湍动动理学等离子体中的压力涨落统计

S. Adhikari,[1,2★] W. H. Matthaeus,[2,3] T. N. Parashar,[2,4] M.A. Shay[2,3] 和 P. A. Cassak[1,2,3]
[1]美国西弗吉尼亚州摩根敦西弗吉尼亚大学物理与天文学系，邮编 26506
[2]美国特拉华州纽瓦克特拉华大学物理与天文学系，邮编 19716
[3]美国特拉华州纽瓦克特拉华大学物理与天文学系巴托尔研究所，邮编 19716
[4]新西兰惠灵顿维多利亚大学化学与物理科学学院，邮编 6140

arXiv:2305.02068v1 [physics.plasm-ph] 3 May 2023

接受日期 XXX。收到日期 YYY；原始版本日期 ZZZ

摘要
在本研究中，我们探讨了动力学无碰撞湍流中压力涨落的统计特性。通过对衰减湍流进行 2.5D 动力学粒子网格（PIC）模拟，研究等离子体中热压力与磁压力的演化所体现的压力平衡，其中 β 为量级为一的量。我们还讨论了热压力、磁压力和总压力结构函数的行为及其相应的波数谱。总压力谱呈现出 $-7/3$ 的斜率，并在离子惯性区延伸约一个数量级。相比之下，较浅的 $-5/3$ 谱是磁压力和热压力的特征。总压力谱较陡是由密度与磁场强度反相关所导致的抵消效应造成的。此外，我们评估了高阶总压力结构函数，以探讨间歇性，并将幂指数与速度涨落和磁场涨落的高阶结构函数进行比较。最后，我们还讨论了其在天体物理系统中的应用。

关键词： 压力谱、结构函数、间歇性、压力平衡

1 引言

1.1 研究动机

自然界和实验室中大多数等离子体流动都是湍流。值得关注的天体物理系统包括星系团内介质（ICM）（Schuecker 等，2004；Churazov 等，2012；Zhuravl- eva 等，2014，2019）、黑洞吸积盘（Balbus & Hawley，1998；Pessah，2010）、太阳风（Coleman Jr，1968；Matthaeus & Goldstein，1982；Bruno & Carbone，2013）以及行星磁层（Sahraoui 等，2020）。从宇宙中最大的结构（Simionescu 等，2019）到实验室等离子体，湍流应力和压力都发挥着重要作用。星系等离子体观测的一项显著特征，是星际介质中电子密度涨落呈现出“幂律谱”，其尺度跨度超过十个数量级（Armstrong 等，1981）。在温和的假设条件下（Montgomery 等人（1987））， 人们发现该谱与磁场涨落的 Kolmogorov 谱相符。这一计算依赖于近似不可压缩的假设，同时也意味着密度与磁场、因而机械压力与磁压力之间呈反相关，并会部分抵消。这种统计压力平衡是湍流动力学的一个组成部分，与表面上相似的静态压力平衡有所不同；后者是理想磁流体力学方程的特殊解。

压力平衡在天体物理学中发挥着重要作用。星系团的质量（Kravtsov& Borgani 2012；Planelles 等 2015）——作为宇宙中最大的结构——为宇宙学模型提供了严格的约束（Voigt& Fabian 2006；Carlberg 等 1997；Pratt 等 2019）。静水平衡是估算松弛星系团质量时常用的假设（Lau 等 2013）。然而，对于远离平衡态的星系团，这一假设很容易失效；湍流应力的贡献也会使其失效（Markevitch 等 2004；Angelinelli 等 2020）。X 射线（Schuecker 等 2004；Churazov 等 2012；Zhuravleva 等 2014）以及通过 Sunayev-Zel’dovich 效应进行的射电观测（Khatri& Gaspari 2016）提供了星系团热性质的详细测量。深入准确地理解星系团内介质中的压力动力学，有助于厘清热压力和湍流应力各自的贡献。

同样，压力的性质对日球层有着重大影响。在近地空间，太阳风在塑造地球磁层和驱动空间天气方面发挥着至关重要的作用。观测表明，太阳风具有湍流特征（ColemanJr 1968；Matthaeus & Goldstein1982；Bruno & Carbone 2013），且其温度高于绝热冷却所预期的水平（Wang & Richardson2001；Hellinger 等 2013）。加热意味着压力张量的迹增大，而内能的增加可通过压力张量与速度梯度张量之间的相互作用实现（Yang 等 2017a）。太阳风中经常出现压力平衡区间（Vellante & Lazarus 1987；Goldstein 等 1995；Reisenfeld 等 1999；Ruffolo 等 2021），这些区间可能是太阳风近不可压缩磁流体力学（NI-MHD）的结果（Matthaeus 等 1991）。

本研究构建了一个框架，用于探讨有剪切和无剪切情况下，不可压缩磁流体力学中控制压力的方程所涉及的压力平衡。我们还利用全动理学粒子网格（PIC）模拟，探究动理学等离子体中压力动力学的各个方面。我们发现，在不可压缩磁流体力学机制下，压力谱遵循流体力学标度。尽管

★ 电子邮件：subash.adhikari@mail.wvu.edu

© 2023年 作者们

动理学等离子体并非完全不可压缩，但其压力谱与遵循磁流体力学预测的幂律标度吻合极佳，这表明模拟很可能处于 NI-MHD 状态。本文其余部分安排如下：第2 节首先回顾一些补充的理论背景，随后在不可压缩磁流体力学框架下建立压力泊松方程。第3 节报告 PIC 模拟结果，最后在第4节讨论其影响和未来研究方向。

2 理论

2.1 背景

继 Obukhoff 和 Batchelor 关于流体动力学压力涨落的开创性研究之后（Obukhoff & Yaglom 1951；Batchelor 1951），二阶压力结构函数 D_P^2 和压力谱已通过实验（Uberoi 1953；George 等人 1984；Tsuji & Ishihara 2003）以及直接数值模拟（DNS）（Schumann & Patterson 1978；Kim & Antonia 1993；Pullin & Rogallo 1994；Nelkin & Chen 1998；Squire 等人 2023）得到研究，研究对象大多为均匀各向同性湍流。尽管这些研究基于速度分布服从联合高斯分布，或小尺度统计量遵循柯尔莫哥洛夫相似性假设等假设，但发现 D_P^2 作为时滞 r 的函数，与 $r^{4/3}$成正比。因此，在惯性区内，压力谱 $E_P(k)$ 随 $k^{-7/3}$ 变化，其中 k 为波数。研究者也尝试将压力谱扩展到更高波数（耗散区）（Zhao 等人 2016）。然而，一般而言，动能区/耗散区的标度指数尚未得到充分理解，压力谱的情况亦是如此。

近不可压缩磁流体力学（Klainerman & Majda 1981年）的研究比流体力学情形更加微妙。从 Montgomery 等人（1987年）对 $k^{-5/3}$ 星际介质密度结构函数谱的解释开始，研究者又提出了几层理论（Higdon 1984年；Matthaeus & Brown 1988a），其基础观点是：在由湍流马赫数控制的微扰理论中，等离子体动力学的核心解是不可压缩磁流体力学，而密度的最高阶涨落正是 Montgomery 等人（1987年）所讨论的那些。随后又提出了其他理论，进一步阐述热涨落的作用（Zank & Matthaeus 1990年；Bayly 等人 1992年），以及等离子体β值变化的影响（Zank & Matthaeus 1992年，1993年）。鉴于后来的这些文献，Montgomery 等人（1987年）和 Matthaeus & Brown （1988a）最初提出的微扰理论，可以看作主要适用于等离子体β值大于1的情况。

为了更好地将当前工作置于这些先前研究的背景中，有必要强调，大多数文献关注的是流体动力学湍流和磁流体力学中的机械压力统计。随后，机械压力通过状态方程与密度和热涨落联系起来。相比之下，本研究主要关注总压力（磁压力与机械压力之和）的统计特性，并将其与磁压力和机械压力各自的行为进行对比。因此，我们关注的是压力平衡。我们还将考察与总压力相关的高阶统计量。值得注意的是，我们将利用无碰撞等离子体的粒子模拟模型详细研究这些性质，这与磁流体力学模型的出发点有很大不同。

2.2 磁流体力学中的压力泊松方程

不可压缩磁流体力学方程（采用爱因斯坦求和约定）表示为

$$\partial_t u_i + u_j\partial_j u_i - b_j\partial_j b_i = -\partial_i P + \nu\partial_j\partial_j u_i, \tag{1}$$
$$\partial_t b_i + u_j\partial_j b_i - b_j\partial_j u_i = \eta\partial_j\partial_j b_i, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{u}$ 表示流体速度，$\mathbf{b}$ 表示以阿尔芬单位表示的磁场，P 表示总压力（磁压力与热压力之和），ν 表示运动黏度，η 表示电扩散率。这里假设密度为单位值，且速度场满足无散条件 $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$。现在，根据定义为 $\mathbf{z}^\pm$ 的 Elsässer 变量 $\mathbf{z}^\pm=\mathbf{u}\pm\mathbf{b}$，上述方程可以合并为

$$\partial_t z_i^\pm + z_j^\mp\partial_j z_i^\pm = -\partial_i P + \nu\partial_j\partial_j z_i^\pm, \tag{3}$$

其中我们假设 $\nu=\eta$。对方程3 取散度并利用不可压缩性（$\partial_i z_i=0$），得到

$$-\partial_{ii}P = \partial_i(z_j^\mp\partial_j z_i^\pm) = (\partial_i z_j^\mp)(\partial_j z_i^\pm). \tag{4}$$

如此表述后可以看出，压力实际上是一种约束力，用于维持速度场的无散度特性。所谓的近不可压缩磁流体力学(NI-MHD) 理论进一步将密度视为对压力涨落的线性响应进行计算（Batchelor 1951年；Montgomery 等人（1987）；Matthaeus & Brown 1988b），这些压力涨落源自方程 4 的求解结果。

不可压缩性并不意味着系统中的压力恒定，如方程4所示；相反，压力是埃尔宰瑟变量的非线性函数，这表明埃尔宰瑟变量的任何波动都会在系统中产生压力场，反之亦然。方程4的右端可以分解为对称部分和反对称（斜对称）部分，即

$$-\partial_{ii}P = (\partial_i z_j^\mp)(\partial_j z_i^\pm) = (\tau_{ij}^\mp + R_{ij}^\mp)(\tau_{ij}^\pm - R_{ij}^\pm), \tag{5}$$

其中 $\tau_{ij}^\pm = \frac{1}{2}(\partial_i z_j^\pm + \partial_j z_i^\pm)$是分解的对称部分，称为与 Elsässer 变量相关的应变率张量，而 $R_{ij}^\pm = \frac{1}{2}(\partial_i z_j^\pm - \partial_j z_i^\pm)$是反对称部分，称为与 Elsässer 变量旋度相关的旋转率张量。还可以进一步简化方程 5，得到

$$-\partial_{ii}P = \tau_{ij}^-\tau_{ij}^+ - R_{ij}^-R_{ij}^+. \tag{6}$$

右侧的第一项与应变张量有关。若将 $\tau_{ij}^\pm$ 分解为 $S_{ij}=\frac{1}{2}(\partial_i u_j+\partial_j u_i)$ 和 $M_{ij}=\frac{1}{2}(\partial_i b_j+\partial_j b_i)$，$^-$分别表示速度和磁场应变率，则 $\tau_{ij}^-\tau_{ij}^+ = S_{ij}S_{ij} - M_{ij}M_{ij} = S^2 - M^2$，其中 S^2 和 M^2 分别是速度和磁场应变率张量的平方。它们是相应的第二张量不变量，等于相应特征值的平方和。

右侧的第二项可进一步化简为$R_{ij}^-R_{ij}^+ = \frac{1}{4}(\nabla\times\mathbf{z}^-)_k(\nabla\times\mathbf{z}^+)_k = \frac{1}{4}(\omega_k - j_k)(\omega_k + j_k) = \frac{1}{4}(\omega_k\bar{\omega}_k - j_k j_k)$，其中 $\omega=\nabla\times\mathbf{u}$ 是涡量，而 $\mathbf{j}=\nabla\times\mathbf{b}$ 是电流密度。因此，方程 6 可重写为

$$-\partial_{ii}P = (S^2 - M^2) - \frac{1}{4}(\omega_i\omega_i - j_i j_i). \tag{7}$$

方程 7 是压力的泊松方程，它表明压力涨落与速度和磁场应变及其旋转的速率有关。在不存在磁场的情况下，方程 7 简化为 $-\partial_{ii}P = S^2 - \frac{1}{4}\omega_i\omega_i$。

2.3 含剪切的泊松方程

利用雷诺分解，我们可以将一个物理量（例如 P）写成平均分量（$\overline{P}$）与涨落分量（$\tilde{p}$）之和。代入方程 4，并利用 $\partial_i z_i^{\pm} = 0$，可得

$$\partial_{ii}\overline{P} + \partial_{ii}\tilde{p} = -\partial_i\partial_j(\overline{Z_i^{\mp}}\,\overline{Z_j^{\pm}} + \overline{Z_i^{\mp}}\,\overline{z_j^{\pm}} + \overline{z_i^{\mp}}\,\overline{Z_j^{\pm}} + \overline{z_i^{\mp} z_j^{\pm}}). \quad (8)$$

将系综平均从其自身中减去，我们得到 et

$$\partial_{ii}\tilde{p} = -\partial_i\partial_j(\overline{Z_i^{\mp}}\,\tilde{z}_j^{\pm} + \tilde{z}_i^{\mp}\,\overline{Z_j^{\pm}}) - \partial_i\partial_j(\tilde{z}_i^{\mp}\tilde{z}_j^{\pm} - \overline{\tilde{z}_i^{\mp}\tilde{z}_j^{\pm}}), \quad (9)$$

这就是压力涨落泊松方程的剪切形式。

方程 9 的形式与其流体动力学对应形式相同，只是 u 被 z 替换。显然，压力涨落的拉普拉斯算子由两个不同的项组成。第一项表示剪切与湍流相互作用所产生的剪切畸变，第二项则表示湍流涨落之间的相互作用。求解方程 7 和 9 以获得压力，需要指定边界条件，这超出了本文的讨论范围。因此，我们将重点放在压力统计上，具体如下。可以利用压力相关函数 $R_P(\mathrm{r}) = \langle P(\mathrm{x}+\mathrm{r})P(\mathrm{x})\rangle$(Batchelor 1951年)，或二阶压力结构函数$D_P^2(\mathrm{r}) = |\delta P(\mathrm{r})|^2$ (Obukhoff & Yaglom 1951年)来研究压力涨落的特性；两者彼此相关 (Monin 与 Yaglom 1975)。这里，x 表示位置空间，r 表示空间滞后，$\langle ... \rangle$ 表示系综平均，压力增量定义为 $\delta P(\mathrm{r}) = P(\mathrm{x}+\mathrm{r}) - P(\mathrm{x})$。

通过将 Kolmogorov 相似性假设应用于压力增量（Kolmogorov 1991），可以轻易确定惯性区内压力谱的标度。二阶结构函数 $D_P^2(r)$ 仅取决于空间滞后 r 和能量耗散率 ϵ，可写为

$$D_P^2(r) = \langle |P(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - P(\mathbf{x})|^2 \rangle = C_p \epsilon^{4/3} r^{4/3}, \quad (10)$$

其中 C_p 为常数。方程 10 的形式在惯性区内成立。对方程 10 进行傅里叶变换，得到压力谱$E_P(k)$ 其数学形式为

$$E_P(k) \propto \epsilon^{4/3} k^{-7/3}, \quad (11)$$

其中 k 为波数。二阶压力结构函数也与四阶速度结构函数（Hill 与 Wilczak 1995；Hill 与 Boratav 1997；Nelkin&Chen 1998）以及压力梯度—速度—速度结构函数（Hill 与 Boratav 2001）相关联。然而，探究这种关系超出了本文的范围，本文重点关注的是动能

等离子体。

3 模拟与结果

为研究动理学等离子体中压力涨落的统计特性，我们分析了使用P3D代码开展的2.5D全动理学粒子-网格（PIC）湍流模拟（Zeiler等人（2002））。该模拟采用以下归一化方式：长度以离子惯性长度 $d_i = c/\omega_{pi}$归一化，其中 c 为光速，ω_{pi} 为离子等离子体频率；时间以回旋频率的倒数归一化 ω_{ci}，速度以阿尔芬速度 $v_{A0} = B_0/\sqrt{4\pi m_i n_0}$归一化，其中 m_i 为离子质量，B_0和 n_0 分别为磁场和数密度的归一化参数。同样，温度以 $m_i v_{A0}^2$ 归一化，压力以 $n_0 m_i v_{A0}^2$归一化。

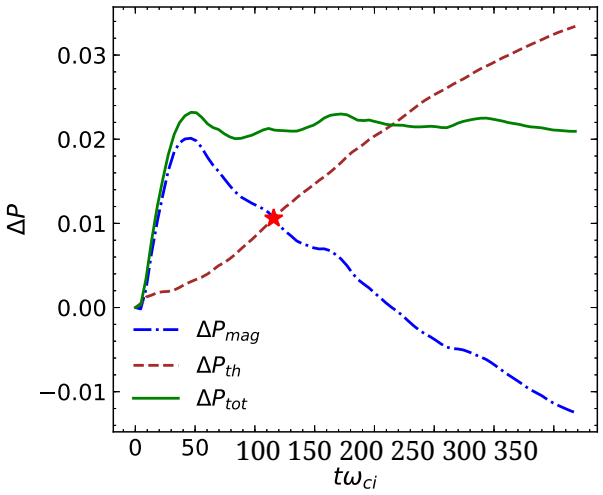

图 1. 热 P_{th}、磁 P_{mag} 和总压力 P_{tot} 相对于其初始值的变化随时间的演化。 P_{mag} 和P_{th} 在磁压力达到最大值后表现出相反的变化趋势。红色星号表示分析时刻。

该模拟区域为边长 $L = 149$的周期性方形区域$6d_i$，包含40962个网格点，并且3200 个粒子最初位于每个网格中。离子与电子的质量比设为25，初始背景密度为1，均匀初始温度为 $T_e = T_i = 0.3$，总等离子体β值为 $\beta = 1.2$，初始面外磁场强度为1。系统初始时在$2k_0 \le |k| \le 4k_0$范围内设置了磁场和速度（离子与电子均有）的傅里叶模，其中 $k_0 = 2\pi/L$，随后在无外部驱动的情况下演化约370$t\omega_{ci}$（详见Parashar等人(2018)以及Ad- hikari等人(2021)）。

3.1 压力平衡

图1 显示了磁 ΔP_{mag} 和总热ΔP_{th} 压力变化的系综平均（即体积积分）随时间的演化。压力变化是相对于 $t = 0$时的初始值计算的。起初，磁压力在短时间内迅速上升，随后下降，而热压力在整个模拟过程中持续缓慢增加。请注意，总压力变化达到最大值后大致保持不变，因为热压力补偿了磁压力的下降。当系统中的电流均方值达到最大值时（未显示），磁压力和热压力的变化在 $t\omega_{ci} = 116.5$处相交。此时，磁流体力学耗散通常达到最大值，常被视为湍流达到充分发展状态的时刻。在这一状态下，体积积分的磁压力与体积积分的热压力呈反相关，从而使体积积分的总压力近乎恒定。由于我们关注压力涨落的湍流特性，因此将分析重点放在这一时刻附近。

为了理解整体压力平衡如何影响局部压力，在图2 中，我们展示了 $t\omega_{ci} = 116$处5的热压力、磁压力和总压力涨落的二维视图，并分别以各自的平均值进行了归一化。可以观察到，电流片附近的大多数区域（见图A1）具有较低的磁压力和较高的热压力，表明二者之间存在负相关。因此，这些区域的总压力保持

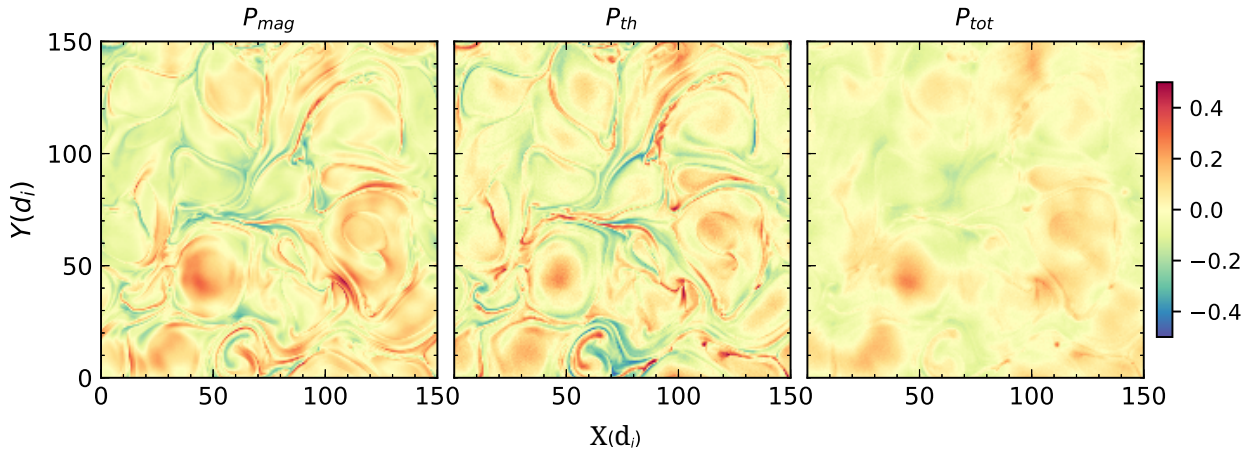

图 2. 磁场 P_{mag}、热 P_{th}和总压力涨落 P_{tot} 以各自平均值归一化后，在 $t\omega_{ci}$ = 116.5 处的二维图像。

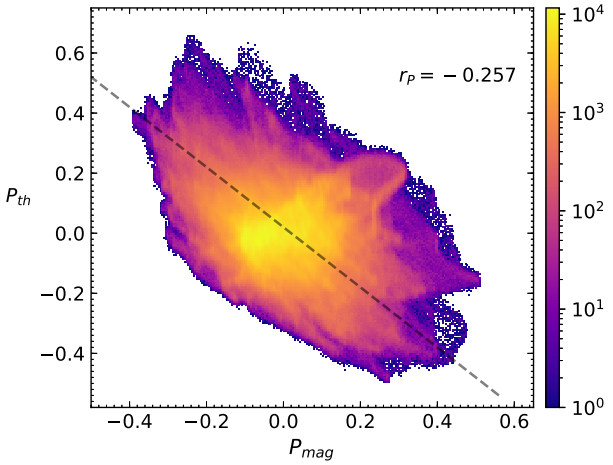

图 3. 在 $t\omega_{ci}$ = 116.5 处热 P_{th} 压力与磁P_{mag} 压力的联合概率分布。绘制了一条斜率为 −1 的虚线作为参考， r_P 表示皮尔逊相关系数。

相对均匀，如图2右侧面板所示。另一方面，磁岛具有大小相近的 P_{mag} 和P_{th}。这显然是由于磁岛内部的磁压缩和加热所致。通过计算图2中绘出的压力涨落方差，可以进一步量化总压力平衡，结果见表1。磁压力和热压力涨落的方差大小相近，而总压力涨落的方差则小得多（~ 40% 的P_{th} 或 P_{mag}）。

接下来，我们在图 3 中绘制热压力和磁压力的联合概率密度函数（PDF），并绘制一条斜率为 −1 的参考线。联合概率密度函数明显沿着参考线分布，表明两种压力之间存在负相关。此外，我们计算 P_th 与 P_{mag} 之间的皮尔逊相关系数（Cohen 等，2009），得到 −0。257，这进一步支持了图 3 中所呈现的趋势。这种反相关定量地反映了压力趋于统计平衡（而非逐点平衡）的倾向。

现在我们讨论压力谱。在图4的上图中，我们绘制了磁压力谱、热压力谱和总压力谱。点状竖线表示与离子

表 1。 如图所示的磁压力、热压力和总压力相对于空间平均值的方差。2。

方差	P_{th}	P_{mag}	P_{tot}
σ^2	0.0107	0.0101	0.0039

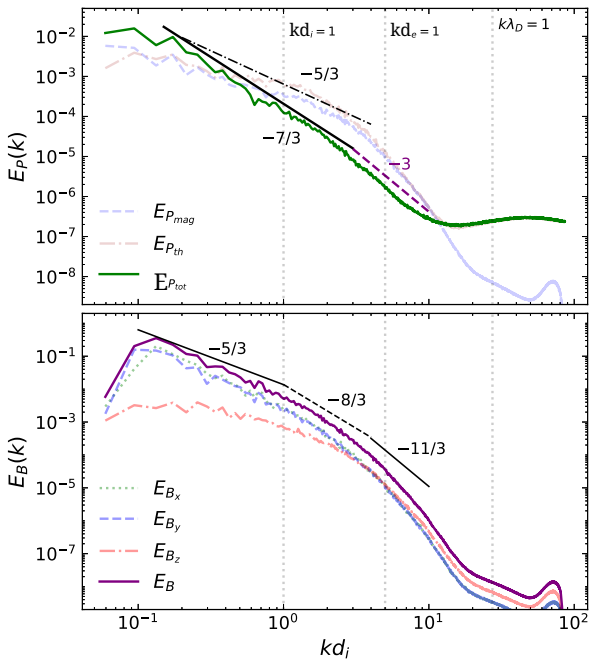

图 4. （上图）分析时刻磁压力（虚线）、热压力（点划线）和总压力（绿色实线）随波数变化的压力谱。图中给出了斜率为 −5/3、 −7/3 和 −3 的参考线。（下图）同一时刻的磁能谱。绘制了斜率为 −5/3、 −8/3 和 −11/3 的参考线。图中同时展示了总谱和各分量谱（见图例）。

惯性长度 d_i^{-1}、电子惯性长度 d_e^{-1}和德拜长度 λ_D^{-1}对应的波数。另绘制了斜率为 −5/3、 −7/3 和 −3 的直线作为参考。除较高波数处外，热压力谱和磁压力谱的表现非常相似。在惯性区 $kd_i \lesssim 1$，这两种谱的谱斜率都接近 −5/3；而在较大波数 $kd_i > 5$处，热压力在约 10^{-7} 处呈现平台，而磁压力谱则下降至 10^{-8}以下。

总压力与其组成部分相比再次呈现出不同的行为。在惯性区内，总压力谱的谱斜率为 −7/3，与方程 11一致。这是由于热压力与磁压力之间存在显著的互谱相关，是上述统计压力平衡的直接结果。

在较高波数处，总压力谱在惯性区 $2 \le kd_i \le 9$ 之后变陡，斜率为 −3，随后热压力谱中的隆起占据主导贡献。

图 4 的下图显示了磁能谱及其各个分量。在惯性区（$kd_i \lesssim 1$），磁能谱近似呈现熟知的 Kolmogorov −5/3 斜率，这与强湍流中的预期一致。在 $kd_i = 1$ 附近，磁能谱变陡，这种现象在等离子体中已有许多报道（Leamon et al. 1998），其斜率约在 −7/3 至 −8/3 （Smith et al. 2006）之间变化。在这一范围内，动理学耗散和色散效应开始变得重要。对于更高波数处的谱，人们提出了各种更陡的形式 $kd_e > 1$；这里给出了一个 11/3 谱作为参考。面外分量的谱 B_z 比另外两个磁分量平坦得多，并且在惯性区内振幅明显更低；在惯性区的长波长端，其振幅甚至低至后者的两个数量级。然而，在中间动理学区内，该B_z 谱达到与另外两个分量谱的能量均分；再往前，在亚电子尺度上，该分量相较于另外两个分量占据主导，幅度高出一个不大的倍数。

顺便指出，(Mont- gomery 等，1987年) 中的理论推导以磁谱呈现 −5/3 谱为假设，并进一步计算了密度

并将压力谱视为磁场的线性响应。其结论是，在磁流体力学中，热压力（以及密度）谱会呈现此处所示的 −5/3 幂律。研究还得出结论：在惯性区尺度上，热压力与磁压力呈反相关。文中未对总压力进行统计表征。本文的发现与这一重要的先行研究互为补充。

接下来，我们展示压力增量的概率密度函数（概率密度函数）(δP)，该增量定义于第 2.3 节，定义如下

$$\delta P(\mathbf{r}) = P(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - P(\mathbf{x}), \tag{12}$$

其中，$\mathbf{r}$ 为空间滞后。为简便起见，我们计算沿 x 和 y 方向的空间滞后得到的概率密度函数，并对结果取平均。也可以对沿不同方向的空间滞后进行这些计算，再取角平均（Wang等（2022））。图5 展示了两个不同空间滞后 $r = 1d_e \approx 0$的$2d_i$（左图）和 $r \approx 1d_i$（右图）的概率密度函数。

在 $r \approx d_i$处，δP_{mag}（蓝色圆圈）和δP_{th}（红色菱形）的概率密度函数彼此非常接近，与 $r \approx d_e$ 情况形成对比，但两种情况下都表现出偏离高斯性的现象。$r \approx d_e$ 的总压力概率密度函数（绿色方框）非常接近正态分布（实心黑线），该正态分布作为参考绘出；但在 $r \approx d_i$ 时发生了畸变，这表明在较小空间滞后下压力平衡更好。

为了考察这些概率密度函数不同部分所产生的空间分布，我们将概率密度函数分-

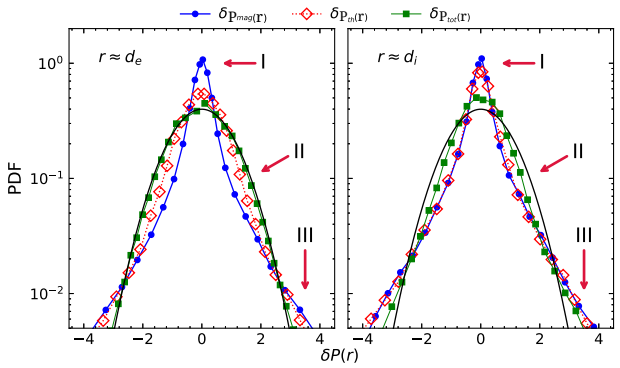

图5。压力增量的概率密度函数 δP：磁压力（蓝色圆圈）、热压力（红色菱形）和总压力（绿色方框），分别在$r \approx 1d_e = 0$处$2d_i$（左图）和 $r \approx 1d_i$（右图）进行计算，并均按其标准差归一化。概率密度函数在$t = 116$处$5\omega_{ci}^{-1}$计算。实心黑线表示作为参考的正态分布（详见正文）。

划分为区域 I、区域 II 和区域 III（如 Greco 等人 (2009)），并在给定图中屏蔽除一个区域以外的所有区域。小时间滞后增量下的结果，即在 $r \approx d_e$，如图 6所示。这里我们采用了二值颜色表示，其中黑色表示对特定区域有贡献的结构，白色表示没有贡献的区域。显然，在这一尺度下，总压力增量比磁压力或热压力的单独贡献更加均匀。对于分布的区域 I 核心、代表区域 III 的精细尺度超高斯尾部，以及中间的亚高斯区域 II，情况都是如此。对于超高斯尾部而言，这种压力平衡特征尤为明显。然而，这些区域均非完全均匀。事实上，磁岛及其边界的空间分布，即我们有时所称的等离子体细胞化（Servidio 等人, 2008），在 PDF 的所有三个范围内都清晰可见，正如图 6的各个面板所示。对这种空间结构进行定量诊断，将引导我们讨论间歇性。

间歇性的理论与分类为量化偏离高斯性的程度提供了物理基础。为了解压力涨落的间歇性，我们将在下一小节计算压力增量的尺度依赖峰度和高阶结构函数。

3.2 高阶统计与间歇性

3.2.1 尺度依赖峰度

压力涨落的尺度依赖峰度 $\kappa(\mathbf{r})$ $\delta P(\mathbf{r})$ 随滞后 $\mathbf{r}$ 变化的定义为

$$\kappa(\mathbf{r}) = \frac{\langle |P(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - P(\mathbf{x})|^4 \rangle}{\langle |P(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - P(\mathbf{x})|^2 \rangle^2}. \tag{13}$$

对于服从高斯分布的标量场，$\kappa(\mathbf{r})$ 的值为 3。对于空间分布随机性较低、聚集性较强的标量（或其增量），$\kappa(\mathbf{r})$ 会取得较大值，可以将其直观地解释为空间填充因子的倒数。因此，这一特性使 $\kappa(\mathbf{r})$ 成为初步判断空间间歇性是否存在的良好指标。

在图中7 我们绘出了 $\kappa(r)$ 对应磁压力、热压力和总压力的结果。可以观察到，$\kappa(r)$ 在较小滞后下，对所有形式的压力而言都呈现非高斯特征 $r \lesssim 1di$。这与图5中看到的概率密度函数一致。

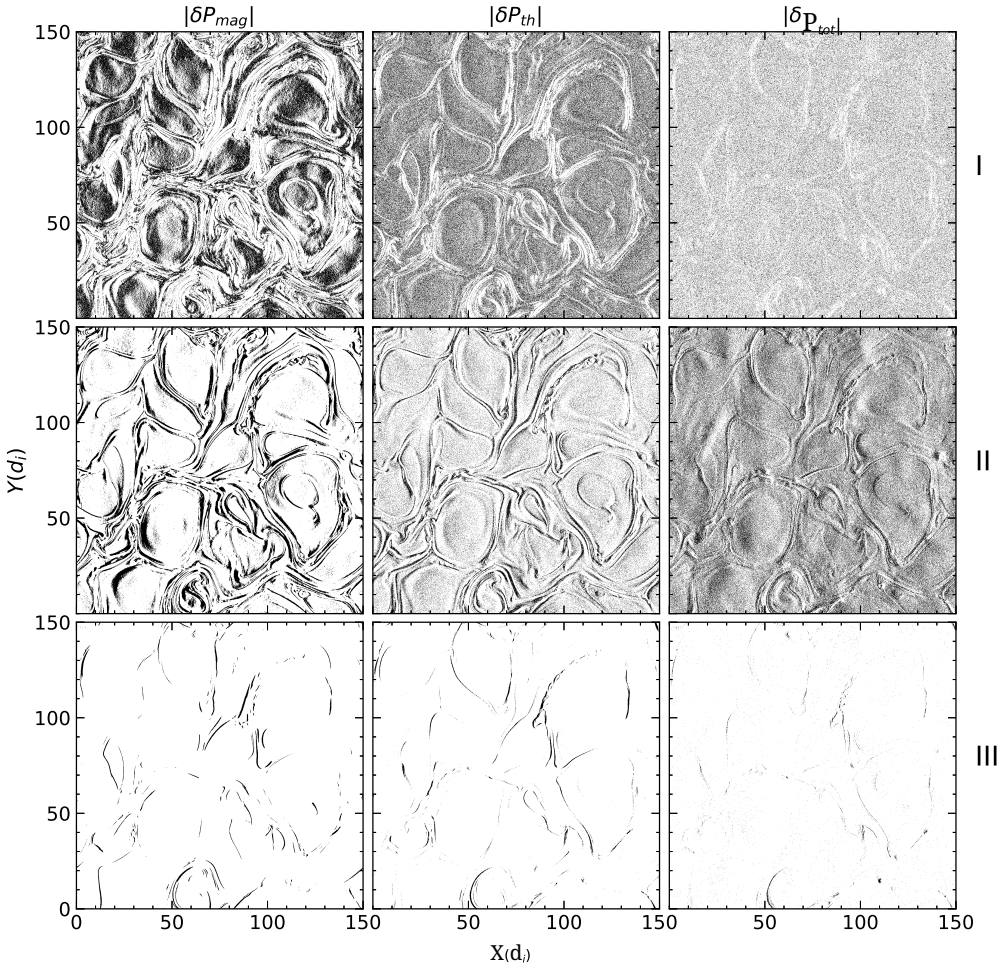

图6。 对图5 中所示滞后 $r \approx d_e$下，磁压力（左列）、热压力（中列）和总压力（右列）增量的概率密度函数（PDF）中区域 I、II 和 III 所对应结构（黑色）的贡献，分别在 x 和 y 方向上取平均。每一行对应图右侧所示的区域。

磁场压力的尺度依赖峰度在 ≈ 0处达到峰值。$1d_i$，热压力的尺度依赖峰度在 ≈ 0处达到峰值。$3d_i$，而总压力的 $\kappa(r)$ 在 ≈ 0处达到峰值。$5d_i$随着滞后增大，其数值趋近于 3。这表明较小滞后下的涨落具有间歇性，因此，Kolmogorov（1941）最初提出的相似性假设并不成立，需要进一步讨论或澄清。

3.2.2 结构函数

在本小节中，我们讨论通过增量 δP 测得的压力涨落高阶结构函数，并将其与速度和磁结构函数的高阶结构函数进行比较。n 阶结构函数定义为

$$D_P^n(r) = \langle |\delta P(r)|^n \rangle. \tag{14}$$

对于 Kolmogorov 1941标度（$K41$下文简称此标度），它忽略了间歇性（见第 2.3 节），预期压力涨落按 $\delta P \sim (\delta v)^2$ 的规律标度，因此 n^th 阶压力结构函数 $D_P^n(r) \sim (\delta v)^{2n} \sim r^{2n/3}$。然而，如图 5 所示，由于非高斯行为，这一理想化预期对高阶结构函数并不适用。本节将探讨

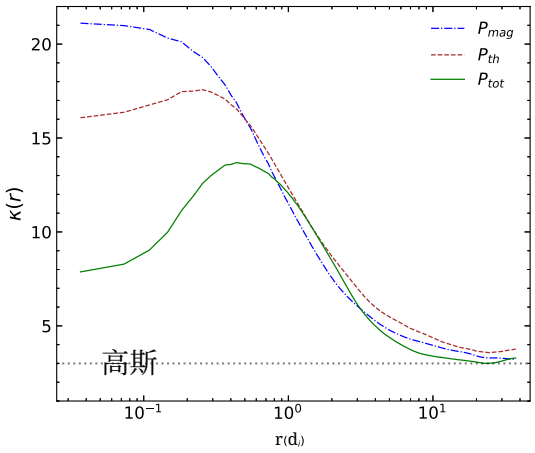

图7。 尺度依赖峰度 $\kappa(r)$ 随滞后量的变化，其中磁压力（点划线）、热压力（虚线）和总压力（实线）。点线表示高斯分布峰度的参考值。

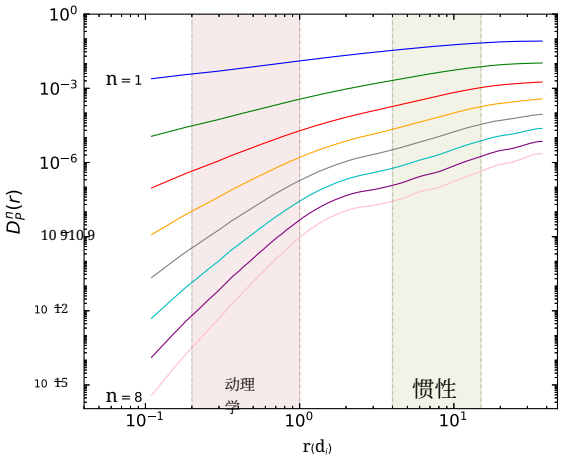

图8。压力高阶结构函数序列。为保持一致性，我们假设虚线之间的区域位于 $d_e = 0$。$2d_i$和 d_i 表示动理学区（棕色矩形），而 $4-15d_i$ 之间的区域表示惯性区（橄榄色矩形）（见 Adhikari等人 （2021））。

所关注动理学等离子体中高阶压力结构函数对时滞的依赖关系。

压力涨落的多重分形标度尚未像速度和磁场那样得到充分研究。已有一些尝试将间歇性修正纳入压力标度中（Donzis等人（2012）），但据我们所知，尚未应用于动理学等离子体湍流。

为进行进一步分析，首先我们假设压力结构函数具有如下形式

$$D_P^n(r) \sim r^{\zeta_n}, \tag{15}$$

其中 ζ_n 包含了对 $K41$ 标度（Kolmogorov 1962；Obukhov 1962）的间歇性修正。随后，我们计算该系统的标度指数，并将其与若干旨在描述速度结构函数标度的间歇性模型进行比较。

关于间歇性的早期描述之一，源自 Oboukhov 的观点，该观点促成了 Kolmogorov 精细相似性假设（Obukhov 1962；Kolmogorov 1962）。具体而言，Oboukhov 推理认为，如果速度涨落（即增量）取决于耗散的局部值，并呈对数正态分布，那么斑块状耗散或许就能得到解释。根据该模型（$K62$ 下文简称），标度指数的形式为

$$\zeta_n^{K62} = \frac{n}{3} + \frac{\mu}{18}(3n - n^2), \tag{16}$$

其中 μ 为间歇性指数，其取值通常介于 0.2 – 0.3（Van Atta和 Antonia（1980）；Sreenivasan和Kailasnath 1993；Davidson（2015））。

另一个成功用于描述间歇性的模型是She和Leveque模型（She和Leveque（1994）），该模型假设分布服从对数泊松模型。在该模型中，指数具有如下广义形式

$$\zeta_n = \frac{n}{3}(1-\alpha) + C_0(1-\beta^{n/3})], \tag{17}$$

其中 $C_0 = \frac{\alpha}{1-\beta}$通过以下关系与耗散涡的维数 D 相关 $C_0 = 3-D$(Biskamp（2003）)，因此称为余维数。参数 α 为标度指数，而 β 则是间歇性的特征。对于流体动力学湍流，由于细涡丝呈准1维结构，余维数 $C_0 = 2$。She 和 Leveque（She和Leveque（1994））进一步假设，在 Kolmogorov 标度下， $\alpha = 2/3$ 且 $\beta = 2/3$，由此得到

$$\zeta_n^{SL} = \frac{n}{9} + 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n/3}\right]. \tag{18}$$

然而，对于磁流体湍流，最小耗散结构可视为2维，这一点可从小尺度电流片中观察到。对于这种情况， $C_0 = 1$。取相同的 $x = 2/3$，现在有 $\beta = 1/3$，由此得到如下形式的标度指数（Politano和Pouquet（1995）；Müller和Biskamp（2000））

$$\zeta_n^{MHD} = \frac{n}{9} + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n/3}. \tag{19}$$

接下来，在图8 中，我们展示了直到八阶的高阶结构函数 D_P^n 随时滞 r 的变化。左侧的两条竖线表示动理学区（介于 $d_e = 0$。$2d_i$ 和 $1d_i$之间），而右侧的两条竖线表示惯性区（介于 $4d_i$ 和 $15d_i$之间）（Adhikari等人（2021））。高阶结构函数的幅值小于低阶结构函数。可以观察到，与惯性区相比，动理学区中的结构函数斜率更陡。与惯性区相比，动理学区的陡峭程度随结构函数阶数增加而急剧上升，这是因为这些时滞尺度上的涨落远小于惯性区中的涨落。超过惯性区后，结构函数呈现出相似的斜率。接下来，我们计算这些结构函数的幂指数。在图9 中，我们绘制了这些结构函数的标度指数随阶数n的变化，并对比惯性区（上图）和动理学区（下图）的结果与磁场和速度结构函数的结果。通过对惯性区和动理学区内的结构函数曲线进行幂律拟合，得到这些指数。值得将本研究结果与以下类似发现进行比较：关于动理学等离子体湍流的研究（Wan等人（2016）），以及关于可压缩磁流体动力学湍流中密度的研究（Yang等人（2017b））。

结构函数的标度指数遵循以下顺序：速度 $<$ 磁场 $<$ 压力，压力结构函数与速度结构函数之比为 ~ 2。随着 n 增加，速度/磁场和压力结构函数的 ζ_n 值分别越来越偏离传统的 (K41) 值 $n/3$ 和 $2n/3$。有趣的是，速度结构函数的指数趋于饱和，接近 1。

我们还绘制了 K41、SL 和 K62 的预测结果以供比较。显然，这些模型都无法充分描述我们从模拟中得到的指数。不过，有趣的是，磁结构函数的指数与广义 She-Leveque 指数（公式 17）非常吻合，其标度指数为 $x = 3/4$，以及 $\beta = 1/4$，因此余维数为 $C_0 = 1$。图 9中以 MSL（修正的 SL）标注了这条曲线。

在动理学区（图9下图）中，所有结构函数的幂指数均与结构函数的阶数呈线性关系，这与惯性区的表现相反。低阶($n \lesssim 6$) 磁场和速度结构函数的幂指数相近。然而，对于 $n > 6$，ζ_n 的差异开始增大，并随着 n 增大而发散（未显示）。相反，动理学区压力结构函数的幂指数较小，这表明此前对惯性区的描述并不适用于动理学区。更多聚焦于结构函数动理学区间的研究，必将有助于加深我们对结构函数的理解。

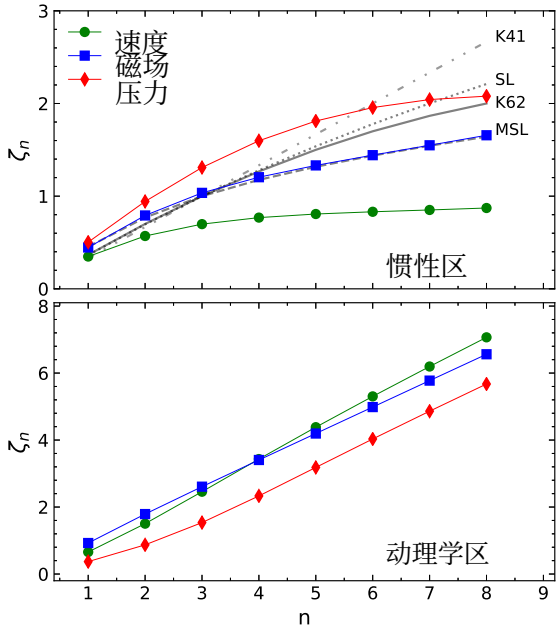

图 9. 不同阶数的幂指数 n 惯性区（上图）和动理学区（下图）中磁场（蓝色方块）、速度（绿色圆圈）和压力（红色菱形）结构函数的幂指数；两个区间由图 8中的阴影矩形定义。图中还绘出了不同模型在惯性区预测的标度指数，供参考（详情见正文）。在动理学区，标度指数呈线性趋势，斜率分别为 0。927（速度）、0。801（磁场）和 0。779（压力）。

近期关于磁场间歇性的研究为这一问题提供了参考，但显然仍需注意一些细微区别。例如，Leonardis等人（2013）在动理学重联模拟中发现，亚质子尺度的磁场呈现多重分形标度，但也发现尺度小于 d_i（Leonardis等人，2016）时呈现单分形高斯标度。其他关于无碰撞等离子体湍流的动理学模拟支持了这一发现：质子尺度及更小尺度上的湍流具有自相似性，即呈单分形（Wan等人（2016））。实验室研究（例如（Schaffner和Brown，2015））以及帕克太阳探测器的数据（Chhiber等人，2021）也发现亚质子尺度上存在单分形行为。我们在此发现，总压力的间歇性也呈现出非常相似的结果。首先，我们发现压力涨落确实具有间歇性。其次，在尺度大于 d_i 时呈现多重分形标度，而在尺度小于 d_i 时呈现单分形标度，这与此前多项研究对磁场间歇性的描述一致。

4 结论

压力平衡长期以来一直是空间等离子体物理学中的重要组成部分（Burlaga 等，1990）。传统观点明确采用了涨落幅度较小这一假设，由此得到一系列线性波解，以及作为磁流体力学方程（Cowling，1976）特殊静态解出现的小振幅压力涨落。本文采用粒子网格模拟研究动理学湍流，初始条件会产生强烈的磁流体力学尺度涨落，随后形成强烈的空间间歇性、相干结构和非均匀耗散。

本文着重探讨压力涨落的性质，这些性质本质上具有非线性和随机性，因此，我们所描述的特征归因于湍流，而非一系列静态或波状结构。

本文的主要结论如下：

(i) 提出了用 Elsässer 变量表示的压力泊松方程（式7）。该方程解释了湍流系统中出现的准压强平衡。同样，也用 Elsässer 剪切表示了压力涨落的泊松方程（式9）。该方程的形式与将速度替换为 Elsässer 变量后的方程相同。

(ii) 在衰减湍流的 PIC模拟中，随着湍流充分发展，体积平均热压力的变化趋势与磁压力相反，使总压力几乎保持不变，如图1所示。热压力（离子与电子之和）和磁压力的二维图像显示，局部磁压力与热压力之间存在反相关的特征，并由此导致整体反相关（图2）。

(iii) 全向压强谱在惯性区具有 −7/3 的特征斜率（图4），而磁压力和热压力各自的斜率均为 −5/3，其功率谱比总压力谱更平缓。两个压力项（磁压力和热压力）之间显著的交叉贡献，源于二者之间的反相关。

(iv) 讨论了压力涨落的间歇行为，并将其与速度场和磁场中观察到的间歇性进行了对比。在惯性区，高阶压力结构函数的标度指数与速度结构函数的标度指数之比为 ∼ 2。此前描述的间歇性模型均无法拟合我们通过模拟获得的标度指数；解决这一问题需要进行详细研究，而这超出了本文的研究范围。速度结构函数的指数远低于高阶情况下的预测值 n，并趋于饱和，接近 1。磁结构函数的标度指数与 SL 模型的磁流体力学描述一致，但其标度指数有所不同。此外，在压力中观察到了单重分形和多重分形标度指数，这表明压力涨落中也存在间歇行为的迹象。

本研究利用压力谱和高阶统计量，揭示了热压力和磁压力对总压力的贡献。利用这些结果，可以表征许多天体物理系统中的质量密度涨落，并探究系统中热压力和磁压力所产生的贡献（Lau etal. 2013）。因此，对天体物理系统中压力涨落的研究有助于进一步加深我们对系统的理解。

最后，目前尚不清楚本文所呈现的发现是否能够外推至所有二维或三维情形，包括预期的磁场各向异性（Oughton 等，1994年）。鉴于三维等离子体湍流在截然不同的参数范围内会发生各种各样的物理过程，目前也不清楚本文所呈现的结论是否能够适用于所有可达到的参数范围。因此，有必要在未来开展研究，探讨这些扩展情形。

致谢

S. A. 感谢 Francesco Pecora 富有帮助的讨论。所有作者谨此感谢 Cheyenne（计算与信息系统实验室 2017）提供的高性能计算支持，该支持由 NCAR 的计算与

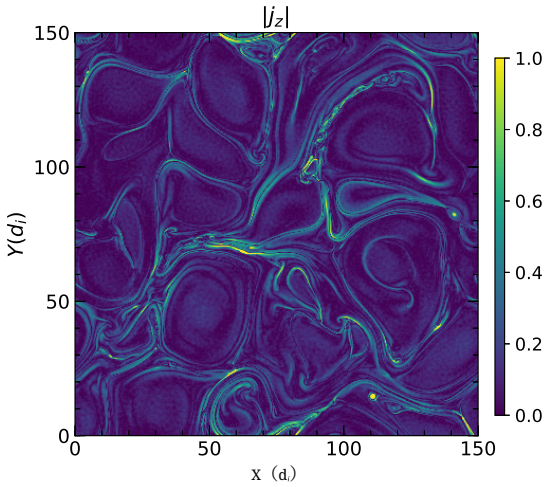

图 A1。 分析时刻（$t\omega_{ci} = 116.5$）面外电流密度的大小 j_z。电流片是 j_z 幅值较大的区域。

信息系统实验室提供，并由美国国家科学基金会赞助。我们还感谢美国国家能源研究科学计算中心的资源支持。该中心是美国能源部科学办公室用户设施，由合同编号 DE-AC02-05CH11231 运营。S. A. 和 M. A. S. 感谢美国国家航空航天局日地关系计划 80NSSC20K0198 提供的支持。P. A. C. 衷心感谢在休假访问期间特拉华大学和巴托尔研究所提供的接待，并感谢美国国家航空航天局资助编号 80NSSC19M0146 以及巴托尔研究所提供的支持。S. A. 和 P. A. C. 还获得了美国能源部拨款 DE-SC0020294 的支持。W. H. M. 获得了美国国家科学基金会—美国能源部拨款 AGS 2108834（由特拉华大学承担）、IMAP 项目（普林斯顿分包合同 SUB0000317）以及美国国家航空航天局日地关系计划向新墨西哥联合体提供的 FST 拨款（特拉华分包合同 655-001）的支持。

数据可用性

支持本研究结论的数据已公开存储于 Zenodo（Adhikari 等, 2023）。

附录 A：系统概述

图 A1 显示了分析时刻系统中面外电流的大小（j_z）。

参考文献

Adhikari S., Parashar T., Shay M., Matthaeus W., Pyakurel P., Fordin S., Stawarz J., Eastwood J., 2021, 《物理评论E》, 104, 065206 Adhikari S., Matthaeus W., Parashar T., Shay M., Cassak P., 2023, [数据集],Zenodo Angelinelli M., Vazza F., Giocoli C., Ettori S., Jones T., Brunetti G., Brüggen M., Eckert D., 2020, 《皇家天文学会月报》, 495, 864 Armstrong J., Cordes J., Rickett B., 1981, 《自然》, 291, 561 Balbus S. A., Hawley J. F., 1998, 《现代物理评论》, 70, 1 Batchelor G., 1951, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. pp 359–374

Bayly B. J., Levermore C. D., Passot T., 1992年, 《流体物理学 A：流体动力学》, 4, 945; Biskamp D., 2003, 磁流体湍流。剑桥大学出版社; Bruno R., Carbone V., 2013, 《太阳物理学年度评论》, 10, 1; Burlaga L., Scudder J., Klein L., Isenberg P., 1990年, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 95, 2229; Carlberg R., et al., 1997, 《天体物理学杂志》, 485, L13; Chhiber R., Matthaeus W. H., Bowen T. A., Bale S. D., 2021, 《天体物理学杂志快报》, 911, L7; Churazov E., et al., 2012, 《皇家天文学会月报》, 421, 1123; Cohen I., Huang Y., Chen J., Benesty J., Benesty J., Chen J., Huang Y., Cohen I., 2009, 语音处理中的噪声降低, 第1–4页; Coleman Jr P. J., 1968, 《天体物理学杂志》, 153, 371; 计算与信息系统实验室 2017, Cheyenne：HPE/SGI ICE XA 系统（大学社区计算）, doi:10.5065/D6RX99HX; Cowling T. G., 1976, 布里斯托尔, Adam Hilger, Ltd.; DavidsonP. A.,2015, 《湍流：科学家与工程师导论》。牛津大学出版社; Donzis D., Sreenivasan K., Yeung P., 2012, 《物理学 D：非线性现象》, 241, 164; George W. K., Beuther P. D., Arndt R. E., 1984, 《流体力学杂志》, 148, 155; Goldstein M. L., Roberts D. A., Matthaeus W., 1995, 《天文学与天体物理学年度评论》, 33, 283; Greco A., Matthaeus W. H., Servidio S., Chuychai P., Dmitruk P., 2009, 天体物理学杂志快报, 691, L111; Hellinger P., Trávníček P. M., Štverák Š., Matteini L., Velli M., 2013, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, 1351; Higdon J. C., 1984, 《天体物理学杂志》, 285, 109; Hill R. J., Boratav O. N., 1997, 《物理评论E》, 56, R2363; Hill R. J., Boratav O. N., 2001, 《流体物理学》, 13, 276; Hill R. J., Wilczak J. M., 1995, 《流体力学杂志》, 296, 247; Khatri R., Gaspari M., 2016年, 《皇家天文学会月报》, 463, 655; Kim J., Antonia R., 1993, 《流体力学杂志》, 251, 219; Klainerman S., Majda A., 1981年, 纯粹与应用数学通讯, 34, 481; Kolmogorov A. N., 1962, 《流体力学杂志》, 13, 82; Kolmogorov A. N., 1991, 《伦敦皇家学会会刊 A 辑：数学与物理科学》, 434, 9; Kravtsov A. V., Borgani S., 2012, 《天文学与天体物理学年度评论》, 50, 353; Lau E. T., Nagai D., Nelson K., 2013, 《天体物理学杂志》, 777, 151; Leamon R. J., Smith C. W., Ness N. F., Matthaeus W. H., Wong H. K., 1998, 《地球物理研究杂志》, 103, 4775; Leonardis E., Chapman S. C., Daughton W., Roytershteyn V., Karimabadi H., 2013, 《物理评论快报》, 110, 205002; Leonardis E., Sorriso-Valvo L., Valentini F., Servidio S., Carbone F., Veltri P., 2016, 《等离子体物理学》, 23, 022307; Markevitch M., Gonzalez A., Clowe D., Vikhlinin A., Forman W., Jones C., Murray S., Tucker W., 2004, 《天体物理学杂志》, 606, 819; Matthaeus W. H., Brown M. R., 1988a, 《流体物理学》, 31, 3634; Matthaeus W. H., Brown M. R., 1988b, 《流体物理学》, 31, 3634; Matthaeus W. H., Goldstein M. L., 1982, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 87, 6011; Matthaeus W. H., Klein L. W., Ghosh S., Brown M. R., 1991, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 96, 5421; Monin A., Yaglom A., 1975, 《统计流体力学：湍流力学》。"" 第2卷，麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥; Montgomery D., Brown M. R., Matthaeus W., 1987, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 92, 282; Müller W.-C., Biskamp D., 2000, 《物理评论快报》, 84, 475; Nelkin M., Chen S., 1998, 《流体物理学》, 10, 2119; Oboukhov A. M., 1962, 《流体力学杂志》, 13, 77; Obukhoff A., Yaglom A., 1951年, NACA 技术备忘录, 1350; Obukhov A. M., 1962, 《地球物理研究杂志》, 67, 3011

Oughton S., Priest E. R., Matthaeus W. H., 1994年，《流体力学杂志》，280，95；Parashar T. N., Matthaeus W. H., Shay M. A., 2018，《天体物理学杂志快报》，864，L21；Pessah M. E., 2010，《天体物理学杂志》，716，1012；Planelles S., Schleicher D., Bykov A., 2015，《空间科学评论》，188，93；Politano H., Pouquet A., 1995，《物理评论E》，52，636；Pratt G., Arnaud M., Biviano A., Eckert D., Ettori S., Nagai D., Okabe N., Reiprich T., 2019，《空间科学评论》，215，1；Pullin D., Rogallo R., 1994，斯坦福大学，《使用数值模拟数据库研究湍流。5：1994年夏季项目论文集》；Reisenfeld D. B., McComas D., Steinberg J., 1999，《地球物理研究快报》，26，1805；Ruffolo D., Ngampoopun N., Bhora Y. R., Thepthong P., Pongkitiwanichakul P., Matthaeus W. H., Chhiber R., 2021，《天体物理学杂志》，923，158；Sahraoui F., Hadid L., Huang S., 2020，《现代等离子体物理评论》，4，1；Schaffner D., Brown M. R., 2015，《天体物理学杂志》，811，61；Schuecker P., Finoguenov A., Miniati F., Böhringer H., Briel U., 2004，《天文学与天体物理学》，426，387；Schumann U., Patterson G., 1978年，《流体力学杂志》，88，685；Servidio S., Matthaeus W., Dmitruk P., 2008，《物理评论快报》，100，095005；She Z.-S., Leveque E., 1994，《物理评论快报》，72，336；Simionescu A., et al., 2019，《空间科学评论》，215，1；Smith C. W., Hamilton K., Vasquez B. J., Leamon R. J., 2006，《天体物理学杂志》，645，L85；Squire J., Kunz M. W., Arzamasskiy L., Johnston Z., Quataert E., Schekochi- hin A. A., 2023，arXiv 预印本 arXiv:2303.00468；Sreenivasan K., Kailasnath P., 1993，《流体物理学 A：流体动力学》，5，512；Tsuji Y., Ishihara T., 2003，《物理评论E》，68，026309；Uberoi M. S., 1953年，《航空科学杂志》，20，197；Van Atta C., Antonia R., 1980，《流体物理学》，23，252；Vellante M., Lazarus A., 1987，《地球物理研究杂志：空间物理学》，92，9893；Voigt L., Fabian A., 2006，《皇家天文学会月报》，368，518；Wan M., Matthaeus W. H., Roytershteyn V., Parashar T. N., Wu P., Karimabadi H., 2016，《等离子体物理学》，23，042307 Wang C., Richardson J., 2001，《地球物理研究杂志：空间物理学》，106，29401；Wang Y., et al., 2022，《天体物理学杂志》，937，76；Yang Y., et al., 2017a，《等离子体物理学》，24，072306；Yang Y., Matthaeus W. H., Shi Y., Wan M., Chen S., 2017b，《流体物理学》，29，035105Zank G. P., Matthaeus W. H., 1990年，《物理评论快报》，64，1243；Zank G. P., Matthaeus W. H., 1992，《地球物理研究杂志》，97，17 189；Zank G. P., Matthaeus W. H., 1993，《流体物理学A》，5，257；Zeiler A., Biskamp D., Drake J., Rogers B., Shay M., Scholer M., 2002，《地球物理研究杂志：空间物理学》，107，SMP；Zhao S., Cheng E., Qiu X., Burnett I., Liu J. C.-c., 2016，《美国声学学会杂志》，140，4178；Zhuravleva I., et al., 2014，《自然》，515，85；Zhuravleva I., Churazov E., Schekochihin A., Allen S., Vikhlinin A., Werner N., 2019，《自然·天文学》，3，832

本文由作者编写的 TEX/LATEX 文件排版而成。