arXiv:2305.02080v1 [cs.RO] 3 May 2023

基于期望最大化的高速公路噪声多路径车队数据高精地图生成

Fabian Immel[1], Richard Fehler[1],MohammadM. Ghanaat[2],Florian Ries[2],Martin Haueis[2] 和 Christoph Stiller[3]

摘要—高精地图对于许多自动驾驶（AD）应用都不可或缺，但人工创建和维护高精地图的成本非常高。量产车辆的车队数据可用于自动生成高精地图，但这些数据往往不完整且含有噪声。我们提出了一种利用车队数据生成高精地图的系统，该系统能够容忍缺失或误分类的检测结果，并可处理包含多条路线的行驶数据，从而生成一张完整的地图，无需模型，也无需预先提供参考线。系统随机选择行驶轨迹作为枢轴行驶轨迹，并逐步对检测结果进行横向采样。随后，系统使用期望最大化算法（EM）对采样得到的点进行聚类和对齐，为每段行驶数据估计横向偏移，以补偿定位误差。接着，用其概率密度函数（PDF）的极大值替换聚类后的点，并使用改进的矩形线性分配算法将其连接成折线。最后，将行驶路线各异的车辆数据融合到分层单一地图图中。与人工标注的真实地图相比，所提出的方法实现了低于 0.5 米的平均精度，并能正确解析车道分叉与合流，证明了利用车队数据生成高速公路高精地图的可行性。

索引词— **高精地图生成、车队数据、自动驾驶（AD）、期望最大化算法（EM）。**

I. 引言

高精地图（HD maps）是许多自动驾驶应用不可或缺的组成部分 [1]。与标准精度地图（SD maps）相比，高精地图包含有关道路的更详细、更准确的信息，例如精细的道路边界信息以及精确到厘米级的车道标线信息。

自动驾驶广泛普及的一大障碍在于高精地图的生成与更新过程繁琐且成本高昂，因为通常需要使用配备多种传感器的专用车辆，例如高精度 GNSS、激光雷达和摄像头。仅依靠专业测绘车辆为大型高速公路网络创建和维护高精地图，需要投入大量精力和资金。

由于当前系列汽车中驾驶辅助系统已得到广泛普及，因此可以获取大量车道标线和道路边界数据。利用这些数据生成高速公路网络的高精地图，能够支持各种系统，并大幅降低维护成本。

[1]德国卡尔斯鲁厄信息技术研究中心（FZI）{immel, fehler}@fzi.de[2]德国辛德尔芬根梅赛德斯-奔驰股份公司研发部 {mohammad.m.ghanaat, florian.ries, martin.haueis}@mercedes-benz.com[3]德国卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）测量与控制系统研究所stiller@kit.edu

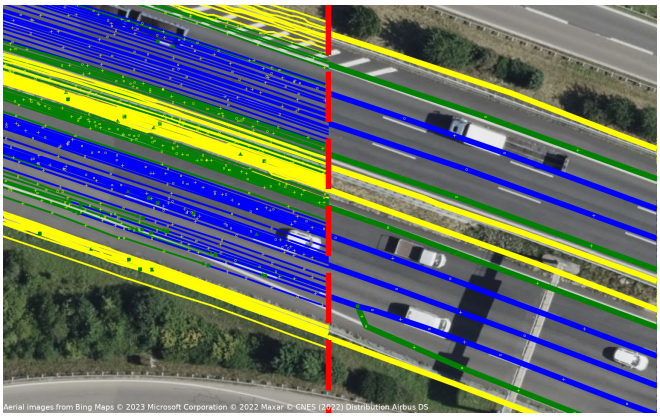


图 1：德国高速公路上的制图结果（右），叠加显示输入数据（左）。图中显示了道路护栏（黄色）、虚线（蓝色）和实线（绿色）。

高精地图可根据新的车队数据自动生成更新。

然而，处理这些车队数据存在若干问题，需要对各项检测结果进行汇总和融合。此外，所检测特征的精度和完整性不及专业制图车辆采集的数据。量产车辆级 GNSS 系统的定位不准确，以及道路特征检测结果的缺失（有时在行驶的大部分路段上都如此），都使得这种汇总和融合更加困难。

本文提出并评估了一种高精地图构建流程框架，其结果示例见图 1。该框架能够接收车队数据，其中包含不完整、部分分类错误且精度不足的车道线和道路边界检测结果，并以相连折线的形式生成物理道路特征的高精地图。

图 2 展示了所提出的地图生成流程概览。输入数据为单次行驶轨迹中相互连接的车道标线检测结果（第 III 节），沿随机选择的枢轴行驶轨迹进行处理：在横向交线（第 IV-A 节）上对检测到的点进行采样。随后，使用 k-means 对自车道路上的采样点进行聚类，并通过估计每次行驶的定位偏移量将其对齐，再利用期望最大化算法（第 IV-B 节）进行迭代优化。将聚合后的点替换为其概率密度函数的极大值（第 IV-C 节），并将这些极大值连接起来形成折线（第 V 节）。为连接连续采样步骤中的点，采用修改后的匈牙利算法来寻找所有概率密度函数极大值之间的最优连接——

©2023 IEEE。允许将本材料用于个人用途。对于任何其他用途，均须事先获得 IEEE 的许可，无论采用何种当前或未来的媒体形式，包括为广告或宣传目的而重印或再版本材料、创作新的合集作品、转售或重新分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品的任何受版权保护的组成部分。

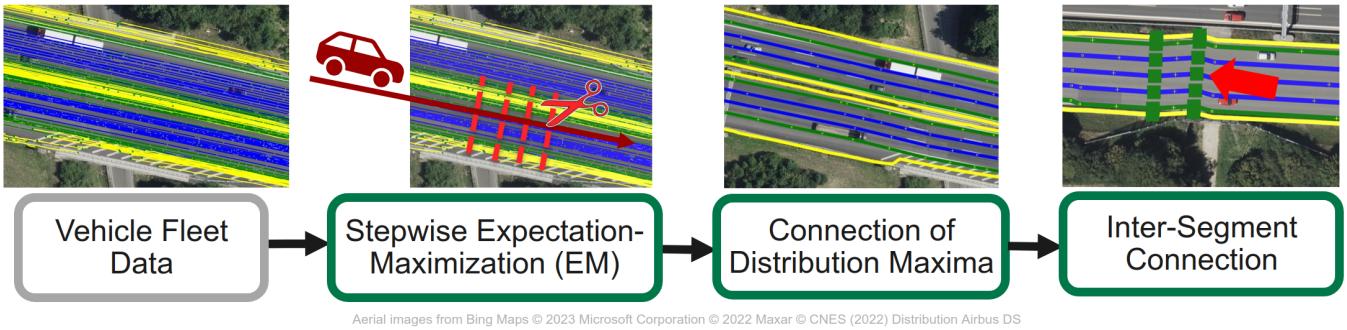


图 2：地图生成流程概览流程图。输入数据见第 III 节，分步期望最大化算法见第 IV 节，分布最大值的连接见第 V 节，路段间连接见第 VI 节。红色箭头表示路段间连接的连接点。

关系。由此得到的修改版连接算法能够处理车道分流与合流。沿其路线访问同一道路路段的枢轴行驶轨迹将被跳过，从而减少计算时间。

随后，将不同连通路段的数据（例如来自行驶于不同路线的车辆的数据）整合到分层单一地图图中（第 VI 节）。

本工作的主要贡献可总结如下：

- 一种新颖的端到端高精地图生成处理流程，可处理道路特征检测结果不完整、部分分类错误且不准确的车队数据。
- 一种无需预先提供参考线、用于聚合和融合检测到的车道标线及道路边界的无模型方法。
- 一种基于图的方法，用于连接融合后的检测结果，能够处理车道分流与合流，并将不同路线的多个连通路段整合到分层单一地图图中。

II. 相关工作

利用众包数据或车队数据自动生成地图一直是一个受到长期研究关注的课题。

大量研究致力于利用车辆行驶轨迹作为输入数据，生成 SD 地图和道路网络。许多方法可以分为三类[2]：基于 k-means 的方法 [3], [4], 、基于核密度估计（KDE）的方法 [5], [6]以及基于轨迹合并的方法 [7], [8]。这些方法的一个共同点是，由于缺乏有关道路物理特征的数据，它们仅关注与 SD 地图类似的基本道路几何形状。

随着车辆中高级驾驶辅助系统的日益普及，人们对高精地图的兴趣以及车队数据中物理道路特征数据的可用性均有所增加。这促使了大量利用多次行程数据生成高精地图的研究。诸如 [9], [10] 的视觉方法假设可以访问车辆记录的视频数据。 [9] 使用单摄像头图像进行视觉 SLAM，以生成道路特征元素的三维边界。 [10] 描述了一种系统，该系统能够在单次行驶过程中检测道路特征，然后通过束调整处理流程融合这些行驶数据。

从概念上讲，与本文提出的方法最为接近的是 [11]–[13], ，因为它们均使用经过预处理的道路边界和车道标线检测结果作为输入。 [11] 通过对检测到的左侧道路边界进行分组和聚合来校正检测出的车道边界，随后利用 k-means 聚类对校正后的检测结果进行融合。 [12] 使用未连接的道路特征点测量值和车辆行驶轨迹来构建图优化 SLAM，并对各连接关系进行聚合。 [13] 同样采用图优化 SLAM，但通过使用波束搜索策略选取的道路模型，对各个独立的检测结果进行融合。

上述针对已处理检测结果的系统，普遍侧重于车道基本不变的简单高速公路路段。其他要求包括使用外部参考线 [12],、始终具备的特征检测结果 [11] ，或仅包含单条链路序列 [13]。文献中尚未解决的重要问题还包括包含多条路线的数据集，以及将生成的地图补丁连接成完整地图。

III. 输入数据

该算法以车队的一组行驶数据作为输入，其中包含行驶轨迹及相应的道路特征检测结果。重要的是，这些行驶数据可能属于高速公路网络中的不同路线，且道路特征检测结果可能较为稀疏或部分存在误分类；定位结果也可能仅来自系列级定位，且误差较大。假设属于同一道路特征的检测点已连接成折线，但这些折线不必完整，其连接可能存在间隙，也可能存在误分类。预处理时，会移除长度小于 3 米的检测折线，因为这类检测极有可能是误检；随后使用 Ramer-Douglas-Peucker 算法减少其余折线中的点数。

随后将得到的检测折线插入轴对齐包围盒树 [14], ，这是一种类似于 kd 树、用于处理形状而非单个点的数据结构。我们利用该数据结构，在 IV-A 期间高效查找检测折线。

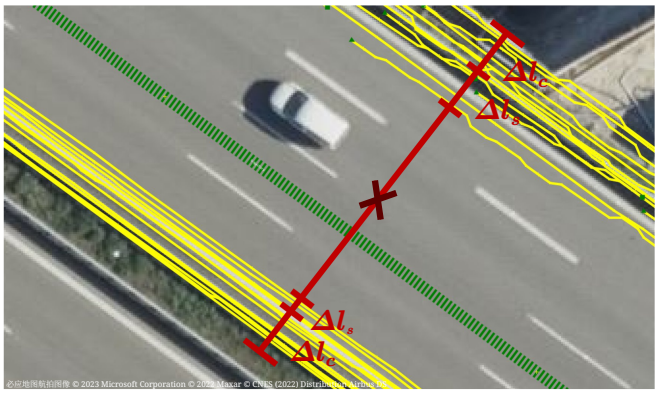


图 3：优化后的切割线计算可视化。绿色显示枢轴行驶轨迹，黄色显示经过滤波的道路边界检测结果，红色显示切割线。线宽根据与最近道路边界检测结果的距离，加上取决于检测结果分布的边距 Δl_s 以及固定边距 Δl_c 计算得出。重新计算的切割线中点以十字标记。

IV. 逐步期望最大化算法

A. 检测点的逐步横向采样

为避免对能够提供道路基本形状的参考线的依赖，检测结果沿枢轴行驶轨迹进行处理。从行驶轨迹集合中随机选择一条枢轴行驶轨迹，直至所有轨迹均处理完毕，并沿其轨迹按照行驶方向以较小的固定步长（例如 2 m）对检测结果进行采样。以轨迹点为中点构建一段横向切割线，并对其与检测结果折线的交点进行采样。枢轴行驶轨迹的目的仅在于为道路走向提供一个非常粗略的参考，并实现对检测结果的横向采样。根据相应轨迹的航向信息，移除来自相反道路行驶方向的行驶轨迹的采样检测结果。

横向采样的目标是获取属于枢轴行驶自车道路的所有检测结果。可是，道路宽度事先未知，也无法根据不完整的枢轴行驶检测结果推断。因此，初始切割线段的长度固定为平均高速公路宽度的数倍，以确保纳入所有相关检测结果。由于数据中预计包含来自多条不同路线的行驶轨迹，因此有必要优化初始切割线段，并据此筛选采样得到的检测点，以确保只纳入属于自车道路的检测结果。

借助采样得到的检测结果完成这一步细化，其可视化结果如图 3 所示。根据从原始中点向横向两侧遇到的第一条道路边界，计算一条新的截线；截线的起点和终点会根据遇到的第一条道路边界检测结果的分布范围延伸Δl_s 。这样可以初步估计自车道路的宽度，并额外加入一个固定边距 Δl_c，以便仍能纳入含噪的检测结果。长度和中点新截线段的长度和中点分别通过移动平均滤波器进行平滑：前者采用对较旧数值赋予递减权重的滤波器，后者采用常规移动平均滤波器。这样即使在缺少道路边界检测结果的路段，也能估计道路宽度。随后再次使用新的截线对检测结果进行采样。

B. 使用期望最大化算法估计横向偏移

图 4a 展示了横向校正前采样检测点的分布。检测结果分布范围很大，因此需要进行校正，才能合理地聚合测量值。因此，我们尝试最小化不同次行驶之间的对齐误差，并假设行驶定位误差是未对齐的主要来源，而非单次测量噪声。基于这一假设，我们为每次行驶估计一个横向偏移，以校正定位误差。这意味着，属于同一次行驶的所有检测点只能沿同一方向移动相同的偏移量。

由于检测结果的共参考（即将检测结果分配给同一道路特征）与横向偏移估计相互依赖，我们采用迭代式EM方法。首先，按类型拆分检测结果，并使用k均值算法进行聚类，以轮廓系数作为簇数量的选择标准。我们注意到

$$\mathbf{o} = (o_1, o_2, \ldots, o_m) \tag{1}$$

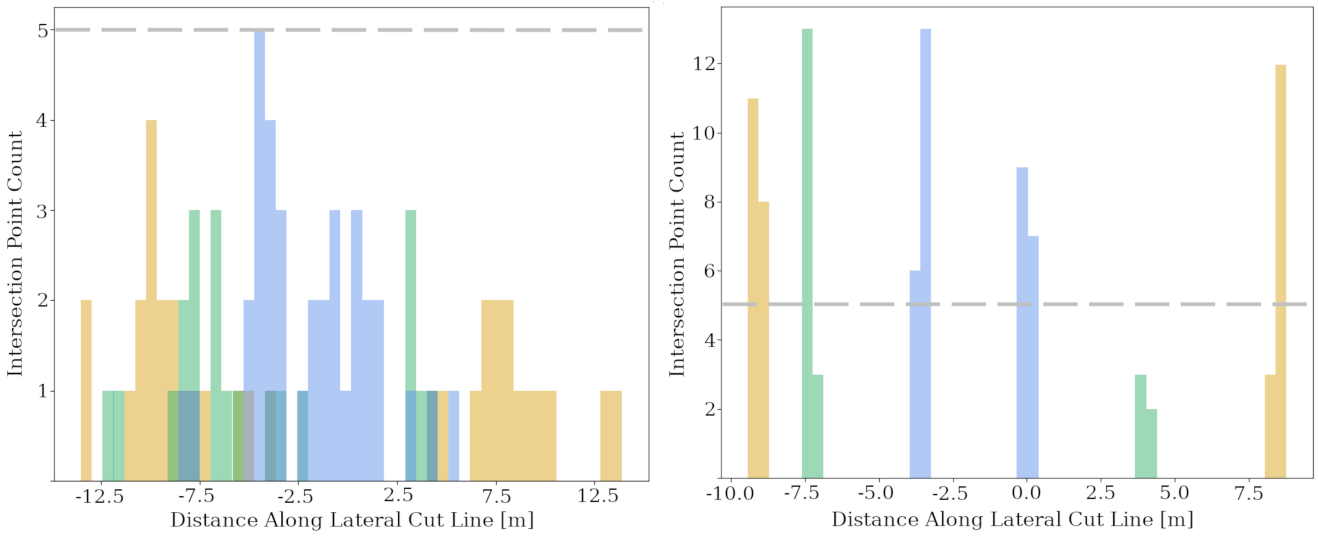
作为 m 行驶偏移量的向量，每次行驶对应一个偏移量，所有偏移量均使用切线向量进行参数化。随后，通过最小化下方给出的代价函数，估计每次行驶的横向偏移：

$$\mathbf{o_{opt}} = \arg\min_{\mathbf{o}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(c_i\left(\mathbf{o}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\left(\mathbf{o}\right)\right) \tag{2}$$

$$f\left(c_i\right) = e^{-s \cdot d_{min}{}^2} \tag{3}$$

其中，$\mathrm{Var}(c_i\,(\mathbf{o}))$ 表示使用 $\mathbf{o}$ 校正后的簇的方差。 $f\,(c_i)$ 描述了一个惩罚函数：当与最近的同类型簇之间的距离较小时，该函数值会增大；还可通过参数 s 根据预期车道宽度进行调整。上述优化问题可使用任意非线性最小二乘算法求解，例如 Levenberg-Marquardt算法。最后，使用新的偏移量对检测结果重新聚类，并按固定的迭代次数重复这一过程。

图 4b 展示了对图 4a 中的点进行 EM优化后的结果，说明如何对分布范围较大的重叠检测簇进行对齐和分离，同时也表明定位误差是未对齐的主要来源。通过轮廓系数对优化结果进行评分，低于 0.67 阈值的结果会被拒绝，并跳过相应的采样步骤，以防止错误聚合的点被用于处理流程的后续步骤。此外，还会校正优化结果相对于实际道路形状可能产生的漂移，方法是将优化后的道路中点与优化前的道路中点对齐。



(a) 横向校正前　　(b) 横向校正后

图 4：基于 EM 的横向校正前后采样检测点的直方图。道路边界采样点以黄色显示，虚线车道标线采样点以蓝色显示，实线车道标线采样点以绿色显示。

通过将优化后的道路中点与优化前的道路中点对齐，修正优化结果与实际道路形状之间的偏差。

C. 聚类检测点的聚合

完成第 IV-B 节后，我们得到了一组经过聚类和对齐的检测点。为了聚合单个簇的测量值，我们使用核密度估计来估算其概率密度函数。核密度估计采用高斯核，带宽设为该簇标准差的 6 倍。随后，将属于同一簇的检测点替换为估算出的概率密度函数的最大值。如果存在道路特征检测结果的误分类，不同簇的估算概率密度函数可能会相互重叠，这可用于滤除这些误分类。如果两个概率密度函数的重叠区域超过特定阈值，则移除检测点数量较少的簇。

现在，每个概率密度函数的计算最大值点都代表单个道路特征的聚合检测结果。对于检测结果纳入优化的每次行驶，我们都会保存这些点，并以相应行驶轨迹上的行驶距离作为键。借助这些信息，对于已在另一次枢轴行驶中处理过的行驶，无需再次计算其上的点，从而节省大量计算时间。本节所述的整个过程会针对输入数据中的每次行驶重复执行。

V. 分布最大值的关联

利用相关枢轴行驶以及自车道路的横向采样所提供的上下文信息，将任意点集连接起来以形成具有语义意义的折线这一难题可以大幅简化。由于我们知道点集的顺序遵循行驶轨迹，因此可以推断，聚合后的点集也必须彼此连接。因此，寻找折线这一困难问题可以分解为寻找相邻点集之间的最优连接，这对于二分图而言是一个矩形线性指派问题。利用 [15], 中所述的算法，通过点之间的距离可以高效地解决这一问题

将相反集合中的点作为边权重。

然而，该算法不允许分配剩余节点；在车道分流与合流处，二分图两侧的点数可能不相等，因此会出现剩余节点。为解决这一问题，我们采用该算法的改进版本，将剩余节点分配给二分图另一侧的最近邻。这种方法可以近似表示道路标线中常见的拓扑连接。

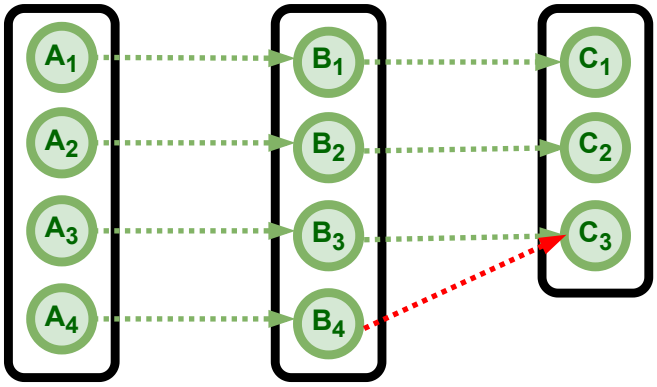


图5：所用改进型矩形分配算法 [15]的分配示例。剩余节点 B_4 被分配给其最近的二分图邻居 C_3。

图 5 展示了修改后算法的一个示例，其中未修改的算法得到的分配结果

如绿色箭头所示，节点 B_4 未被分配。修改后的算法将剩余节点分配给二分图另一侧与其最近的邻居，将节点 B_4 分配给节点 C_3，如红色箭头所示。

该过程会针对每个点集依次执行，通过为每个二分图设置平均连接角度阈值来筛除不合理的优化结果，同时防止将不同类型的检测结果连接到道路边界。如第 IV-B 节所述，优化失败可能导致某些图块中没有聚合检测结果；如果距离低于给定阈值，则可以通过连接到下一个有效点集来弥合这些图块。

为了从计算得到的图边中提取折线，需要维护一组开放和闭合的折线。在行驶起点处创建折线，并在以下条件下将其闭合，同时开启一条新的折线：

- 连接边连接两个类型不同的检测点，例如一条虚线和一条实线。
- 该连接是在常规矩形指派算法之后建立的（剩余节点，如图 5 中的 B_4 to nodeC_3 inFig.5）
- 两个检测点集之间的距离超过了给定的阈值。当优化未能为较长的道路路段找到解决方案时，可能会发生这种情况。
- 我们到达了一个由不同枢轴行驶处理过的路段。

VI. 路段间连接

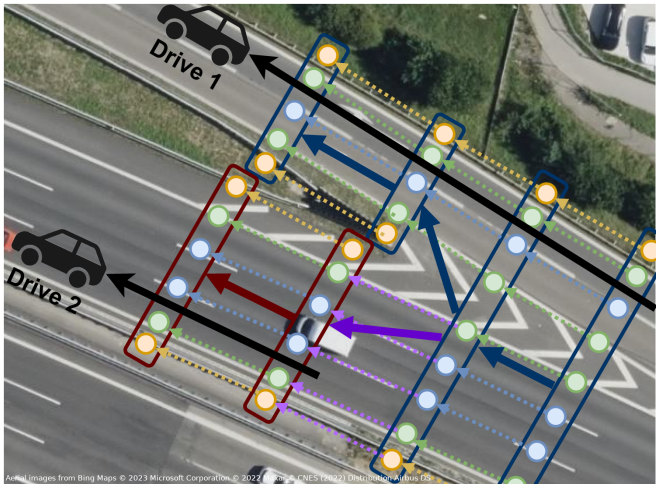


图 6：用于拼接地图路段的分层图结构示意图。高层拓扑图（蓝色/红色）包含道路拓扑信息，而低层道路特征图（彩色节点）包含实际的道路特征折线。两个图中的节点彼此包含对方的引用。来自不同次行驶的两个路段（蓝色和红色）可以按照紫色边所示进行拼接。

第 V 节的结果是每次行驶都生成各自独立的连通路段。这些路段会拼接成一张完整的地图，该地图采用分层图结构，由高层拓扑图和低层道路特征图组成。第 V 节会为每个路段创建这种结构，也会为最终的完整地图图创建这种结构。

图 6 展示了该结构的示意图。拓扑图中的节点以红色和蓝色矩形表示，每个第 IV-A 节中的采样步骤都会创建一个节点；节点包含其位置处的道路中点，以及对该步骤聚合检测点的引用。拓扑图类似于常规 SD 地图，因为它包含高层道路拓扑信息。低层道路特征图（图 6 中的小圆圈）包含实际的道路特征折线，这些折线由连接拓扑图节点的聚合检测点生成。要将一次新的行驶结果插入完整图中（紫色箭头所示），需要执行以下步骤：

1) 将行驶拓扑图拆分为多个连通分量。连接中断可能发生在已由另一条枢轴行驶路线处理过的路段中。2) 提取连通分量的起点和终点，并使用 kd 树在完整拓扑图中找到它们最近的邻居节点。3) 通过检查距离和连接角度，验证是否可以连接到邻居节点。4) 如果验证成功，则将与邻居节点的连接添加到完整拓扑图中，并利用拓扑节点中引用的低级节点连接低级道路特征折线。连接折线的方法如第 V 节所述，此外，仅连接相同道路特征类型的节点，并使用未修改版本的矩形指派算法 [15]。

此处提出的系统可用于创建涵盖整个高速公路网络的地图，包括出口匝道和入口匝道，也可使用新测绘的路段更新现有地图。

VII. 评估

为评估所提出系统的性能，我们使用了一个车队数据集，其中包含德国斯图加特附近一段高速公路上 134 段行驶片段的数据。该路段由两个方向相反的高速公路方向组成，总长 29.1 km，包括高速公路出口和入口匝道。

A. 真实值数据集

我们通过将生成的地图与根据卫星影像人工标注的真实值数据集进行比较，评估其横向误差。真实值数据经多个影像来源验证，并剔除了近期施工导致无法准确标注真实值的高速公路路段，以供评估。标注折线的总长度为 204 公里。车队数据存在方向偏倚，其中一个方向的行驶次数更多，这一点在图 7 的前 15 公里范围内尤为明显。

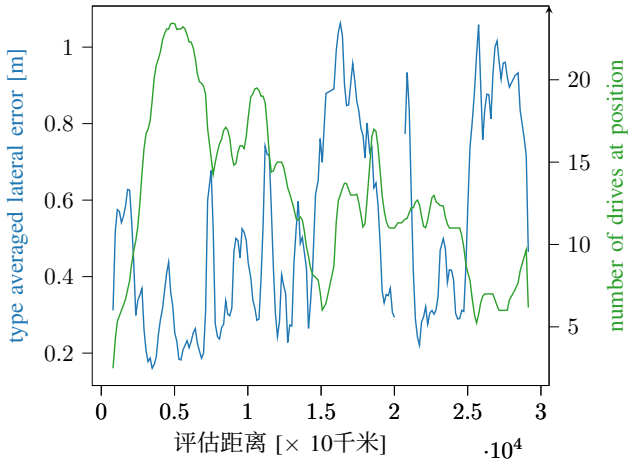


图7：行驶距离上的平均横向误差与数据集中经过该位置的行驶次数之间的关系。为便于清晰观察，该数据经过滑动窗口低通滤波器处理。行驶次数与总误差呈负相关。

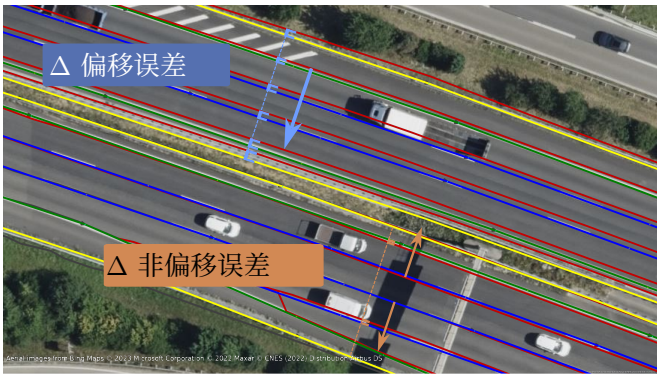


图8：评估指标的可视化结果。带有道路边界的真实值以黄色显示，虚线以蓝色显示，实线以绿色显示。地图结果以红色显示，不进行类型颜色编码。由定位误差引起的偏移误差用蓝色箭头表示。由于这些误差与所评估数据集中某些路段的少量行驶次数有关，我们还评估了偏移校正误差。橙色显示了一个剩余的、无法校正的非偏移误差样本。

生成的真实值还提供了一条参考线和一个感兴趣区域，以便与优化步骤中枢轴行驶轨迹的采样和切割线细化进行比较。与第 IV 节类似，沿参考线每隔两米计算一条横向切割线。该切割线受感兴趣区域边界限制，并据此提取结果地图和真实值数据中所有与之相交的折线。我们将制图结果中的交点与最近的真实值点关联，并针对每种地图特征类型计算测量值与真实值之间的距离。本节余下部分将探讨影响横向距离误差的因素。

B. 评估指标

由于测量数据中的纵向要素稀疏，评估指标仅限于横向行驶方向上的误差。我们按照第IV-B节所述评估横向优化结果。横向误差由两部分组成：由未补偿的定位误差导致的横向偏移误差，以及剩余的非偏移误差；后者与行驶次数的相关性较低。这一现象可见于图9。计算非偏移误差时，首先计算一个偏移量 o，并将其同时应用于所有制图点，使其与真实位置相比的总误差最小。剩余误差称为偏移校正误差，在图9和图10中以橙色显示；蓝色则表示总误差。在实际应用中，无法进行这种基于真实值的偏移校正，因此经过制图位置的行驶次数应保持远高于18次。

C. 评估结果

在行驶次数较多且高速公路结构简单的最佳情况下，该方法所能达到的横向精度总误差低于平均 0.30 米。对所有评估位置取平均值（包括已制图出口、入口匝道和所有地图要素类型），得到平均 总误差为 0.49 米。如图8所述，平均绝对偏移误差为 0.41 米。在此理论场景下，校正该偏移误差后，所有评估位置的平均 误差可达到 0.27。随着行驶次数增加，偏移校正误差与实际误差逐渐趋同，如图9所示。

由于有多条路线穿过评估的高速公路路段，参考线沿线各点的行驶次数各不相同。图7通过展示评估距离上的行驶次数与横向误差，说明了这一点。图9进一步考察了地图上某个位置的行驶次数与横向误差之间的关系。由于并非始终都能满足有效结果的优化阈值判据，例如经过某些高速公路出口和匝道时，因此评估仅能覆盖真实值参考线距离的约90%。

VIII. 结论

在本研究中，我们提出了一种面向车队数据的高精地图构建流程系统，该系统使用经过处理的传感器检测结果，使该方法能够扩展到大型车队。该系统能够容忍缺失或误分类检测结果，并可处理包含多条路线的驾驶数据，从而生成一张完整的地图；该方法无需模型，也不需要预先给定参考线。

该处理流程随机选取行驶轨迹作为枢轴行驶轨迹，并沿这些轨迹对检测结果进行逐步横向采样。随后，使用 k-means 和期望最大化算法对采样得到的点进行聚类和对齐，估算每条行驶轨迹的横向偏移，以补偿定位误差。将聚合后的点替换为其概率密度函数的最大值，并使用改进的矩形

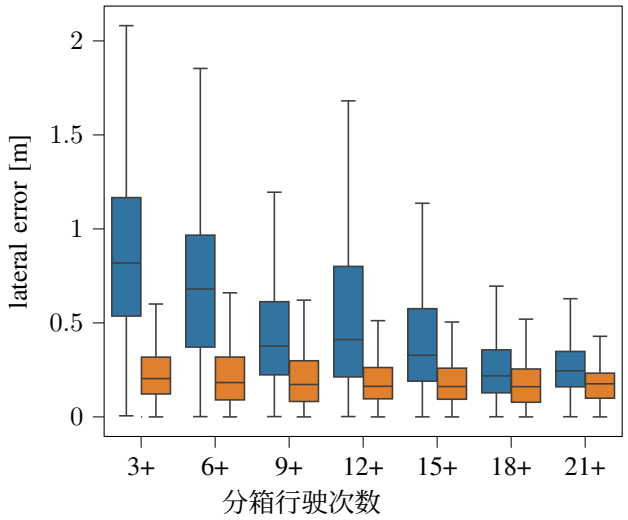


图9：展示某一位置横向误差随该位置行驶次数变化的统计箱线图。总横向误差以蓝色显示，偏移校正误差以橙色显示。随着行驶次数增加，定位偏移造成的误差会减小。所有箱线图的须线均延伸至四分位距的1.5倍处。

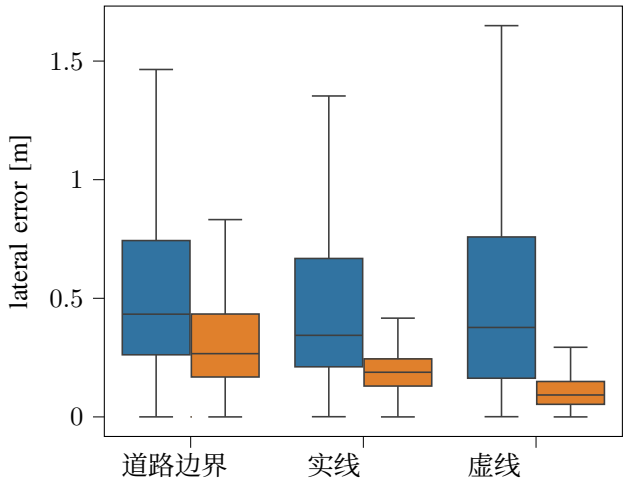


图10：按特征类型划分的横向误差。观测到的误差很大程度上取决于地图特征类型，这主要是由于可用道路边界特征的精度各不相同。总横向误差以蓝色显示，偏移校正误差以橙色显示。此图未区分行驶次数。

线性分配算法将其连接成折线。随后，将不同连通路段的数据（例如来自行驶路线各异的车辆的数据）整合到分层单一地图图中。

与人工标注的真实地图相比，所提出的方法达到了低于0.5米的高精度，并能正确解析车道分流与合流，证明了利用系列车队数据生成高速公路高精地图的可行性。未来，我们希望提高算法在复杂场景中的可靠性，并纳入交通标志等其他特征，以校正纵向上的未对齐。

致谢

我们感谢梅赛德斯-奔驰股份公司提供本研究所用的车队数据。

参考文献

[1] J. Ziegler, P. Bender, M. Schreiber, H. Lategahn, T. Strauss, C. Stiller, 等人，“让 Bertha 驾驶——一次沿历史路线的自动驾驶之旅”，*IEEE*智能交通系统杂志，第6卷，第2期，第8–20页，2014年，ISSN: 1941-1197。[2] J. Biagioni 和 J. Eriksson，“从全球定位系统轨迹推断道路地图：综述与比较评估”，《交通研究记录》，第2291卷，第1期，第61–71页，2012年。电子版：https://doi.org/10.3141/2291-08。[3] S. Edelkamp 和 S. Schrödl，“基于全球定位轨迹的路径规划与地图推断”，载于《透视计算机科学：献给 *Thomas Ottmann* 的论文集》，R. Klein、H.-W. Six 和 L. Wegner 编。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2003年，第128–151页，ISBN：978-3-540-36477-1。[4] S. Schroedl、K. Wagstaff、S. Rogers、P. Langley 和 C. Wilson，“利用 GPS 轨迹挖掘进行地图细化”，《数据挖掘与知识发现》，第9卷，第59–87页，2004年。[5] J. Davies、A. Beresford 和 A. Hopper，“可扩展的分布式实时地图生成”，*IEEE*普适计算，第5卷，第4期，第47–54页，2006年10月，ISSN：1558-2590。

[6] W. Shi、S. Shen 和 Y. Liu，“基于海量 GPS 车辆轨迹自动生成道路网络地图”，载于*2009*年第*12*届*IEEE*智能交通系统国际会议，2009年10月，第1–6页。[7] L. Cao 和 J. Krumm，“从 GPS 轨迹到可路由道路地图”，载于第*17*届*ACM SIGSPATIAL*地理信息系统进展国际会议（*ACM SIGSPATIAL GIS 2009*），*2009*年*11*月*4*日至*6*日，美国华盛顿州西雅图，2009年11月，第3–12页。[8] B. Niehoefer、R. Burda、C. Wietfeld、F. Bauer 和 O. Lueert，“基于移动电话轨迹采集、用于改进路径规划方法的 GPS社区地图生成”，载于*2009*年第一届卫星与空间通信国际会议，2009年7月，第156–161页。[9] M. Herb、T. Weiherer、N. Navab 和 F. Tombari，“面向自动驾驶车辆的众包语义边缘制图”，载于*2019*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议（*IROS*），2019年11月，第7047–7053页。[10] O. Dabeer、W. Ding、R. Gowaiker、S. K. Grzechnik、M. J. Lakshman、S. Lee、等，“面向自动驾驶车辆众包三维地图的端到端系统：制图组件”，载于*2017*年*IEEE/RSJ*智能机器人与系统国际会议（*IROS*），2017年9月，第634–641页。[11] K. Massow、B. Kwella、N. Pfeifer、F. Häusler、J. Pontow、I. Radusch、等，“利用车辆探测数据生成用于高度自动化驾驶的高精地图”，载于*2016*年第*19*届*IEEE*智能交通系统国际会议（*ITSC*），ZSCC：0000042 ISSN：2153-0017，2016年11月，第1745–1752页。[12] C. Doer、M. Henzler、H. Messner 和 G. F. Trommer，“面向高速公路高度自动化驾驶的车队数据高精地图生成”，载于*2020*年*IEEE*智能车辆研讨会（*IV*），ZSCC：0000002 ISSN：2642-7214，2020年10月，第2014–2020页。[13] M. Liebner、D. Jain、J. Schauseil、D. Pannen 和 A. Hackelöer，“基于道路模型推断和基于图的同步定位与建图的众包高精地图补丁”，载于*2019*年*IEEE*智能车辆研讨会（*IV*），2019年6月，第1211–1218页。[14] K. A. Hart 和 J. J. Rimoli，“通过直接控制晶粒几何形状生成具有统计代表性的微观结构”，《计算机辅助力学与工程方法》，第370卷，2020年，ISSN: 0045-7825。[15] R. M. Karp，“一种以期望时间 o(mn log n) 求解 m × n 指派问题的算法”，《网络》，第10卷，第2期，第143–152页，1980年。电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/net.3230100205。