arXiv:2305.02070v1 [math.AC] 3 May 2023

固定重数和弗罗贝尼乌斯数的数值半群比率余簇

M. A. Moreno-Fr´ıas * J. C. Rosales †

摘要

在这项工作中，我们将引入比率余簇的概念，将其定义为一个非空的数值半群族 $\mathscr{R}$，该族满足某些性质。这个概念将使我们能够：

1. 描述一种用于计算 $\mathscr{R}$.的算法过程2. 证明包含一组正整数的 $\mathscr{R}$ 中最小元素的存在性。 3. 讨论包含有限个数值半群的最小比率余簇。

此外，本文将把前面的结果应用于比率余簇 $\mathscr{R}(F,m)$ 的研究，其中 $=\{S \mid S$ 是一个数值半群，其弗罗贝尼乌斯数为 F，重数为 $m\}$.。

Keywords: 数值半群、比率余簇、弗罗贝尼乌斯数、亏格、比值、算法。

MSC-class: 20M14（主要），11D07、13H10（次要）。

1 引言

设 $\mathbb{N}$ 为非负整数的集合。数值半群 S 是 $(\mathbb{N},+)$ 的一个子幺半群，满足 $\mathbb{N}\backslash S$ 是有限集。集合 $\mathbb{N}\backslash S$ 称为 S 的间隙集合，其基数称为 S 的亏格，记为 g(S)。不属于 S 的最大整数称为 S 的弗罗贝尼乌斯数，记为 F(S)。例如，$\mathrm{F}(\mathbb{N}) = -1$. 设 $\{n_1 < \cdots < \mathrm{n}_p\} \subseteq \mathbb{N}$，使得 gcd($n_1,\ldots,n_p$) $= 1$.。那么 $\langle n_1,\ldots,$ $n_p\rangle = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i n_i \mid \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p\} \subseteq \mathbb{N}\}$ 是一个数值半群，并且每个数值半群都具有这种形式（参见 [17,。

*数学系，科学学院，加的斯大学，E-11510，皇家港（加的斯，西班牙）。部分受到安达卢西亚自治区政府FQM-298小组、安达卢西亚自治区政府卓越项目ProyExcel 00868、UCA自有计划研究项目2022-2023（PR2022-011）以及UCA自有计划研究项目2022-2023（PR2022-004）的资助。电子邮件：mariangeles.moreno@uca.es。

†格拉纳达大学理学院代数系，邮编 E-18071，格拉纳达（西班牙）。本研究部分获安达卢西亚自治区政府 FQM-343 研究组、安达卢西亚自治区政府卓越项目 ProyExcel 00868 及 UCA 2022—2023 年校内研究项目（PR2022-011）资助。电子邮箱：jrosales@ugr.es。

引理 2.1]）。集合 $\{n_1 < \cdots < n_p\}$ 称为 S 的生成系，我们记作 $S = \langle n_1, \ldots, n_p \rangle$.。如果一个数值半群的生成系的任何真子集都不能生成该数值半群，那么我们就称其为极小生成系。每个数值半群都有唯一的极小生成系，且该生成系是有限的（见 [17, 推论 2.8]）。数值半群 S 的极小生成系记作 msg(S)。其基数称为嵌入维数，记作 e(S)。本文还将使用另一个不变量，即 S 的重数，记作 m(S)。其定义为 $S\backslash\{0\}$. 的最小值。

所谓的数值半群 Frobenius问题（见 [14]）是一个经典的数学问题。它旨在寻找公式，以便根据数值半群的极小生成系求出其弗罗贝尼乌斯数和亏格。对于嵌入维数为二的数值半群，这个问题已在 [19] 中得到解决。此后，许多研究人员尝试解决嵌入维数大于或等于三的数值半群的这一问题。然而，该问题至今仍未解决。此外，在这种情况下，该问题是 NP困难的（见 [13]）。

为了寻找 Frobenius问题的解，我们发现了一些共同性质，可用于验证某些数值半群族（例如参见[11] 和 [12]）。

这项工作的动机是尝试将 [11], 开创的协变类研究扩展到具有固定弗罗贝尼乌斯数和重数的数值半群族。也就是说，如果 m 和 F 是正整数，使得 $m < F$ 且 m 不整除 F，那么我们记为

$$\mathscr{R}(F, m) = \{S \mid S \text{ is a numerical semigroup, } \mathrm{F}(S) = F \text{ and } \mathrm{m}(S) = m\}.$$

本文的主要目标是研究集合 $\mathscr{R}(F, m)$。我们可以将集合 $\mathscr{R}(F, m)$视为满足某些重要性质的数值半群族。这些性质的推广引出了比率余簇这一概念。

对于整数 a 和 b，如果存在整数 c 使得 $b = ca$，我们就称 a 整除 b，并记作 $a \mid b$.。否则， a 不能整除 b，并记作 $a \nmid b$.。设 S 是满足 $S \neq \mathbb{N}$ 的数值半群，则 S 的比值定义为 r(S) := min(msg(S)\{m(S)})。注意，r(S) = min$\{s \in S \mid \mathrm{m}(S) \nmid s\}$.

比率余簇是满足以下条件的非空数值半群族 $\mathscr{R}$：

1) $\mathscr{R}$存在最小元，记作 min($\mathscr{R}$) .

2) 若 $\{S, T\} \subseteq \mathscr{R}$，则 $S \cap T \in \mathscr{R}$。 3) 若 $S \in \mathscr{R}$ 且 $S \neq \mathrm{min}(\mathscr{R})$，则 $S\backslash\{\mathrm{r}(S)\} \in \mathscr{R}$。

本文的组织结构如下。第 2 节旨在证明每个比率余簇都是有限的，且其元素可以按根状结构排序。

树。此外，我们还将描述树中任意顶点的子节点。因此，在第 3 节中，我们将提出一种算法，用于计算 $\mathscr{R}(F,m)$ 的所有元素。

在第 4 节中，我们着重刻画 $\mathscr{R}(F,m)$ 的极大元素。这一事实将使我们能够计算集合 $\{\mathrm{g}(S) \mid S \in \mathscr{R}(F,m)\}$.。我们将应用所有这些结果，给出一种算法，以计算亏格固定的 $\mathscr{R}(F,m)$ 的所有元素。

设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇。如果集合 X 满足 $X \cap \mathrm{min}(\mathscr{R}) = \emptyset$，且存在 $S \in \mathscr{R}$ 使得 $X \subseteq S.$，则称其为 $\mathscr{R}$-集。在第 5 节中，我们将证明包含 $X.$ 的最小 $\mathscr{R}$ 是什么。这个元素记作 $\mathscr{R}[X]$，并称它为由 $X.$ 生成的 $\mathscr{R}$ 元素。

如果 $S = \mathscr{R}[X]$，那么我们称 X 是 S 的 -生成系。此外，如果对所有 $Y \subsetneq X$，都有 $S \neq \mathscr{R}[Y]$，则称 X 为 $S.$ 的一个极小 $\mathscr{R}$-生成系。在第 5 节中，我们将给出一个比率余簇 $\mathscr{R}$ 的例子，其中极小 $\mathscr{R}$- 生成系并不唯一。此外，本节还将说明，$\mathscr{R}(F,m)$ 的每个元素都有唯一的极小 $\mathscr{R}(F,m)$-生成系。

设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，且 $S \in \mathscr{R}$，那么 S 的 $\mathscr{R}$-秩为 $\mathscr{R}\mathrm{rank}\,(S) = \mathrm{min}\{\sharp X \mid X$ 是 $\mathscr{R}$-集合，且 $\mathscr{R}[X] = S\}$（其中 $\sharp Y$ 表示集合 Y 的基数）。在第 6 节中，我们将看到 $\{\mathscr{R}(F,m)\mathrm{rank}\,(S) \mid S \in \mathscr{R}(F,m)\}$ 的最大值小于或等于 $m-2.$。这一事实使我们能够给出如下定义。若一个数值半群 S 满足 $\mathrm{F}(S) > 2\,\mathrm{m}(S)$ 且 $\mathscr{R}(\mathrm{F}(S),\mathrm{m}(S))\mathrm{rank}\,(S) = \mathrm{m}(S) - 2.$，则称其具有最大秩（以下简称 MR-半群）。在第 6 节中，我们将给出这类半群的刻画。

在第 6 节中，我们还将看到，若 S_1、$\cdots$、S_k 是重数为 m 的数值半群，且 $F = \mathrm{max}\{\mathrm{F}(S_1)\ \cdots$、$\mathrm{F}(S_k)\}$，那么存在包含集合 $\{S_1,\cdots,S_k\}$ 且以 $\Delta(F,m) = \langle m\rangle \cup \{F+1,\rightarrow\}$ 为其最小元素的最小比率余簇（符号 $\rightarrow$ 表示每个大于 $F+1$ 的整数都属于该集合）。这个比率余簇记作 $\langle S_1,\cdots,S_k\rangle$，我们将给出一种计算其所有元素的算法。

本文通过一些例子来说明所证明的结果。构造这些例子时，可以使用 GAP（见 [9]）软件包 numericalsgps（[7]）。

2 与比率余簇相关的树

如果 T 是一个数值半群，那么 $\mathbb{N}\backslash T$ 是一个有限集，因此我们有以下结果。

引理 2.1. 设 T 是一个数值半群。那么

$$\{S \mid S \textit{ is a numerical semigroup and } T \subseteq S\}$$

是一个有限集。

应用引理 2.1，并利用每个比率余簇都有一个最小元，我们得到以下结果。

命题 2.2. 每个比率余簇的基数都是有限的。

图 G 是一个二元组 (V, E)，其中 V 是非空集合，E 是 $\{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$ 的子集。V 和 E 的元素分别称为顶点和边。连接 G 中顶点 x 和 y 的长度为 n 的路径，是由不同的边组成的序列，形式为 (v_0, v_1)、(v_1, v_2).....、(v_{n-1}, v_n)，满足 $v_0 = x$ 和 $v_n = y$。

如果存在一个顶点 r（称为 G 的根），使得对于 G 的任意其他顶点 x，都存在唯一一条连接 x 和 r 的路径，则图 G 是一棵树。如果 (u, v) 是树 G 的一条边，我们称 u 是 v 的子节点。

设 $\mathscr{R}$ 为一个比率余簇，并递归地定义 $S \in \mathscr{R}$. 的以下元素序列:

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = \begin{cases} S_n \backslash \{\mathrm{r}(S_n)\} & \text{if } S_n \neq \min(\mathscr{R}), \\ \min(\mathscr{R}) & \text{otherwise.} \end{cases}$

以下结果可直接证明。

引理 2.3. 设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，$S \in \mathscr{R}$，并设 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是上述定义的 $\mathscr{R}$ 的元素序列。那么存在 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\min(\mathscr{R}) = S_k \subsetneq S_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq S_0 = S$. 此外，对于所有 $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$，$\sharp(S_i \backslash S_{i+1}) = 1$

如果 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，则我们按如下方式定义图 $\mathrm{G}(\mathscr{R})$：$\mathscr{R}$ 是顶点集合，当且仅当 $T = S\backslash\{\mathrm{r}(S)\}$. 时，$(S, T) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R}$ 是 $\mathrm{G}(\mathscr{R})$ 的一条边。

由引理 2.3 可得以下结果。

命题 2.4. 设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇。那么 $\mathrm{G}(\mathscr{R})$ 是一棵以 $\min(\mathscr{R})$ 为根的树。

树可以从根开始递归构建，并通过边将已构建的顶点与其子节点连接起来。因此，刻画树中任意顶点的子节点非常有意义。

按照 [15]，中引入的记号，若整数 z 满足 $z \notin S$ 且对所有 $s \in S\backslash\{0\}$. 都有 $z + s \in S$，则称 z 是数值半群 S 的一个伪弗罗贝尼乌斯数。我们用 $\mathrm{PF}(S)$ 表示由 S. 的伪弗罗贝尼乌斯数组成的集合。$\mathrm{PF}(S)$ 的基数是 S 的一个重要不变量（见 [8] 和 [3]），称为 S. 的型。

给定数值半群 S，我们用 $\mathrm{SG}(S)$ 表示 $= \{x \in \mathrm{PF}(S) \mid 2x \in S\}$. 。其中的元素称为 S. 的特殊间隙。下面的结果见命题 4.33]: [17,。

引理 2.5. 设 S 是一个数值半群，且 $x \in \mathbb{N}\backslash S$. 。那么，$x \in$ 属于 $\mathrm{SG}(S)$ 当且仅当 $S \cup \{x\}$ 是一个数值半群。

示例 2.6. 设 $S = \langle 3, 5, 7\rangle = \{0, 3, 5, \rightarrow\}$，则显然 $\mathrm{PF}(S) = \{2, 4\}$ 且 $\mathrm{SG}(S) = \{4\}$.

上述计算可以使用以下间隙序完成：

间隙>S := NumericalSemigroup(3,5,7);<具有
3 个生成元的数值半群 > 间隙 >
PseudoFrobenius(S);[2，4]间隙>
SpecialGaps(S);[4]

命题 2.7. 设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，且 $S \in \mathscr{R}.$，那么树 G($\mathscr{R}$) 中由 S 的子节点构成的集合是

$$\{S \cup \{x\} \mid x \in \mathrm{SG}(S),\ \mathrm{m}(S) < x < \mathrm{r}(S) \ \textit{and}\ S \cup \{x\} \in \mathscr{R}\}.$$

证明。若 T 是 S的子节点，则 $T \in \mathscr{R}$ 和 $T\backslash\{\mathrm{r}(T)\} = S.$ 因此，$T = S \cup \{\mathrm{r}(T)\} \in \mathscr{R}$，$\mathrm{r}(T) \in \mathrm{SG}(S)$ 且 $\mathrm{m}(S) < \mathrm{r}(T) < \mathrm{r}(S)$。

如果 $\mathrm{m}(S) < x < \mathrm{r}(S)$，那么 $\mathrm{r}(S \cup \{x\}) = x.$ 因此，$S \cup \{x\} \in \mathscr{R}$ 且 $(S \cup \{x\}) \setminus \{\mathrm{r}(S \cup \{x\})\} = S.$ 由此，$S \cup \{x\}$ 是树 G($\mathscr{R}$) 中 S 的子节点。 □

3 计算 $\mathscr{R}(F, m)$ 的算法

在本节中，m 和 F 表示满足 $m < F$ 和 $m \nmid F$ 的正整数。回顾一下，

$$\mathscr{R}(F, m) = \{S \mid S \text{ is a numerical semigroup, } \mathrm{F}(S) = F \text{ and } \mathrm{m}(S) = m\}.$$

下面的结果证明很简单。

引理 3.1. 使用上述记号，我们有：

$$\Delta(F, m) = \langle m \rangle \cup \{F + 1, \to\}$$

是 $\mathscr{R}(F, m)$ 的最小值。

下一个结果众所周知，且易于证明。

引理 3.2. 设 S 和 T 是数值半群，且 $x \in S.$，则以下条件成立：

1. $S \cap T$是一个数值半群，且 $\mathrm{F}(S \cap T) = \max\{\mathrm{F}(S), \mathrm{F}(T)\}$.
2. $S\backslash\{x\}$ 是数值半群，当且仅当 $x \in \mathrm{msg}(S)$。

根据引理 3.1 和 3.2，我们可以轻松推导出以下结果。

命题 3.3. $\mathscr{R}(F, m)$ 是一个比率余簇。

作为命题 2.7 和 3.3 的推论，我们可以刻画树 G($\mathscr{R}(F, m)$) 的子节点。

命题 3.4. 如果 $S \in \mathscr{R}(F,m)$，那么树 G($\mathscr{R}(F,m)$) 中 S 的子节点是集合 $\{S \cup \{x\} \mid x \in \mathrm{SG}(S)\ \ m < x < \mathrm{r}(S)$ 和 $x \neq F\}$.

给定数值半群 S 和 $s \in S\backslash\{0\}$， n 在 S 中的 Ap´ery 集（以 [2]命名）是集合 $\mathrm{Ap}(S,n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$。该集合有 n个元素，每个模 n的同余类各有一个。也就是说，$\mathrm{Ap}(S,n) = \{0 = w(0)\ w(1) \ldots, w(n-1)\}$，其中 $w(i)$ 是与 i 模 n同余的 S 中的最小元素，对所有 $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ 均成立（参见 [17, 引理 2.4]）。

给定数值半群 $S = \langle 6,8,13,15\rangle$，集合 Ap($S$, 6) 可使用以下间隙序计算：

```
gap>S := NumericalSemigroup(6,8,13,15);<
具有 4 个生成元的数值半群>gap>
AperyList(S,6);[ 0, 13, 8, 15, 16, 23 ]
```

设 S 为一个数值半群。我们在 $\mathbb{Z}$ 上定义如下序关系： $a \leq_S b$ 当且仅当 $b - a \in S$. 以下结果是来自 [15]的引理 10。

引理 3.5。若 S 是一个数值半群且 $n \in S\backslash\{0\}$，则

$$\mathrm{PF}(S) = \{w - n \mid w \in \mathrm{Maximals}_{\leq_S}\mathrm{Ap}(S,n)\}.$$

下一个引理的证明是直接的。

引理 3.6。设 S 为一个数值半群， $n \in S\backslash\{0\}$ 且 $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$。则 $w \in \mathrm{Ap}(S,n)$ 的极大元$\leq_S$当且仅当对于所有 $w' \in \mathrm{Ap}(S,n)\backslash\{0\}$.， $w + w' \notin \mathrm{Ap}(S,n)$

以下结果显然可以证明。

引理 3.7。若 S 是一个数值半群且 $S \neq \mathbb{N}$，则

$$\mathrm{SG}(S) = \{x \in \mathrm{PF}(S) \mid 2x \notin \mathrm{PF}(S)\}.$$

注 3.8. 作为引理 3.5、引理 3.6 和引理 3.7 的推论，注意到，如果 S 是一个数值半群，并且我们知道某个 $n \in S\backslash\{0\}$ 对应的 Ap(S,n)，那么就可以很容易地计算集合 SG(S)。

我们将通过一个例子来说明前面的注。

例 3.9. 如果 $S = \{0,7,\rightarrow\}$，则 Ap(S, 7) $= \{0,8,9,10,11,12,13\}$. 通过应用引理 3.6，我们有 Maximals$\leq_S$(Ap(S, 7)) $= \{8,9,10,11,12,13\}$.然后，引理 3.5 断言 PF(S) $= \{1,2,3,4,5,6\}$. 最后，利用引理 3.7，我们有 SG(S) $= \{4,5,6\}$.

下面的结果证明很简单。

引理 3.10. 若 S 是一个数值半群， $n \in S\backslash\{0\}$ 且 $x \in$SG(S)，则$x + n \in$ Ap(S,n)。此外，Ap($S \cup \{x\}, n$) $=$(Ap(S,n)$\backslash\{x+m\}$) $\cup \{x\}$.

注 3.11. 注意到，根据引理 3.10，若我们知道 Ap(S, n)，那么就可以轻松计算出 Ap($S \cup \{x\}$, n)。特别地，如果 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，且 $S \in \mathscr{R}$，那么对于树 G($\mathscr{R}$) 中 S 的每一个子节点 T（参见命题 2.7），引理 3.10 使我们能够根据 Ap(S, n) 计算集合 Ap(T, n)。

我们将通过一个例子来说明前面的注记。

例 3.12。考虑数值半群 $S = \{0, 7, \rightarrow\}$. 我们有 Ap($S$, 7) $= \{0, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. 根据例 3.9，我们知道 $5 \in$ SG(S)。如果$T = S \cup \{5\}$，那么引理 3.10 断言

$$\mathrm{Ap}(T, 7) = (\{0, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \backslash \{5 + 7\}) \cup \{5\} = \{0, 5, 8, 9, 10, 11, 13\}.$$

我们现在已经具备了所有必要的工具，可以介绍赋予本节标题的算法。

算法 3.13。

Input：两个正整数 F 和 m，满足 $m < F$ 且 $m \nmid F$.Output： $\mathscr{R}$(F, m)。

(1) 计算 Ap($\Delta(F, m)$ m)。(2) $\mathscr{R}(F, m) = \{\Delta(F, m)\}$ 以及 $B = \{\Delta(F, m)\}$. (3) 对每个 $S \in B$，计算 $\theta(S) = \{x \in \mathrm{SG}(S) \mid m < x < \mathrm{r}(S)$ 和 $x \neq F\}$.(4) 如果$\bigcup_{S \in B} \theta(S) = \emptyset$，则返回 $\mathscr{R}(F, m)$。(5) $C = \bigcup \{S \cup \{x\} \mid x \in \theta(S)\}$. (6) $\mathscr{R}(F, m) = \mathscr{R}(F, m) \cup C$ 以及 $B = C$.(7) 对每个 $S \in B$，计算 Ap(S, m) 并转到步骤 (3)。

接下来我们用一个例子说明这一算法。

例 3.14。我们将使用算法 3.13 来计算 $\mathscr{R}$(7,4)。

- $\Delta(7, 4) = \{0, 4, 8, \rightarrow\}$ and $\mathrm{Ap}(\Delta(7, 4), 4) = \{0, 9, 10, 11\}$.
- $\mathscr{R}(7, 4) = \{\Delta(7, 4)\}$ and $B = \{\Delta(7, 4)\}$.
- $\theta(\Delta(7, 4)) = \{5, 6\}$.
- $C = \{\Delta(7, 4) \cup \{5\}, \Delta(7, 4) \cup \{6\}\}$.
- $\mathscr{R}(7, 4) = \{\Delta(7, 4), \Delta(7, 4) \cup \{5\}, \Delta(7, 4) \cup \{6\}\}$ and $B = \{\Delta(7, 4) \cup \{5\}, \Delta(7, 4) \cup \{6\}\}$.
- $\mathrm{Ap}(\Delta(7, 4) \cup \{5\}, 4) = \{0, 5, 10, 11\}$ and $\mathrm{Ap}(\Delta(7, 4) \cup \{6\}, 4) = \{0, 6, 9, 11\}$.

- $\theta(\Delta(7,4)\cup\{5\})=\emptyset$ 和 $\theta(\Delta(7,4)\cup\{6\})=\{5\}$.
- $C=\{\Delta(7,4)\cup\{5,6\}\}$.
- $\mathscr{R}(7,4)=\{\Delta(7,4)\ \Delta(7,4)\cup\{5\},\ \Delta(7,4)\cup\{6\},\ \Delta(7,4)\cup\{5,6\}\}$ 以及 $B=\{\Delta(7,4)\cup\{5,6\}\}$.
- Ap $(\Delta(7,4)\cup\{5,6\},4)=\{0,5,6,11\}$.
- $\theta(\Delta(7,4)\cup\{5,6\})=\emptyset$.
- 算法返回

$$\mathscr{R}(7,4)=\{\Delta(7,4),\Delta(7,4)\cup\{5\},\Delta(7,4)\cup\{6\},\Delta(7,4)\cup\{5,6\}\}.$$

4 亏格固定时 $\mathscr{R}(F,\ m)$ 的元素

设 F、m 和 g 为正整数。记 $\mathscr{R}(F,m,g)=\{S\in\mathscr{R}(F,m)\ |\mathrm{g}(S)=g\}$.。以下结果可由 [17, 引理 2.14] 推得。

命题 4.1. 若 S 是数值半群，则 $\mathrm{F}(S)_2{}^{+1}\leq \mathrm{g}(S)\leq \mathrm{F}(S)$。——

若一个数值半群不能表示为两个严格包含它的数值半群的交集，则称其为不可约的。这一概念由 [16]，引入，文中还证明了下一个结果。

引理 4.2. 设 S 是数值半群。那么，S 是不可约的，当且仅当 S 是集合 $\{T\mid T$ 中的极大元素，其中 $\{T\mid T$ 是数值半群且 $\mathrm{F}(T)=\mathrm{F}(S)\}$.

不可约数值半群非常有趣，因为由 [3] 和 [8] 可推得，一个数值半群不可约，当且仅当它是对称的或伪对称的。文献中对此类数值半群进行了广泛研究，因为一维解析不可约局部环是 Gorenstein（分别为 Kunz）环，当且仅当其值半群是对称的（分别为伪对称的）；参见 [10] 和 [3]。

若 $q\in\mathbb{Q}$，则 $\lceil q\rceil=\min\{z\in\mathbb{Z}\mid q\leq z\}$. From [17, 推论 4.5] 得到以下刻画。

引理 4.3. 设 S 是一个数值半群。则以下条件成立。

1. *S is symmetric if and only if* $\mathrm{g}(S)=\dfrac{\mathrm{F}(S)+1}{2}$.
2. *S is pseudo-symmetric if and only if* $\mathrm{g}(S)=\dfrac{\mathrm{F}(S)+2}{2}$.
3. *S is irreducible if and only if* $\mathrm{g}(S)=\left\lceil\dfrac{\mathrm{F}(S)+1}{2}\right\rceil$.

用 Max($\mathscr{R}(F,m)$) 表示由 $\mathscr{R}(F,m)$ 的极大元素构成的集合。以下结果可由 [4, 命题 6] 推导得出。

命题 4.4。采用上述记号，有如下结论。

1. 若 $F = m-1$，则 Max($\mathscr{R}(F,m)$) $= \mathscr{R}(F,m) = \{\{0, m, \to\}\}$.2. 若 $m < F < 2m$，则 Max($\mathscr{R}(F,m)$) $= \{\{0, m, \to\} \backslash \{F\}\}$.3. 若 $F > 2m$，则 Max($\mathscr{R}(F,m)$) $= \{S \in \mathscr{R}(F,m) \mid S$ 不可约$\}$

.

由引理 4.3 和命题 4.4，可得以下结果。

推论 4.5。设 $S \in \mathscr{R}(F,m)$。那么 $S \in$ Max($\mathscr{R}(F,m)$) 当且仅当满足以下条件之一。

1. $F = m-1$ *and* $\mathrm{g}(S) = m-1$.
2. $m < F < 2m$ 且 g(S) $= m$.
3. $F > 2m$ *and* $\mathrm{g}(S) = \left\lceil \dfrac{F+1}{2} \right\rceil$.

若 S 是一个满足 $S \neq \mathbb{N}$的数值半群，则与 S 相关联的比值序列递归定义如下： $S_0 = S$ 且 $S_{n+1} = S_n \backslash \{$r($S_n$)$\}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$.

如果 S 是数值半群，则我们用 A(S) 表示 $= \{x \in S \mid x <$F(S) 和 m(S) $\nmid x\}$. A(S) 的基数将记为 a(S)。

令 S 为一个数值半群，并令 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为与 S 相关联的比值序列，则集合 Rat-Cad(S) $= \{S_0, S_1, \ldots, S_{\mathrm{a}(S)}\}$ 称为与 S. 相关联的比值链。显然， $S_{\mathrm{a}(S)} = \Delta$(F($S$),m($S$))。

如果 $q \in \mathbb{Q}$，那么 $\lfloor q \rfloor =$ max$\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq q\}$.

引理 4.6. 使用上述记号，可以验证 g($\Delta(F,m)$) $= F - \left\lfloor \dfrac{F}{m} \right\rfloor$.

证明。只需注意到即可。

$$\Delta(F,m) = \{0, m, 2m, \cdots, \left\lfloor \frac{F}{m} \right\rfloor m, F+1, \to\}.$$

□

以下结果的证明很简单。

引理 4.7。如果 $m < F < 2m$，那么

$$\mathscr{R}(F,m) = \{A \cup \{0, m, F+1, \to\} \mid A \subseteq \{m+1, \cdots, F-1\}\}.$$

应用前面的结果，我们可以很容易地推导出以下命题。

命题 4.8. 使用上述记号，有以下结论：

1. 若 $F = m - 1$，则 $\{\mathsf{g}(S) \mid S \in \mathscr{R}(F, m)\} = \{m - 1\}$.2. 若 $m < F < 2m$，则 $\{\mathsf{g}(S) \mid S \in \mathscr{R}(F, m)\} = \{m, m + 1, \cdots, F - 1\}$.3. 若 $F > 2m$，则 $\{\mathsf{g}(S) \mid S \in \mathscr{R}(F, m)\} = \left\{ \left\lceil \frac{F+1}{2} \right\rceil, \cdots, F - \left\lfloor \frac{F}{m} \right\rfloor \right\}$.

现在，我们已具备所有必要条件，可以给出一个算法过程来计算 $\mathscr{R}(F, m, g)$，其中 $F > 2m$、$m \nmid F$ 和 $\left\lceil \frac{F+1}{2} \right\rceil \leq g \leq F - \left\lfloor \frac{F}{m} \right\rfloor$.

算法 4.9。
INPUT：正整数 F、m 和 g，使得 $F > 2m$、$m \nmid F$ 和 $\left\lceil \frac{F+1}{2} \right\rceil \leq g \leq F - \left\lfloor \frac{F}{m} \right\rfloor$. OUTPUT：$\mathscr{R}(F$、$m$、$g)$。

(1) $H = \{\Delta(F, m)\}$, $i = F - \left\lfloor \frac{F}{m} \right\rfloor$.(2) 如果 $i = g$，返回 H.(3) 对每个 $S \in H$，计算 $\theta(S) = \{x \in \mathsf{SG}(S) \mid m < x < \mathsf{r}(S)$ 和 $x \neq^{F}\}$.(5) $H := \bigcup_{S \in H} \{S \cup \{x\} \mid x \in \theta(S)\}$, $i := i - 1$ 并转到步骤(2)。

下面我们将通过以下示例来了解前述算法的运行过程。

例 4.10. 使用算法 4.9，我们将计算集合 $\mathscr{R}(12, 5, 8)$。

- $H = \{\Delta(12, 5)\}$, $i = 10$.
- $\theta(\Delta(12, 5)) = \{8, 9, 11\}$.
- $H = \{\Delta(12, 5) \cup \{8\}, \Delta(12, 5) \cup \{9\}, \Delta(12, 5) \cup \{11\}\}$, $i = 9$.
- $\theta(\Delta(12, 5) \cup \{8\}) = \emptyset$、$\theta(\Delta(12, 5) \cup \{9\}) = \{8\}$ 和 $\theta(\Delta(12, 5) \cup \{11\}) = \{8, 9\}$.
- $H = \{\Delta(12, 5) \cup \{8, 9\}, \Delta(12, 5) \cup \{8, 11\}, \Delta(12, 5) \cup \{9, 11\}\}$, $i = 8$.
- 该算法返回

$$\mathscr{R}(12, 5, 8) = \{\Delta(12, 5) \cup \{8, 9\}, \Delta(12, 5) \cup \{8, 11\}, \Delta(12, 5) \cup \{9, 11\}\}.$$

我们以如下说明结束本节：在 [5] 中，在 $\mathscr{R}(F,m)$上定义了一个等价关系 $\sim$，使得集合$\mathscr{R}(F,m)=\{[S]\mid S\in \underline{\text{Max}}(\mathscr{R}(F,m))\}$ 是 $\mathscr{R}(F,m)$按 $\sim$. 取商所得的商集。因此，在 [5] 中，得到了一个基于以下两个算法来计算 $\mathscr{R}(F,m)$的算法：

1. 一个计算 Max($\mathscr{R}(F,m)$) 的算法。

2. 另一种算法，用于计算当 S 属于 Max($\mathscr{R}(F,m)$) 时的 $[S]$ 。

5 $\mathscr{R}$-生成系

在本节中，$\mathscr{R}$ 始终表示一个比率余簇。若集合 X 满足以下条件，我们称其为一个 $\mathscr{R}$-集合：

1) $X\cap \text{min}(\mathscr{R})=\emptyset$.

2) 存在 $S\in\mathscr{R}$，使得 $X\subseteq S$.

如果 X 是一个 $\mathscr{R}$-集合，那么我们将 $\mathscr{R}[X]$ 记为包含 X. 的 $\mathscr{R}$ 中所有元素的交集。根据命题 2.2，我们知道 $\mathscr{R}$ 是一个有限集，因此，$\mathscr{R}$ 中元素的交集是 $\mathscr{R}$. 中的一个元素。因此，我们可以陈述如下命题。

命题 5.1。设 X 是一个 $\mathscr{R}$-集合。那么，$\mathscr{R}[X]$是包含 X.的 $\mathscr{R}$ 中的最小元素。

如果 X 是一个 $\mathscr{R}$-集合且 $S=\mathscr{R}[X]$，我们称 X 为 S. 的一个 $\mathscr{R}$-生成系。此外，如果对于所有 $Y\subsetneq X$，都有 $S\neq\mathscr{R}[Y]$，那么称 X 为 S.的一个极小 $\mathscr{R}$-生成系。

一般而言，极小的 $\mathscr{R}$-生成系并不唯一，正如下面的例子所示。

例 5.2。设 $\mathscr{R}=\{S\mid S$ 是一个数值半群，m(S) $=8$，r(S) ≥ 10，且 F(S) $\leq 15\}\cup\{S_1=\{0,8,9,10,11,15,\rightarrow\},S_2=\{0,8,9,13,15,\rightarrow\},S_3=\{0,8,9,15,\rightarrow\}\}$.

容易看出，$\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，$\mathscr{R}([\{9,10\}])=\mathscr{R}([\{9,11\}])=S_1$，$\mathscr{R}([\{9\}])=S_3$，$\mathscr{R}([\{10\}])=\{0,8,10,15,\rightarrow\}$ 以及 $\mathscr{R}([\{11\}])=\{0,8,11,15,\rightarrow\}$。因此，$\{9,10\}$ 和 $\{9,11\}$ 是 S_1.的极小 $\mathscr{R}$-生成系。

本节接下来的目标是证明，$\mathscr{R}(F,m)$ 中的每个元素都存在唯一的极小 $\mathscr{R}(F,m)$-生成系。

引理 5.3。如果 $S\in\mathscr{R}$，那么 $X=\{x\in\text{msg}(S)\mid x\notin\text{min}(\mathscr{R})\}$ 是一个 $\mathscr{R}$-集合且$\mathscr{R}[X]=S$.

证明。显然，X 是一个 $\mathscr{R}$-集合。由于 $S\in\mathscr{R}$ 和 $X\subseteq S$，因此 $\mathscr{R}[X]\subseteq S$。下面证明反向包含。设 $T\in\mathscr{R}$ 满足 $X\subseteq T$。那么 $X\cup\text{min}(\mathscr{R})\subseteq T$，因此 msg($S$) $\subseteq T$. 。于是，$S\subseteq T$，从而$S\subseteq\mathscr{R}[X]$. □

命题 5.4. 若 $S \in \mathscr{R}(F,m)$，则 $X = \{x \in \mathsf{msg}(S) \mid x \notin \Delta(F,m)\}$ 是 S.的唯一极小 $\mathscr{R}$-生成系

证明。由引理 5.3 可知， X 是一个 $\mathscr{R}(F,m)$-集合，且 $\mathscr{R}(F,m)[X] = S$。为完成证明，我们将证明：若 Y是一个 $\mathscr{R}(F,m)$-集合，且 $\mathscr{R}(F,m)[Y] = S$，则 $X \subseteq Y.$ 。事实上，若 $X \nsubseteq Y$，则存在 $x \in X\backslash Y$。应用引理 3.2，可推得 $S\backslash\{x\} \in \mathscr{R}(F,m)$，且 $Y \subseteq S\backslash\{x\}.$ 。因此，$S = \mathscr{R}(F,m)[Y] \subseteq S\backslash\{x\}$，这就产生了矛盾。 □

若 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，且 $S \in \mathscr{R}$，则我们定义 S 的 $\mathscr{R}$-秩为

$$\mathscr{R}\mathrm{rank}\,(S) = \min\{\sharp X \mid X \text{ is a } \mathscr{R}\text{-set and } \mathscr{R}[X] = S\}.$$

作为引理 5.3 的直接推论，在下面的结果中，我们将展示 $\mathscr{R}$-秩与数值半群的嵌入维数之间的关系。

命题 5.5. 若 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇且 $S \in \mathscr{R}$，则 $\mathscr{R}\mathsf{rank}\,(S) \leq \mathsf{e}(S)$。

以下结果的证明是显然的。

引理 5.6. 设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇且 $S \in \mathscr{R}.$ 。那么 $\mathscr{R}\mathsf{rank}\,(S) = 0$ 当且仅当 $S =\mathsf{min}(\mathscr{R})$。

引理 5.7. 若 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇， $S \in \mathscr{R}$， $S \neq\mathsf{min}(\mathscr{R})$，且 X 是一个 $\mathscr{R}$-集合，使得 $S = \mathscr{R}[X]$，则 $\mathsf{r}(S) \in X.$

证明。若 $\mathsf{r}(S) \notin X$，则 $X \subseteq S\backslash\{r(S)\}.$ 。由于 $S\backslash\{\mathsf{r}(S)\} \in \mathscr{R}$，因此 $S = \mathscr{R}[X] \subseteq S\backslash\{\mathsf{r}(S)\}$，这显然矛盾。 □

作为引理 5.6 和 5.7 的推论，在以下结果中，我们刻画满足 $\mathscr{R}\mathsf{rank}(S) = 1.$ 的数值半群 $S \in \mathscr{R}$

命题 5.8. 设 $\mathscr{R}$ 是一个比率余簇，且 $S \in \mathscr{R}.$ 那么 $\mathscr{R}\mathsf{rank}(S) = 1$当且仅当 $S = \mathscr{R}[\{\mathsf{r}(S)\}].$

由命题 5.4 和 5.8 可得以下结果。

推论 5.9. 设 $m < r < F$ 为满足 $m \nmid r$ 和$F \notin \langle m, r\rangle.$的正整数。那么 $\langle m, r\rangle \cup \{F + 1, \to\}$ 是 $\mathscr{R}(F,m)$ 中的一个元素，其 $\mathscr{R}(F,m)$-秩等于一。此外， $\mathscr{R}(F,m)$ 中每个 $\mathscr{R}(F,m)$-秩等于一的元素，都具有这种形式。

6 $\mathscr{R}(F,m)$ 中具有最大 $\mathscr{R}(F,m)$-秩的元素

本节的首要目标是证明集合 $\{\mathscr{R}(F,m)\mathsf{rank}(S) \mid S \in \mathscr{R}(F,m)\}$ 的最大值小于或等于 $m - 2.$。为此，我们需要引入一些概念和结果。

以下结果广为人知，并见于 [17, 命题 2.10]。

引理 6.1. 若 S 是一个数值半群，则 e(S) $\leq$ m(S)。

若数值半群 S 满足 e(S) =m(S)，则称其具有最大嵌入维数（下文简称 MED 半群）。

文献中有大量研究通过值半群探讨一维解析不可约局部整环。采用这种方法研究这类环时，所考察的性质之一是是否具有最大嵌入维数（见 [1],[3], [6] and [18]）。通过值半群刻画具有最大嵌入维数的环，由此产生了 MED 半群这一概念。

由 [17, Corollary 3.2] 可推导出以下结果。

引理 6.2. 若 S 是 MED 半群且 $S \neq \mathbb{N}$，则 F(S) = max(msg(S))–m(S)。

命题 6.3. 若 $S \in \mathscr{R}(F, m)$，则 $\mathscr{R}(F, m)$rank (S) $\leq m-2$.

证明。根据命题 5.4，我们知道 $\mathscr{R}(F, m)$rank (S) 是集合 $X = \{x \in$ msg(S) $\mid x \notin \Delta(F, m)\}$. 的基数。由于 $m \in$ msg(S) 且 $m \in \Delta(F, m)$，因此 $\mathscr{R}(F, m)$ rank (S) $\leq$ e(S) -1.。现在，应用引理 6.1，可得$\mathscr{R}(F, m)$rank (S) $\leq$ m(S) -1.。为完成证明，我们将证明情形$\mathscr{R}(F, m)$rank (S) = m(S)–1 不可能。事实上，若 $\mathscr{R}$ (F, m)rank (S) = m(S)–1，则可推出 e(S) = m ，因此 S 是一个 MED 半群。但若 S 是一个 MED 半群，则应用引理 6.2，可得 max(msg(S)) $\in\Delta(F, m)$。现在，根据命题 5.4，可得 $\mathscr{R}(F, m)$rank (S) $\leq$ e(S) $-2 \leq m-2$.

□

以下结果可由命题 5.4 轻易推出。

命题 6.4。如果对于所有 $i \in \{1, \cdots, k\}$,
$\{m = a_1 < a_2 < \cdots < a_k < a_{k+1} = F\} \subseteq \mathbb{N}$ 且$a_{i+1} \notin \langle a_1, \cdots, a_i\rangle$，那么 $\langle a_1, \cdots, a_k\rangle \cup \{F+1, \rightarrow\}$ 是 $\mathscr{R}(F, m)$ 的一个元素，其 $\mathscr{R}(F, m)$-秩等于 $k-1$.。此外，$\mathscr{R}(F, m)$ 中 $\mathscr{R}(F, m)$-秩等于 $k-1$ 的每个元素都具有这种形式。

推论 6.5。如果 $S \in \mathscr{R}(F, m)$ 且 $\mathscr{R}(F, m)$秩 (S) $= m-2$，那么 $F \geq 2m-1$.。此外，如果 $F = 2m-1$，那么 $S = \{0, m, m+1, \cdots, 2m-2, 2m, \rightarrow\}$.

证明。根据命题 6.4，很容易看出 $F \geq 2m-1$. 。现在应用引理 4.7 和命题 6.4，可得 $S = \{0, m, m+1, \cdots, 2m-2, 2m, \rightarrow\}$.

□

命题 6.6。若 $F > 2m$，则集合 $\{S \in \mathscr{R}(F, m) \mid \mathscr{R}(F, m)$rank ($S$) $= m-2\} \neq \emptyset$.

证明。令 $S = \langle m, F-(m-1)\ F-(m-2) \cdots, F-1\rangle \cup \{F+1, \rightarrow\}$. 由于 $F > 2m$, 则 $F-(m-1) > m$. 由于 $m \nmid F$，因此存在唯一的 $i \in \{1, \cdots, m-1\}$使得 $m \mid F-i$.。由此容易推出 $\{x \in$ msg(S) $\mid x \notin \Delta(F, m)\}$ =$\{F-(m-1) \cdots, F-1\} \backslash \{F-i\}$.。现在应用命题 5.4，我们有 $\mathscr{R}(F, m)$秩 (S) $= m-2$.

□

上述命题使我们能够定义一种新型半群。

如果一个数值半群 S 满足 $\mathrm{F}(S) > 2\mathrm{m}(S)$，并且 $\mathscr{R}(\mathrm{F}(S), \mathrm{m}(S))\mathrm{rank}\,(S) = \mathrm{m}(S) - 2.$，则称其具有最大秩（下文称为 MR-半群）。

MR-半群的存在性由命题 6.4 保证。现在我们给出这类半群的一个刻画，这同样是命题 6.4 的直接推论。

命题 6.7. 设 $S \in \mathscr{R}(F, m)$，且 $F > 2m.$。那么， S 是 MR-半群，当且仅当以下陈述之一成立：

- $\mathrm{e}(S) = m - 1$ 和 $\mathrm{msg}(S) \subseteq \{1, \cdots, F\}$.
- $\mathrm{e}(S) = m$ 和 $\sharp\{x \in \mathrm{msg}(S) \mid x > F\} = 1$.

接下来我们通过一个例子说明这一刻画。

例 6.8. 1. 设 $S = \langle 5, 7, 9, 11\rangle$. 则 $S \in \mathscr{R}(13, 5)$，$\mathrm{e}(S) = 4$ 且 $\mathrm{msg}(S) \subseteq \{1, \cdots, 13\}$. 因此，根据命题 6.7，可得 S 是一个 MR-半群。

2. 若 $S = \langle 5, 12, 13, 14, 21\rangle$，则 $S \in \mathscr{R}(16, 5)$，$\mathrm{e}(S) = 5$ 且 $\{x \in \mathrm{msg}(S) \mid x > 16\} = \{21\}$. 因此，根据命题 6.7，我们可以断定 S 是一个 MR-半群。

7 由有限个数值半群生成的比率余簇

一般而言，比率余簇的交集并非比率余簇。事实上，若 S 和 T 是数值半群，且满足 $S \neq T$，那么 $\mathscr{R}_1 = \{S\}$ 和 $\mathscr{R}_2 = \{T\}$ 是比率余簇。然而，$\mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2 = \emptyset$并非比率余簇。

下面的结果可以直接证明。

引理 7.1. 若 $\{\mathscr{R}_i\}_{i\in I}$ 是比率协变类族，且对每个 $i \in I$，均有 $\min(\mathscr{R}_i) = \Delta$，则 $\cap_{i\in I}\mathscr{R}_i$ 是一个比率余簇。

设 m 和 F 是正整数，满足 $m < F$ 和 $m \nmid F$，则记 $\mathscr{A}(F, m) = \{S \mid S$ 是一个数值半群，$\mathrm{F}(S) \leq F$ 且 $\mathrm{m}(S) = m\}$.

下面结果的证明很简单。

引理 7.2. 按照上述记号， $\mathscr{A}(F, m)$ 是一个比率余簇，且其最小元为 $\Delta(F, m)$。

下一个引理可以直接证明。

引理 7.3. 设 S_1、$\cdots$、S_k 是重数为 m 的数值半群，且 $F = \max\{\mathrm{F}(S_1) \cdots, \mathrm{F}(S_k)\}.$。那么 $\{S_1, \cdots, S_k\} \subseteq \mathscr{A}(F, m)$。

设 $\{S_1, \cdots, S_k\}$ 是一个重数为 m 的数值半群有限集，且 $F = \max\{\mathrm{F}(S_1)$ $\cdots$，$\mathrm{F}(S_k)\}$.。那么我们用 $\langle S_1$、 $\cdots$、 $S_k\rangle$ 表示所有包含集合 $\{S_1, \cdots, S_k\}$ 的比率协变类的交集，它们以集合 $\Delta(F, m)$ 为最小元。

注意， $\mathscr{A}(F, m)$ 是一个具有上述特征的比率余簇。接下来，应用引理 7.1，我们得到以下结果。

命题 7.4. 若 $S_1, \cdots, S_k$ 是重数为 m 的数值半群，且 $F = \max\{\mathrm{F}(S_1) \cdots, \mathrm{F}(S_k)\}$，则 $\langle S_1, \cdots, S_k\rangle$ 是包含集合 $\{S_1, \cdots, S_k\}$ 且以集合 $\Delta(F, m)$ 为最小元的最小比率余簇。

我们将 $\langle S_1, \cdots, S_k\rangle$ 称为由 $\{S_1, \cdots, S_k\}$. 生成的比率余簇。接下来，我们的目标是给出一种算法，以便计算 $\langle S_1, \cdots, S_k\rangle$. 的所有元素。

对于每个 $i \in \{1, \cdots, k\}$，递归定义以下序列：

- $S_i^0 = S_i$,
- $S_i^{n+1} = \begin{cases} S_i^n \backslash \{\mathrm{r}(S_i^n)\} & \text{if } S_i^n \neq \Delta(F, m), \\ \Delta(F, m) & \text{otherwise.} \end{cases}$

以下结果的证明是显然的。

引理 7.5. 对于每个 $i \in \{1, \cdots, k\}$，存在 $P_i = \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_i^n = \Delta(F, m)\}$.

对于所有 $i \in \{1, \cdots, k\}$，集合 $\Omega(S_i) = \{S_i^0, \cdots, S_i^{P_i}\}$.。注意到 $\Delta(F, m) = S_i^{P_i} \subsetneq S_i^{P_i - 1} \subsetneq \cdots \subsetneq S_i^0 = S_i$，并且对于每个 $n \in \{0, \cdots, P_i - 1\}$.， $\sharp(S_i^n \backslash S_i^{n+1}) = 1$。

在下一个命题中，我们给出先前所述的算法步骤。

命题 7.6. 设 $S_1, \cdots, S_k$ 为重数为 m 的数值半群，且 $F = \max\{\mathrm{F}(S_1) \cdots,$ $\mathrm{F}(S_k)\}$. 那么 $\langle S_1, \cdots, S_k\rangle = \{\bigcap T_b \mid \emptyset \neq B \subseteq_{b \in B}$

$\{1, \cdots, k\}$ 和 $T_b \in \Omega(S_b)$，对于所有 $b \in B\}$.
证明。为了证明该命题，只需注意到 $\mathscr{R} = \{\bigcap T_b \mid \emptyset \neq_{b \in B}$

$B \subseteq \{1, \cdots, k\}$ 且对于所有 $T_b \in$ ， $\Omega(S_b)$都是一个比率余簇，其最小元素为 $b \in B\}$ (Δ,F)。显然， $\min(m)$ $\mathscr{R}(= \Delta,F)$。此外，很容易证明，属于$\Omega(m)$的两个元素的交集也是$\Omega(S_i)$的一个元素。因此， S_i中两个元素的交集仍是 $\mathscr{R}$ 的一个元素。接下来证明，若 $\mathscr{R}$. 且 $T \in \mathscr{R}(\ T \neq \Delta,F)$，则 $m\mathrm{r}(\ T\backslash\{\}T$。事实上，若$\} \in \mathscr{R}.$，则存在$T \in \mathscr{R}$，并且存在 $\emptyset \neq B \subseteq \{1, \cdots, k\}\,\Omega(\ T_b \in)$，对于所有$S_b$，使得$b \in B$ 。由于$\mathrm{r}(T = \bigcap T_b.\ )\,T$，因此对于所有 $\in T$， $\mathrm{r}(T)\ \in S_b$ 。对于 $b \in B.$ ，

对每个 $b \in B$，记 $T_b' = \Delta(F, m)$ 为 $\cup\{x \in T_b \mid x > \mathrm{r}(T)\}$.。可验证，对于所有 $b \in B$， $T\backslash\{\mathrm{r}(T)\} = \bigcap T_b'$. 均有 $T_b' \in \Omega(S_b)$。因此， $T\backslash\{\mathrm{r}(T)\} \in \mathscr{R}_{b \in B}$ □

由命题 7.6 可得以下结果。

推论 7.7. 如果 S 是一个数值半群，那么 $\langle S\rangle$ =Rat-Cad(S)。

最后，我们通过一个例子来说明命题 7.6 的内容。

例 7.8. 设 $S_1 = \langle 5,\ 7,\ 9\rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \to\}$ 和 $S_2 = \langle 5,\ 6,\ 8\rangle = \{0, 5, 6, 8, 10, \to\}$. 那么 $13 = \max\{\mathrm{F}(S_1),\ \mathrm{F}(S_2)\}$，因此 $\Omega(S_1) = \{S_1, S_1\backslash\{7\}, S_1\backslash\{7, 9\},\ S_1\backslash\{7, 9, 12\}\}$，且 $\Omega(S_2) = \{S_2, S_2\backslash\{6\}, S_2\backslash\{6, 8\}, S_2\backslash\{6, 8, 11\}, S_2\backslash\{6, 8, 11, 12\},\ S_2\backslash\{6, 8, 11, 12, 13\}\}$。应用命题 7.6，我们得到

$$\langle S_1, S_2\rangle = \Omega(S_1) \cup \Omega(S_2) \cup \{T_1 \cap T_2 \mid T_1 \in \Omega(S_1) \text{ and } T_2 \in \Omega(S_2)\}.$$

参考文献

[1] S. S. Abhyankar，《高嵌入维数的局部环》，《美国数学杂志》89（1967），1073-1077。

[2] R. Apéry，关于代数曲线的超线性分支，《巴黎科学院院报》222（1946），1198–2000。[3] V. Barucci D. E. Dobbs and M. Fontana，数值半群中的极大性及其在一维解析不可约局部整环中的应用，《美国数学会回忆录》598（1997）。[4] V. Blanco and J. C. Rosales，具有固定重数的数值半群集合中的不可约性，《国际代数与计算杂志》21（2011），731–744。[5] M. B. Branco I. Ojeda and J. C. Rosales，给定重数和弗罗贝尼乌斯数的数值半群集合，《葡萄牙数学》78（2021），第2期，147–167。[6] W. C. Brown and J. Herzog，极大长度和近极大长度的一维局部环，《代数杂志》151，332-347。[7] M. Delgado P.A. García-Sánchez J. Morais，NumericalSgps：数值半群软件包，1.3.1版（2022），（经审阅的GAP软件包），https://gap-packages.github.io/numericalsgps。[8] R. Fröberg G. Gottlieb and R. Häggkvist，关于数值半群，《半群论坛》35（1987），63–83。[9] GAP 群，GAP——群、算法与编程，4.12.2版，2022，https://www.gap-system.org。[10] E. Kunz，一维戈伦斯坦环的值半群，《美国数学会会刊》25（1973），748–751。

[11] M. A. Moreno-Frías and J. C. Rosales, 具有固定弗罗贝尼乌斯数的数值半群协多样体, https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.09121
[12] M. A. Moreno-Frías and J. C. Rosales, 具有固定弗罗贝尼乌斯数的Arf数值半群集合, 即将在《土耳其数学杂志》发表。
[13] J. L. Ramírez Alfonsín, Frobenius问题的复杂性, 16（1996）, 143-147。https://doi.org/10.1007/BF01300131
[14] J. L. Ramírez Alfonsín, 丢番图Frobenius问题, 牛津大学出版社, 伦敦（2005）。[15] J. C. Rosales and M. B. Branco, 可表示为对称数值半群交集的数值半群, 《纯粹与应用代数杂志》171（2002）, 303–314。
[16] J. C. Rosales and M. B. Branco, 不可约数值半群, 《太平洋数学杂志》209（2003）, 131–143。
[17] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez, 数值半群, 《数学发展丛书》第20卷, 施普林格, 纽约, 2009。[18] J. D. Sally, 极大嵌入维数的Cohen-Macaulay局部环, 《代数杂志》56（1979）, 168-183。
[19] J. J. Sylvester, 数学问题及其解答, 《教育时报》41（1884）, 21。