问题。基于神经网络/模糊逻辑系统的近似方法用于估计具有未知 g_r 和 g_l的死区动态，以及

作为未知量 b_r 和 b_l [94]。死区逆为 $v = \text{Dead}^{-1}(u) = u + u_{NN}$，其中

$$u_{NN} = \begin{cases} g_l^{-1}(u), & \text{if } u < 0 \\ 0, & \text{if } u = 0 \\ g_r^{-1}(u), & \text{if } u > 0 \end{cases}.$$

3.3.3 时变控制系数

如果控制系数 g_i 是符号已知的未知非零常数，则可将 $V_i = \frac{1}{g_i} z_i$ 用作 LFC。在$\dot{V}_i$中，所得项 $\frac{1}{g_i} f_i$ 与典型的自适应反步设计类似，其中 $\theta_{gi} = \frac{1}{g_i}$ [95, 96]。通过这些修改可以避免奇异性问题。

更具挑战性的情形是，g_i 仅部分已知，例如，$\dot{x}_i = f_i + (g_i + \Delta g_i) x_{i+1}$ 其中 Δg_i 是未知控制系数。基本假设是，不确定部分 Δg_i 有界，即存在正常数$g_{i\Delta}$ 使得 $|\Delta g_i(\bar{x}_i)| \leq g_{i\Delta}$ [86]。目标是在存在由g_i 部分引起的奇异性问题时设计虚拟控制律。此外，该假设还确保 $g_i + \Delta g_i$ 的符号保持不变。虚拟控制律修改为 $\alpha_1 = (g_1 + \gamma_1)^{-1}(-c_1 z_1 - f_1 + \dot{x}_{1d})$，其中选择 $\gamma_1 > g_1$ 以避免 $(g_1 + \gamma_1)^{-1}$的奇异性问题。
当 $g_i(\bar{x}_i(t))$ 未知时，为避免奇异性问题，可以使用积分型李雅普诺夫泛函，例如

- $V_{1,I} = \int_0^{z_1} \sigma \beta_i(\sigma + x_{1d}) d\sigma$
- $\dot{V}_{1,I} = z_1 \beta_1 \dot{z}_1 + \int_0^{z_1} \sigma \frac{\partial \beta_i(\sigma + x_{1d})}{\partial x_{1d}} \dot{x}_{1d} d\sigma$
- $V_{i,I} = \int_0^{z_i} \sigma \beta_i(\bar{x}_{i-1}, \sigma + \alpha_{i-1}) d\sigma,\ i = 2, \cdots, n$

其中 $\sigma = \theta z_1$ 和 $\beta_i = \frac{\bar{g}_i}{|g_i|^{\bar{p}}}$ 积分型李雅普诺夫泛函适用于自治系统，因为 $\frac{1}{2} z_i^2 \leq V_{i,\ I} \leq \frac{z_i^2}{g_i} \int_0^1 \theta g(\theta z_i + \alpha_{i-1})$ [97]。设计继续使用 Nussbaum函数和神经网络/模糊逻辑系统。
对于这些情况，控制系数 g_i 为非正或非负。例如，绝对值算子是液压系统中相当常用的算子。当绝对值算子出现在式（4）的 $g_i(x)$ 中时，g_i 不再是一阶连续函数。因此，会引发奇异性问题，即当 $g \to 0$ 时，$1/g_i \to \infty$。通常采用符号函数移除绝对值算子，$|a| = sgn(a)a$。近似函数 $sgn(a) \approxeq tanh(a/\delta)$ 将 $g(x)$ 转换为连续Lipschitz函数，其中 δ 是一个足够小的正常数 [83, 98]。另一种在控制设计过程中避免 $1/g_i$ 奇异性问题的方法是使用 $g_{i,\ new} = \frac{g_i^2}{g_i + \varepsilon_i}$ 或 $g_{i,\ new} = g_i + \varepsilon_i$，其中 δ 是一个较小的值。
一个更一般的问题是，g_i 的符号未知。第2.4节介绍的Nussbaum函数被广泛用于处理此类问题。

3.3.4 执行器故障

执行器故障会改变输出和参数，引入额外的系统不确定性和扰动，导致性能下降，甚至引发事故。故障通常发生时间不确定，而且往往无法恢复。现代容错控制研究主要有两个方向。(i) 首先，基于模型的冗余容错控制方法依托一组残差信号，这些信号由多个在线监测模块并行运行生成，每个模块针对特定的潜在故障。如果故障未包含在这组模块所覆盖的范围内，系统性能便无法保证。(ii) 另一个方向是无需显式故障检测的自适应故障补偿设计，其结构更简单。其目标是补偿执行器故障所造成的影响，同时确保在误差有界的情况下实现渐近跟踪性能。控制器在运行过程中始终保持相同的结构，因此更易于实施。本综述聚焦于(ii)自适应故障补偿设计。

故障分为完全失效（TLOE）和部分失效（PLOE）。假设系统中共有 m 个执行器，即 $u = [u_1, \cdots, u_m]^\top$。对于 TLOE 情况，需要冗余执行器。一个常见假设是，剩余执行器均可充分驱动；对于 SISO 系统，即使多达 $m - 1$ 个执行器发生故障，仍可实现预期的控制目标 [99, 100]。这一假设确保了在剩余驱动能力下被控对象仍具有可控性，并且执行器故障补偿问题存在正常解。

文献中有三种执行器故障模型。按复杂程度从简单到复杂，依次如下。

- 如果 j^{th} 执行器在 t_j发生故障，即，

$$u_j(t) = \bar{u}_j,\ \forall t \geq t_j,\ j = 1, \cdots, m, \tag{28}$$

其中， $\bar{u}_j$ 和 t_j 均未知。广泛使用的执行器故障模型为 $u = \sigma\bar{u} + (I_m - \sigma)v$，其中 $\sigma = diag\{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$ 是包含故障模式σ_j的矩阵，且若 j^{th} 执行器发生故障，则 $\sigma_j = \begin{cases} 1 \\ \end{cases}$，否则为0。

然后，可以使用自适应律 [101]估计 $\sigma\bar{u}$ 和 $(I_m - \sigma)$。

- 同时包含增益故障和偏置故障的执行器模型表示为 [102, 103], ，即:

$$u_j = \rho_j v_j + b_{uj}. \tag{29}$$

该模型有以下四种模式。

– 无故障： $\rho_j = 1$和 $b_{uj} = 0$； –
PLOE： $\rho_j \in (0,1)$ 和 $b_{uj} = 0$； –
TLOE： $\rho_j = 0$ 和 $b_{uj} = 0$ ； –
偏置故障： $\rho_j = 0$和 $b_{uj} \neq 0$。

- 提出了一阶 [104], 、二阶-[105], 和三阶 [106] 动态执行器故障模型。一阶模型表示为

$$\dot{u}_j = -(1 - \sigma_j)\lambda_j(u_j - k_j v_j) \tag{30}$$

二阶模型表示为

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1j} &= u_{2j}, \\ \dot{u}_{2j} &= -(\lambda_{2j} + \sigma_j\beta_j)u_{2j} + (1 - \sigma_j)\lambda_{1j}(k_j v_j - u_{1j}) \end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\lambda_j \gg 1$、 $\lambda_{1j} \gg 1$、 $\lambda_{1j} \gg \lambda_{2j}$ 和 $\lambda_{2j} + \beta_j \gg 1$。这三种模式为

– Failure-free: $\sigma_j = 0$ and $k_j = 1$;
– PLOE: $\sigma_j = 0$ and $k_j \in (0, 1)$;
– TLOE: $\sigma_j = 1$.

对于 PLOE 问题，可将控制系数视为时变未知参数，并通过基于神经网络的设计 [107] 和 Nussbaum函数 [11] 来求解。可将故障检测与隔离机制集成到自适应控制中，以提升性能，例如，可以实现针对故障执行器的停用函数。故障检测后、隔离前，可采用神经网络优化故障的影响 [108]。对于配备健康执行器作为备份的系统，可结合障碍李雅普诺夫函数和监控函数 [109]，实现自适应状态反馈容错控制功能。

为确保跟踪误差的瞬态性能，采用基于预设性能界的控制设计[110]。跟踪误差应始终处于由预设的递减光滑预设性能函数$\eta(t)$ 所定义的管状区域内，即 $-\delta\eta(t) < z_1(t) < \delta\eta(t)$，其中 $0 < \delta < \delta \leq 1$ 为给定的正常数。定义新的误差状态为 $z_1 = S^{-1}(\frac{z_1}{\eta})$，其中光滑、严格递增且可逆的函数 $S(z_1)$ 满足：(i) $\delta < S(z_1) < \delta$， – (ii) $\lim_{z_1 \to +\infty} S(z_1) = \delta$ 且 $\lim_{z_1 \to -\infty} S(z_1) = \delta$，以及 (iii) $S(0) = 0$。例如，函数 $\eta(t)$ 和 S设计为$\eta(t) = [\eta(0) - \eta(\infty)]\exp(-at) + \eta(\infty)$，以及 $S(v) = \frac{\delta e^{(v+r)} - \delta e^{-(v+r)}}{e^{(v+r)} + e^{-(v+r)}}$，其中 $a, \eta(0)\ \eta(\infty) > 0, \eta(0) > \eta(\infty)$，且$r = \ln(\delta/\delta)/2$。

3.4 时滞效应

时滞现象广泛存在于化学系统、生物系统、经济系统以及液压/气动系统中，通常会降低闭环系统的性能。由反馈控制律稳定的系统在引入时滞效应后可能变得不稳定。时滞效应可能存在于系统（4）的各个环节中，例如， f_i、 x_{i+1}、 u和 y。时滞时间通常是未知的，对于所有参数而言，其可能是相同的常数值，也可能是不同参数对应不同的常数值，还可能随时间变化。必须修改反馈律以适应时滞效应。时滞系统主要有两种类型的李雅普诺夫函数方法，即Lyapunov-Razumikhin方法 [111]和Lyapunov-Krasovskii方法 [112]。大多数关于自适应反步法的研究采用Lyapunov-Krasovskii泛函，只有少数研究依赖于Razumikhin引理[113]。根据Lyapunov-Krasovskii定理，Lyapunov-Krasovskii方法是一种类似预测器的技术。

3.4.1 状态时滞

具有状态时滞的严格反馈系统表示为

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\bar{x}_i(t)) + f_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di})) + g_i(\bar{x}_i(t))x_{i+1}(t), \tag{32a}$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(\bar{x}_n(t)) + f_{dn}(\bar{x}_n(t-\tau_{dn})) + g_n(\bar{x}_n(t))u(t), \tag{32b}$$

其中，$\tau_{di} > 0$ 表示延迟时间，$f_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))$为时滞项，而 $\bar{x}_i(t-\tau_{di}) = [x_1(t-\tau_{d1})\ x_2(t-\tau_{d2})\ \cdots,\ x_i(t-\tau_{di})]^\top$。

时滞系统的一个常见假设是，未知时滞有已知常数界，即$\tau_{di} \le \tau_{d,\ max}$。最初，通过基于鲁棒性的方法处理具有已知相等时滞 $\tau_{d1} = \cdots = \tau_{dn} = \tau_d$的严格反馈形式，并假设所有函数均已知且有界 [46, 114]。然而，在实际应用中，不同状态的时滞总是不同，即 $\tau_{d1} \neq \cdots \neq \tau_{dn}$ [65, 95, 115]。

此外，为使 f_{di} 能够得到补偿，还采用了各种关于有界参数时滞项的假设。时滞项的绝对值由已知光滑函数 $\rho_i(\bar{x}_i)$ 按若干参数分离形式进行界定。常用假设如下:

- $|f_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))| \le \sum_{j=1}^{n} \rho_j(\bar{x}_j)$ [65],
- $|f_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))| \le \rho_i(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))$ [97],
- $|f_{di}(\bar{z}_i(t-\tau_{di}))| \le \sum_{j=1}^{i} |z_j(t-\tau_{dj})|\rho_{ij}(\bar{z}_j(t-\tau_{dj}))$ [46, 114],
- $|f_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))| = \theta_{di}^\top \phi_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di})) + \delta_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))$ [95, 116],

其中，$\rho_{ij}(\cdot)$ 是已知的连续光滑函数，$\theta_{di} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\phi_{di}: \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}^{n_i}$ 是已知的光滑函数向量，δ_{di} 是有界未知光滑函数，即 $|\delta_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))| \le c_{di}\rho_i(\bar{x}_i(t-\tau_{di}))$，其中 c_{di} 是未知常数。

在相应步骤中，向 LFC 添加一个 Lyapunov-Krasovskii泛函。一个基本的积分型 Lyapunov-Krasovskii泛函及其导数为

$$V_{i,LK} = \int_{t-\tau_d}^{t} S_i(\bar{z}_i(\sigma))d\sigma, \tag{33a}$$

$$\dot{V}_{i,LK} = S_i(t) - S_i(t-\tau_d), \tag{33b}$$

其中，$S_i(\bar{z}_i(t))$ 是正定函数，例如 $S_i(\bar{z}_i(t)) = \rho_i^2(\bar{z}_i(t))$。Lyapunov-Krasovskii泛函的核心思想是通过选择函数 S_i 来抵消时滞项。虚拟控制律只补偿无时滞项，而时滞项则通过选择函数 S_i 来抵消。根据 i^{th} 步中时滞分量的数量，通常将 Lyapunov-Krasovskii泛函选为 $V_{i,LK} = \sum_{\mathcal{J}} \int_{t-\tau_{dj}}^{t} S_j(\bar{z}_j(\sigma))d\sigma$；当同一动态 $\dot{x}_i$中存在多个时滞 τ_{dj} 时，其中 $\mathcal{J}$是包含所有时滞状态索引 [116]的集合。当状态 $x_1, x_2, \cdots, x_n$中存在多个时滞时，可采用非线性分解策略，例如 $f_{di}(\bar{x}_i(t-\tau_{di})) \le \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij}(x_j(t-\tau_{di}))$。于是，$V_{i,QF}$的时间导数中有一部分 $z_i f_{di}$，可通过杨氏不等式将其分离，即 $z_i f_{di} \le \frac{i}{2} z_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i} \beta_{ij}^2(x_j(t-\tau_{dj}))$。设计 Lyapunov-Krasovskii泛函以补偿 $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i} \beta_{ij}^2(x_j(t-\tau_{dj}))$ [117]，例如 $V_{i,LK} = \frac{1}{2}\int_{t-\tau_{di}}^{t} \sum_{j=1}^{i} \beta_{ij}^2(x_j(\sigma))d\sigma$。附加 Lyapunov-Krasovskii泛函的作用体现为控制增益 c_i的增加。

此外，时滞函数 f_{di} 可以使用神经网络/模糊逻辑系统 [65, 115]进行近似和抵消。然而，当非线性变化迅速时，此类方法的适用性有限。

3.4.2 时滞积分器

具有时滞积分器的系统由下式给出。

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}(t-\tau_{di}), \tag{34a}$$

$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u. \tag{34b}$$

$_i$时滞积分器链（即 $f_i = 0$） [118] 和线性系统（即 $f_i = \sum a_{ij}x_j$） [119] 已得到研究。$_{j=1}$然而，针对含有未知时滞积分器的非线性系统的控制问题仍未解决。

3.4.3 输入时滞

处理具有输入时滞的系统有多种方法，其表达式为

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}, \tag{35a}$$
$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u(t-\tau_d). \tag{35b}$$

首先，可以使用帕德逼近法处理时变输入时滞 [120, 121]。引入一个附加状态x_{n+1}和一个低通环节，以抵消时滞的影响，即:

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}, \tag{36a}$$
$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)(x_{n+1}-u), \tag{36b}$$
$$\dot{x}_{n+1} = -\gamma_d x_{n+1} + 2\gamma_d u, \tag{36c}$$

其中 $\gamma_d = \frac{2}{\tau_d}$。最后一个误差状态定义为 $z_n := x_n - \alpha_{n-1} + \frac{1}{\gamma_d}x_{n+1}$。当 τ_d未知时， $\gamma = \gamma_n + \tilde{\gamma}$，其中假设 γ_n 已知，且 $\tilde{\gamma}$ 为有界误差。帕德逼近法仅适用于较短的时滞，而不适用于较长的时滞。

此外，仿真也是处理短时滞输入时滞的另一种方法。首先在无时滞情况下设计控制器，然后求出时滞上界，使闭环系统仍然渐近稳定 [122]。
此外，未知且任意长的执行器时滞可以通过基于预测的边界控制 [123]和预测器反馈 [124], 来处理，这两种方法尤其适用于线性时不变有限维完全可控系统。时滞的影响通过在整个时滞时间段内进行积分来补偿。采用基于预测的边界控制时，通过时滞辨识器估计时滞时间。预测器反馈方法的核心思想是将执行器时滞效应建模为一个输运偏微分方程 [125]。假设分布式输入 $u(x,\ t) = U(t+\tau_d(x-1))$，则用实时输入 v替代时滞输入，使得，

$$\tau_d \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ x \in [0,1), \tag{37a}$$
$$u(1,t) = U(t). \tag{37b}$$

然而，分布项可能并不总是容易计算。此外，由于在延迟区间上进行积分不方便，该方法不适用于非线性系统。

[126] 提出了一种无需分布项、求解具有任意长输入时滞的系统的替代方法。时滞系统被转换为另一种以延迟的系统状态为输入的动态系统 [127]。

3.4.4 测量时滞

除上述时滞系统外，测量时滞也是一个较少受到关注的问题，即$y = x_1(t-\tau_d)$，它可以转换为状态时滞问题。零阶保持延迟测量 [128] 可通过基于模糊逻辑系统 [130]的预测器型设计 [129] 和估计器来解决。

3.5 纯反馈系统

反步法的一项局限是要求系统具有严格反馈形式。较为宽松的一种状态方程，即非线性纯反馈系统，可表示为

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}),\ i \in \mathcal{I}, \tag{38a}$$
$$\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n, u). \tag{38b}$$

与式（4）中的严格反馈系统相比，纯反馈系统（38）中将用作虚拟控制的变量并非仿射形式。以下解决方案的基础是获得可用作虚拟控制的仿射变量。

3.5.1 泰勒级数展开

如果纯反馈系统具有强相对阶且能够转换为积分器链，则可采用泰勒级数展开来设计观测器和神经自适应控制器 [131]。高阶项被建模为扰动。

3.5.2 中值定理

中值定理是最广泛使用的方法。纯反馈系统 (38) 被转换为具有未知控制系数 [132],的严格反馈形式，即,

$$f_i(\bar{x}_{i+1}) = f_i(\bar{x}_i, 0) + \mu_i(\bar{x}_i, x_{i+1}^0)x_{i+1}, \tag{39a}$$

$$f_n(x, u) = f_n(\bar{x}_n, 0) + \mu_n(\bar{x}_n, u^0)u, \tag{39b}$$

其中 $\mu_i(\bar{x}_{i+1}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(\bar{x}_{i+1})$ 和 $\mu_n(\bar{x}_n, u) = \frac{\partial f_n}{\partial u}(x, u)$ 存在但未知， x_{i+1}^0 是 0 与 x_{i+1}之间的未知点， u^0 是 0 与 u之间的未知值。因此，纯反馈系统被转换为具有未知函数 f_i 和控制系数 μ_i的严格反馈系统。参照上述方法，该推导基于控制增益有界的假设，即 $\underline{\mu}_i < \mu_i < \bar{\mu}_i$。随后，误差动态被转换为

$$\dot{z}_i = f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) + g_{i\mu_i}(x_{i+1} - \alpha_i^*), \tag{40}$$

其中 $g_{i\mu_1} = g_i(\bar{x}_i, \mu_i x_{i+1} + (1-\mu_i)\alpha_i^*)$，其中 $\mu_i \in$ 属于 (0，1)， α_i^*是理想控制输入，使得 $f_1(x_1, \alpha_1^*) - \dot{x}_{1d} + k_1 z_1 = 0$。假设 $|g_{1\mu_1}|$ 有已知常数界，且 α_1^* 是 x_1 和 x_{1d}的函数。

首先，系统 (40) 可通过神经网络来求解，以近似 α_i^* [97]。当神经网络处于某些紧集中时，可证明半全局稳定性；通过采用足够多的神经网络节点，这些紧集可以任意扩大。或者，采用输入到状态稳定性 (ISS)，将整个互联系统划分为两个子系统，并由小增益定理 [133] 保证整体稳定性。已证明，具有状态 $\tilde{W}$、输入 col$(W_1, W_2, \cdots, W_n)$ 和 col$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的第一个误差动态系统是 ISS。此外，具有状态 $\tilde{W}$col$(W_1, W_2, \cdots, W_n)$、输入 z 和 col$(W_1^*, W_2^*, \cdots, W_n^*)$ 的神经网络权重估计器也是 ISS。由此保证互联系统的稳定性。

与对所有未知量进行近似不同，基于鲁棒性的方法可以通过假设不确定性有界来构建，例如， $f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) \le \sigma_i \rho_i(\bar{x}_i) \sum |x_j|$。该方法采用高增益思路，并使用动态控制增益 $\dot{c}_i$，最终利用Barbalat引理 [134]证明稳定性$_{j=1}$。然而，人们注意到控制输入中存在快速振荡。另一种控制律较为简化的方法是预设性能控制 [135]。系统受预定义轨迹约束，其中收敛率和最大超调量确保预先设定的性能。在不试图消除所有非线性的情况下，该控制律与采用障碍李雅普诺夫函数（BLF）的方法类似，即 $u = -c_n T_f(\frac{x_n - \alpha_{n-1}}{\rho_n t}())$和 $\alpha_i = -c_i T_f(\frac{x_i - \alpha_{i-1}}{\rho_i t}())$，其中 ρ_i是预设性能函数， $T_f(a) = \ln \frac{1+a}{1-a}$，且 $a \in$(0，1)。在性能边界附近，控制增益会增大。

奇异摄动理论与反步设计相结合 [136, 137]。控制信号被寻求为快速动态的一个解，并证明能够渐近稳定原非仿射系统。

使用中值定理时，主要缺点是要求 $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 为正，以及高阶系统的复杂性。采用动态表面控制和最小学习参数技术，以解除这一要求，并实现对具有不可微 f_i [138] 的系统的中性自适应控制。为提高估计性能，神经网络节点数量的增加会导致可调参数大幅增加，在线学习时间可能很长。一种减少可调参数的可行方案是使用单个状态 θ 来估计 $|W_i^*|^2$。另一个缺点是存在循环构造问题，因为神经网络被用于逼近 u $\dot{u}$，并同时逼近期望的虚拟控制和实际控制 α_i^* 和 u^* [132]。

3.5.3 布鲁诺夫斯基范数形式

通过引入低通过程 $\dot{u} = -au + v$，系统 (38) 被转换为布鲁诺夫斯基范数形式下的仿射严格反馈形式，其中 $a > 0$ [92]。定义状态 $s_1 := x_1 = b_1(x_1)$ 和 $s_i = \dot{s}_{i-1} =: b_i(\bar{x}_i)$，
$i = 2 \cdots n+1$ $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\bar{x}_{j-1}, x_j)$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(\bar{x}_{i-1}, x_i)$ =, , 可得, $\frac{\partial b_i}{\partial \bar{x}_i}(\bar{x}_i)$ $\dot{s}_i = b_{i+1} = \sum_{j=1}^{\bar{x}_i} \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\bar{x}_j)\dot{x}_j = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial b_i}{\partial \bar{x}_{i+1}}(\bar{x}_{i+1})(,) + \frac{\partial b_i}{\partial x_{i+1}}(,)$ 以及 $\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}(,) = \prod_{j=1}^{i} g_j(\bar{x}_{j-1}, x_j)$，其中 $g_i = \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}(,)$ 和 $g_n(\bar{x}_n, u) = -a\prod_{j=1}^{n} g_j(\bar{x}_{j-1}, x_j)$ 满足有界 g_i 假设。因此， $\dot{s} = As + B[f_n(\bar{x}_n, u) + g_n(\bar{x}_n, u)v]$，其中 $s = [s_1, \cdots, s_{n+1}]^\top$, $A = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} & I_n \\ 0 & 0_{1\times n} \end{bmatrix}$, $B = [0_{1\times n}, 1]^\top$ 和 $C = [1, 0_{1\times n}]$。若采用线性系统，最终控制律的形式会更简单。

3.6 事件触发系统

在典型的反步设计中，设计过程采用连续控制，而系统在离散时间触发时刻 t_k 更新，即为时间触发系统。相比之下，事件触发控制（或事件驱动系统）指的是系统按照预先设计的事件触发条件进行非周期性更新。控制任务在事件发生后更新执行，且在连续两次更新之间，控制输入（或测量值）保持不变（零阶保持）。通常，单调递增子序列 t_k 从 $t_0 = 0$ 开始。这是一种更符合人类控制器直觉的采样方式。该策略有助于减少网络流量并提高资源利用率，同时仅轻微降低控制性能。事件触发问题可根据触发事件的部分进行分类。

（i）一项主要研究聚焦于事件触发的控制输入。我们假设在两个触发时刻之间控制输入保持为常数，即对所有 $t \in [t_k, t_{k+1})$， $u(t) = v(t_k)$。除最后一步外，设计过程与时间触发执行相同。

事件触发条件设计为：特定误差 $e_{et} := u(t) - v(t_k)$ 大于预设阈值函数。阈值可以是固定的，也可以依赖于状态；具体如下所列。

- 固定阈值策略 [96, 139]:

$$t_{k+1} = \inf\{t > t_k || e_{et}(t)| > \delta_{et}\} \tag{41}$$

- 依赖于状态的阈值 1 [140]:

$$t_{k+1} = \inf\{t > t_k || e_{et}(t)| > \kappa_{et}|u(t)|\} \tag{42}$$

- 状态相关阈值 2 [141]:

$$t_{k+1} = \inf\{t > t_k || e_{et}(t)| > \kappa_{et}|u(t)| + \delta_{et}\} \tag{43}$$

其中 $\kappa_{et} \in (0,1)$ 和 $\delta_{et} > 0$。

去掉绝对值算子并将其代入 V_n, $v(t)$，可将其设计为最后一个虚拟控制 α_i 的函数。例如，事件触发条件（43）下的控制输入变为 $u(t) = \frac{v(t)}{1+\eta_{et,1}}(t)\kappa_{et} - \frac{\eta_{et,2}}{1+\eta_{et,1}}\frac{t}{t}\delta_{et}$, ( ) , ( )$\kappa_{et}$ 其中$|\eta_{et,1}| \le 1$ 以及 $|\eta_{et,2}| \le 1$。因此，未知有界外部扰动 $-\frac{\eta_2}{1+\eta_1}\left(\frac{t}{t}\delta_{et}\right)(\ )\kappa_{et}$ 被引入状态方程 $\dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u$。该问题可通过 tanh(·) 函数[141]轻松解决。

(ii) 或者，如果状态测量采用事件触发方式，即事件采样，则对于所有 $t \in [t_k, t_{k+1}$，测量值被视为发生跳变，即 $\hat{x}_i(t) = x_i(t_k)$。此时，事件触发条件中的误差变为$e_{et,\ i}(t) := x_i - \hat{x}_i$，适用于事件触发采样。利用新定义的误差 $e_{z_i} = z_i - \hat{z}_i$[142]，可以估计该跳变。为通过基于观测器的方法解决问题，在触发时刻之间，NN 和模糊逻辑系统（FLS）的权重更新为零，即对于所有 $t \in (t_k,\ t_{k+1})$ [143]，均有 $W_i = 0$。

事件触发机制引入的非线性难以完全抵消，因此大多数研究只能保证有界性。控制应满足 ISS条件，但涉及误差时这些条件难以检验。较大的控制输入 u 会导致采样间隔变长，并降低控制性能。为提高控制精度，提出了一种基于跟踪误差幅值的切换阈值策略 [139]。跟踪误差收敛至一个区域。文献 [144] 研究了指数收敛和有限时间稳定性。

尽管输入和状态测量的带宽有所降低，触发机制仍要求持续监测，而这在数字平台上是不可能实现的。为进一步节省硬件资源，研究者提出了在固定等间隔时刻进行周期事件触发控制的方法，其中事件触发函数按周期进行评估。Borgers 等人[145] 利用凸过近似技术，重新设计了适用于连续事件触发控制的事件函数。

3.7 随机系统

实际系统通常会受到外部环境的影响，因此随机非线性系统引起了广泛关注。根据伊藤引理，采用随机微分方程来表示随机过程，例如，

$$dx = f(x,u)dt + h_w(x,u)dw(t), \tag{44}$$

其中， $w \in \mathbb{R}^r$ 是一个 r 维相互独立的标准维纳过程， $f(x,u)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 和 $h_w(x,u)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times r}$ 对于所有满足 $f(0,0) = 0$ 和 $h_w(0,0) = 0$的 $t \geq 0$ 均为局部 Lipschitz 连续函数。
与系统（17）中假设幅值有界的扰动 d_i 不同，随机系统中的扰动幅值在足够长的时间内可以任意大。因此，稳定性和性质均以概率来定义。与确定性系统不同，有界性是不可能证明的。若（44）的平衡点$x(0) = 0$满足以下条件，则称其

1. 概率稳定：若对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$，均存在一个 r，使得若 $t > t_0$、 $|x_0| < r$ 和 $i_0 \in S$，则$P\{|x(t)| > \varepsilon\} < \delta$；2. 概率渐近稳定：若其概率稳定，且对每个 $\varepsilon > 0$、 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $i_0 \in S$，均有 $\lim_{t\to\infty} P\{|x(t)| > \varepsilon\} = 0$；3. 概率有界：若随机变量 $|x(t)|$ 关于 t一致地概率有界，即 $\lim_{t\to\infty} \sup_{t>t_0} P\{|x(t)| > R\} = 0$ [146]。

误差状态定义为 $dz_1 = dx_1 - dx_{1d} = dx_1 - \dot{x}_{1d}dt$。为证明随机系统的稳定性，采用随机系统的无穷小生成元，其表达式为

$$\mathcal{L}V(x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[h_w^\top \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}h_w], \tag{45}$$

其中，高阶海森项 $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[h_w^\top \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h_w]$源于随机噪声，Tr(·) 表示迹算子。为调整新引入的项 $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$，通常选用四次李雅普诺夫函数，例如 $\frac{1}{4}z_i^4$和$\frac{1}{4}\log\left(\frac{k_{bi}^4}{k_{bi}^4 - z_i^4}\right)$。而用于描述参数估计误差的函数仍为二次函数，例如$\frac{1}{2}\tilde{\theta}_i^\top \tilde{\theta}_i$。因此， z_1^2出现在 $\mathcal{L}V$中。应用杨氏不等式会产生含有 z_1^4 的项，该项可由虚拟控制律 α_i进行补偿。

假设存在一个正定、径向无界且二阶连续可微的函数 V，使得 $\mathcal{L}V(x)$为负定函数，则平衡点 $x = 0$ 在概率意义下是全局渐近稳定的 [147]。此外，若存在两个常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $t > t_0$ 以及 $E[V(x,t)] \leq V(x_0)e^{-\gamma t} + \frac{\delta}{\gamma}$ [148]，系统的解与引理1类似，在概率意义下有界，其中 $\mathcal{L}V(x) \leq -\gamma V(x,t) + \delta$。若采用纳斯鲍姆型函数，则 $\mathcal{L}V(x) \leq -\gamma V(x,t) + \frac{1}{c}(g_n\mu_1\mathcal{N}(\chi) + 1)\dot{\chi}\delta$，从而得到 $E[V(x,t)] \leq V(x_0)e^{-\gamma t} + \frac{\delta}{\gamma} + \frac{\sigma}{c}$，其中 $\sigma = \int_0^t |E\ g_n\mu_1\mathcal{N}\ \chi\ + 1\ \dot{\chi}e^{\gamma\tau}|d\tau$ [149] $\mathcal{L}V + cV^\alpha\ x\ \leq 0 \sup(\tau)$。[150]
有限时间稳定性由( )保证。

4 讨论与结论

自首次提出以来，反步设计方法得到了长足发展。为将递归式的基于李雅普诺夫函数的控制器设计应用于日益复杂和不确定的系统，人们提出了诸多改进与创新。本综述回顾了若干广泛应用的先进方法的发展现状，并介绍了采用类反步方法处理各种非线性问题的自适应控制。复杂非线性系统被转化为若干简单问题的组合，再根据相应的假设和方法逐一解决各个子问题。总而言之，反步法及其扩展方法是一种系统化、模块化的控制设计方法。

抵消是类反步法方法中的关键词。非线性会导致弱收敛、不理想的精度和振荡，甚至不稳定性。为抵消不确定和未知部分，每种方法都依赖于关于有界性和参数分离的一些特定假设。对于更高阶非线性，需要越来越严格的假设。每一步的李雅普诺夫函数可以是若干李雅普诺夫函数之和，以处理特定的复杂因素，包括跟踪误差、逼近误差、平滑误差等。采用适当的假设和李雅普诺夫函数后，可以设计虚拟控制律、自适应更新律和最终控制输入，以补偿 LFC 时间导数中与状态相关的项。

在实际应用中，除了严格反馈形式之外，还有许多其他系统。当这些简化条件不满足时，非线性和复杂性便会出现。由于系统的不确定性和复杂性无法被完全知晓，采用引理1形式的李雅普诺夫稳定性判据在递归设计过程和稳定性证明中发挥着重要作用。不可消除的正项被移至 δ 中（1），而 γ 被选为控制和更新增益各组中的最小值。由于不可能精确消除所有未知项，因此有界性始终得到保证，而不是

而非平衡点处的渐近稳定性或指数稳定性。随着复杂性和不确定性的增加，式（1）中的 δ 的大小会随着各正分量之和而增大。控制增益必须足够大，才能确保令人满意的跟踪性能。然而， δ 的实际值可能远小于我们收到的 δ，从而导致设计过于保守，并浪费执行器能力。

大多数发展　　都属于两种主要方法，即基于鲁棒性的方法和基于估计的方法　　.

- 基于鲁棒性的方法的主要思路是，通过某些参数分离假设，结合引理1中的 $\dot{V} = -\gamma V + \delta$，大幅补偿所有非线性。那些无法消除但有界的正项会累积在最终的 δ中。随后，可通过较高的控制增益和自适应系数来减小系统不确定性的影响。然而，这种激进的控制需要昂贵的硬件，并会导致不稳定性。因此，必须提高 γ 的值，才能实现相近的性能。于是，随着系统维度 n的增加，控制律和调节律也变得愈发激进。为加快自适应速度，自适应更新律中的大增益可能导致不稳定。

- 基于近似的方法采用基于现有测量值的估计器。该方法假设所有非线性均可近似。对于日益复杂的非线性，解决办法是提高估计器的阶数。假设未知部分得到了良好估计，就可以消除这些非线性。然而，外系统、神经网络和模糊逻辑系统均无法估计高频不确定性。尽管基于神经网络/模糊逻辑系统的方法具有很高的灵活性，可近似各种有界光滑函数，但学习过程耗时较长。

反步法的主要缺点在于控制器设计和稳定性分析的复杂性，这是由系统维数的增加以及对虚拟控制律的反复求导所导致的。过参数化仍然是一个非常重要的问题。大多数研究中的案例研究主要集中于阶数小于或等于三阶的系统。基于估计的方法（如神经网络（NN））以及自适应控制律会在整个控制系统中引入大量状态，进而影响计算速度、学习时间和响应速度。为了解决反步设计过程中的过参数化问题，研究人员已尝试采用多种方法，例如调节函数、动态面控制和指令滤波反步法。

假设未知项要么是有界的，要么是未知常向量与已知函数的乘积。寻找 $\phi_i(\bar{x}_i)$ 的系统化方法仍然具有挑战性。尽管通过仔细调整可以获得 $\phi_i(\bar{x}_i)$ 的形式，但很难确保所提出的函数能够适应所有不确定性。此外，如果引入过多不必要的组成部分，设计过程将变得繁琐，计算时间也会增加。采用较低增益的控制律和调整律的方法将具有重要价值。

反步法研究中的另一种现象是基于组合的创新。回想鸡尾酒和调酒，配方通过以各种方式混合原料而获得新的名称。然而，无论烹调方法如何，它们仍然都是饮料，并无本质区别。这与当今有关反步设计的出版物类似。一些优雅的方法得以发展出来。尽管如此，大多数研究不过是将若干复杂性组合起来，利用能够处理相应非线性的现有方法进行整合，从而形成前所未有的组合。另一方面，这正是控制设计人员所偏好的特性，使设计实现模块化。

自反步法最初发展以来，它已在众多应用中展现出巨大的潜力。新颖的方法拓展了其在日益复杂系统中的应用。我们相信，通过相关领域理论创新的参与，反步法将应用于未来新的挑战。

参考文献

[1] I. Kanellakopoulos、P. V. Kokotovi´c，《反馈线性化系统自适应控制器的系统化设计》，载于：美国控制会议，1991年，IEEE，1991年，第649–654页。[2] P. V. Kokotovi´c，《反馈的乐趣：非线性与自适应》，《IEEE 控制系统》12（3）（1992）7–17。[3] M. Krstic、I. Kanellakopoulos、P. V. Kokotovi´c 等，《非线性与自适应控制设计》，第222卷，Wiley，纽约，1995年。[4] P. Kokotovi´c、M. Arcak，《构造性非线性控制：历史视角》，《Automatica》37（5）（2001）637–662。[5] H. K. Khalil，《非线性系统》，第2卷，1996年。[6] P. A. Ioannou、J. Sun，《鲁棒自适应控制》，第1卷，PTR Prentice-Hall，Upper Saddle River，新泽西州，1996年。[7] G. Tao、P. Kokotovi´c，《具有执行器和传感器非线性的系统的自适应控制》，《信号处理、通信与控制的自适应与学习系统》，Wiley，1996年。

[8] G. Tao, F. L. Lewis, 《非光滑动态系统的自适应控制》, Springer Science & Business Media, 2013年。[9] M. Krstic, A. Smyshlyaev, 《偏微分方程的边界控制：反步设计教程》, 第 16 卷, Siam, 2008年。[10] S. S. Ge, C. C. Hang, T. H. Lee, T. Zhang, 《稳定自适应神经网络控制》, 第 13 卷, Springer Science & Business Media, 2013年。[11] Q. Shen, B. Jiang, P. Shi, 《基于自适应控制方法的故障诊断与容错控制》, 第 91 卷, Springer, 2017年。[12] R. Marino, P. Tomei, 非线性系统的全局自适应输出反馈控制。I. 线性参数化, 《IEEE Transactions on Automatic Control》38 (1) (1993) 17–32。doi:10.1109/9.186309。[13] R. Freeman, P. Kokotovi´c, 针对未测状态呈线性关系的系统的跟踪控制器, 《Automatica》32 (5) (1996) 735–746。doi:https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00193-X。[14] R. Skjetne, T. I. Fossen, P. V. Kokotovi´c, 一类非线性系统的鲁棒输出操纵, 《Automatica》40 (3) (2004) 373–383。[15] R. Marino, P. Tomei, 非线性系统的全局自适应输出反馈控制。I. 线性参数化, 《IEEE Transactions on Automatic Control》38 (1) (1993) 17–32。doi:10.1109/9.186309。[16] M. Arcak, M. Seron, J. Braslavsky, P. Kokotovi´c, 针对输入未建模动态的反步法鲁棒化, 《IEEE Transactions on automatic control》45 (7) (2000) 1358–1363。[17] R. FREEMAN, M. KRSTIC, P. KOKOTOVIC, 自适应非线性控制对有界不确定性的鲁棒性, 《Automatica》34 (10) (1998) 1227–1230。[18] Z. P. Jiang, A. R. Teel, L. Praly, ISS 系统的小增益定理及其应用, 《Mathematics of Control Signals and Systems》7 (2) (1994) 95–120。[19] M. Krsti´c, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovi´c, 无过参数化的自适应非线性控制, 《Systems & Control Letters》19 (3) (1992) 177–185。[20] S. Gayaka, L. Lu, B. Yao, 输入饱和与扰动下积分器链的全局镇定：一种新方法, 《Automatica》48 (7) (2012) 1389–1396。[21] D. Swaroop, J. Gerdes, P. P. Yip, J. K. Hedrick, 非线性系统的动态面控制, 载于：《美国控制会议》, 1997年。1997年会议论文集, 第 5 卷, IEEE, 1997年, 第 3028–3034 页。[22] J. A. Farrell, M. Polycarpou, M. Sharma, W. Dong, 指令滤波反步法, 《IEEE Transactions on Automatic Control》54 (6) (2009) 1391–1395。[23] J. Yu, P. Shi, W. Dong, H. Yu, 基于观测器和指令滤波器的不确定非线性系统自适应模糊输出反馈控制, 《IEEE Transactions on Industrial Electronics》62 (9) (2015) 5962–5970。[24] M. E. N. Sørensen, M. Breivik, R. Skjetne, 船舶运动控制中线性与非线性反馈项组合的比较, 《IEEE Access》8 (2020年) 193813–193826。[25] D. Swaroop, J. K. Hedrick, P. P. Yip, J. C. Gerdes, 一类非线性系统的动态面控制, 《IEEE transactions on automatic control》45 (10) (2000) 1893–1899。[26] J. Yu, P. Shi, L. Zhao, 一类非线性系统的有限时间指令滤波反步控制, 《Automatica》92 (2018) 173–180。[27] J.-M. Coron, L. Praly, 为镇定问题添加一个积分器, 《Systems & Control Letters》17 (2) (1991) 89–104。[28] W. Lin, C. Qian, 添加一个幂积分器：一种用于高阶下三角系统全局镇定的工具, 《Systems & Control Letters》39 (5) (2000) 339–351。[29] Y. Hong, J. Huang, Y. Xu, 关于输出反馈有限时间镇定问题, 《IEEE Transactions on Automatic Control》46 (2) (2001) 305–309。[30] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, Z. Man, 具有终端滑模的机器人操纵器连续有限时间控制, 《Automatica》41 (11) (2005) 1957–1964。[31] X. Huang, W. Lin, B. Yang, 一类不确定非线性系统的全局有限时间镇定, 《Automatica》41 (5) (2005) 881–888。[32] S. P. Bhat, D. S. Bernstein, 连续自治系统的有限时间稳定性, 《SIAM Journal on Control and Optimization》38 (3) (2000) 751–766。[33] W. M. Haddad, S. G. Nersesov, L. Du, 时变非线性动态系统的有限时间稳定性, 载于：《美国控制会议》, 2008年, IEEE, 2008年, 第 4135–4139 页。

[34] Z.-Y. Sun, M.-M. Yun, T. Li, 《一种实现高阶非线性系统快速全局有限时间镇定的新方法》, Automatica 81（2017年）455–463。[35] S. Khoo, J. Yin, Z. Man, X. Yu, 《严格反馈形式随机非线性系统的有限时间镇定》, Automatica 49（5）（2013年）1403–1410。[36] H. Wang, Q. Zhu, 《严格反馈形式高阶随机非线性系统的有限时间镇定》, Automatica 54（2015年）284–291。[37] Z. Ren, B. Zhao, D. T. Nguyen, 《严格反馈形式非线性系统的有限时间反步：由伯努利不等式证明》, IEEE Access 8（2020年）47768–47775。[38] Y. Hong, J. Wang, D. Cheng, 《具有参数不确定性的非线性系统自适应有限时间控制》, IEEE Transactions on Automatic Control 51（5）（2006年）858–862。[39] Y. Hong, Z.-P. Jiang, 《具有参数和动态不确定性的非线性系统有限时间镇定》, IEEE Transactions on Automatic Control 51（12）（2006年）1950–1956。[40] X. Zhang, G. Feng, Y. Sun, 《通过状态反馈控制实现一类时变非线性系统的有限时间镇定》, Automatica 48（3）（2012年）499–504。[41] C. Qian, W. Lin, 《一种实现非线性系统全局强镇定的连续反馈方法》, IEEE Transactions on Automatic Control 46（7）（2001年）1061–1079。[42] H. Du, C. Qian, S. Yang, S. Li, 《一类时变非线性系统有限时间收敛观测器的递归设计》, Automatica 49（2）（2013年）601–609。[43] S. Ge, C. Wang, 《一类非线性系统的直接自适应神经网络控制》, IEEE Transactions on Neural Networks 13（1）（2002年）214–221。doi:10.1109/72.977306。[44] T. Zhang, S. Ge, C. Hang, 《非线性系统直接自适应控制器的设计与性能分析》, Automatica 35（11）（1999年）1809–1817。[45] T. Zhang, S. S. Ge, C. C. Hang, 《采用反步设计的严格反馈非线性系统自适应神经网络控制》, Automatica 36（12）（2000年）1835–1846。[46] D. W. Ho, J. Li, Y. Niu, 《一类非线性参数时滞系统的自适应神经控制》, Neural Networks, IEEE Transactions on 16（3）（2005年）625–635。[47] F. L. Lewis, W. K. Tim, L.-Z. Wang, Z. Li, 《采用自适应模糊逻辑控制补偿运动控制系统中的死区》, IEEE 控制系统技术汇刊 7（6）（1999年）731–742。[48] W. Chen, L. Jiao, R. Li, J. Li, 《具有周期性扰动的非线性参数化系统自适应反步模糊控制》, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 18（4）（2010年）674–685。[49] Y. Yang, G. Feng, J. Ren, 《结合反步法与小增益方法的严格反馈非线性系统鲁棒自适应模糊控制》, IEEE 系统、人类与控制论汇刊 A辑：系统与人 34（3）（2004年）406–420。[50] R. D. Nussbaum, 《关于参数自适应控制中一个猜想的若干评论》, Systems & Control Letters 3（5）（1983年）243–246。[51] Y. Xudong, J. Jingping, 《无需预先了解控制方向的自适应非线性设计》, IEEE Transactions on Automatic Control 43（11）（1998年）1617–1621。[52] C. Chen, Z. Liu, Y. Zhang, C. P. Chen, S. Xie, 《基于饱和 Nussbaum 函数的未知执行器动态机器人系统控制方法》, IEEE Transactions on Cybernetics 46（10）（2016年）2311–2322。[53] C. Chen, Z. Liu, Y. Zhang, C. P. Chen, 《具有未知执行器非线性和控制方向的机器人系统自适应控制》, Nonlinear Dynamics 81（3）（2015年）1289–1300。[54] W. Chen, X. Li, W. Ren, C. Wen, 《基于新型 Nussbaum 型函数的未知相同控制方向多智能体系统自适应一致性》, IEEE Transactions on Automatic Control 59（7）（2014年）1887–1892。[55] Z. Ding, 《具有未知高频增益的一类非线性系统的自适应一致性输出调节》, Automatica 51（2015年）348–355。[56] S. S. Ge, J. Wang, 《具有未知控制系数的时变不确定非线性系统鲁棒自适应跟踪》, IEEE Transactions on Automatic Control 48（8）（2003年）1463–1469。[57] K. B. Ngo, R. Mahony, Z.-P. Jiang, 《采用障碍函数的积分器反步控制及其在多状态约束系统中的应用》, 载于: Decision and Control，2005年及2005年欧洲控制会议（CDC-ECC'05），第44届 IEEE 会议，IEEE，2005年，第8306–8312页。

[58] K. P. Tee, S. S. Ge, E. H. Tay, 《用于输出受约束非线性系统控制的障碍李雅普诺夫函数》, Automatica 45（4）（2009年）918–927。[59] J.-X. Xu, X. Jin, 《一类多输入多输出系统的状态约束迭代学习控制》, IEEE Transactions on Automatic Control 58（5）（2013年）1322–1327。[60] Z. Chen, Z. Li, C. P. Chen, 《具有状态和输入约束的不确定多输入多输出非线性系统自适应神经控制》, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 28（6）（2017年）1318–1330。[61] B. Ren, S. S. Ge, K. P. Tee, T. H. Lee, 《采用障碍李雅普诺夫函数的输出反馈非线性系统自适应神经控制》, IEEE Transactions on Neural Networks 21（8）（2010年）1339–1345。[62] Y.-J. Liu, S. Tong, 《基于障碍李雅普诺夫函数的全状态约束纯反馈非线性系统自适应控制》, Automatica 64（2016年）70–75。[63] Z. Zhao, W. He, S. S. Ge, 《具有多个输出约束的全驱动海面船舶自适应神经网络控制》, IEEE 控制系统技术汇刊 22（4）（2014年）1536–1543。[64] K. P. Tee, S. S. Ge, 《利用积分型障碍李雅普诺夫泛函控制状态受约束非线性系统》, 载于：Decision and Control（CDC）, 2012年 IEEE 第51届年会, IEEE, 2012年, 第3239–3244页。[65] S. S. Ge, K. P. Tee, 《基于逼近的非线性多输入多输出时滞系统控制》, Automatica 43（1）（2007年）31–43。[66] E. Gilbert, I. Kolmanovsky, 《存在状态和控制约束时的非线性跟踪控制：一种广义参考调节器》, Automatica 38（12）（2002年）2063–2073。[67] L. Sonneveldt, Q. Chu, J. Mulder, 《采用受约束自适应反步法的非线性飞行控制设计》, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 30（2）（2007年）322–336。[68] T. Zhang, M. Xia, Y. Yi, 《具有全状态约束和未建模动态的严格反馈非线性系统自适应神经动态面控制》, Automatica 81（2017年）232–239。[69] Z. Ding, 《一类非线性系统中非匹配一般周期性扰动的渐近抑制》, IET Control Theory & Applications 2（4）（2008年）269–276。[70] A. J. Koshkouei, A. S. Zinober, 《具有非匹配不确定性的非线性系统自适应反步控制》, 载于：Decision and Control, 2000年 IEEE 第39届会议论文集, 第5卷, IEEE, 2000年, 第4765–4770页。[71] M. M. Polycarpou, P. A. Ioannou, 《一种鲁棒自适应非线性控制设计》, Automatica 32（3）（1996年）423–427。[72] S. Tong, X. He, Y. Li, H. Zhang, 《基于小增益方法的不确定非线性系统自适应模糊反步鲁棒控制》, Fuzzy Sets and Systems 161（6）（2010年）771–796。[73] E. Lavretsky, T. E. Gibson, A. M. Annaswamy, 《自适应系统中的投影算子》（2011年）。[74] F. Ikhouane, M. Krsti´c, 《采用参数投影的自适应反步法：鲁棒性与渐近性能》, Automatica 34（4）（1998年）429–435。[75] H. F. Grip, T. I. Fossen, T. A. Johansen, A. Saberi, 《全局指数稳定的姿态与陀螺仪偏置估计及其在 GNSS/INS 集成中的应用》, Automatica 51（2015年）158–166。[76] M. Chen, W.-H. Chen, 《基于扰动观测器的一类不确定非线性系统滑模控制》, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing 24（1）（2010年）51–64。[77] D. Won, W. Kim, D. Shin, C. C. Chung, 《具有输出跟踪误差约束的电液系统高增益扰动观测器反步控制》, IEEE 控制系统技术汇刊 23（2）（2015年）787–795。[78] R. Rashad, A. Aboudonia, A. El-Badawy, 《一种用于多输入多输出系统的命令滤波补偿新型扰动观测器反步控制器》, Journal of the Franklin Institute 353（16）（2016年）4039–4061。[79] P. Li, 《内模原理与重复控制》, 大学讲义, 4月（2006年）。[80] V. Nikiforov, 《未知扰动完全补偿的自适应非线性跟踪》, European Journal of Control 4（2）（1998年）132–139。[81] V. Nikiforov, 《未知外部扰动的非线性伺服补偿》, Automatica 37（10）（2001年）1647–1653。[82] H. Sun, L. Guo, 《具有多个非匹配扰动的非线性系统的复合自适应扰动观测器控制与反步法》, Journal of the Franklin Institute 351（2）（2014年）1027–1041。[83] J. Zhou, M. J. Er, Y. Zhou, 《存在输入饱和时不确定非线性系统的自适应神经网络控制》, 载于：Control, Automation, Robotics and Vision, 2006年 ICARCV'06 第9届国际会议, IEEE, 2006年, 第1–5页。

[84] Q. Zhou, H. Li, C. Wu, L. Wang, C. K. Ahn，采用小增益方法对具有未建模动态和输入饱和的非线性系统进行自适应模糊控制，IEEE《系统、人、控制论：系统》汇刊 47 (8) (2017年) 1979–1989.[85] C. Wen, J. Zhou, Z. Liu, H. Su，存在输入饱和和外部扰动时不确定非线性系统的鲁棒自适应控制，IEEE Transactions on Automatic Control 56 (7) (2011年) 1672–1678.[86] M. Chen, S. S. Ge, B. Ren，具有输入约束的不确定多输入多输出非线性系统的自适应跟踪控制，Automatica 47 (3) (2011年) 452–465.[87] J. Zhou, C. Wen, Y. Zhang，具有不确定死区非线性的非线性系统的自适应输出控制，IEEE Transactions on Automatic Control 51 (3) (2006年) 504–511.[88] Z. Zuo, X. Ju, Z. Ding，具有非对称死区非线性的齿轮传动伺服系统控制，IEEE 控制系统技术汇刊 24 (4) (2016年) 1472–1479.[89] D. Recker, P. Kokotovi´c, D. Rhode, J. Winkelman，含死区系统的自适应非线性控制，Urbana 51 (1991年) 61801.[90] X.-S. Wang, C.-Y. Su, H. Hong，具有未知死区的不确定一类非线性系统的鲁棒自适应控制，Automatica 40 (3) (2004年) 407–413.[91] S. Ibrir, W. F. Xie, C.-Y. Su，具有非对称死区输入的非线性系统自适应跟踪，Automatica 43 (3) (2007年) 522–530.[92] W. Meng, Q. Yang, S. Jagannathan, Y. Sun，高阶不确定非仿射系统的自适应神经控制：仿射系统变换方法，Automatica 50 (5) (2014年) 1473–1480.[93] T.-P. Zhang, S. S. Ge，纯反馈形式下具有未知死区的非线性系统的自适应动态面控制，Automatica 44 (7) (2008年) 1895–1903.[94] R. R. Selmic, F. L. Lewis，利用神经网络补偿运动控制系统中的死区，IEEE Transactions on Automatic Control 45 (4) (2000年) 602–613.[95] S. S. Ge, F. Hong, T. H. Lee，具有未知时滞的非线性系统的鲁棒自适应控制，Automatica 41 (7) (2005年) 1181–1190.[96] W. Wang, C. Wen, J. Huang, J. Zhou，具有事件触发通信和间歇性执行器故障的不确定非线性系统的自适应一致性，Automatica 111 (2020年) 108667.[97] S. S. Ge, F. Hong, T. H. Lee，具有未知虚拟控制系数的非线性时滞系统的自适应神经控制，IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, B辑（控制论）34 (1) (2004年) 499–516.[98] B. Yao, F. Bu, G.-C. Chiu，采用不连续投影的电液伺服系统非线性自适应鲁棒控制，载于：Decision and Control，1998年。第37届IEEE会议论文集，第2卷，IEEE，1998年，第2265–2270页.[99] X. Tang, G. Tao, S. M. Joshi，参数化严格反馈系统的自适应执行器故障补偿及其在航空器上的应用，Automatica 39 (11) (2003年) 1975–1982.[100] Y.-X. Li, G.-H. Yang，具有输入量化和执行器故障的不确定非线性系统的自适应渐近跟踪控制，Automatica 72 (2016年) 177–185.[101] G. Tao, S. M. Joshi, X. Ma，具有执行器故障的系统的自适应状态反馈与跟踪控制，IEEE Transactions on Automatic Control 46 (1) (2001年) 78–95.[102] Q. Shen, B. Jiang, V. Cocquempot，具有执行器故障的一类非线性系统的基于模糊观测器的主动容错动态面控制，IEEE Transactions on Fuzzy Systems 22 (2) (2014年) 338–349.[103] M. Chen, G. Tao，具有未知死区的不确定非线性大规模系统的自适应容错控制，IEEE Transactions on Cybernetics 46 (8) (2016年) 1851–1862.[104] J. Boskovic, R. Mehra，状态相关扰动下航空器的鲁棒容错控制设计，载于：AIAA制导、导航与控制会议暨展览，2003年，第5490页.[105] J. Boskovic, S. E. Bergstrom, R. K. Mehra，具有可测速率的二阶飞行控制执行器故障自适应补偿，载于：2005年美国控制会议论文集，IEEE，2005年，第1033–1038页.[106] J. D. Boskovic, R. K. Mehra，用于补偿高阶飞行控制执行器故障的分散式容错控制系统，IEEE 控制系统技术汇刊 18 (5) (2010年) 1103–1115.

[107] B. Jiang, D. Xu, P. Shi, C. C. Lim，近空间飞行器在控制执行机构损伤情况下的自适应神经观测器反步容错控制，IET Control Theory & Applications 8 (9) (2014年) 658–666。[108] X. Zhang, T. Parisini, M. M. Polycarpou，非线性不确定系统的自适应容错控制：一种基于信息的诊断方法，IEEE Transactions on automatic Control 49 (8) (2004年) 1259–1274。[109] H. Ouyang, Y. Lin，执行器故障的自适应容错控制：一种切换策略，Automatica 81 (2017年) 87–95。[110] W. Wang, C. Wen，具有保证瞬态性能的不确定非线性系统自适应执行器故障补偿控制，Automatica 46 (12) (2010年) 2082–2091。[111] M. Jankovic，控制李雅普诺夫–拉祖米欣函数与时滞系统的鲁棒稳定化，IEEE Transactions on Automatic Control 46 (7) (2001年) 1048–1060。[112] M. Malisoff, F. Mazenc，严格李雅普诺夫函数的构造，Springer Science & Business Media, 2009。[113] C. Hua, G. Feng, X. Guan，通过反步法设计一类非线性时滞系统的鲁棒控制器，Automatica 44 (2) (2008年) 567–573。[114] S. K. Nguang，一类时滞非线性系统的鲁棒稳定化，IEEE Transactions on Automatic Control 45 (4) (2000年) 756–762。[115] B. Chen, X. Liu, K. Liu, C. Lin，非线性多输入多输出时滞系统的新型自适应神经控制设计，Automatica 45 (6) (2009年) 1554–1560。[116] Z. Zhang, S. Xu, B. Zhang，具有时滞和死区输入的非线性系统精确跟踪控制，Automatica 52 (2015年) 272–276。[117] B. Niu, H. Li, T. Qin, H. R. Karimi，具有时滞和量化输入的非线性纯反馈切换系统自适应神经网络动态面控制器设计，IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems (99) (2017年) 1–13。[118] B. Zhou, Z.-Y. Li, W. X. Zheng, G.-R. Duan，同时具有状态时滞和输入时滞的若干线性系统的稳定化，Systems & Control Letters 61 (10) (2012年) 989–998。[119] N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic，具有时滞积分器的线性严格反馈系统的稳定化，Automat- ica 46 (11) (2010年) 1902–1910。[120] M. A. Khanesar, O. Kaynak, S. Yin, H. Gao，针对时变网络诱导时滞网络化控制系统的自适应间接模糊滑模控制器，IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (1) (2015年) 205–214。[121] H. Li, L. Wang, H. Du, A. Boulkroune，具有输入时滞的严格反馈系统自适应模糊反步跟踪控制，IEEE Transactions on Fuzzy Systems 25 (3) (2017年) 642–652。[122] F. Mazenc, P.-A. Bliman，时滞非线性系统的反步设计，IEEE Transactions on Automatic Control 51 (1) (2006年) 149–154。[123] M. Krstic, A. Smyshlyaev，一阶双曲型偏微分方程的反步边界控制及其在具有执行器和传感器时滞系统中的应用，Systems & Control Letters 57 (9) (2008年) 750–758。[124] D. Bresch-Pietri, M. Krstic，在未知输入时滞和被控对象参数的情况下进行自适应轨迹跟踪，Automatica 45 (9) (2009年) 2074–2081。[125] D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, N. Petit，不确定时滞系统的自适应控制方案，Automatica 48 (8) (2012年) 1536–1552。[126] F. Mazenc, M. Malisoff，输入时滞下有界反步控制的新型设计，Automatica 66 (2016年) 48–55。[127] J. Zhou, C. Wen, W. Wang，具有未知输入时滞的不确定系统自适应反步控制，Automatica 45 (6) (2009年) 1415–1422。[128] I. Karafyllis, M. Krstic，在采样和时滞测量条件下，以及输入受时滞和零阶保持影响时的非线性稳定化，IEEE Transactions on Automatic Control 57 (5) (2012年) 1141–1154。[129] I. Karafyllis, M. Krstic，利用近似预测器和高增益观测器稳定非线性时滞系统，Automatica 49 (12) (2013年) 3623–3631。[130] T. Wang, Y. Zhang, J. Qiu, H. Gao，具有采样和时滞测量的一类非线性系统的自适应模糊反步控制，IEEE Transactions on Fuzzy Systems 23 (2) (2015年) 302–312。[131] Y.-G. Leu, W.-Y. Wang, T.-T. Lee，非仿射非线性系统的基于观测器的直接自适应模糊神经控制，IEEE Transactions on Neural networks 16 (4) (2005年) 853–861。

[132] S. S. Ge, C. Wang, 《不确定非线性纯反馈系统的自适应神经网络控制》, Automatica 38 (4) (2002) 671–682。[133] C. Wang, D. J. Hill, S. S. Ge, G. Chen, 《纯反馈系统自适应神经控制的ISS模块化方法》, Automatica 42 (5) (2006) 723–731。[134] M. Hou, Z. Deng, G. Duan, 《不确定纯反馈非线性系统的自适应控制》, International Journal of Systems Science 48 (10) (2017) 2137–2145。[135] C. P. Bechlioulis, G. A. Rovithakis, 《一种针对未知纯反馈系统、具有预设性能的低复杂度全局无逼近控制方案》, Automatica 50 (4) (2014) 1217–1226。[136] N. Hovakimyan, E. Lavretsky, A. Sasane, 《通过时间尺度分离对控制非仿射系统进行动态逆。第一部分》, Journal of Dynamical and Control Systems 13 (4) (2007) 451–465。[137] S. Yoo, 《非线性参数化纯反馈系统的自适应控制》, IET Control Theory & Applications 6 (3) (2012) 467–473。[138] Z. Liu, X. Dong, J. Xue, H. Li, Y. Chen, 《基于动态面技术的一类纯反馈非线性系统自适应神经控制》, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 27 (9) (2016) 1969–1975。[139] L. Xing, C. Wen, Z. Liu, H. Su, J. Cai, 《一类不确定非线性系统的事件触发自适应控制》, IEEE Transactions on Automatic Control 62 (4) (2016) 2071–2076。[140] P. Tabuada, 《稳定控制任务的事件触发实时调度》, IEEE Transactions on Automatic Control 52 (9) (2007) 1680–1685。[141] C.-H. Zhang, G.-H. Yang, 《具有执行器故障的一类不确定非线性系统的事件触发自适应输出反馈控制》, IEEE Transactions on Cybernetics 50 (1) (2018) 201–210。[142] Y.-X. Li, G.-H. Yang, 《严格反馈非线性系统的基于模型的自适应事件触发控制》, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 29 (4) (2017) 1033–1045。[143] L. Cao, H. Li, Q. Zhou, 《基于事件触发机制、具有虚拟控制系数和不确定扰动的非线性严格反馈系统自适应智能控制》, IEEE Transactions on Cybernetics 48 (12) (2018) 3390–3402。[144] Y. Wang, Y. Xia, C. K. Ahn, Y. Zhu, 《非周期采样下Takagi–Sugeno模糊系统的指数稳定化：一种非周期自适应事件触发方法》, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems 49 (2) (2018) 444–454。[145] D. P. Borgers, R. Postoyan, A. Anta, P. Tabuada, D. Neši´c, W. Heemels, 《利用过近似技术对非线性系统进行周期事件触发控制》, Automatica 94 (2018) 81–87。[146] Z.-J. Wu, X.-J. Xie, P. Shi, Y.-q. Xia, 《具有马尔可夫切换的一类随机非线性系统的反步控制器设计》, Automatica 45 (4) (2009) 997–1004。[147] R. Khasminskii, 《微分方程的随机稳定性》, Springer Science & Business Media，2011。[148] H. E. Psillakis, A. T. Alexandridis, 《基于神经网络的自适应跟踪控制：受未知协方差噪声干扰的不确定非线性系统》, IEEE Transactions on Neural Networks 18 (6) (2007) 1830–1835。[149] F. Wang, Z. Liu, Y. Zhang, C. P. Chen, 《具有未知迟滞的一类随机纯反馈非线性系统的自适应模糊控制》, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24 (1) (2016) 140–152。[150] J. Yin, S. Khoo, Z. Man, X. Yu, 《随机非线性系统的有限时间稳定性与不稳定性》, Automatica 47 (12) (2011) 2671–2677。