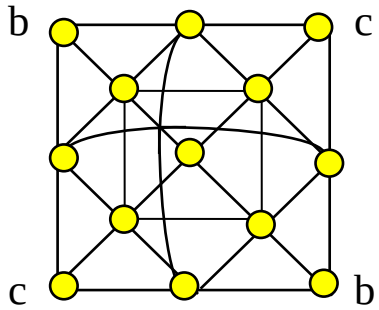
A. B. 伊瓦科

分子空间理论导论

A. V. Evako

分子空间理论导论



莫斯科 1999

УДК 681.5.01:512, 007.001.362, 519.1, 514, 515.1, 517.95, 530.1:51-72, И 17

伊瓦科 A. V., 分子空间理论导论：学术出版物。— 莫斯科：PAIMS出版社，1999年。— 12+338 页：插图。

本书以作者此前出版的《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》为基础，该书于1997年出版。书中详细介绍了分子空间，这种空间是多维连续对象的离散模型，旨在应用于计算机。本书对数学家、程序员、计算机图形创作者以及所有从事多维计算机图像工作的专业人士都很有帮助。所提出的模型不仅对物理学家具有研究价值，也可应用于生物学、化学及其他许多领域。本书面向广泛的读者群体，适合在工作中使用计算机的人士阅读。

叶尔科夫·A. V.《分子空间理论导论》：— 莫斯科：PAIMS 出版社，1999 年。— 12+338 页：插图。

本书以作者此前于1997年出版的著作《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域中的应用》为基础。本书介绍了分子空间，它们是连续多维对象的数字模型。本书对数学家、程序员、计算机图形学设计师以及所有从事多维计算机图像工作的专业人士都很有用。这些模型受到物理学家的关注，也可应用于生物学、化学及许多其他领域。本书面向广泛使用计算机开展工作的读者。

本书按作者原稿出版。

ISBN 5 -- 89574 -- 047 -- 2

© A. B. 伊瓦科，1999年 未经作者书面同意，不得以任何形式翻印或复制本书或其任何部分的内容。

© Al. V. Evako，1999 版权所有。未经作者书面许可，不得以任何形式或任何方式复制本书的任何部分。

分子空间理论导论。

分子空间理论（TMΠ）是数字拓扑的一个分支。它研究计算机运行过程中以及其内存中二维、三维和多维图形的生成、变化及其性质。随着计算机程序中开始使用各种用途的多维图形，人们相对较近才产生了建立数学理论的需求，以描述由有限数量元素构成的多维空间。

TMΠ的应用领域十分广泛。
首先，TMΠ 方法可应用于计算机图形学、模式识别、对象建模、动态运动表面的描述、科学研究与科学可视化，以及其他与计算机及其应用相关的领域。

在数学中，TMΠ 方法将在许多领域得到应用，包括拓扑、几何和微分方程理论。

TMΠ中研究的数字多维对象为物理学家提供了一个丰富多样的离散模型“动物园”，可用于描述物理真空和真实的物理空间。

TMΠ 的模型和方法可以成功应用于生物学、化学、医学、工业、军事等领域。

本书面向范围最广泛的读者，从数学家、程序员、物理学家、化学家、生物学家、医学、工业、军事和社会科学领域中在工作中使用计算机的专业人士，到高中高年级学生。

Alexander V. Ivako。

分子空间理论导论。

分子空间理论是数字拓扑的一个另类分支，研究如何在计算机及其内存中构建和修改二维、三维及 n 维数字图像阵列。随着计算机程序中多维图像的应用，人们对由有限个点构成的多维空间的数学理论的需求直到近期才出现。
首先，TMS 方法可用于计算机图形学、模式分析与识别、对象建模、动态移动曲面的检测、科学可视化，以及其他与计算机及其

应用相关的领域。
在数学中，TMS 方法可用于拓扑学、几何学、微分方程等领域。

数字 n 维图像为物理学家提供了一个由物理真空和真实物理空间的各种离散模型组成的“动物园”。
TMS 方法能够在生物学、化学、工业、医学等领域取得良好的应用效果。
本书的读者群体十分广泛，既包括程序员、数学家、物理学家、生物学家、医学、工业、军事等领域的专家，也包括高中生。换言之，任何在实践中使用计算机的人都可以阅读本书。

亚历山大·V·埃瓦科。

作者信息。

亚历山大·瓦季莫维奇·伊瓦科毕业于莫斯科工程物理学院理论与实验物理系，以及莫斯科国立大学力学与数学系。他曾在莫斯科多所高校的数学系和物理学系任职，并在美国的大学工作过数年。目前，他的主要研究兴趣是分子空间理论及其在计算机、数学、物理真空及真实物理空间的理论与实验研究中的应用。A. 伊瓦科的研究成果发表于多种期刊，包括《离散数学》《国际理论物理学杂志》《数学成像与视觉杂志》，以及多场国际会议的论文集。他著有专著《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，该书于1997年出版。

亚历山大·V·伊瓦科毕业于莫斯科工程物理学院物理学专业和莫斯科大学数学专业。获得博士学位后，他曾在莫斯科多所大学的物理、数学和计算机科学系任职。他还曾在美国的大学工作数年。他的主要研究兴趣包括分子空间理论及其在计算机、数学、物理真空和真实物理空间的理论与实验研究中的应用。他的研究成果发表于多种期刊，包括《离散数学》、《国际理论物理学杂志》、《数学成像与视觉期刊》，以及多场国际会议的论文集。他著有《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域中的应用》一书，出版于1997年。

目录

前言。 1 1 5 第一部分。分子空间。**第1章**。 5**分子空间的定义**。**分子空间上的运算**。 **第2章**。 21**分**
分子空间的点变换及其性质。.....同伦分子空间及其性质。30 23。分子空间的重构。34 **3**43**第 正规分子**
的几何直观基础。正规分子空间及其维数的定义。45 **4**55**第 正规分子空间的性质**。 4 55 41 2。正规分子
66 **5**79**第 正规 带边界的分子空间与正规分子流形**。 5 79 51 2。带边界的正规分子空间及其性质。正规分
98 **6**103**第 分子空间的直和及其性质**。 6 103 61 2。分子空间直和的一般性质。正规闭分子空间直和的性
7 111 71 2。分子空间直积的定义及一般性质。分子空间直积的局部性质。118 73。正规分子空间直积的
间。 **第9章**。 153**正规分子空间**。 9.1 正规分子空间。153

9 156 92 3 . 拟正规分子空间。 . 分子块空间。 160 **10**167**第 . 分子空间的欧拉示性数**。 10 167 101 2 . 分
变换不会改变分子空间的欧拉示性数。 . 欧拉示性数的一般性质和局部性质。 173 103 . 将欧拉示性数应
间的划分和铺砌性质。 178 104 . 最小分子空间。 192 **11**192**第 . 分子空间的同调群**。**点变换不会改变分**
分子建模。 **第 12 章** 206 121 **. 分子空间的砖块（几何）模型和矩阵（代数）模型**。 . 无限维欧几里得空
砖块空间中曲面的性质。 216 123 . 将砖块作为泛用构造元素引入的一些直观论证。 221 **13**224**第 . n 维**
224 131 2 . 齐次完备欧几里得分子空间。 . 齐次正规欧几里得分子空间。 228 133 . 非齐次正规欧几里得
里得分子空间的一般方法。 242 **14**245**第 . 连续空间的分子模型构造**。 14 244 141 2 . 用子空间族对分子
借助覆盖构造连续空间的分子模型。 253 143 258 . 借助基元构造连续空间的分子模型。 **第 15 章**。 268
象的建模与运动。 15 268 151 2 . 计算机实验与分子空间理论。 . 求取连续曲面分子空间的算法。 274 1
法。 275 3 278 第 3 部分。分子空间理论的应用。**第 16 章**。 278**分子空间上的微分方程**。

16 278 161 2 . 连续空间和离散空间上的微分方程的相似性与差异性。 . 分子空间上数理物理方程的定义。 280 163 . 连续空间上的微分方程是分子空间上微分方程的特殊情况吗? 286 164 . 分子空间上数理物理方程的解的示例。 287 165 . 分子空间上的非退化微分方程。 292 **17**299**第 . 分子空间的一般变换及其不变量**。 17 298 171 2 . 分子空间上的特征函数。 . 分子空间的特征函数的性质。 301 173 . 空间的基变换。 303 **18**309**第 . 物理学中的分子空间**。 18 309 181 2 . 在物理学中引入离散空间的必要性。 . 四维时空规则性的定理。 311 183 . 在诞生之时, 封闭宇宙有八个点。 312 184 . 是否存在能够证明真实物理空间是三维的物理实验? 312 185 . 在物理学中使用分子空间的若干可能方向。 314 **附录**。 **作为真实物理空间离散基础的分子空间**。 319 在分子空间上定义维数的几何直观基础。 321 正常分子空间的维数。定义和示例。 322 平面的厚度是多少? 325 随维数变化而进行的空间重构。 327 分子空间中的运动。 328 TMΠ 的一些应用。 329 **参考文献**。 331 335**索引**。

目录

引言。

目录

第一部分 分子空间（MP）。第1章 分子空间的定义。分子空间上的运算。第2章 分子空间的可缩变换。21 2 1 可缩分子空间。分子空间的可缩变换及其性质。21 2 2 同伦分子空间及其性质。30 2 3 分子空间的重构。34 第3章 正规分子空间及其维数。43 3 1 分子空间维数定义的几何直观基础。3 45 2 4 正规分子空间及其维数的定义。第4章 正规分子空间的一些性质。55 4 1 正规分子空间维数的一些性质。55 4 2 正规分子空间的地貌变换。66 第5章 带边正规分子空间和正规分子流形。79 5 1 带边正规分子空间及其性质。79 5 2 正规分子流形及其性质。90 5 3 分子空间的分类。98 第6章 分子空间的直和及其性质。103 6 1 分子空间直和的一般性质。103 6 2 正规闭分子空间直和的性质。107 第7章 分子空间的直积及其性质。111 7 1 分子空间直积的定义及一般性质。111 7 2 分子空间直积的局部性质。118 7 3 正规分子空间直积的性质。129 第8章 以正规空间为基础的n维分子空间。139 第9章 正则分子空间。153 9 1 正则分子空间。153 9 2 拟正规分子空间。156 9 3 分子块空间。160 第10章 分子空间的欧拉示性数。167 101 分子空间欧拉示性数的定义。可缩变换不会改变分子空间的欧拉示性数。167 102 欧拉示性数的一般性质和局部性质。173 103 将欧拉示性数用于研究某些闭二维分子空间的剖分和铺砌。178 104 192 极小分子空间。

目录

第11章 192 2 分子空间的同调群。可缩变换不会改变分子空间的同调群。第二部分 分子建模。第1
12 1 分子空间的Kirpich（几何）模型和矩阵（代数）模型。无穷维欧几里得空间作为普适基本空间。
普适 Kirpich 空间中曲面的性质。216 12 3 将Kirpich元素作为普适元素引入的一些显而易见的基础。
章 n维欧几里得空间的分子模型。224 13 1 齐次完备欧几里得分子空间。224 13 2 齐次正规欧几里得分
228 13 3 非齐次正规欧几里得分子空间。235 13 4 获得欧几里得分子空间的一般方法。242 第14章 连续
子模型的构建。245 14 1 由一族子空间对分子空间进行的适当覆盖及其性质。244 14 2 利用覆盖构建连
分子模型。253 14 3 利用基本元素构建连续空间的分子模型。258 第15章 计算机实验。在计算机中对多
进行建模和移动。268 15 1 计算机实验与分子空间理论。268 15 2 为连续曲面创建分子空间的算法。2
多维分子对象的若干移动方法。275 3 278 第三部分 分子空间理论的应用。第16章 278 16 1 分子空间上
方程。连续空间和分子空间上的微分方程之间的相似性与差异。278 16 2 分子空间上数理物理微分方程
280 16 3 连续空间上的微分方程是分子空间上微分方程的一种空间情形吗？286 16 4 分子空间上数理物
程的一些解。287 16 5 分子空间上的正则微分方程。292 第17章 分子空间的一般变换及其不变量参数。
1 分子空间上的特征函数。298 17 1 分子空间上特征函数的一些性质。301 17 2 分子空间的基本变换。
18章 物理学中的分子空间。309 18 1 物理学中使用离散空间的必要性。

309 。关于时空维数
18 2 3+1
定理。311 18 3 封闭宇宙在创生时刻有八个点。

目录

18 312 184 3 5 . 是否存在能够证明真实空间是 -维的物理实验？ . . 分子空间在物理学中的一些可能应用。314 附录。作为真实物理空间离散背景的分子空间。319 321 分子空间维数定义的几何直观基础。正常分子空间的维数。定义与示例。322 平面的厚度是多少？325 随维数变化而重构空间。327 分子空间中的运动。328 分子空间理论的一些应用。329 331 参考文献。索引。335

前言

本书 посвящена 分子空间理论——数字拓扑的一个分支。数字拓扑是一门相对新近兴起的科学领域，诞生于数学和计算机科学等学科的交叉地带，并应用于众多知识领域。按照一种定义，数字拓扑（digital topology）是研究计算机运行过程中产生的空间对象数字图像阵列的拓扑性质（topological properties of digital image arrays）的科学。各种对象的计算机图像从根本上说都是数字化的，也就是说，它们由相同且不可分割的元素构成；同时也是有限的，其元素数量始终有限，并受机器内存容量的限制。尽管科学界在几十年前就已产生了对这类理论的需求，但只有计算机的发展才真正推动了数字拓扑的诞生。

人们通常认为，将数学方法引入应用科学，总能使后者受益，并推动相关应用领域实现质的飞跃。可以预期，数字拓扑方法在计算机科学以及纯数学和应用数学中的应用，将成为推动这些领域发展的有益催化剂。

我们将更详细地列举一些计算机应用领域。专家认为，在这些领域中，使用数字拓扑和ТМП将带来切实且即时的益处。这些领域包括计算机图形学（computer graphics）、计算机对象建模（computer object modeling）、模式分析（pattern analysis），以及将对象以视觉形象呈现的科学可视化（scientific visualization）。

分子空间与化学和生物学对象的相似性，使人有理由希望本书能够引起兴趣，并可被这些科学领域的专业人士富有成效地使用。

然而，越来越明显的是，除了科学和应用领域的用途之外，数字拓扑还有望在科学理论体系中占据更重要的位置，而不仅仅是一门纯数学学科。这是因为，这门科学的方法确实为我们提供了可能性：既能将数字化方法应用于整个数学领域——数学始终以连续性和无穷性的概念为基础——也能将其应用于我们周遭的整个物质世界，包括我们赖以存在的真实物理空间。

如果这一切成为现实，我们的世界观以及对周遭世界的认知都将受到重要影响。

与此同时，数学中与不可公度性、无穷小量和无穷大量有关的诸多特殊现象和悖论也随之消失，无理数等概念也就不再需要了。

在我们对周围世界的认识中，与连续观点相比，离散观点更符合我们对自然和物理空间的经验。量子现象的存在表明，物质的属性及其相互作用具有离散的基础，并且会随着作用范围尺度的缩小而发生变化。直觉和常识告诉我们，空间也应当具有类似的特征。数字拓扑能够为从连续世界图景向离散世界图景的过渡提供必要的理论基础。

本书基于作者独立完成以及与同事合作完成的研究成果，这些研究发表于1983—1998年；同时也基于作者于1997年出版的专著《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》。值得指出的是，该专著是科学文献中第一部专门论述分子空间理论的著作。作者力求使尽可能广泛的读者群体关注数字拓扑，这也决定了该专著的行文风格和内容组织方式。该专著具有综述性质，省略了技术细节，也未提供定理和命题的证明。本书的内容与该专著的内容有以下几个主要方面的显著区别：

与完全没有给出定理证明的专著不同，本书对每个论断或定理都给出了详细证明。

本书增添了专著中未收录的新成果，这些成果构成了本书相当大一部分内容。

为了使本书的逻辑结构更加合理，调整了内容的编排顺序。

大幅增加了图和插图的数量，以帮助读者更好地理解内容。

本书基本上自成一体，无需查阅参考文献即可理解。

初次接触本书时，完全不必从头到尾通读全文。只需阅读附录和第1、3、12、14章。第15章讲述了计算机实验，这些实验促使人们理解了分子空间理论所依据的思想和原则。对物理学感兴趣的读者，不妨关注

第18章，其中讨论了将该理论应用于离散时空结构和封闭宇宙模型所产生的一些显而易见的推论，并分析了物理空间的三维性的物理学依据。微分方程领域的专家可以阅读第16章，该章提出了分子空间上最简单的数理物理方程的一般结构。

应当强调这样一个事实：无论是分子空间理论，还是数字拓扑整体而言，都是相对较晚才出现的科学理论，实际上目前仍处于其形成和发展的初级阶段。与任何新兴理论一样，这一领域存在大量特殊问题，从缺乏自身专门的术语体系，到缺少发表该研究方向相关成果的科学期刊，不一而足。另一方面，正是由于其尚处于发展的初始阶段，因此在基础领域和应用领域，都存在着大量值得探索的新研究方向。

注释。
“数字拓扑”这一名称本质上是个谬误，至少对于分子空间而言确实如此。事实上，只有以适当方式定义了一个称为开集的集合族，才能说拓扑已被定义。在分子空间上，不可能以合理的方式定义这样的系统，因此，开集的概念被邻域和球的概念所取代。由此可见，分子空间并非传统意义上的拓扑空间。

阅读和理解本书主体内容，只需具备高中阶段的数学知识。本书面向最广泛的读者群体，适合希望了解数学和计算机科学这一领域、并在工作中使用计算机的人士。书中有几章介绍了能够将书中所得结果直接转化为计算机程序的算法。为便于读者阅读和理解新内容，书中在必要之处进行了重复讲解。

作者借此机会感谢所有曾在不同阶段帮助他整理本书内容的人，尤其感谢与他共同撰写学术论文的合作者：Yeong Nan Yeh 教授（台北数学研究所，台湾）、R. Kopperman 教授（城市学院，纽约市立大学，美国）、R. Melter 教授（长岛

大学，南安普顿，纽约，美国）、Y. Mukhin 博士（雪城大学，美国）。作者衷心感谢 L. Levitin 教授（波士顿大学，美国）、D. Kleitman 教授（麻省理工学院，美国）、T. Kong 教授（皇后学院，纽约市立大学，美国）、P. Saulson 教授（雪城大学，美国）、G.-C. Rota 教授（麻省理工学院，美国）提出的宝贵建议和意见。作者感谢 S. Agafonov 教授（莫斯科技术大学，俄罗斯）、R. Sorkin 教授（雪城大学，美国）以及 W. Stan 博士（美国）进行讨论，这些讨论有助于澄清许多模糊且存在争议的问题。

作者对可能存在的不准确之处承担全部责任。

Alexander Ivako。

第1部分 分子空间及其性质

1. 分子空间。分子空间的定义与运算

我们介绍并定义分子空间，它们是连续空间及其运算的数字模型。

本章内容部分发表于文献 [3,28,43,45,49,51]。

数字拓扑中，构造定义在有限或可数点集上的离散空间有几种方法。源自经典数学的传统方法是指定一个子集族，称为开集，并

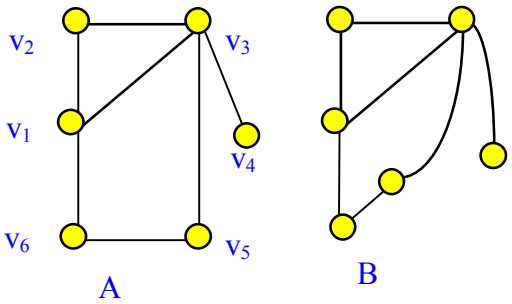
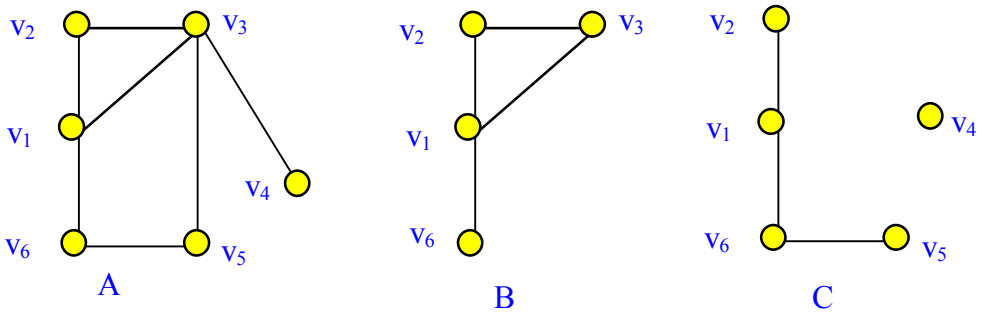


图 A 分子空间 A 和 B 同构。

满足特定关系。多位作者发展了这种方法 [30,31,32,33,34,35,38,39]。然而，在过渡到 2 维及以上的空间时，会出现一些困难，这是因为会出现多种不同类型的开集，而且类型的数量会随着.....增加。

空间维数。在我们的方法中，我们通常摒弃开集这一概念。这么做有充分的理由。例如，拓扑中广泛使用拓扑空间的覆盖之神经这一概念。对属于覆盖的每个开集，都对应一个神经点；如果两个集合的交集非空，则与它们对应的点之间便以连接相连。当覆盖足够精细时，神经应能反映拓扑空间的所有基本性质。分子空间正是以这种方式构造的。神经反映了分子空间（以及经典拓扑空间，尤其是连续空间）最基本的拓扑性质。不过需要指出的是，神经只是描述分子空间的几种可能形式之一。



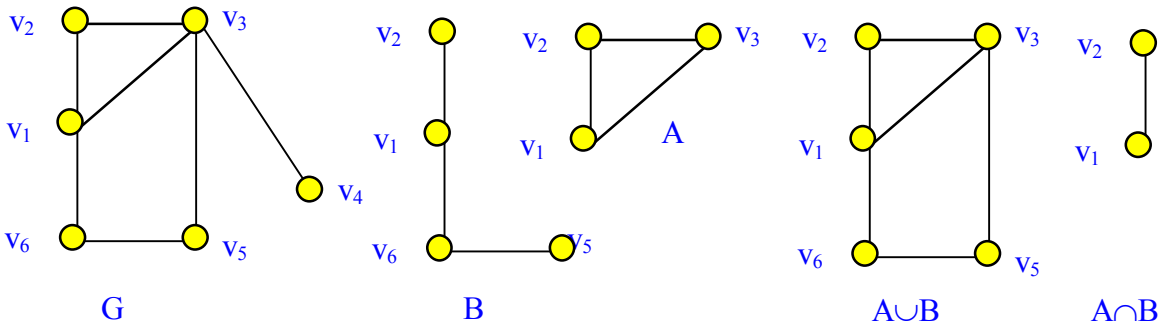
- 图 B 分子空间 *B* 和 *C* 是空间 *A* 的子空间。分子空间 *B* 是从 *A* 中删去点 v_4, 和 v_5, 得到的；空间 *C*-则是删去点 v_3 得到的。分子空间 *A* 和 *B*-是连通的，分子空间 *C*-不连通。 $|A|=6, |B|=4, |C|=5$.

空间，在某些情况下显然不够。仅使用神经，我们无法例如描述分子空间嵌入到更一般的分子空间或连续欧几里得空间时的外部几何。神经很可能适用于仅讨论分子空间的基本拓扑性质的情形。因此，分子空间是建立在有限或可数点集上的空间，具有确定的拓扑和几何性质，例如维数、连通性、度量、体积、同调群等 [43]。所有这些性质都由空间的结构决定。问题是，如何定义这种结构?

分子空间的定义

由有限或可数个点组成的数字空间称为分子空间 G，简称分子空间

集合 V，其上定义了拓扑结构 W，由点之间是否存在连接决定，G=(V,W)，其中 V=(v_1,v_2,...v_n), W = (($v_p v_q$),....)（图 a，图b）。点 v_p 和 v_q 之间存在连接，意味着有序对 (v_p,v_q) 是无序的，即 ($v_p v_q$) 和 ($v_q v_p$) 是同一个对象。如果点 v_p 和 v_q 之间存在连接 ($v_p v_q$)，则点 v_p 和 v_q 称为



- 图 C 空间 G中两个子空间 *A* 和 *B* 的并集 *A*∪*B* 和交集 *A*∩*B* 。

相邻、邻近或相连接；点 v_p 和 v_q 称为 边界 连接（$v_p v_q$）；点 v_p 和 v_q 以及连接（$v_p v_q$）称为关联的；连接（$v_p v_q$）和（$v_q v_s$）称为相邻，如果它们关联于同一个顶点。

两点之间的连接意味着它们处于最近邻域中，并且，与给定点处于最近邻域中的所有点，相对于该点而言都是平等的。因此，在分子空间中，每个点都被一个由其最近邻点组成的点族所包围。该点与该族中的所有点建立连接。需要强调的是，度量，即空间两点之间的距离，是以自然方式确定的。因此，要完整定义分子空间，只需给定两个集合：点集 V 和连接集 W，后者确定空间的拓扑。

记号。

对于由有限或可数点集 V=(v_1,v_2,...v_n) 构成的分子空间 G，将使用记号 G=(v_1,v_2,...v_n)。

定义。分子空间的体量

分子空间 G 中点的数量称为分子空间 G 的体积，记作 |G|（图b）。

分子空间权重的定义

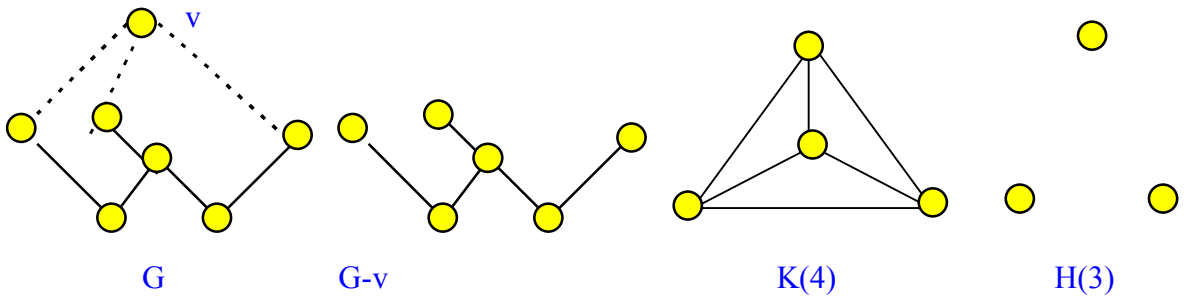
空间 G 的权定义为该空间的边 P(G)=|W| 的数量。

我们来定义同构空间。同构空间是相同的副本，区别只在于标记。

分子空间同构的定义。

两个分子空间 G 和 H 称为同构的，如果它们的点集之间存在一一对应 h: G→H，且该对应保持点之间的连接。当且仅当 v_1 和 v_2 在 G 中相邻时，$h(v_1)$ 和 $h(v_2)$ 在 H 中相邻。

图 a 中所示的分子空间 A 和 B 是同构的。一般而言，两个空间之间可以建立多个



- 图 D 空间 *G-v* 由空间 *G* 删除点 *v* 及与其关联的所有连接得到。空间 *K(4)* 是点束，空间 *H(3)* 是完全不连通的。

彼此不同的同构。连通空间的概念非常重要。通过链来定义连通性是很方便的。

链的定义。

分子空间 G 中点 v_1 和 v_n 之间的链称为不同点的序列 $(v_1, v_2,... v_n)$，其中相邻点两两相邻。如果链中的 v_1 和 v_n 也相邻，则该链称为圈。

在图b中，(v_1,v_2,v_3,v_5,v_6) 是一条链，而 $(v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_1)$ 是一个圈。

连通分子空间的定义。

如果任意一对点都由链连接，则称分子空间为连通。若不存在连接两点的链，则称这两点属于分子空间的不同连通分支。

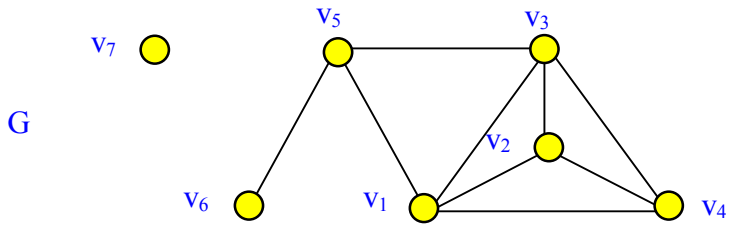
与连续空间的情况一样，我们需要有子空间的定义。这与一些特定的困难有关。问题在于，子空间既由点定义，也由拓扑定义，也就是说，由点之间的连接定义。在选取

子空间中各点之间的边，以及子空间的点与其余点之间的边，决定了子空间的外部拓扑；这些边不再纳入考虑。务必始终牢记这一点。换言之，子空间中各点之间的边决定了子空间自身的拓扑，而子空间的点与其余点之间的边则决定了子空间在外部空间中的布局拓扑。

子空间的定义。

若分子空间 H 满足以下条件，则称其为分子空间 G 中的诱导子空间或生成子空间：1. H 的点集是分子空间 G 的点集的子集。2. 分子空间 H 中存在某个连接，当且仅当分子空间 G 中存在该连接。

因此，生成子空间是给定点集上的最大子空间。这意味着，如果点在分子空间中相邻，那么它们在子空间中也总是相邻。B



- 图 E 空间 *G* 具有以下点束：一个点上的点束 *K(1) = (v₇)* ；两个点上的点束 *K(2) = (v₅, v₆)* ；三个点上的点束 *K(3) = (v₁, v₃, v₅)* ；四个点上的点束 *K(4) = (v₁, v₂, v₃, v₄)* 。

分子空间理论还研究除生成子空间以外的其他类型子空间。然而，由于我们只使用生成子空间（特别说明的情况除外），因此我们将生成子空间简称为子空间。也可以通过从空间中删除所有不属于给定子空间的点（以及与这些点关联的连接）来得到子空间（图 b）。

图b中，空间A及其子空间B和C由以下集合定义：

A:V=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6), W=((v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_6),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_5,v_6)). B:V=(v_1,v_2,v_3,v_6), W=((v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_1,v_6),(v_2,v_3)).

C:V=(v_1,v_2,v_4,v_5,v_6), W=((v_1,v_2),(v_1,v_6),(v_5,v_6))。

接下来，我们还需要讨论给定空间中两个或多个子空间的并运算和交运算（图 c）。我们将在子空间的点集上以标准方式定义这些运算。下面以定义的形式表述这些运算。

子空间并集的定义。

给定空间 G（点集为 $V = (v_1, v_2,... v_k)$）中的两个子空间 A（点集为 $V_p = (v_{p1}, v_{p2},... v_{pk})$）和 B（点集为 $V_q = (v_{q1}, v_{q2},... v_{qm})$），其并集定义为子空间 A∪B，其点集为 $V_p \cup V_q = (v_{p1}, v_{p2},... v_{pk}) \cup (v_{q1}, v_{q2},... v_{qm})$，它是子集 $V_p \subseteq V$ 和 $V_q \subseteq V$ 的集合论并集。

子空间交集的定义同样可以类似地引入。

子空间交集的定义。

给定空间 G，其点集合为 $V = (v_1, v_2,... v_k)$，其中两个子空间 A 的点集合为 $V_p = (v_{p1}, v_{p2},... v_{pk})$，B 的点集合为 $V_q = (v_{q1},v_{q2},... v_{qm})$。它们的交集定义为子空间 A∩B，其点集合为 $V_p \cap V_q = (v_{p1}, v_{p2},... v_{pk}) \cap (v_{q1}, v_{q2},... v_{qm})$，即子集 $V_p \subseteq V$ 和 $V_q \subseteq V$ 的集合论交集。

对于子空间 A 和 B 的交集 A∩B，我们也将使用记号 A|B。

子空间的并集是一种比交集更依赖母空间的运算。子空间的交集适用于任何空间，并且对任意子空间都是唯一确定的。子空间的并集在以下意义上依赖于母空间：并集中可能出现连接两个子空间中点的边，而这些边在每个子空间中单独来看都不存在。例如，在图 c 中，点 (v_1, v_2) 上的子空间和点 (v_2,v_3) 上的子空间各自包含一条边，而它们的并集子空间——点 (v_1, v_2,v_3) 上的子空间——则包含三条边。因此，出现了一条不属于任何一个子空间的边。A∪B 的并集包含边 (v_3,v_5)，而这条边在 A 和 B 中都不存在。也就是说，边的集合不仅会合并，还可能出现额外的边。两个子空间相交时不会发生这种情况，边的集合只是取交集。在处理分子空间时，始终需要考虑这一点。再次强调，除非另有特别说明，以下所说的子空间并集始终指由点集并集生成的子空间。

G-v 的差集定义。

G-v 子空间是由……得到的子空间。

通过删去点 v 得到的空间 G（图 d）。

这个定义可以扩展到空间 G 的子空间 H。

G-H 的差集定义。

称为 G-H 子空间的是由……得到的子空间。

空间 G 删除子空间 H 的所有点。

显然，G=(G-v)∪v，G=(G-H)∪H。

点束 K(n) 和完全不连通空间 H(n) 的定义。具有 n 个点的空间 K(n) 称为点束（完全连通空间），如果其中每一对点都相邻。具有 n 个点的空间 H(n) 称为完全不连通空间，如果它不包含连接。（图 d）。

团的定义。

任何作为子空间的极大完全点束称为团（图 e）。

在组合拓扑中，具有 p 个点的任何点束称为（p-1）-单形。根据定义，这种单形的维数为（p-1）。

空间 G⊕H 的直和的定义。

设有两个空间：G，其点集为 V= ($v_{1,}$, $v_{2,}$, $v_{3,}$,.... $v_{n,}$)，连接集为 W；H，其点集为 R= ($r_{1,}$, $r_{2,}$, $r_{3,}$,.... r_{m})，连接集为 S。两个空间 G 和 H 的直和（和）称为由点 V 和 R、连接 W 和 S，以及所有连接 V 与 R 中点的连接所组成的空间 G⊕H（见图 f）。

显然，在这一运算下，空间 G⊕H 的点数等于空间 G 和 H 的点数之和，|G⊕H|=|G|⊕|H|，连接数 P)G)=|W|+|S|+nm。

锥 G⊕v 的定义。

如果其中一个空间（例如，前一定义中的第二个空间）是点 v，那么和 G⊕v 称为空间 G 的锥（cone）（图 f）。

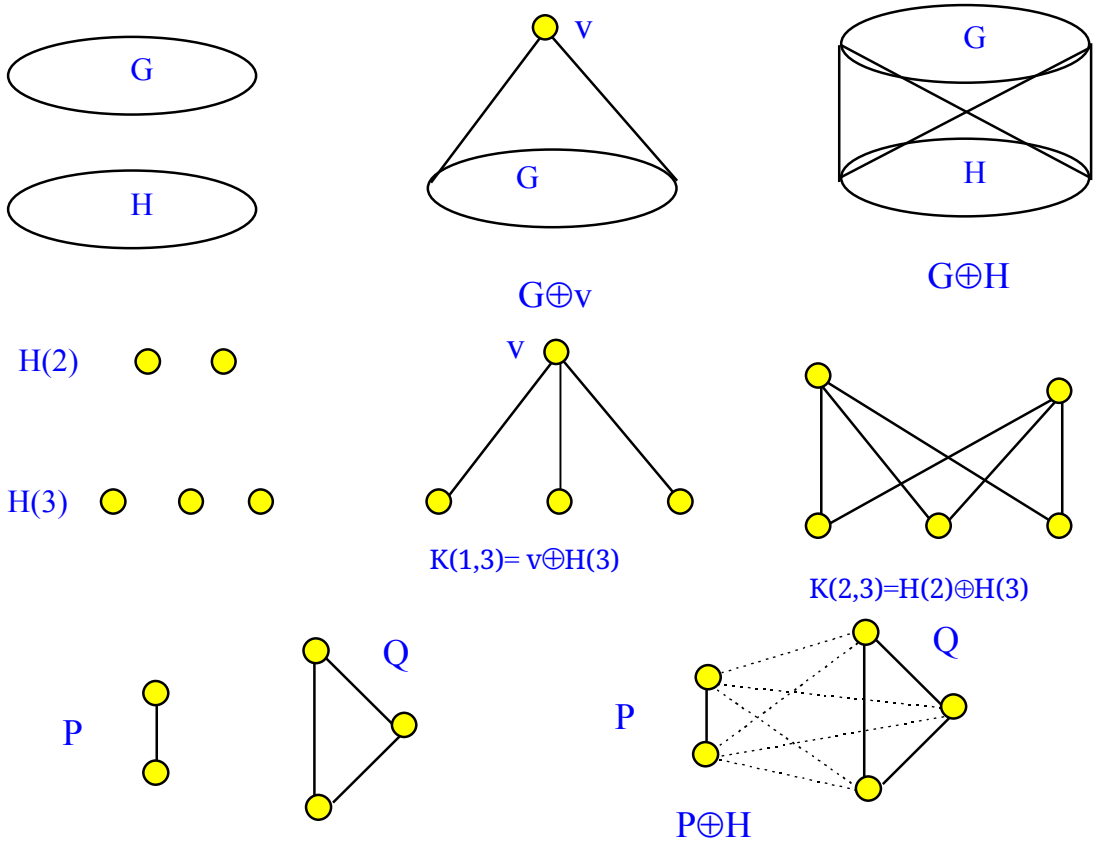
子空间 G⊕H 的直和定义。

设空间 A 中有两个子空间：G 的点集为 V=(v_1,v_2,v_3,....v_n)，H 的点集为 R=(r_1,r_2,r_3,....r_m)，且集合 V 与 H 不相交。如果 V 中的每个点都与 R 中的每个点相邻，那么由点集 V 和 R 组成的子空间 G∪H=G⊕H，称为子空间 G 和 H 的直和（和）。

p 重空间的定义。

空间$K(n_1,n_2,...n_p)$称为p-部空间，如果它可以表示为p个完全不相交空间$H(n_1)$、$H(n_2)$...$H(n_p)$之和，$K(n_1,n_2,...n_p)=H(n_1)\oplus H(n_2)\oplus...\oplus H(n_p)$。

图f中描绘了二部空间K(1,3)和K(2,3)。在分子空间理论中，最重要的概念之一是邻域、点的球和子空间的邻域与球。这两个概念在TMΠ中发挥着与拓扑中的开邻域和闭邻域相同的作用。在数字空间中，很难，



- 图 F 空间的直和 *v⊕H, G⊕H, v⊕H(3),* H(2)⊕H*(3)* 和 *P*⊕Q.

如果无法以合理的方式定义与经典概念相类似的开集和闭集概念，这完全可以理解，因为开集概念建立在连续性和无穷性的基础上。在作为满足计算机实践需求而产生的科学的TMΠ中，并不使用连续性和无穷性。

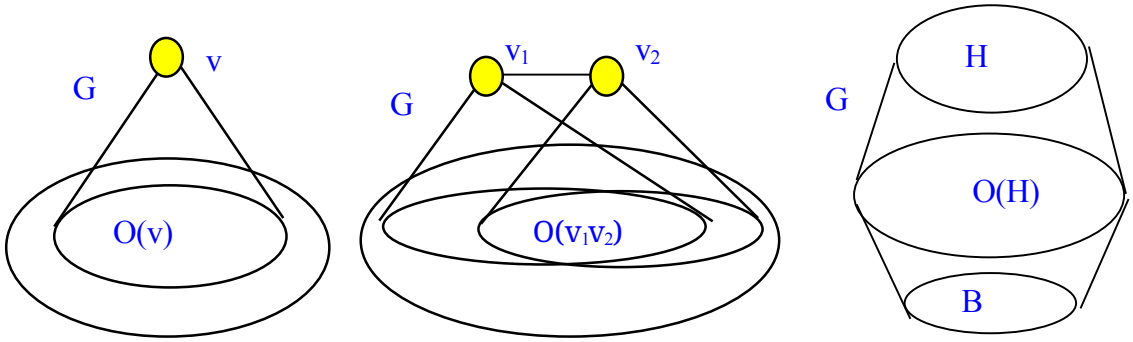
球和点的邻域的定义。

设 G 和 v 分别为空间及其上的一点。将点 v 的球（ball）定义为子空间 U(v)，它包含点 v 本身以及空间 G 中所有与点 v 相邻的点（图 g、图 h）。

将包含空间 G 中所有与 v 相邻的点、但不包含点 v 本身的子空间 O(v) 称为点 v 的邻域（rim）。

显然，O(v)是通过从U(v)中删去点v得到的，即O(v) = U(v)-v（图g，图h）。球与邻域之间的关系由以下关系确定：点v的球是一个锥，也是点v与其邻域的并集。U (v) =v ⊕O (v) =v ∪O (v)，O (v) =U (v) - v。

点的公共邻域的定义。



- 图 G *O(v)* 点的邻域 *v* 以及分子空间 *G* 中两点 v_1 和 v_2 的公共邻域 $O(v_1v_2)$。点 *v* 的球是一个包含 *O(v)* 和点 *v* 的子空间。邻域

*под*空间 *H* 包含所有与 *H* 相邻的点，除了 *H*.

*Шар*子空间 *H* 包含所有与 *H*, 相邻的点

即O(v1)、O(v2)、O(v3)、...O(vp)的交集构成的子空间O(v1,v2,v3,....vp),

*включая*称为点v_1, v_2, v_3,.... v_P 的公共邻域（联合边界）（图g，图h）。O (v 1 , v 2 , v 3 , ... v P) =O (v 1) ∩O (v 2) ∩O (v 3) ∩. . . ∩O (v P)。

换言之，空间 O(v1,v2,v3,....vP) 中的每个点都必须与 v_1, v_2, v_3,.... v_P 的所有点相邻。交运算是在空间 G 的点集上进行的。其中，点 v_1, v_2, v_3,.... v_P 不必彼此相邻。图 h 中用灰色表示了两个点 O(vu) 的邻域。类似地，可以定义球以及空间 G 的子空间 H 的邻域。子空间 H 的邻域起着子空间边界的作用，是构成 H 最近邻域的点集。

球和子空间邻域的定义。

设 G 和 H 分别为空间及其子空间。我们称子空间 U(H) 为子空间 H 的球（ball）或完全球，它既包含子空间 H 的点，也包含空间 G 中所有与子空间 H 中至少一个点相邻的点（图 h，图 i）。我们称子空间 O(H) 为子空间 H 的边界（rim）或完全边界，它包含空间 G 中所有与子空间 H 中至少一个点相邻的点，但不包含子空间 H 中的点。设 H 包含点 v_1, v_2, v_3,.... v_P。那么，U(H) 是所有属于 H 的点的球的并集。

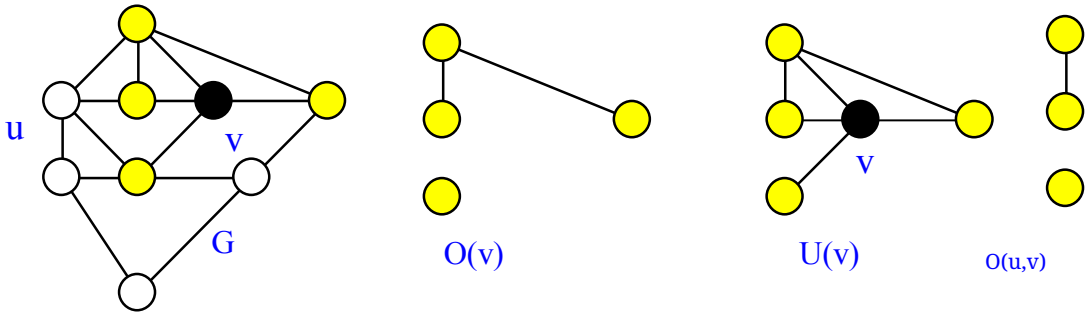
根据定义，完整邻域和完整球的以下性质显而易见。

性 质。

设 G 和 H 分别为空间及其子空间。设 H 包含点 v_1, v_2, v_3,.... v_P。那么：$U(H)=U(v_1)\cup U(v_2)\cup U(v_3)\cup...\cup U(v_P)$。$O(H)=O(v_1)\cup O(v_2)\cup O(v_3)\cup...\cup O(v_P)-H$。$O(H)= U(H)-H=U(v_1)\cup U(v_2)\cup U(v_3)\cup...\cup U(v_P)-H$。$U(H)=O(H)\cup H$。

在图 h 中，点 v 为黑色，其邻域 O(v) 用灰色点表示，因此黑点和灰点共同表示点 v 的球 U(v)。

由点（v_1,v_2,...v_P）组成的子空间 H 的完整邻域 O(H)，与构成它的各点的公共邻域之间的区别显而易见。再提醒一下，$O(H)=O(v_1)\cup O(v_2)\cup O(v_3)\cup...\cup O(v_P)-H$

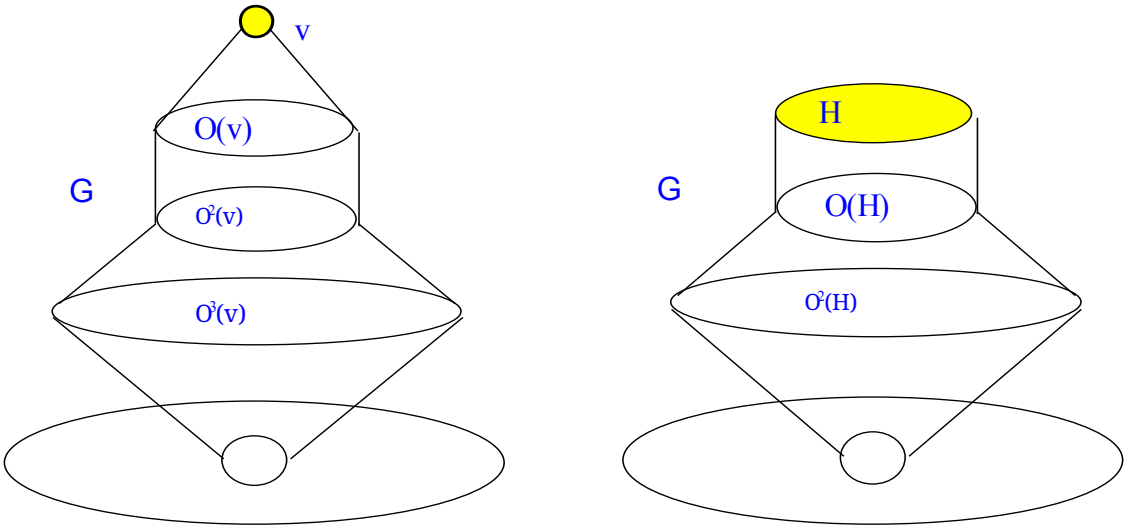


- 图 H 空间中点 *v* 的邻域 *O(v)* 和球 *U(v)*。*G*. 最右侧-点 *u* 和 *v*.的公共邻域。

$O(v_1, v_2, v_3, ... v_P)=O(v_1)\cap O(v_2)\cap O(v_3)\cap...\cap O(v_P)$.

一个重要的概念是定义在分子空间上的度量。通常，度量是指定义在整个空间上的两个点 u 和 v 的非负函数 d(u,v)，并且满足

满足三个公理。d(u,v)≥0 和 d(u,v)=0 当且仅当 u=v. d(u,v) =d(v,u)d(u,v)+ d(v,w)≥ d(u,w) 对任意点 u, v, w. 度量可以通过多种方式定义。我们将给出一个自然地从拓扑中导出的定义。



- 图 I *O(v)=O¹(v), O²(v)* 和 *O³(v)* 是点 *v*. *O(H)=O¹(H)* 和 *O²(H)* 分别是子空间 *H*. 的第一和第二完全邻域。

分子空间。首先定义点和子空间的完备邻域与完备球的序列。

点的完备 n 邻域和 n-球的定义。

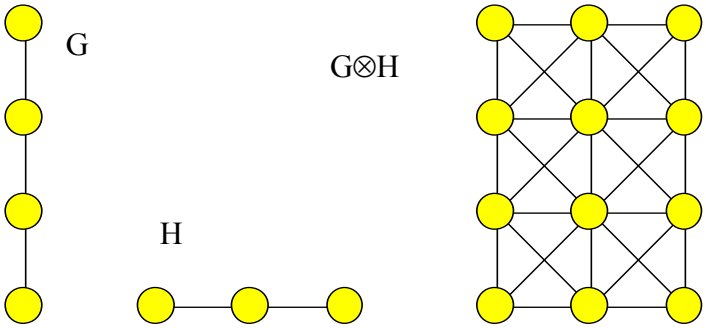
设 v 是分子空间 G 中的某个点。点 v 的完整 2-邻域 $O^2(v)$ 称为其球 U(v) 的完整邻域，$O^2(v)=O(U(v))$ （图 i ）。点 v 的完整 2- 球 $U^2(v)$ 称为子空间 U(v) 的完整球，$U^2(v)=U(U(v))$（图 i）。点 v 的完整 n-邻域 $O^n(v)$ 称为点 v 的完整 (n-1)-球 $U^{n-1}(v)$ 的完整邻域，$O^n(v)=O(U^{n-1}(v))$。点 v 的完整 n-球 $U^n(v)$ 称为点 v 的完整 (n-1)-球 $U^{n-1}(v)$ 的完整球，$U^n(v)=U(U^{n-1}(v))$。

点 v 的 n-邻域与 n-球之间的连接显而易见。

性 质。$U(v)=O(v)\cup v$ $U^2(v)=O^2(v)\cup$
$U(v)= O^2(v)\cup O(v)\cup v$.

$$U^n(v)=O^n(v)\cup U^{n-1}(v)= O^n(v)\cup O^{n-1}(v)\cup ...O(v)\cup v.$$

我们还需要空间 G 的子空间 H 的完全 n-邻域和 n-球的概念。通过推广来引入这些概念



- 图 J 空间 *G* 和 *H*的直积。空间 *G* 中的每个点都替换为空间 *H*。在相邻副本 *H* 中相邻且同名的点之间建立边。

将前述定义应用于空间 G 的子空间 H .

子空间的完整 n-邻域和 n-球的定义。

设 H 是分子空间 G 的某个子空间。子空间 H 的完整 n-邻域 $O^n(H)$ 定义为子空间 $U^{n-1}(H)$ 的完整邻域，即 $O^n(H)=O(U^{n-1}(H))$。完整 n-球 $U^n(H)$ 定义为子空间 $U^{n-1}(H)$ 的完全球，即 $U(H)=U(U^{n-1}(H))$。

子空间 H 的 n-邻域与 n-球之间的联系显而易见。

性 质。

$U(H)=O(H)\cup H$

$U^2(H)=O^2(H)\cup U(H)= O^2(H)\cup O(H)\cup H.$

.....

$U^n(H)=O^n(H)\cup U^{n-1}(H)= O^n(H)\cup O^{n-1}(H)\cup ...O(H)\cup H.$

在图i 中，展示了空间 G 中点 v 和子空间 H 的各种邻域。由于点 v 的完整球 U(v) 是 $v\oplus O(v)$，$U(v)=v\oplus O(v)$，因此，点 v 的第二个完整邻域是子空间 U(v) 的第一个完整邻域，即 $O^2(v)=O(U(v))$。显然，还有 $U^2(v)= O^2(v)\cup U(v)$。

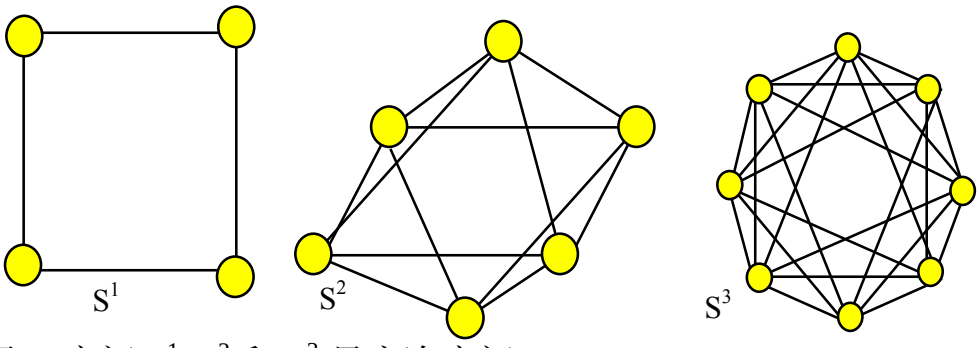
距离的定义（度量）。

设 v 是分子空间 G 中的任意一点。如果点 u 属于点 v 的完整 n-邻域 $O^n(v)$，即 $u\in O^n(v)$，则从 v 到 u 的距离 d(v,u) 等于 n，d(v,u)=n。如果 v 和 u 属于分子空间的不同连通分支，则 $d(u,v)=\infty$。

容易看出，如此定义的距离满足所有度量公理，且等于连接点 v 和 u 的链中，按点数计最短的链上各点之间的连接数。相邻点之间的距离始终为 1。类似地，可以定义空间 G 的子空间 H 与点之间的距离，以及两个子空间 H 和 F 之间的距离。$d(H,v)=n \Leftrightarrow v\in O^n(H)$ $d(H,F)=n \Leftrightarrow O^{n-1}(H)\cap F=\varnothing$, $O^n(H)\cap F\neq\varnothing$。

空间 G⊗H 的直积定义。

设有两个空间：G，其点集为 $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_m\ldots)$，连接集为 W；H，其点集为 $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n\ldots)$，连接集为 S。我们将空间 G 和 H 的直积（乘积）称为直积空间 G⊗H。该空间由点 $w_{kp}=v_k\otimes u_p$ 组成，其中每个点 $w_{kp}=v_k\otimes u_p$ 的球 $U(v_k\otimes u_p)$ 由点 $w_{st}=v_s\otimes u_t$ 组成，这些点满足 v_s 属于 $U(v_k)$，u_t 属于 $U(u_p)$，



- 图 K 空间 S^1, S^2 和 S^3 是齐次空间。

$w_{st}=v_s\otimes u_t\in U(v_k\otimes u_p) \Leftrightarrow v_s\in U(v_k), u_t,\in U(u_p)$.

分子空间的直积是空间的拓扑积或线性向量空间的直和 [53] 的类似物。定义清楚地体现了拓扑积的经典定义与分子空间的直积之间的联系。直积可以直观地表示如下：一个空间（例如 G）中的每个点都由空间 H 替代。

所得到的空间具有 G 的结构，其中的点是空间 H 的副本。接着，如果 H 的两个副本对应于 G 中两个相邻的点，那么就在同名点之间以及这两个副本中彼此相邻的点之间建立边，而不论这些点分别属于哪个副本（图 j）。

我们还将引入齐次分子空间的概念。

齐次性是空间的一项重要性质。例如，标准欧几里得空间就是齐次的。空间，

物理学中使用的空间大多也是齐次的。分子空间既可以是齐次的，也可以是非齐次的。在许多情况下，齐次形式更为可取，因为这样空间的描述更加简单。不过，我们将看到，经典数学中一些众所周知的空间并不存在齐次形式，至少在其最小形式下是如此。这类空间例如包括通过用莫比乌斯带封住球面上的洞而得到的射影平面。

齐次空间的定义。

如果空间中任意两个点的邻域（或球）是同构的（图 k），则称分子空间为齐次空间。

换言之，邻域是相同的副本，经过适当重合后彼此完全一致。

本节最后需要指出，分子空间也可以看作图。拓扑空间的覆盖的神经无非就是一个图。从本质上说，任何图都是具有特定数学特征的分子空间。因此，凡是适用于图的内容，完全有理由同样适用于分子空间。为了理解分子空间与图之间的联系，下面给出图的定义 [21,22]。

图的定义。

图 G 定义为集合对 (V,W)，其中 V 是点的集合，$V=(v_1,v_2,...v_n)$，W 是集合 V 中不同点所组成的无序对，$W = ((v_p, v_q),....)$。

在文献中，图的点也称为顶点和节点，而点对则称为连接、边、弧或线。如果两个点通过连接相连，即构成一个点对，则称它们相邻或连通。连接 (u,v) 称为与点 u 和 v 关联的连接。如果两条连接关联于同一个点，则称它们相邻。

有必要就定义和术语问题说几句话。即使只看数学，同一个术语在这门学科的不同领域中，也常常被用来指称截然不同的概念和对象。一个新的科学方向出现时，必然会遇到如何使用现有术语来指称新对象的难题。我们认为，最妥当的做法是引入新的符号和术语，避免使用该方向所依托领域中已有的术语。然而，这往往会引发

相邻领域同事的强烈反对。因此，最稳妥的做法是采取折中方案：按照相似性原则，从传统科学领域借用一部分术语；只有在绝对必要时，才引入新的术语和符号。另一方面，有时也无法直接将从数学某个章节（例如图论）借来的、含义熟悉且恰当的术语用于数字拓扑。原因在于，同一个名称常常在数学的不同章节中被用来定义不同的概念。例如，从图论专家的角度来看，将完全图视为分子空间时，称之为完全分子空间似乎合乎逻辑。然而，从拓扑学的角度来看，这样的名称并不自然，因为拓扑学中使用了完全空间这一概念。因此，为避免此类情况下产生误解，我们将采用不会引起多重解读的定义。这样至少可以部分避免混乱和矛盾。尽管本章专门讨论定义，但我们只引入了为沿着所选方向进一步推进而绝对必要的基本概念。这并不意味着我们已经定义了所有必需的内容。不过，随着需要，新的定义会在正文中相应出现；没有它们就完全无法继续的地方，我们才会引入。

第1章参考文献目录。

3. Evako A., Kopperman R., Mukhin Y.，《图与数字空间的维数性质》，《数学成像与视觉期刊》，第6卷，第109-119页，1996年。21. Golumbic M.C.，《算法图论与完美图》，Academic Press，纽约，1965年。22. Harary F.，《图论》，Addison-Wesley，Reading，MA，1969年。28. Ivashchenko (Evako) A.V., Yeong-Nan Yeh，《环面、射影平面与球面的极小图》，《离散数学》，第126卷，第171-178页，1994年。30. Khalimsky E., Kopperman R., Meyer P.，《计算机图形学与有限有序集上的连通拓扑》，《拓扑学及其应用》，第36卷，第1-17页，1990年。31. Khalimsky E.，《计算机科学中的拓扑结构》，《应用数学模拟杂志》，第1卷，第25-40页，1987年。32. Kong T., Kopperman R., Meyer P.，《数字拓扑的拓扑学方法》，《美国数学月刊》，第98卷，第901-917页，1991年。

33. Kong T., Rosenfeld A.，数字拓扑：介绍与综述，《计算机视觉、图形与图像处理》，第 48 卷，第 357–393 页，1989年。34. Kopperman R.、Meyer P.、Wilson R.，三维数字空间中的 Jordan 曲面，《离散与计算几何》，第 6 卷，第 155–161 页，1991年。35. Kovalevsky V.A.，应用于图像分析的有限拓扑，《计算机视觉、图形与图像处理》，第 46 卷，第 141–161 页，1989年。38. Sorkin R.，连续拓扑的有限替代，《国际理论物理学杂志》，第 30 卷，第 923–947 页，1991年。39. Taylor J.E.，关于晶体表面的整体结构，《离散与计算几何》，第 6 卷，第 225–262 页，1991年。43. Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。45. Иващенко А.В.，《分子空间嵌入》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6421-84 号，1984年。49. Иващенко А.В.，《分子空间变换》，ВИНИТИ，莫斯科，第 2345-85 号，1985年。51. Иващенко А.В.，《分子空间的拓扑性质》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984年。53. Корн Г.、Корн Т.，《科研人员和工程师数学手册》，科学出版社，莫斯科，1970年。

点空间 变换 分子空间

我们引入并研究可缩分子空间，以及称为可缩的分子空间变换的一个特殊类别。这些变换与经典拓扑学空间的同伦变换非常相似。基于此，我们定义同伦分子空间并研究其性质。

本章所得结果部分发表于文献 [15,26,43,49,52]。

点空间。分子空间的点变换及其性质

在后续内容中，我们将需要一些变换，以便改变分子空间，例如增加或减少其点的数量，建立或删除不同点之间的边。在一定程度上，这些变换模拟连续空间的变换。我们先来看一个最简单的例子。假设在某个过程中

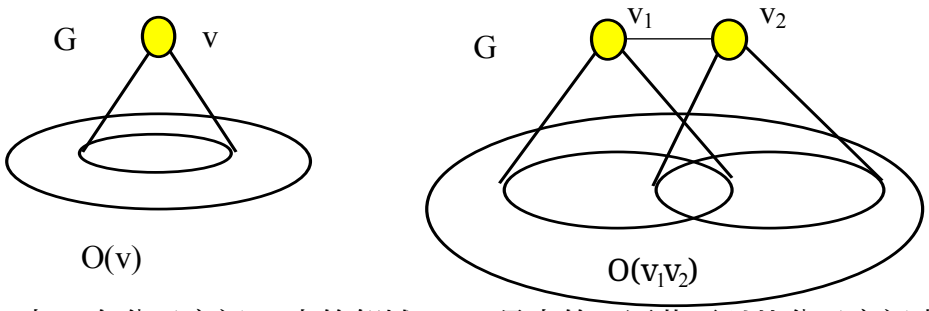


图 12 点 v 在分子空间 G 中的邻域 O(v) 是点的，因此可以从分子空间中删除（粘合）v。两点 v1 和 v2 的一般邻域 O(v1v2) 是点的，因此连接 (v1v2) 可以从分子空间 G 中删除（粘合）。

物质球的体积增大。作为这个连续球的数字映像，分子球也应当增大体积，例如通过增加构成它的点的数量来实现。换言之，分子球中加入了新的点，但与此同时，这个球的形状和其他不变量特征并未改变。

由此产生一个问题：我们应当以何种方式向已有的点中添加新点，才能使空间对象在每个阶段都保持其所有属性。这里所指的是严格的数学

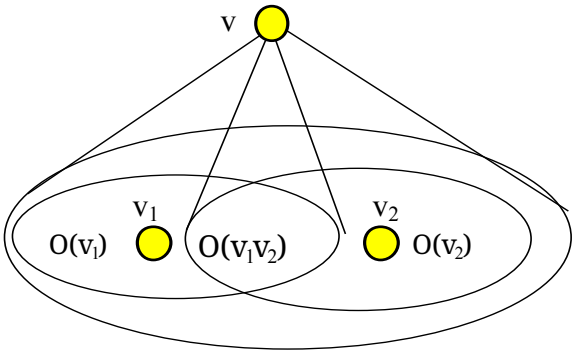


图 13 在空间 v⊕G 中，点 v1 和 v2 的公共边界 O(v1v2) = v⊕(O(v1v2)|G) 是一个锥，因此点 v1 和 v2 可以用一条边连接。

空间对象的特征。我们将在下文引入的变换，正是为了从最一般的层面回答这一问题。在此前的研究中，我们将分子空间的点变换表示为由四种运算构成。首先给出若干必要的定义。现在转入分子空间的点（可缩）变换的定义。

点空间的定义

由 G_1，G_2，G_3,...G_n,..., T=(G_1,G_2,G_3,...G_n,...) 构成的分子空间族 T，称为点的（contractible），如果：1. 由一个点组成的平凡分子空间 K(1) 属于 T。2. 族 T 中的任意分子空间都可以通过点变换由平凡分子空间得到。族 T 中的所有分子空间都称为点的（contractible）。

点变换的定义

以下变换称为点变换（可收缩变换）：1. 删除点 v。如果点 v 的邻域 O(v) 是一个点分子空间，即 O(v) 属于 T，则可以从分子空间 G 中删除点 v。2. 粘接点 v。

2. 分子空间的点变换　23点 v 可以沿分子子空间 G_1, 粘接到分子空间 G 上，也就是说，点 v 与分子空间 G_1，中的所有点都通过连接相连，前提是 G_1 是一个点分子空间，即 G_1 属于 T。

3. 删除连接 (v_1v_2)。
如果连接 (v_1v_2) 所连接的分子空间 G 中两个相邻点 v_1 和 v_2 的公共边界 $O(v_1,v_2)$ 是点分子空间，即 $O(v_1,v_2)$ 属于 T，则可以删除该连接。

4. 添加连接 (v_1v_2)。
如果分子空间 G 中两个不相邻点 v_1 和 v_2 的公共边界 $O(v_1,v_2)$ 是点分子空间，即 $O(v_1,v_2)$ 属于 T，则可以用连接 (v_1v_2) 将这两点连接起来。

显然，所有点分子空间构成的族 T 都可以通过依次应用变换 1-4，从平凡分子空间 K(1) 得到。图12 示意性地展示了点变换。若点 v 或连接 (v_1v_2) 的 O(v) 或 $O(v_1v_2)$ 是点分子空间，我们就称该点或连接为点的。

点变换在分子空间理论中发挥着重要作用。它们能够建立两个……之间的连接。

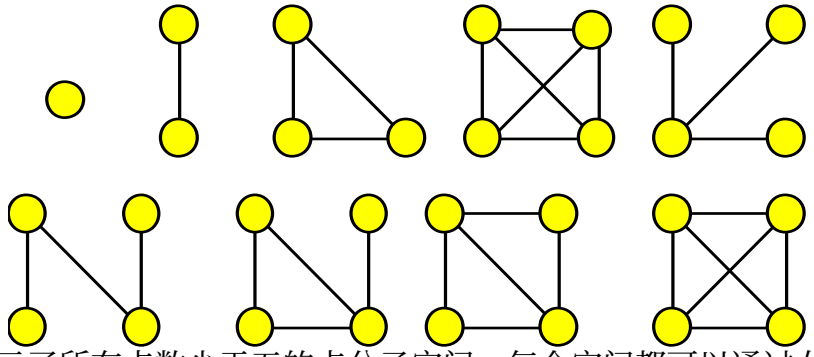


图 14 展示了所有点数少于五的点分子空间。每个空间都可以通过右上方所示的点删除，将其收缩到一个点。

分子空间是两个拓扑等价的连续曲面的离散像。也就是说，如果两个曲面拓扑等价，那么其中一个曲面的分子空间可以通过应用点变换转化为另一个曲面的分子空间。然而，点变换的范围更广，更接近于同伦地

等价空间之间的变换。换言之，如果两个曲面同伦等价，那么它们的分子空间便由一系列点变换联系起来。我们将在下文讨论这一点。

现在我们再引入一个定义，结合前文所述，其含义会更加清楚。

同伦空间的定义

两个分子空间 G 和 H 称为同伦等价或同伦（G~H），如果其中一个可以通过点变换由另一个得到。

根据此定义，所有点状分子空间都与平凡分子空间 K(1) 同伦。图14展示了点数不超过四个的所有点状分子空间。我们将证明几个对后续内容至关重要的定理，它们具体阐述了点变换的性质。

定理1

每个具有 n 个连通点的点束 $K(n)$ 都是点式分子空间。

证　明。
使用数学归纳法。对于较小的 n，分子空间的点性可直接验证。假设对于任意 n，K(n) 都是点的。显然，分子空间 K(n+1) 可由分子空间 K(n) 通过将点粘接到 v 分子空间 K(n)=O(v) 得到，这是一个点变换 2。因此，K(n+1) 是点的。定理得证。□

下面的定理是定理 1 的推广，也是证明许多其他命题时的重要工具。

定理 2

任意分子空间 G 的锥 $v\oplus G$ 都是点空间。

证　明。
对于点数较少的分子空间，定理可直接验证。假设对于点数为 $|G| \le n$ 的所有分子空间 G，定理均成立，即分子空间 $v\oplus G$ 都是点空间。设 G 是一个点数为 n+1，$|G|= n+1$ 的分子空间。选取分子空间 G 中两个不相邻点 v_1 и v_2 。那么，它们在 $v\oplus G$ 中的邻域 $O(v_1v_2) = v\oplus(O(v_1v_2)|G)$ 是一个锥。由于 $|O(v_1v_2)|G|<n$，因此由

根据归纳假设可知，邻域 $O(v_1v_2) = v\oplus(O(v_1v_2)|G)$ 是一个点分子空间，因此我们可以用一条边连接点 v_1 和 v_2 。对分子空间中所有不相邻的点重复这一操作，我们便得到一个具有 n+2 个点的完全分子空间 K(n+2)，根据前面的定理，它是一个点分子空间。按照相反的顺序去除相同的边，我们通过点变换从点分子空间 K(n+2) 转换到原始空间（图 13）。因此，v⊕G 也是可缩的。证明至此完成。□

定理 3

每个点式 *MΠ* 都是连通的。证 明。

对于点式 MΠ，当点数较少时，定理可直接验证

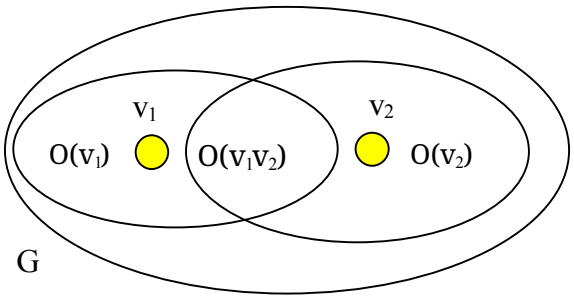


图 15 如果 G 是可缩的，且点 v1 与某些点不相邻，那么其中必有一个可缩的点 v2。

。假设对于所有点数为 |G|<n 的分子空间 G，定理均成立。设 G 是一个点数为 n 的点空间。粘接一条边或一个点显然会保持空间的连通性。删去一个点或一条边后，由于点子空间 H |H|<n 连通，因此 G 的连通性也不会受到破坏。定理得证（图 16）。□

我们引入一个在点数较少的 MΠ 上容易验证的公理。

公 理。

设 G 是一个点式 MΠ，其点 v 与 G 中至少一个点不相邻。那么至少存在一个与 v 不相邻的点 u，使得它们的公共边界 O(vu) 是一个点子空间（图15）。

这个公理可以有几种不同的表述方式。例如，可以将定理4作为公理。

对于点数较少的分子空间，可以直接验证该公理。也许今后能够将这个公理作为定理证明。

定理4

设 *G* 是一个点数大于 *1* 的点式 *MП*。那么它至少有两个可缩点

证 明

假设 MП G 中的点 v 与其余所有点相邻，即 G=v⊕U。那么 MП U 中的任意点都是可缩的，因为它的邻域是一个锥。假设 G 不是锥。设 V =(v_1,v_2,... v_n) 是一个点集。选取 v_1 и，并根据公理与一个不相邻的点 v_p建立连接，因为 O(v_1v_p) ∈ T。重复

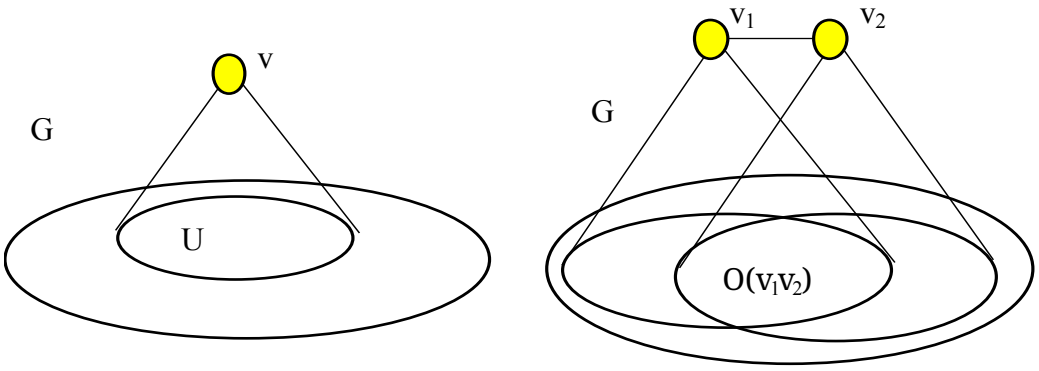


图 16 将点 v 沿点子空间 U 粘贴到点分子空间 G 上时，连通性保持不变。同样，沿点 v1v2 的公共邻域 O(v1v2) 粘贴边 (v1v2) 时，连通性也保持不变。

这一过程持续进行，直到将 v_1 与分子空间 MП G 中所有其他点连接起来。显然，最后一个点 v_s 是点，因为在建立所有先前的边之后，O(v_1v_s) = O(v_s)。我们在 G 中得到第一个点。重复同样的过程，从点 v_s 开始。我们得到第二个点 v_2。定理得证。□

这个定理在本节中有许多应用。下面的大多数定理都会用到这个定理。

推　论

由定理 4 可得以下命题：在点分子空间 G 中，对于任意点 v，都存在一个与它不同的点。

定理 5

*B*任意由 *n* 个点构成的可缩分子空间，都可以通过缩减连接得到　　*u*

n 个点上的 *K(n)*，反之亦然。此过程中，与任意给定点关联的边可以最后删除（图 17）。

证　明。
假设 G = v_1⊕U 是一个锥，V=(v_1,v_2,...v_n) 是它的点集。我们可以粘接任意一条边 ($v_p v_s$)，因为 O($v_p v_s$) 是一个锥，因而是可缩的子空间。粘接所有缺失的边，即得到 K(n)。按相反顺序去掉这些边，就能从 K(n) 得到 G。

设 G ≠ v_1⊕U。根据公理，选取一个与 v_1 不相邻的点 v_s，使得 O($v_1 v_s$) 是可缩的子空间。用一条边连接这两个点，并重复这一过程，直到补齐所有连接点 v_1 与其余各点的边。其余边可以按任意顺序粘接，从而得到簇 K(n)。去掉

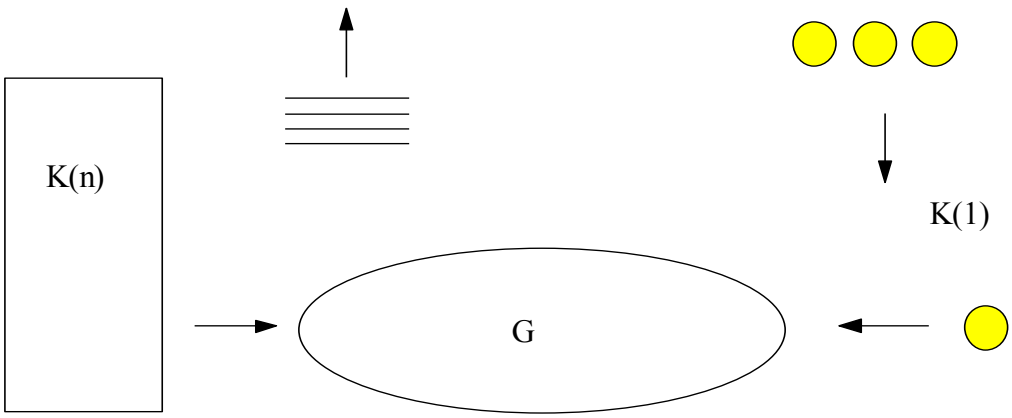


图 17 左侧。任意点分子空间 G，|G|= n，都可以通过仅舍弃连接，从超边 K(n) 得到。右侧。任意点空间 G，|G|= n，都可以通过仅粘接点，从单点分子空间 K(1) 得到。

按相反顺序进行边的运算，便可从 K(n) 得到 G。证明完毕。□

我们想再次强调，MΠ G 只能通过删除边的运算从分子空间 K(n) 得到，且不涉及分子空间中的点。

下面的定理说明，只需将点粘贴到单点分子空间 K(1) 上，就能得到可缩的分子空间 G。

定理6

任何可缩的分子空间都可以通过将点逐点粘贴，从平凡分子空间 *K(1)* 得到，反之亦然（图 17）。

证　明。
对于点数较少的点式 MΠ，定理可直接验证。

设 G 是一个可缩的 MΠ。那么根据定理，它至少有两个可缩的点，其中一个可以舍去。继续舍去的过程，我们得到一个单点 MΠ K(1)。按相反顺序粘上各点，便可从 K(1) 得到 G。证明完毕。□

该定理的要旨是，实际上没有必要使用

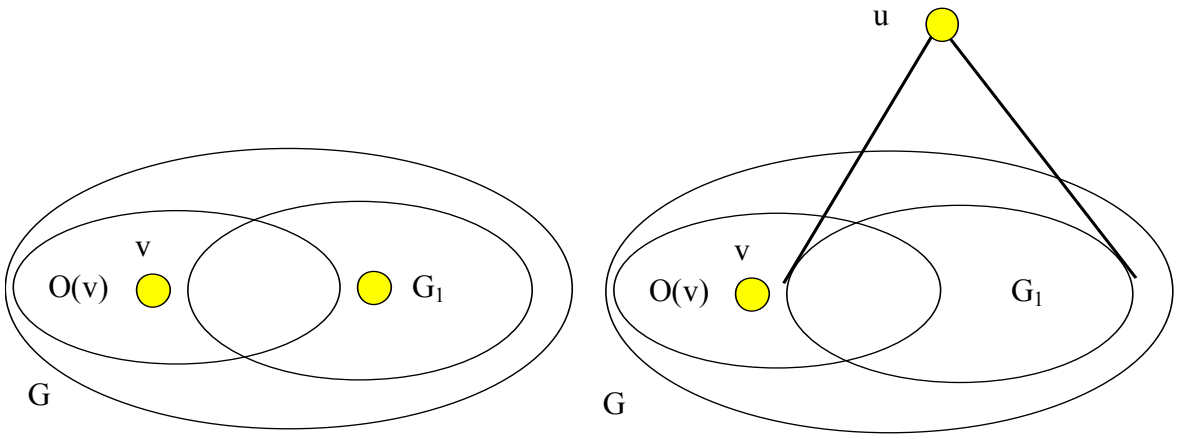


图 18 在点分子空间 MΠ G 中，对于任意不与 G 重合的点子空间 G1，存在一个不属于 G 的点顶点 v。

连接的粘接和删除。只需处理点即可。利用该定理，可以仅通过粘接和删除点来定义点变换。

B 点空间的定义

分子空间 $G_1, G_2, G_3,...G_n,..., T = (G_1,G_2,G_3,...G_n,...)$ 的族 T 称为点状（可收缩），如果：1. 由一个点组成的平凡分子空间 K(1) 属于 T。2. 族 T 中的任意分子空间都可以通过点变换从平凡分子空间得到。族 T 中的所有分子空间都称为点状（可收缩）。

点变换的定义 B

以下变换称为点式变换（可收缩的）：1. 删除点 v。如果点 v 的邻域 O(v) 是点式分子空间，也就是说 O(v) 属于 T，则可以删除分子空间 G 中的点 v。2. 粘附点 v。如果 G_1 是点式分子空间，也就是说 G_1 属于 T，则可以将点 v 粘附到分子空间 G_1，上，即与分子空间 G_1，中的所有点建立连接。

定理7

设 G 是点式分子空间，G_1 是它的一个不同于 G 的点式子空间。那么 G 中存在一个不属于 G_1 的点 $v($（图 18）。

证 明。
将点 u 粘接到 G 上，使得 $O(u)=G_1$。所得的分子空间 $G\cup(u\oplus G_1)$ 是点状的。根据推论，对于 $G\cup(u\oplus G_1)$ 中的 u，存在一个与 u 不相邻的点状点 v。因此，v 不属于 G_1。证明完毕。□

定理8

设 G 和 G_1 是点状分子空间，且后者是 G 的点状子空间，并且不等于 G。那么，G_1 可以通过依次粘接点而变为 G，且每一步都仍是 G 的子空间。

证 明。
将点 v_1 粘接到 G 上，使得 $O(v_1) = G_1$（图19）。所得分子空间 $G\cup(v_1\oplus G_1)$ 是点式的。根据公理，存在一个与 v_1 不相邻的点 v_2，使得 $O(v_1v_2) = O(v_2)\cap G_1$ 是点式分子空间。在 $G\cup(u\oplus G_1)$ 中建立边，等价于按照 $O(v_2)\cap G_1$将点 v_2 粘接到分子空间 G_1 上。显然，可以继续对与点 v_1 关联的边进行点粘接，直到

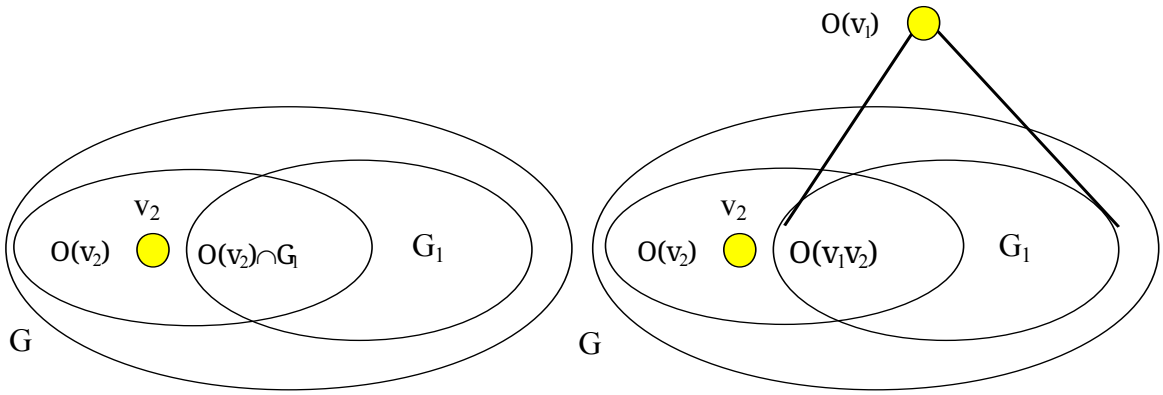


图 19 按照点式子空间 $O(v2)\cap G_1$ = 将点粘接到子空间 G1上 O(v1v2) 等价于在分子空间 G 中粘接点 v1 和 v2 之间的边。

点 v_1 不会与分子空间 G 中所有其他点相邻（图18，图19）。这个过程等同于将点粘到分子空间 G_1 上。此时，G_1变为 G。证明结束。□

定理9

$G \in T, G\text{-}v \in T \Rightarrow O(v) \in T;$
$G \in T, O(v) \in T \Rightarrow G\text{-}v \in T;$
$O(v) \in T, G\text{-}v \in T \Rightarrow G \in T.$

证 明。
这三个断言直接由点粘接和丢弃点的定义得出。□

定理10

设 H 是任意 $M\Pi$，G-是它的可缩子空间（图20）。按 G 将点 v 粘接到 H 上，可以改为将 v 粘接到 G 中任意一点，再依次粘接 v 与 G 中其余各点之间的连接。

证 明。
设点 v_1 属于 G，$v_1 \in G$。用一条连接将 v 和 v_1 连接起来。显然，分子空间 G∪v 仍是点状的（图 20）。假设我们已经粘贴了点连接 (vv_1)、(vv_2)、(vv_3)、……(vv_{k-1})。由于 G∪v 仍是点状的，因此根据公理，在 G 中存在一点 v_k，使得 $O(vv_k)\cap G$ 是一个点状子空间，这意味着 v 和 v_k 可以用一条连接连接起来。这样，我们就可以粘贴 v 与 G 之间的所有连接。证明完毕。
□

同伦空间及其性质

如前所述，如果两个分子空间 G 和 H 中的一个可以通过点变换由另一个得到，则称它们为同伦等价的或同伦的。

定理11

设 G 是一个带基点的分子空间，v 是其中任意一点。那么 $G\text{-}v$ 与 $O(v)$ 同伦，并且 $O(v)$ 可以通过将点粘接到 $G\text{-}v$（（图21）。

证 明。
根据该公理，点关联分子空间 G 中的任意点 v 都可以通过依次粘接点关联，将其与所有不相邻的点连接起来。在 G 中粘接点关联（图 21）等价于将点粘接到 O(v) 上。因此，G- v 与 O(v) 同伦，并且可以通过将点粘接到后者而从 O(v) 得到。证明结束。□

利用上述得到的结果，考察非点空间中空间与其子空间之间的连接。

嵌入同伦空间的定义

如果空间 H 的子空间 G 可以通过不影响 G 的点变换收缩到 G，那么称 G 是嵌入的，并且与非点空间 H 同伦。（显然，此时 G 与 H 同伦，G~H。）

这个定义意味着，所进行的点变换不会改变子空间 G 的点及其间的边。只有 H-G 中的点可以被删除；只有不同时属于 G 的点之间的边才可以被删除或建立。一般来说，可以假设分子空间 H 通过涉及 G 中的点和边的变换收缩到 G，也就是说，在收缩过程中 G 会发生变化。究竟是否如此

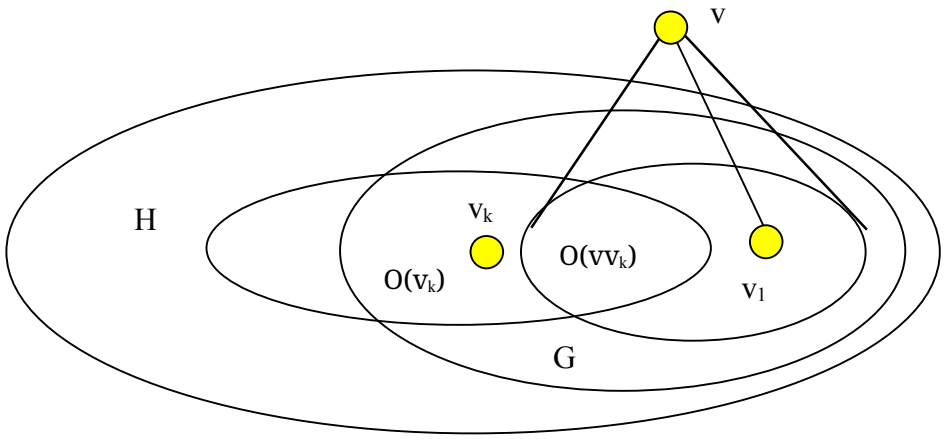


图 20 点 v 与子空间 G1 的点 v1 通过一条边连接。随后在 v 与子空间 G1 的其余各点之间建立连接。

目前尚不清楚。我们将这个问题表述为一道题。

题 目

证明或反驳以下命题：设空间 H 的无点子空间 G 与 H 同伦。那么 G 嵌入于 H，且与 H 同伦。

定理 12

设非点式 *MП G* 嵌入于 *H* 且与 *H* 同伦。那么，将点 *v* 沿 *G* 粘接到 *H* 所得到的 *MП O(v)=G* 是一个可缩空间。

证 明

根据嵌入于 H 的子空间 G 的定义，G 可以由 H 经过不影响 G 的可缩变换得到。标记这些变换后，将点 v 与 H 中的所有点连接起来。随后，按照将 H 变换为 G 时舍弃点 v 与 H 中那些点之间连接的相同顺序，舍弃这些连接（图22）。显然，舍弃这些连接也将是可缩的

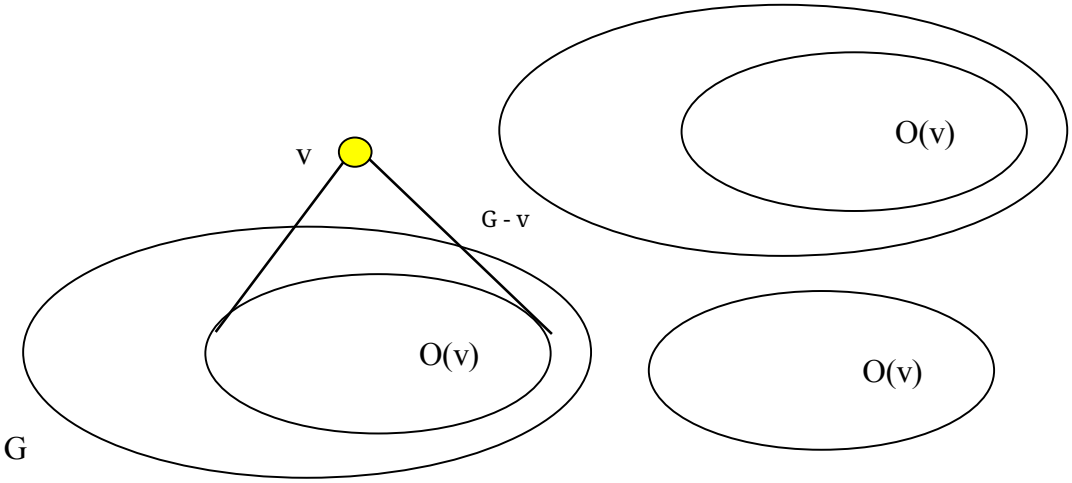


图 21 如果分子空间 G 是一个点，则邻域 O(v) 与子空间 G-v 同伦等价。

变换。因此，点空间 H⊕v 收缩为 H∪(G⊕v)，后者也将是点空间。定理得证。□

需要注意的是，与点空间不同，分子空间 H 及其嵌入且与之同伦的子空间 G 的连通性不受任何限制。

定理 13

设子空间 *G* 嵌入且与 *H* 同伦。如果 *H* 不包含具有点邻域的点，则 *H*=*G*..

证 明。

反设：H≠G。将点 v 与 H 中 G 的所有点连接起来。由此得到的空间 H∪(G⊕v) 根据前一个定理是点空间。因此，对于点 v，必定存在一个邻域为点空间的不相邻点。由于根据条件不存在这样的点，因此我们的假设不成立。这意味着 H=G。证明结束。□

也将为正规分子空间证明类似的定理。

下面的定理可以进一步明确将非点分子空间变换为其嵌入的同伦

子空间的过程。事实证明，变换序列可以简化为仅删除点，而无需建立或删除点与点之间的连接。

定理14

> 设 H 和 G 是非带基点的分子空间，且 G 是 H 的嵌入同伦子空间，并且 $H \neq G$。那么可以通过依次删除不属于 G 的点，将 H 转化为 G。

证明。
将点 v 粘接到 H 上，使得 $O(v_1) = G$（图 23）。所得空间 $H \cup (G \oplus v)$ 是可缩的。根据公理，存在一个与 v 不相邻的点 v_1，使得 $O(vv_1) = O(v_1) \cap G$ 是点式 MΠ。在 $H \cup (G \oplus v)$ 中建立边，等价于将点 v_1 按 $O(v_1) \cap G_1$ 粘接到 MΠ G 上。显然，与点 v 关联的边可以逐一进行点粘接，直到点 v 与 MΠ H 中所有其他点都相邻。这个过程等价于将点粘接到 MΠ G 上。与此同时，G 变为 H。按相反顺序从 H 上剥离点，就能使 H 变为 G。证明完毕。
□

在图 24 中，空间 H 是一个非点空间，包含由点 $v_1, v_2, v_3,$ 和 $v_4,$ 构成的正规圆G，该圆是一个嵌入的同伦子空间。根据定理，H 仅通过舍弃未编号点而收缩到 G，无需借助连接。最后几个定理

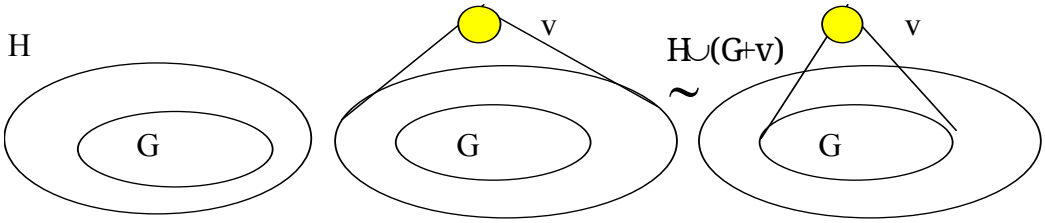


图 22 空间 G 嵌入 H 中。添加点 v，O(v)=G，将 H 转变为点空间。

具有重要的理论意义。这些定理的意义在于，分子空间可以仅通过粘接或删除点，从任何与其同伦的其他分子空间得到，而无需涉及连接的粘接或删除。鉴于此，我们希望提出一个尚未解决、但看起来显而易见的问题。

问 题。

如果两个具有相同数量点的分子空间 MΠ G 和 H 同伦，那么其中一个可以通过一系列

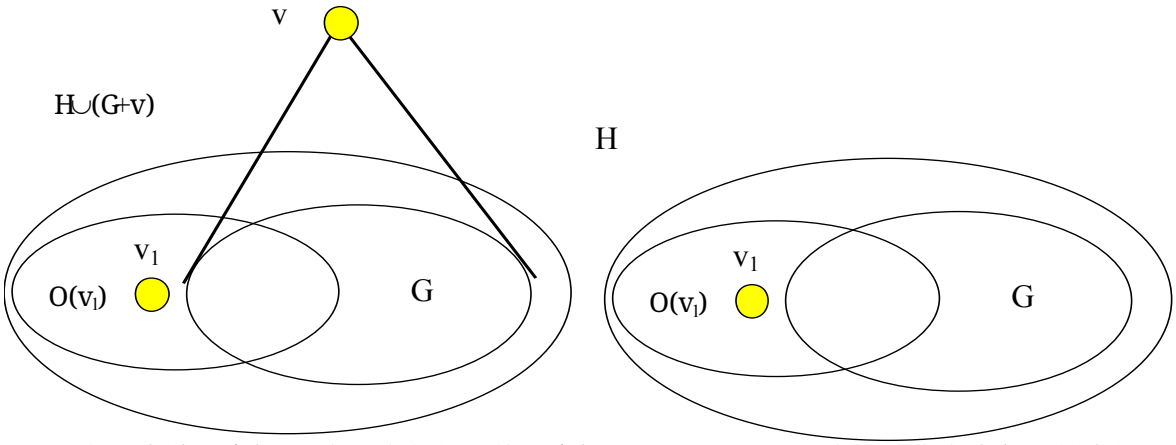


图 23 在无点分子空间 H 中，嵌入的同伦子空间 G 可以通过从 H 中删除带有点邻域的点得到。

点删除与连接的粘接。（与点定理比较）。

分子空间的重构

我们有四个分子空间的点变换：通过点邻域进行粘接和去除点，以及当两点的公共边界是点子空间时，粘接和去除两点之间的边。设由点（v_1,v_2, v_3,...v_d）组成的空间 G，通过点变换序列 Φ_1,Φ_2,Φ_3,...Φ_n变为空间 H。我们希望构造某个新的空间，它包含 G 和 H 作为子空间，并且属于与 G 和 H 相同的空间类，即与它们中的每一个都同伦。引入直积 $G\otimes K(2)=G\otimes K(u_0,u_1)$，它与 G，$G\otimes K(2)\sim G$ 同伦。显然，它可以表示为两个空间 G 的副本。记 $G_0=G\otimes u_0$ 和 $G_1=G\otimes u_1$。子空间 G_0 的所有点 $v_k\otimes u_0$, 都具有形如 $O(v_k\otimes u_0)= (v_k\otimes u_1\oplus O(v_k)\otimes u_0)\cup O(v_k)\otimes u_1$的点邻域。同样，子空间 G_1（以及 G_0）的所有点 $v_k\otimes u_1$, 都具有形如 $O(v_k\otimes u_1)=(v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes u_1)\cup O(v_k)\otimes u_0$的点邻域。对 G_1 应用点变换 Φ。该变换在 $G\otimes K(2)$ 中也将是点变换。应当强调，$\Phi(G_1)(G\otimes K(2))\neq(\Phi_1 G)\otimes K(2)$。得到的空间已经不再是直积，因为其上已经实施了变换 Φ。它与 G 同伦，$\Phi(G_1)(G\otimes K(2))\sim G\otimes K(2)\sim G$，并且由两层组成：一层 G_0 是空间 G，另一层 G_1 是空间 $G_1=\Phi_1 G$。

定理15

对于任意空间 *G*，直积 *G⊗K(2)*，其中 *K(2)* 是由两个点组成的连结，同伦于 *G*（图 26）。

证　明。

该定理可直接由直积的性质得出。□

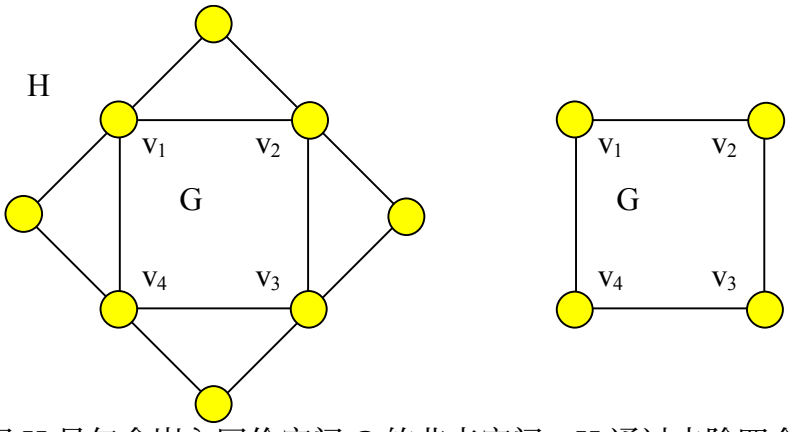


图 24 空间 H 是包含嵌入同伦空间 G 的非点空间。H 通过去除四个点收缩到 G

下面给出上述重要构造的定义。

定义 ind　　уцир化的点删　　реобр除在 G⊗K(2) 上的变

设 Φ 是点删除操作，可以删除 $G=(v_1,v_2,v_3,...v_d)$ 中的点 v_k，或边 $(v_k v_p)$，分别涉及 $O(v_k)$ 或 $O(v_k v_p)$。那么，点删除 Φ 在 G⊗K(2) 中诱导出删除操作 $\Phi(G_1)$，分别删除点 $v_k \otimes u_1$，或边 $((v_k \otimes u_1)(v_p \otimes u_1))$。设 Φ 是点粘接操作，沿着点子空间 O(v) 或 $O(v_k v_p)$，将点 v 或边 $(v_k v_p)$ 粘接到 $G=(v_1,v_2,v_3,...v_d)$ 中。那么，点粘接 Φ 在 G⊗K(2) 中诱导出粘接操作 $\Phi(G_1)$，分别沿子空间 $O(v)\otimes K(2)$ 或 $O(v_k v_p)\otimes K(2)$，粘接点 $v \otimes u_1$，或边 $((v_k \otimes u_1)(v_p \otimes u_1))$（图 26，图 25）。变换 $\Phi(G_1)$ 称为 G⊗K(2) 上诱导的点变换。

定理 16

G⊗K(2) 上由 $\Phi(G_1)$ 诱导的变换总是点变换。证 明。

实际上，这已经可以从前面的讨论中得出。设 $O(v_k)$ 是 G 中的点邻域，并且可以删去点 v_k。那么 $O(v_k\otimes u_1)=v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes K(2)$。

由于点 $v_k\otimes u_0$ 与 $O(v_k\otimes u_1)$ 中所有其他点都相邻，因此 $O(v_k\otimes u_1)$ 是一个锥（一般而言，这与 $O(v_k)$ 的形式无关），并且，

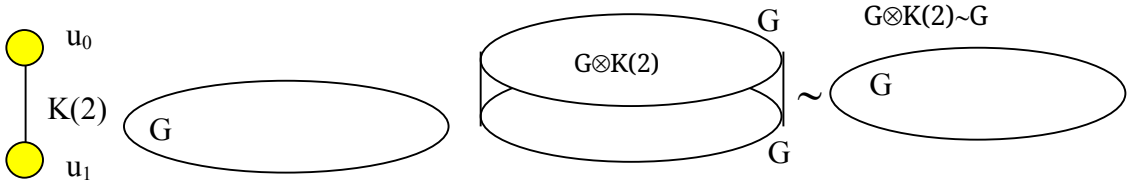


图 26 空间 G 与二点超边 K(2) 的直接乘积包含作为嵌入子空间的 G，并且与 G 同伦。

因此，它是一个点空间（图 27）。设 G 中的 $O(v_kv_p)$ 是一个点的公共邻域，并且可以舍弃连接 (v_kv_p)。那么 O((v k⊗ 1 p⊗ 1 = k⊗ 1 ∩ p⊗ 1 = [k⊗ 0⊕ k ⊗ 1 ∪ k ⊗ 0]∩[p⊗ 0⊕ u)(v u)) O(v u) O(v u) (v u O(v) u) O(v) u (v u O(vp)⊗u1)∪O(vp)⊗u0]=v k⊗u0⊕ vp⊗u0⊕O(vkvp)⊗K(2)。由于点 $v_k\otimes u_0$ 和 $v_p\otimes u_0$ 与 $O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))$ 中的所有其他点相邻，因此 $O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))$ 是一个锥（一般而言，与 $O(v_kv_p)$ 的形式无关），因而是一个点空间。

因此，删去点或边时，变换 $\Phi(G_1)$ 始终是可缩的。设 Φ 是 G 中按 O(v) 粘接点 v 的点粘接。考察 G⊗K(2) 中的 $O(v\otimes u_1)$。根据定义，$O(v\otimes u_1)= O(v)\otimes K(2)$ 等于

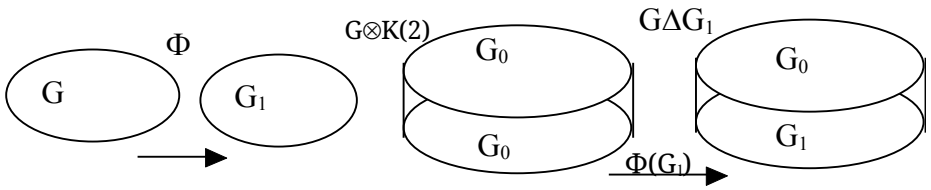


图 25 通过按点邻域粘接点，将空间 G 变换为 G1 的点变换 Φ。它诱导出空间 G⊗K(2) 到空间 GΔG1 的点变换 Φ(G1)。粘接的点 v 归属于 G1。

两个可缩空间的直积，因此也是可缩的。现在设 Φ 是在 $O(v_kv_p)$ 下对 G 中的边 (v_kv_p) 进行的点粘接。考虑 G⊗K(2) 中的 $O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))$。显然，$O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))= O(v_kv_p)\otimes K(2)$ 是两个可缩空间的直积，因此也是可缩的。因此，

$\Phi(G_1)$所诱导的粘合是点粘合。定理得证。□

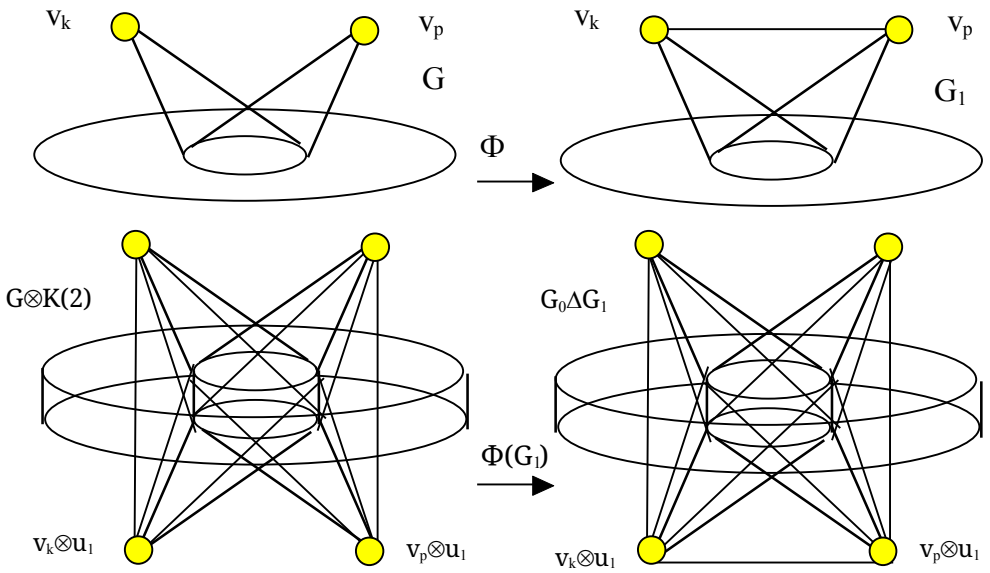


图 27 通过在点之间粘接边，对邻域上的空间 G 进行点变换 Φ，得到空间 G1。它诱导出点粘接边 Φ(G1)，连接点 vk⊗u1 和 vp⊗u1，即将空间 G⊗K(2) 点变换为空间 GΔG1。所建立的边 ((vk⊗u1)(vp⊗u1)) 归属于 G1。

空间上的单步 Φ 重构或塔的定义 G.

空间 $G=(v_1,v_2,v_3,...v_d)$上的单步 Φ 重构（图28）或塔，是指由 $G\otimes K(2)=G\otimes K(u_0,u_1)$得到的空间 $G_0\Delta G_1$,，并对其施加诱导的点变换 $\Phi(G_1)$，$G_0\Delta G_1=\Phi(G_1)(G\otimes K(2))$。其中 $G_0=G$ 由 $G\otimes u_0$,$G_1\approx \Phi G$ 的点构成。

我们将单步重构的性质表述为一个定理。

定理17

空间 $G_0\Delta G_1$ 上的一步重构空间，是具有以下性质的空间：$G_0\Delta G_1$ 同伦于 G_0, 和 G_1, ，其中 $G_0= G\otimes u_0\approx G$，而$G_1=\Phi G$。$G_0\Delta G_1$ 可通过顶点点删除收缩到 G_0, 或 G_1。 $G_0\Delta G_1$ 可视为 G_1.上的一步重构

证 明。

证明 $G_0\Delta G_1$ 同伦于 G_0, , 也同伦于 G_1, , 其中 $G_0= G\otimes u_0\approx G$, 而 $G_1= \Phi G$。由于 $G_0\Delta G_1\sim G_0\otimes K(2)$, 且 $G_0\otimes K(2)\sim G$, 因此 $G_0\Delta G_1\sim G\sim G_1= \Phi G$。证明 $G_0\Delta G_1$ 可以通过顶点点删除收缩到 G_0。

假设, $\Phi(G_1)$ 在 $G_0\otimes K(2)$ 中是去除点 $v_k\otimes u_1$, 其点邻域为 $O(v_k\otimes u_1)=v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes K(2)$, 其中 $O(v_k)$ 是点空间。任意形如 $v_p\otimes u_1$ 的点的邻域由表达式 $O(v_p\otimes u_1)=v_p\otimes u_0\oplus(O(v_p)\otimes K(2))$ 确定, 当 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_1$ 不相邻时, $O(v_p\otimes u_1)=v_p\otimes u_0\oplus(O(v_p)\otimes K(2)-(v_k\otimes u_1))$, 当 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_1$

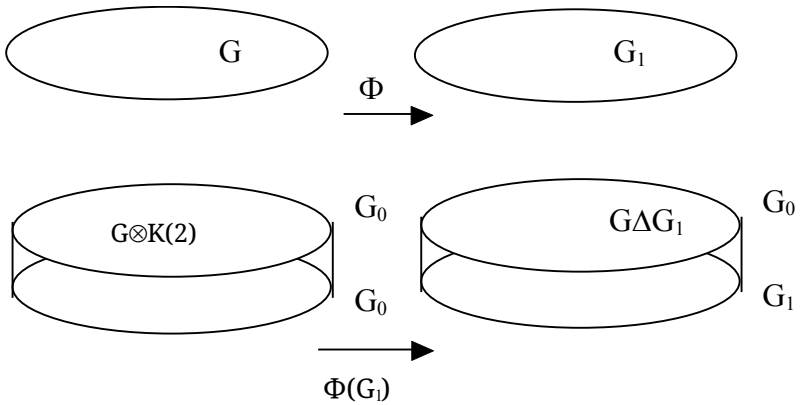


图 28 空间 G 到空间 G1的点变换 Φ 诱导出空间 G⊗K(2) 到空间 GΔG1的点变换 Φ(G1)。GΔG1称为空间 G 的一步 Φ 重构。

相邻, 且是一个锥, 也就是说, 是点空间。因此, $G_1=(G\otimes u_1-(v_k\otimes u_1))$中的所有点都可以删除, 而$G_0\Delta G_1$ 可以通过删除点收缩到G_0 。假设$\Phi(G_1)$到K(2)中的映射是沿点子空间$O(v\otimes u_1)= O(v)\otimes K(2)$粘接点$v\otimes u_1$, 其中O(v)是点空间。则根据构造, 同一点$v\otimes u_1$ 在$G_0\Delta G_1$ 中的邻域是点状的, 因此可以删除该点。$G_0\Delta G_1$ 中任意其他点$v_k\otimes u_1$ 的邻域由表达式$O(v_k\otimes u_1)=v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes K(2)$给出。因此,

$O(v_k\otimes u_1)=v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes K(2)$ 是一个锥, 也就是说, 是一个可缩的空间。这意味着, G_1 中的所有其他点都可以删除, 并且通过这些点删除, $G_0\Delta G_1$ 可以收缩到G_0 。假设 $\Phi(G_1)$ 在 $G_0\otimes K(2)$ 中是通过点删除, 将点 $(v_k\otimes u_1)$ 和 $(v_p\otimes u_1)$ 之间的边 $((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))$ 删除到

子空间 $O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))=v_k\otimes u_0\oplus v_p\otimes u_0\oplus O(v_kv_p)\otimes K(2)$，其中 $O(v_kv_p)$ 是一个可缩的空间。显然，点 $v_s\otimes u_1$，的邻域是形如 $O(v_s\otimes u_1)=v_s\otimes u_0\oplus (O(v_s)\{v\otimes K(2)-A$ 的锥，也就是说，是一个可缩的空间（这里的形式

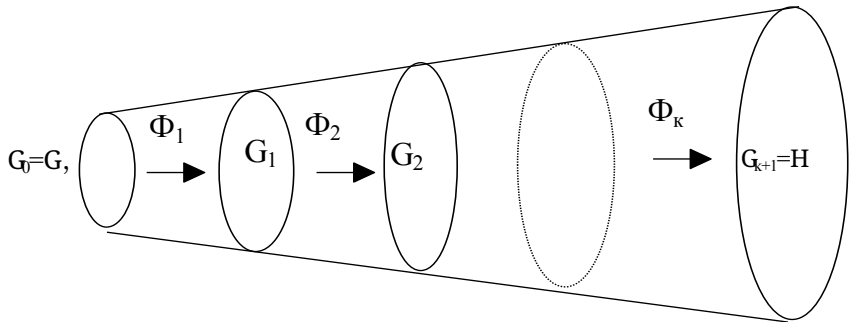


图 29 n 步 $\Phi1,\Phi2,\Phi3,...\Phi n$ 重构或空间 G 上方的塔是空间 $W=G_0\Delta G_1\Delta G_2\Delta G_3\Delta...G_n$，其中 $G_k\Delta G_{k+1}$，$k=0,1,2,...n$，均为一步重构，$G_{k+1}=\Phi_kG_k$，$G_0=G$，$G_{k+1}=H$。W 与 G、H 同伦。

A 无关）。这意味着，G_1 中的所有点都可以删除，并且 $G_0\Delta G_1$ 可以通过这些点删除收缩到 G_0。考虑 $G\otimes K(2)$ 中两个不相邻点 $(v_k\otimes u_1)$ 和 $(v_p\otimes u_1)$，它们的点公共边界由表达式 $O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))= O(v_kv_p)\otimes K(2)$ 给出，其中 $O(v_kv_p)$ 是一个单点空间。建立连接 $((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))$。此时，$G\otimes K(2)$ 将变为 $G_0\Delta G_1$。现在考虑 $G_0\Delta G_1$ 中的点 $v_k\otimes u_1$。$O(v_k\otimes u_1)=v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes K(2)\cup(O(v_kv_p)\otimes K(2)\oplus v_p\otimes u_1)$。这个邻域的形式表明，点 $v_p\otimes u_1$ 沿着点子空间 $(O(v_kv_p)\otimes K(2)\oplus v_p\otimes u_1)$ 粘接到单点空间 $v_k\otimes u_0\oplus O(v_k)\otimes K(2)$ 上。因此，$O(v_k\otimes u_1)$ 是单点空间，点 $v_k\otimes u_1$ 可以删除。同样的推理也适用于点 $v_p\otimes u_1$。考虑与点 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_1$ 相邻的点 $v_s\otimes u_1$,。容易看出，$O(v_s\otimes u_1)=v_s\otimes u_0\oplus(O(v_s)\otimes K(2)\cup(v_kv_p))$ 是一个点邻域，因此点 $v_s\otimes u_1$ 可以删除。建立连接 $((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_1))$ 时，其余所有点 $v_r\otimes u_1$ 的邻域都不变，并由表达式 $O(v_r\otimes u_1)=v_r\otimes u_0\oplus O(v_r)\otimes K(2)$ 给出。由于它们是锥，也就是单点空间，因此所有这些点都可以删除。这意味着，G_1 中的所有点都可以删除，并且 $G_0\Delta G_1$ 可以通过这些点删除收缩到 G_0。由此，我们证明了 $G_0\Delta G_1$ 可以通过删除 G_1中的点收缩到 G_0。现在考虑同一个

空间，但将其表示为 $G_1\Delta G_0$,；这可以通过在点 $v_s\otimes u_0$ 和 $v_s\otimes u_1$ 的记号中将 0 简单替换为 1、反之亦然来实现。此时

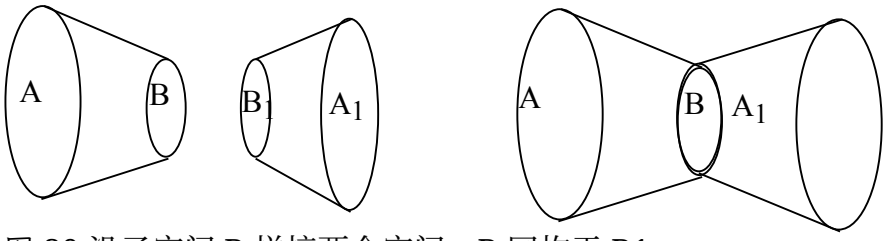


图 30 沿子空间 B 拼接两个空间，B 同构于 B1。

$G_0=\Phi^{-1}G_1$。容易看出，按照这种表示形式，前面的证明意味着，在 $G_1\Delta G_0$ 中，G_0, 中的所有点都可以被删除，并且 $G_1\Delta G_0$ 可以通过这些点删除收缩到 G_1。这一论证还证明，$G_0\Delta G_1$ 可以被视为 G_1 上的一步重构。定理得证。□ 假设空间 G 可以通过点变换序列 $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,...\Phi_n$ 转化为空间 H。第一步，我们构造一步 Φ_1 重构 $G_0\Delta G_1$, ，其中 $G_0=G$，$G_1\approx\Phi_1G_0$。下一步，我们在空间 G_1, 上构造一步 Φ_2 重构 $G_1\Delta G_2$ ，其中 $G_2=\Phi_2G_1=\Phi_2\Phi_1G_0$。将两个一步重构 $G_0\Delta G_1$ 和 $G_1\Delta G_2$ 沿 G_1 粘合，得到一个两步 $\Phi_1\Phi_2$ 重构 $G_0\Delta G_1\Delta G_2$。将这一过程重复 n 次，便得到一个空间，其一端是 $G_0=G$，另一端是空间 $G_n=H$。

n步扩展或在空间 G 上的塔的定义 n步$\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,...\Phi_n$ 扩展或在空间 G 上的塔称为空间 $W=G_0\Delta G_1\Delta G_2\Delta G_3\Delta...G_n$，其中 $G_k\Delta G_{k+1}$，k=0，1,2,...n，是一步扩展，$G_{k+1}=\Phi_kG_k$，$G_0=G$，$G_{k+1}=H$（图29）。由构造可 легко 得出这一构造的性质。

定理18

设空间 *G* 通过点变换序列 $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,...\Phi_n$.收缩到空间 *H*。

则存在空间 $W=G_0\Delta G_1\Delta G_2\Delta G_3\Delta...G_n$，其中 $G_0=G, G_n=H$，且具有以下性质：

• W 与 G 和 H 同伦，$W\sim G\sim H$.• W 包含 G 和 H 作为嵌入的同伦子空间，$G\subseteq W, H\subseteq W$.• 通过点删除，$W$ 的顶点可以收缩到 G，也可以收缩到 H。

证　明。

构造一座 n步塔 $W=G_0\Delta G_1\Delta G_2\Delta G_3\Delta...G_n$，其上的空间带有点变换 $\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,...\Phi_n$，其中 $G_{k+1}=\Phi_k G_k$，$G_0=G$，$G_{k+1}=H$。根据前述结论，层 $G_n=H$ 中的任意点都可以通过点变换删除，因为它属于 $G_{n-1}\Delta G_n$的单点重构。逐层删除子空间 G_n、G_{n-1}、$G_{n-2}\Delta$、$...G_1$, ，即可将 W 化为 $G_0=G$。从子空间 $G_0=G$ 开始重复同样的点删除过程，即可将 W 化为 $G_n=H$。定理得证。□

所有这些构造的目的在于：对于任意一个由同伦空间组成的有限集合，都存在某个泛空间，它具有与给定空间相同的性质，并将这些空间包含为子空间。首先，我们回顾两个空间的粘合的定义。

两个空间的粘合定义

设 $G=A\cup B$ 和 $H=A_1\cup B_1$ 是两个分子空间，且子空间 B 同构于 B_1, $h: B\to B_1$。那么，称按照同构 h 粘合 G 和 H 得到的空间为 $F=G\Diamond H=(G\cup H)/B=A\cup B\cup A_1=(G,B)\#(B,H)$，它包含来自 A、B 和 A_1, 的点，其中每个点 $v\in B$ 都与 $h(v)\in B_1$等同。

定理19

设有一个有限的同伦空间集 $G_0,G_1,G_2,...G_n$，则存在一个空间 W_0，，具有以下性质。

*уюш*具有以下性质：

• *W0* 与 *Gk*，*k* 同伦*=0*，*1*，*2*，*...n*• *W0* 包含 *Gk*，*k=0*，*1*，*2*，*...n*，作为嵌入的同伦子空间，$Gk\subseteq W$.• 通过顶点的逐点删除，*W*0 收缩到任意一个 *G*k，k*=0*，1，2，...n。

证 明。对于每一对相邻空间 G_{k-1}, G_k, k=1,2,...n，根据前一个定理构造塔 $W_k=(G_{k-1},G_k)$。然后沿 G_k 将 $W_k=(G_{k-1},G_k)$ 与 $W_{k+1}=(G_k,G_{k+1})$ 粘合（将属于不同塔的点等同）。用 # 表示粘合操作，得到空间 $W_0=W_1\#W_2\#W_3\#...$ $W_n=(G_0,G_1)\#(G_1,G_2)\#(G_2,G_3)\#...(G_{n-1},G_n)$。容易看出，这个空间满足上述所有性质。定理得证。□

第 2 章参考文献。

15 Evako A.V., 《图上的某些可缩变换性质》, 《离散数学》, 1993年，未发表。26 Ivashchenko (Evako) A.V., 《用图表示光滑曲面。保持图的欧拉示性数不变的图变换》, 《离散数学》, 第122卷，第219–233页，1993年。43 Ивако А.В., 《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》, 莫斯科，1997年。49 Иващенко А.В., 《分子空间变换》, ВИНИТИ，莫斯科，第2345-85号，1985年。52 Иващенко А.В., 《点分子空间》, ВИНИТИ，莫斯科，第2344-85号，1984年。

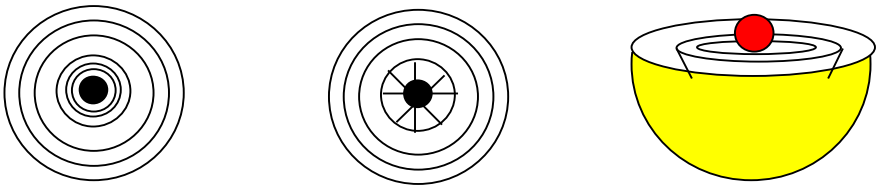
正规分子空间及其维数

在本章中，我们通过一组基于显而易见的几何背景的公理来定义正常分子空间的维数。此外，本章还介绍了一些著名空间的数字模型，例如 n 维球面、环面、射影平面、克莱因瓶以及 n 维欧几里得空间。

本章的一些结果见于文献 [3,7,10, 42,43,50,51]

用于确定分子空间维数的几何-直观基础

我们的任务是构造一个具有特定性质的分子空间，使其能够被视为连续 n 维空间的组合图像。为此，我们将在初等几何中选取那些从最基础层面描述邻近性、连续性和维数概念的特征，以便今后能够轻松过渡到连续空间的分子模型。我们将在此向读者展示的图景并非证明，但它能让人从直观层面理解分子空间理论中的维数是什么。



图E E 左侧。连续圆的内部包含无限多个半径逐渐减小的同心嵌套圆。中间。分子圆的内部始终包含有限个同心嵌套圆。右侧。分子球的内部与圆一样，始终包含有限个围绕中心点的同心嵌套球面。

Рассмотрим 3维（一般情况下为 n维）欧几里得空间 E^3, ，在其中选取某个点 p。设 D^3 是一个以点 p 为中心、半径为 R 的（三维）实心球。这个球的边界自然是（二维）球面 S^2。众所周知，所有具有任意中心和半径的这类球的集合构成 E^3 的拓扑基。球 D^3 内部包含其自身的

无限多个半径更小的同心嵌套球（图 ee）。

$D^3 \supseteq D^3_1 \supseteq D^3_2 \supseteq D^3_3 \supseteq \cdots\cdots D^3_n \supseteq \cdots\cdots,$

$R > R_1 > R_2 > R_3 > \ldots\ldots > R_n > \ldots\ldots,$

其中，R_n是D_n球的半径。

例如，我们可以按照公式 $R_n=R/(1+n)$ 选择半径。在图ee中，为了简单起见，我们绘制的是二维图像，而非三维图像。

现在假设空间是分子的。这幅图景会有什么变化？由于在分子空间中，任何有限体积都包含有限个元素，因此，球 D 由有限个点组成。这意味着，嵌套在 D 中的球序列总是有限的，而不像连续情形那样是无限的。

这一情形的直观例证是俄罗斯套娃：木制人偶内部套着一个更小的人偶，里面还有第三个，依此类推，直到最里面那个实心人偶，里面再也没有东西。这个数学对象的另一个直观例子是中国玩具，它由一系列骨球组成，每个球都从另一个球的内部镂刻而成，数量可达几十个，有时甚至上百个。也可以构想一些植物形象，例如把分子球看作卷心菜或洋葱。

对我们来说，这里重要的是：分子球的外表面是一个分子球面，可以像剥洋葱皮一样剥去其外层，从而得到一个更小的分子球。继续剥下去，我们将得到最小分子球，它由最后一个仍可剥去的层，以及该层内充当中心点的不可分割元素组成。因此，我们可以将最小分子球定义为一个被分子球面包围的中心点。球面上的点是离中心点最近的点。为明确这种邻近性，我们规定中心点通过连接与最近的分子球面上的每个点相连。

我们已经几乎得到了定义：分子最小三维球是一个被分子二维球面包围的点；一般而言，分子最小n维球是一个被分子 (n-1) 维球面包围的点。

正规分子空间及其维数的定义

现在我们来定义分子空间中的维数。维数是空间最重要的特征。这个概念经历了漫长的发展历程，起源可追溯到古代。然而，直到20世纪初，人们才形成了关于这一特征的现代认识。数学中有多种定义维数的方法，从最简单的参数方法（也用于物理学）到拓扑方法，不一而足。不过，这些方法都不适用于数字

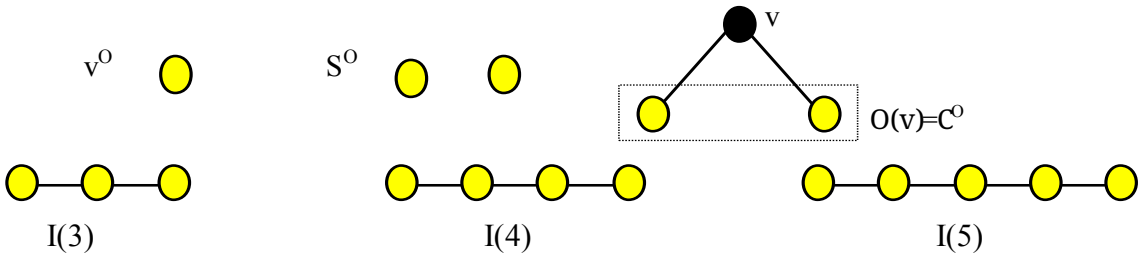


图 FF S0 是一个零维球面。点 v 是一维的，因为它的邻域是一个零维球面。I(3)、I(4) 和 I(5) 是一维线段，分别包含一个、两个和三个一维点。一维点是线段的内点。

建立在有限点集上的空间。其根本不适用性在于，经典数学的方法假定连续性和无穷性，而数字拓扑作为一门实用科学，根本不使用这些概念。因此，要么扩展经典概念，使其适用于数字空间；要么重新定义数字空间的维数。我们将采用第二种方法，在考虑下文将介绍的计算机实验的基础上，以公理化方式定义分子空间的维数。首先列举零维空间。我们有两种零维空间：零维点和零维球面。

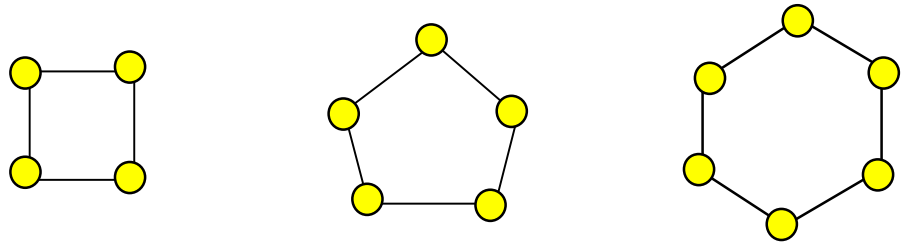
正常的零维点的定义

孤立（分离）点称为正规零维点（图 ff）。根据经典定义，零维球面由两个孤立点组成。我们将以便于使用的形式采用这一标准的零维球面定义。

0 维法向球面的定义

正常的零维球面 S^0 是由两个孤立点组成的分子空间（图 ff）。

这 两个空间限定了所有正常 x



S^1_1 S^1_2 S^1_3

图 GG 展示了三个一维正规球面 S11、S12 和 S13，它们分别由 4、5 和 6 个点组成。由 4个点组成的球面 S11 是极小的。

0维空间的集合。为了保持定义的顺序，我们约定：孤立点是带边界的0维正常空间，而正常的零维球面是唯一的0维闭空间。现在，借助上述几何方法，我们可以定义一维点，它不过是一维最小分子球的中心点。

一维正常点的定义（图 ff）。

如果点 v 的邻域 O(v) 是正规零维球面 S^0，则称分子空间 G 中的点 v 为一维正规点。

现在我们可以定义一维空间圆、线段和无限直线。今后我们将研究

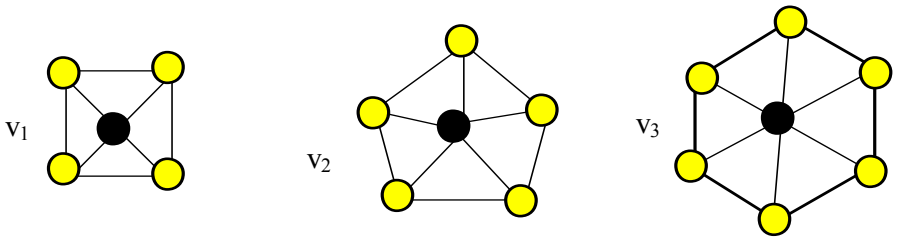


图 HH 中的点 v1、v2 和 v3是二维的，因为它们的邻域是一维球面。

主要是相连空间，其中每一对点都可以由一条链连接。

Опр定义 но p正常的 п p直线且从резка

由无限多个一维点组成的分子连通空间，将是正规无限直线。

直线的正规线段，或正规的带边界一维空间，将是由不少于三个点组成的连通空间，其中除两个端点外，所有点都是一维的；这两个端点的邻域各包含一个点。

图 ff I(3)、I(4) 和 I(5) 是由

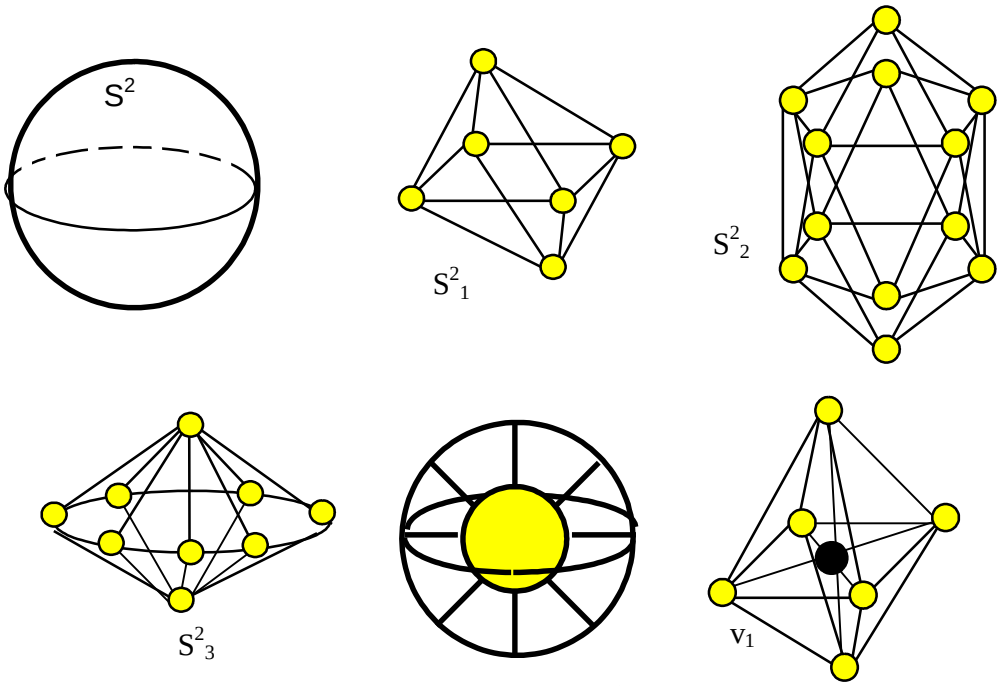


图 II 二维球面与三维点。二维球面上每个点的邻域都是一个圆周。二维球面 S^2_1 是最小的，由 6 个点组成——这是构成二维球面所需的最少点数。球面 S^2_2 由 12 个点组成，而球面 S^2_3 由 9 个点组成。点 v_1 是三维的，因为它的邻域是一个二维球面。

3、4 和 5 个点组成的一维线段。线段 I(3) 中只包含一个一维点。线段 I(4) 和 I(5) 中分别包含 2 个和 3 个一维点。所有这些线段的端点都只与一个点相邻，因此不是一维点。换言之，一维点是线段的内点。

对于接下来的内容，最重要的是一维球面（圆），下面给出它的定义。

正规圆周的定义[1]

由有限个点组成的连通空间 S，若其所有点都是正规的且是一维的，则称为正规闭一维球面（圆）（图 gg）。

容易看出，圆上的最小点数是 4。图 gg 展示了三个圆，点数分别为 3、4 和 5。圆是

唯一的闭正规一维空间。现在我们利用归纳法给出一般定义。

n 维正规闭空间的定义

设整数 n，n > 0。若有限点集上的连通空间 G 的任意一点的邻域都是正规 (n−1) 维闭空间，则称空间 G 为 n 维正规闭空间。

n 维正规点的定义

若空间 G 中的点 v 的邻域 O(v) 是正规 (n−1) 维闭空间，则称该点为 n 维正规点。

需要强调的是，直线段（图 ff）不是闭的正规空间，因为它并非所有点都是一维的；其中有一对端点例外。这种空间

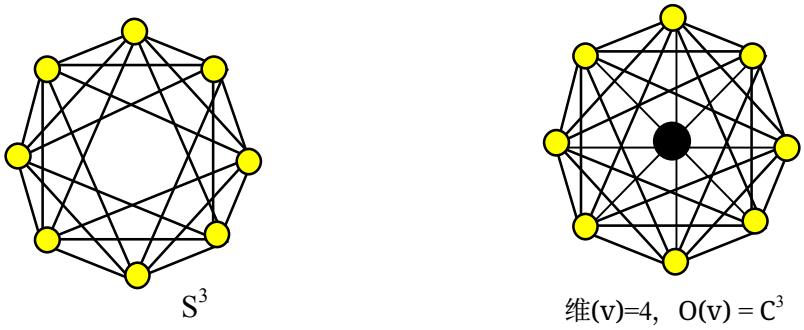


图 JJ 左侧是由 8 个点构成的三维球面 S3，这是构成三维球面所需的最少点数。右侧是一个四维点，

称为带边界的空间，我们将在后文研究这类空间。还应指出，在经典维数理论中，有一个与上述定义 [40,41] 类似的拓扑空间维数定义。这就是所谓的小归纳维数 ind X。除此之外，还有维数 Ind X 和 dim X，以及其他维数。对于分子空间，也可以类比 Ind X 和 dim X 引入维数。不过，它们之间的差异不大，因此本书始终采用上述定义。

记　号。

如果点 v 或空间 X 的维数为 n，我们将使用记号 раз(v) 或 раз(X)。

我们来看不同维数的分子空间示例。图 hh 展示了二维点是如何形成的。点 v_2, v_3 和 v_4

之所以是二维的，是因为它们的邻域是一维球面。在图 ii 中，我们描绘了二维球面和三维点。二维球面上每个点的邻域都是圆周。二维球面 S^2_1 是最小的，它由 6 个点组成，即形成二维球面所需的最少点数。球面 S^2_2 由 12 个点组成，而球面 S^2_3 由 9 个点组成。

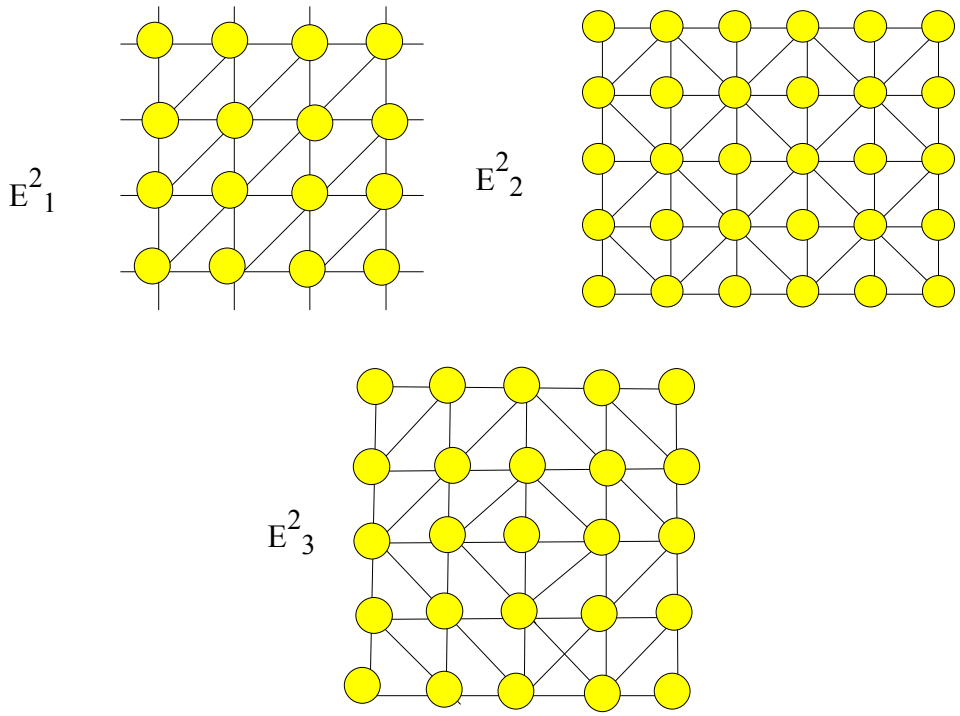


图 KK 分子二维平面的不同实现。E^2_1由两种点组成，E^2_2是均匀的二维平面，E^2_3是中心对称分子平面。

很容易看出，S^2_1 和S^2_2 是齐次的，也就是说，其中每个点的邻域都相同，或者说彼此同构。已经证明，除S^2_1 和S^2_2外，不存在其他齐次球面。点 v_1 是三维的，因为它的邻域是一个二维球面。

图jj中画出了由8个点构成的三维球面S^3, ；8是构成三维球面所需的最少点数。该球面上每个点的邻域都是最小二维球面S^2_1。球面S^3, 显然是齐次的。迄今尚不清楚，是否还存在点数不为8的正规齐次球面。同一图中画出的点v是四维的，因为它的邻域是一个三维球面。

问 题

求一个均匀的三维球体，其点数

超过，或者证明它不存在。

众所周知，物理学中研究的是宇宙的一个闭合模型，它是一个三维膨胀球面。在形成之初，这个球面显然是由 8 个点组成的最小球面。空间中的点数在诞生时必然以某种方式影响了宇宙此后的全部历史，直至现在。确实，数字 8 例如也出现在基本粒子的物理学中，

问 题

выяснить 数字为 8 的物理对象与由 8 个点组成的三维最小球面之间是否存在联系。

除了始终包含有限点集的闭合正常分子 n 维空间外，还存在基于可数无限点集的空间，例如圆柱曲面、平面等模型。

n维空间的定义

考虑整数 n、n>1。如果空间 G 定义在一个无限可数的点集上，并且其中任一点的邻域都是一个正规的（n−1）维闭空间，则称空间 G 为 n 维正规（非闭）空间。

我们将在下文讨论如何定义模拟不同维数 n>1 的欧几里得空间的空间时，给出空间的一般定义

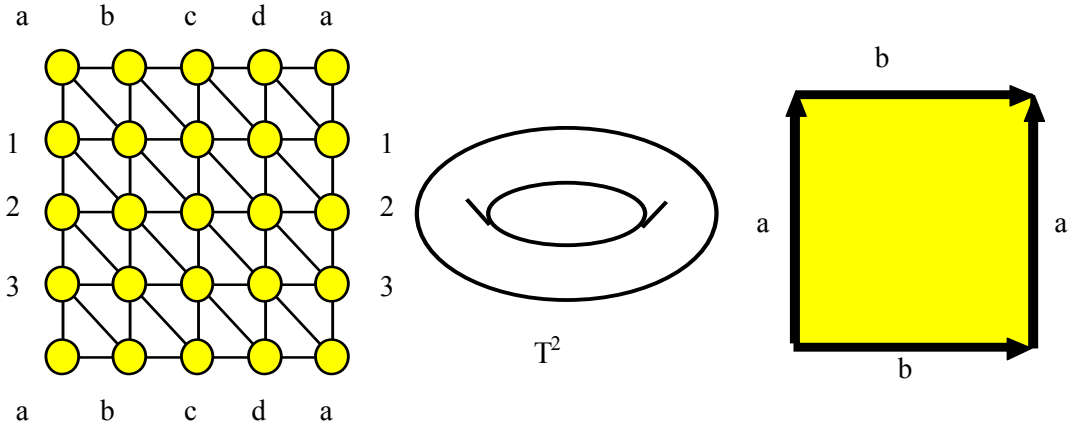


图 LL 二维环面 T^2。在连续情形下，环面可以通过粘合正方形的边得到，如右图所示。相同的字母或数字表示同一个顶点的两个或多个像

正则空间。一维欧几里得空间的定义——一维无穷直线（拓扑意义上）

我们已经引入了。这里仅指出，欧几里得正规分子 n 维空间由正规 n 维点构成，并具有连续欧几里得空间的基本性质。

图 kk 展示了不同的分子二维平面。E^2_1 是离散二维偏序空间 X^2 [30,31,32,33,34]的分子类比。X^2 的结构不允许将其视为分子空间，而 E^2_1 则不同。E^2_2 是一个齐次二维平面。E^2_3 是一个中心对称分子平面。

在图 ll 中，我们有一个二维环面 T^2。在连续情况下，该曲面可以通过直接粘合正方形的相对两边得到，如图 [1]所示。正常分子环面由 16 个点组成。直接验证表明，16 是构造该曲面所需的最少点数。从这个意义上说，环面比三维球面“更复杂”，后者至少需要 8 个点。正常分子

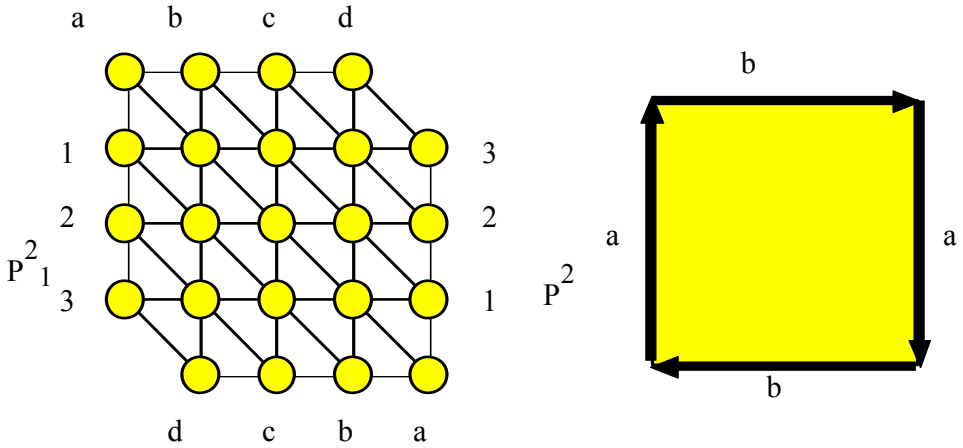


图 MM 二维射影平面 P^2。无论在连续情形还是分子情形中，P2 都可以通过交叉粘合正方形的边得到，如右图所示。相同的字母或数字表示同一个顶点的两个或多个像。

最小环面显然是一个齐次空间，这一点从图中很容易看出。

下一个曲面（图 mm）是射影平面，它是通过交叉粘合正方形的相对边而形成的曲面，如图 [1] 所示。对位于正常分子正方形相对边上的点进行完全相同的交叉粘合，就得到正常射影平面。射影平面也可以通过粘合

球面上位于穿过球心的直径两端的点，图 nn，并将它们两两粘合而得到。因此，射影平面也称为粘合球面。

获得射影平面的另一种方法，是用莫比乌斯带封住球面上的洞（图 nn）。所有这些可能性都能在分子空间中实现。最小的正规射影

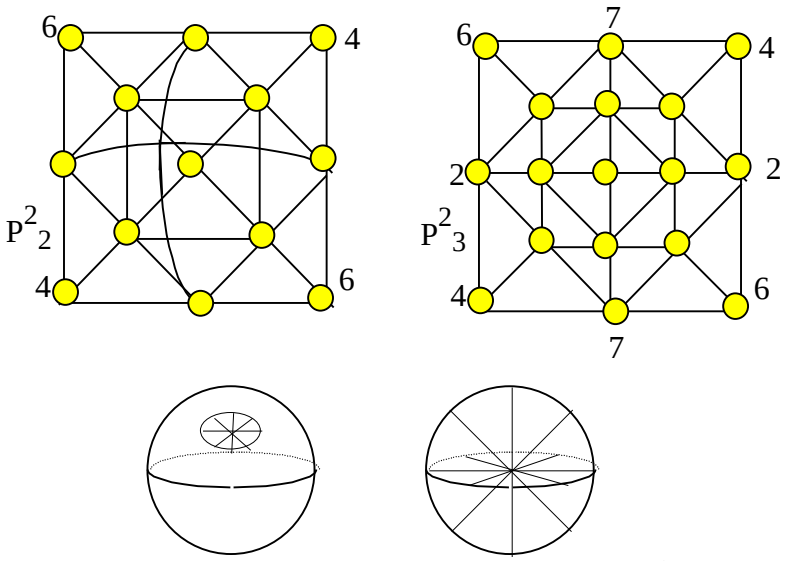


图 NN 两个正规分子射影平面。P_{22}由 11 个点组成，是可能的最小模型。在连续情形下，射影平面也可以通过用莫比乌斯带封住球面上的一个洞，或者将球面上位于直径两端的点成对粘合而得到。相同的字母或数字表示粘合在一起的点。

平面由11个点组成。若只考虑闭二维曲面，那么射影平面是体积仅次于二维球面的曲面；二维球面的最小体积为6。这种曲面的另一个特点是，无论构成它的点有多少，正规分子射影平面始终是非齐次曲面（稍后将对此加以证明）。图 nn 中画出了射影平面的两种模型，其中一种是由11个点构成的最小射影平面。很容易看出，所有模型都是非齐次的。三个模型中的每一个（图 mm，图 nn）都可以通过点变换由其他任一模型得到。

下一个空间（图 oo）是一个正常的分子克莱因瓶。在经典情形和分子情形中，它都是通过将正方形的两组相对边分别交叉粘合和直接粘合而形成的。在接下来的几章中，我们将详细

我们将研究这些表面的性质，并展示欧拉示性数和分子同调群等结构。

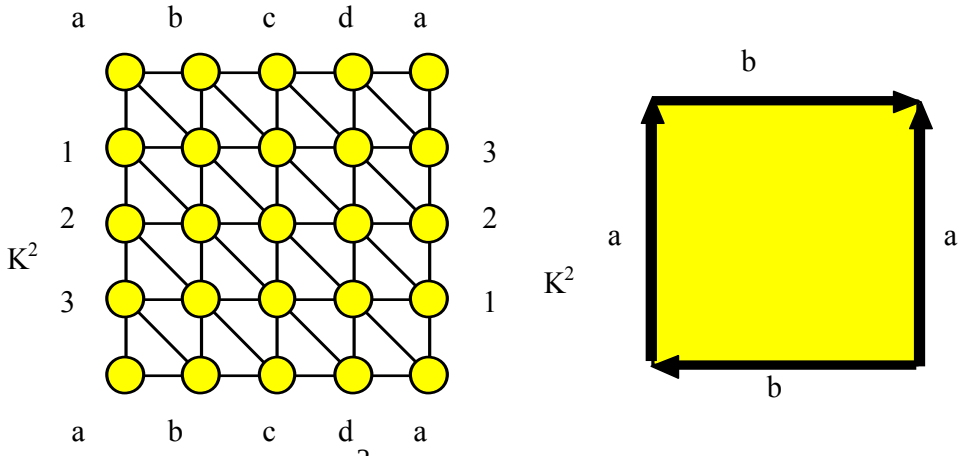


图 OO 二维分子克莱因瓶 K^2。在连续情形下，克莱因瓶可以通过粘合正方形的边得到，如右图所示。相同字母或数字表示同一点的两个或多个像。

空间及其连续原像相同。所有图中，相同字母或数字表示同一点的两个或多个像。这样做是为了避免图形过于复杂。

习题。
证明分子克莱因瓶 K^2 是极小的，或求出一个极小的分子克莱因瓶。

第 3 章参考文献。

1 Croom F.H.，《代数拓扑基本概念》，Springer，美国纽约，1978年。 3 Evako A.、Kopperman R.、Mukhin Y.，《图与数字空间的维数性质》，《数学成像与视觉期刊》，第6卷，第109-119页，1996年。 7 Evako A.V.，《离散空间上的维数》，《国际理论物理学杂志》，第33卷，第1553-1568页，1994年。 10 Evako A.V.、Melter R.A.，《线段的图维数》，第八届一般拓扑学与应用暑期会议论文集，1992年，美国纽约，30。 Khalimsky E.、Kopperman R.、Meyer P.，《计算机图形学与有限有序集上的连通拓扑》，《拓扑学及其应用》，第36卷，第1-17页，1990年。

31. Khalimsky E.，《计算机科学中的拓扑结构》，《应用数学模拟杂志》，第 1 卷，第 40 页，1987年，第 32 期，第 25 页。-。Kong T.、Kopperman R.、Meyer P.，《数字拓扑的拓扑学方法》，《美国数学月刊》，第 98 卷，第 901–917 页，1991年。33. Kong T.、Rosenfeld A.，《数字拓扑：导论与综述》，《计算机视觉、图形与图像处理》，第 48 卷，第 357–393 页，1989年。34. Kopperman R.、Meyer P.、Wilson R.，《三维数字空间中的 Jordan 曲面》，《离散与计算几何》，第 6 卷，第 155–161 页，1991年。40 Александров П.С.、Пасынков Б.А.，《维数理论导论》，科学出版社，莫斯科，1973年。41 Горелик Т.Е.，《空间为何是三维的》，科学出版社，莫斯科，1973年。42 Ивако А.В.，《分子空间作为真实物理空间的离散基础》，《意识与物理实在》，第 3 卷，第 5 期，第 25–32 页，1998年。43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。50 Иващенко А.В.，《分子空间的维数》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6422-84 号，1984年。51 Иващенко А.В.，《分子空间的拓扑性质》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984年。54 Понтрягин Л.С.，《组合拓扑学基础》，科学出版社，莫斯科，1973年。

正规 空间 的性质

我们研究正规分子空间的一些性质，这些性质与连续空间的性质非常相似，并定义和研究正规空间上的同胚变换。

本章的一些结果见于文献 [7,10,43,50,51]

正规分子空间的维数性质

分子空间具有许多与连续空间相似的性质，而连续空间正是它们的像。这些性质包括局部空间结构、多个正规空间的和与积运算的特征，以及能够获得新空间的运算，

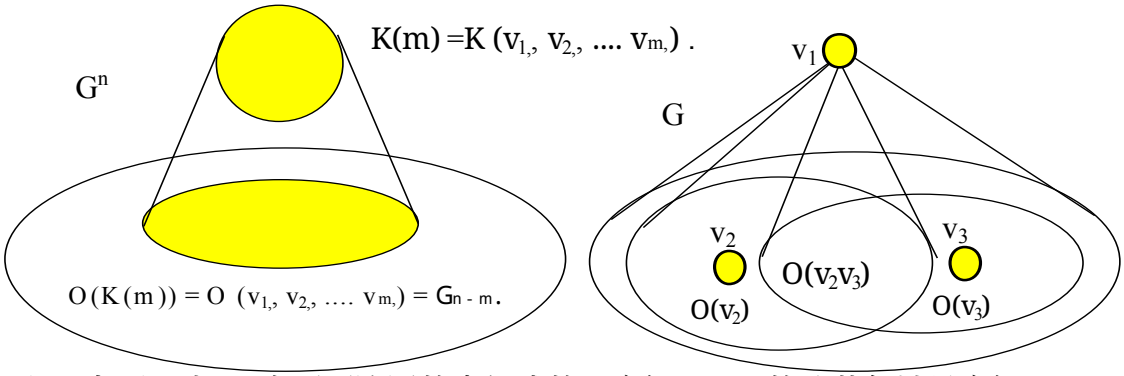


图 42 左图。由 m 个两两连通的点组成的子空间 K(m) 的公共邻域是空间 G^{n-m}，其维数为 (n-m)。右图。空间 G 是一个锥。点 v_2 的邻域 $O(v_2)$ 以及属于 $O(v_1)$ 的任意点集的公共邻域都是锥。

同调群、欧拉示性数及其他一些性质。我们将考察分子空间的基本性质和构造方法，这些方法能够以自然的方式得到新的分子空间，其中不同的点具有不同的拓扑。再次强调那些直接由正规分子空间的定义推导出的基本性质，将很有裨益。

定理20

1. 非零维正规空间 G^n 总是连通的。

2. 正规空间 G^n中任意点的邻域 $n>1$总是连通的。

断言 1 和 2 直接由正规空间的定义得出。

定理 21

设 *Gn* 是一个分子正规 *n*-维空间（不一定是闭的），其中 *K(m)* 是由 *m* 个两两连通的点 *(v1,v2,v3,.. vm)* 构成的点束（子空间）。那么这些点的公共边界是一个分子闭正规 *(n-m)*-维空间。 *O(v1v2 v3 .... v m)=O(v1)∩O(v2) ∩ O(v3)∩...∩O(vm)=Gn-m.*

证 明。
根据正则分子 n 维空间的定义，空间 v_1 中任意一点 v_1 的邻域 $O(v_1)=G^{n-1}$ 是一个分子闭正规 (n-1) 维空间。设 v_1 和 v_2 相邻，即这两点之间存在连接。这意味着 $v_2 \in G^{n-1}=O(v_1)$。因此，$O(v_2)|G^{n-1}=O(v_2v_1)$ 是一个分子闭正规 (n-2) 维空间。设 v_3 与 v_2 相邻，且 v_1, ，也就是说，$v_3 \in O(v_2v_1)=G^{n-2}$。因此，

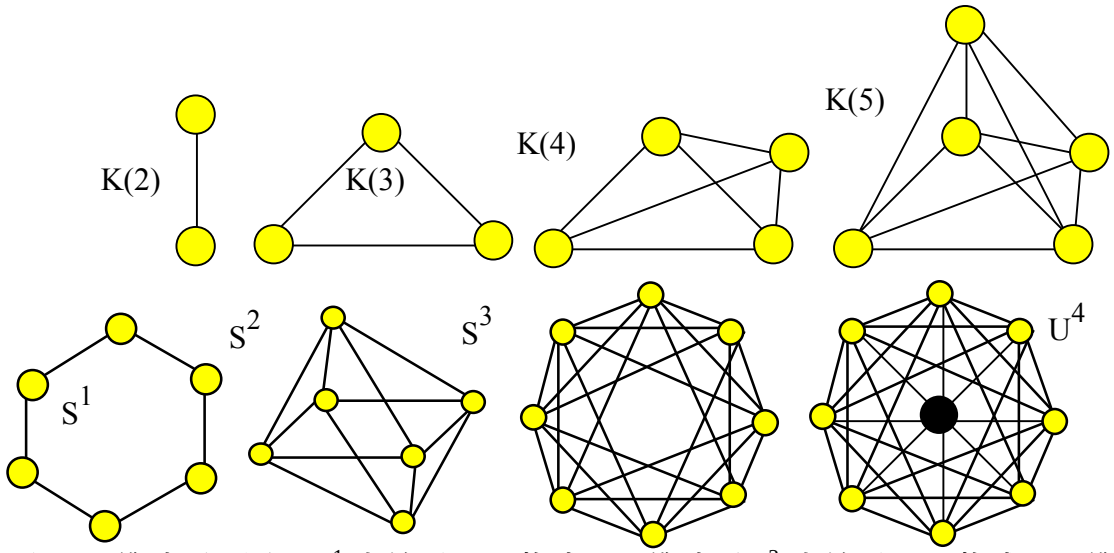


图43 一维球面—圆周 S^1 由单形 K(2)构成，二维球面 S^2 由单形 K(3)构成，三维球面 S^3 由单形 K(4)构成，四维空间的元素——点 v 的四维球 U(v)由单形 K(5)构成。

$O(v_3)|G^{n-2}=O(v_3v_2v_1)$ 是一个分子闭正规 (n-3) 维空间。对点 $(v_1,v_2,v_3,...v_m)$ 重复这一过程，我们得到 $O(v_1v_2v_3....v_m)=O(v_1)\cap O(v_2)\cap O(v_3)\cap...\cap O(v_m)=G^{n-m}$。

定理得证。□

下面的定理可以相当准确地确定正规分子空间的局部结构。事实证明，n 维正规空间由位于 (n+1) 个点上的 K(n+1) 点束组成。换句话说，二维正规空间由构成三角形的点组成，

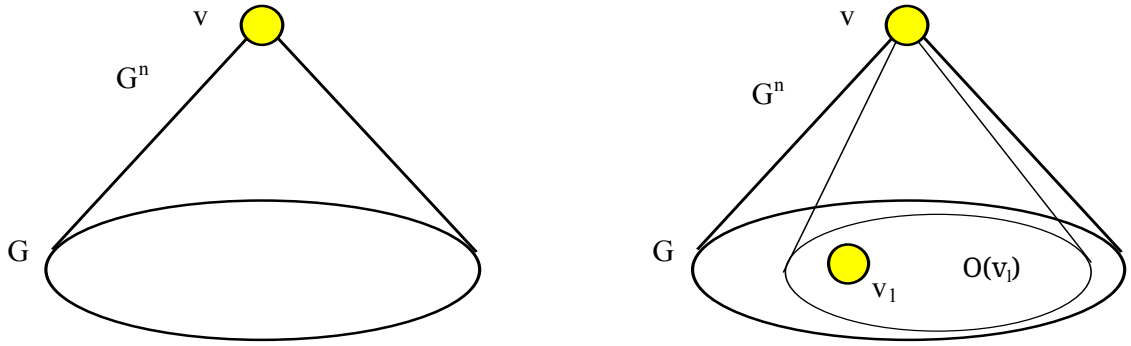


图44 正规空间 G^n 不可能是锥 v⊕G。如果空间是锥，那么属于 G 的任意点 v_1，的邻域 $O(v_1)$ 也同样是锥。

三维空间由四面体组成，依此类推。如图43所示，一维球面（圆）由 K(2) 点束组成，二维球面由 K(3) 点束构成，三维球面由 K(4) 点束构成，四维空间的元素——点 v 的四维球由 K(5) 点束组成。

定理22

设 G^n 是维数为 n 的正规分子空间。那么，对于任意点束 $K(s)\subseteq G^n$，$s \leq n+1$，存在包含 $K(s)$ 的点束 $K(n+1)$，$K(s)\subseteq K(n+1)\subseteq G^n$。

证 明。

使用前一定理中的构造。设 $K(s)=K(v_1,v_2,v_3,...v_s)$。根据前述结论，点 $v_1, v_2, v_3,... v_s$ 的公共邻域是维数为 (n-s) 的正规分子闭空间，$O(v_1v_2 v_3,... v_s)=O(v_1)\cap O(v_2)\cap O(v_3)\cap...\cap O(v_s)=G^{n-s}$。任取一点 $v_{s+1}\in G^{n-1}$。它与前面所有点都相邻，而且 $O(v_1v_2v_3....v_{s+1})=O(v_1)\cap O(v_2)\cap O(v_3)\cap... \cap O(v_{s+1})=G^{n-s-1}$。对点 $(v_1,v_2,v_3,...v_{n+1})$重复这一过程，我们得到 $O(v_1v_2v_3...v_{n+1})$ 是空集，而所有这些点彼此相连。点束 $K(n+1)=K(v_1,v_2,v_3,..v_{n+1})$由 n+1 个点组成，并包含原来的点束。定理得证。□

这一关于一维、二维和三维情形的定理可由以下空间加以说明：

这些空间此前已有描绘，另见图43。由此定理可知，n维正规分子空间不包含单形 K(n+2)。

推论。

正常的n维分子空间不包含由(n+2)个点构成的超边K(n+2)。

闭分子空间的一个重要性质是，它不可能是一个锥，也就是说，不可能是一个其中某个点与其他所有点都存在连接的空间。回顾一下，锥 v⊕G 是指分子空间 G 中存在一个点 v，该点与空间中的其余所有点相连接。

定理 23

任意维数的正规分子空间都不可能是锥。□

证　明。

采用反证法。假设 n 维正规分子闭空间 G^n 是一个锥，且点 v 与空间中所有其他点相连，即 $G=O(v)=G^n-v$（图44）。邻域 O(v) 是一个 (n-1) 维正规分子闭空间。取 O(v) 中任意一点，例如 v_1。在空间 O(v) 中，该点的邻域 $O(v_1)|O(v)$ 是一个 (n-2) 维正规分子闭空间，也同样是一个锥。取 $O(v_1)|O(v)$ 中任意一点，例如 v_2。在空间 $O(v_1)|O(v)$ 中，该点的邻域 $O(v_2)|O(v_1)|O(v)$ 是一个 (n-3) 维正规分子闭空间，也同样是一个锥。继续这一过程 n 次，我们得到，在空间 $O(v_{n-2})|O(v_{n-3})|...|O(v_1)|O(v)$ 中，点 v_{n-1} $O(v_{n-1})|O(v_n)|O(v_{n-1})|... |O(v_1)|O(v)$ 的邻域是一个 (n-n) 维正规分子闭空间=0，也同样是一个锥。然而，根据定义，这个邻域应当是一个零维正规闭空间，并由两个不连通点组成，因此不可能是一个锥。由此得到矛盾。因此，我们的假设不成立。定理得证。□

这一定理的直接而显然的推论是：在正规空间中，对于空间中的任意一点，都存在一个与之不相邻的点。

推论。

设 G 是一个正规空间。那么，对于任意点 a∈G，都存在一个与其不相邻的点 b∈G。。

我们再证明一个定理，它确定了闭正规分子空间的极小点数。

定理24

正规分子闭空间 G^n维数 n 至少有 $2n+2$ 个点 $|G^n| \geq 2n+2$。证 明。我们使用反证法。假设正规分子闭空间 G^n

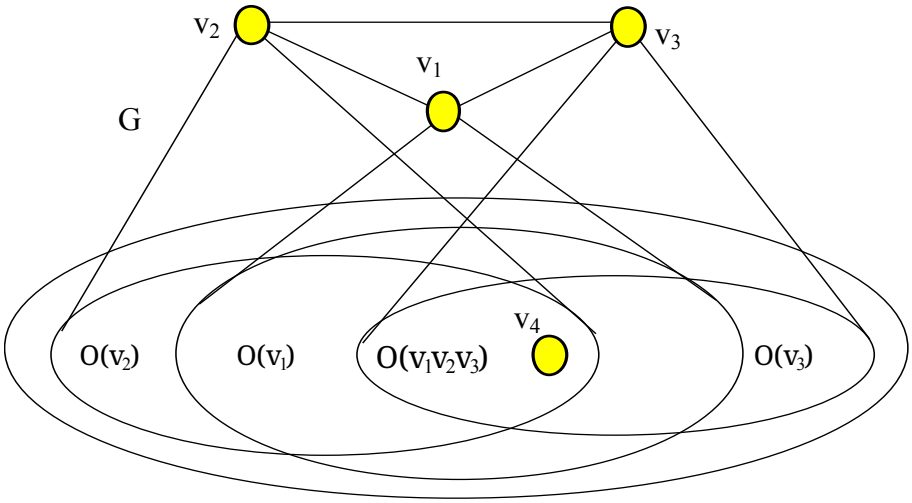


图 45 公共邻域的体积至少减少 1，随着公共邻域中点的数量增加 1。$|O(v_1)|-1 \geq |O(v_1v_2)|$，$|O(v_1v_2)|-1 \geq |O(v_1v_2v_3)|$，..，$|O(v_1)|-n \geq |O(v_1v_2...v_{n+1})|$。

维数 n 包含少于 2n+2 个点（图 45）。任取一点 v_1。邻域 $O(v_1)$ 是一个维数为 (n-1) 的正规分子闭空间。根据前一个定理，v_1 与 G^n 中某些点没有边，因为 G^n 不可能是锥，所以邻域 $O(v_1)$ 的体积小于 2n,$|O(v_1)|<2n$。取 $O(v_1)$ 中任意一点，例如 v_2。该点的邻域 $O(v_2)|O(v_1)$ 在空间 $O(v_1)$ 中是一个维数为 (n-2) 的正规分子闭空间，也不是锥。

因此，$|O(v_2)|O(v_1)|<2n-2$。任取 $O(v_2)|O(v_1)$ 中的一点，例如 v_3。该点的邻域 $O(v_3)|O(v_2)|O(v_1)$ 在空间 $O(v_2)|O(v_1)$ 中是一个维数为 (n-3) 的正规分子闭空间，并且也不是锥。这意味着，$|O(v_3)|O(v_2)|O(v_1)|<2n-4$。

继续这一过程 n 次，我们得到，点 v_n $O(v_n)|O(v_{n-1})|O(v_{n-2})|...$ $|O(v_2)|O(v_1)$ 在空间中的邻域
$O(v_{n-1})|O(v_{n-2})|...$ $|O(v_2)|O(v_1)$ 是维数为 (n-n)=0 的正规分子闭空间，同时也不是锥。其体积...

4. 正规分子空间的性质 60根据假设，该空间满足不等式|O(v_n)|O(v_{n-1})|O(v_{n-2})|... |O(v_2)|O(v_1)|<2n-2n=0。然而，根据定义，这个邻域应当是一个零维正规闭空间，并且由 2 个不连通点组成。由此我们得到了矛盾。因此，我们的假设不成立。定理得证。□

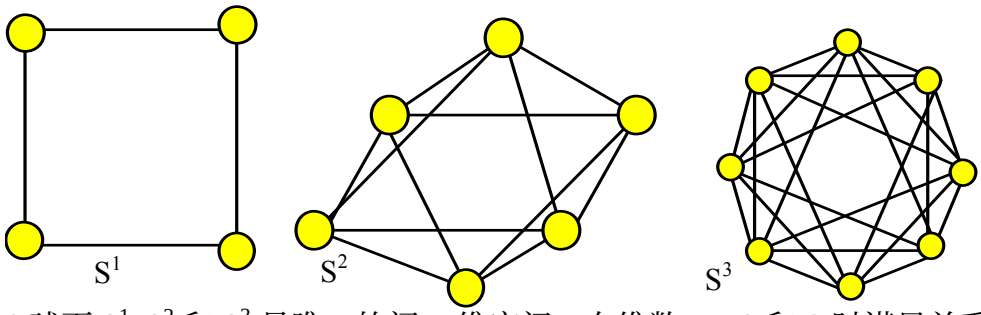


图 46 球面 S^1, S^2 和 S^3 是唯一的闭 n 维空间，在维数 1、2 和 3 时满足关系 $|G^n|=2n+2$, $S^2=S^0\oplus S^1$, $S^3=S^2\oplus S^1$。

根据这个定理，一维闭正规空间至少由4个点组成，二维闭正规空间至少由6个点组成，三维闭正规空间至少由8个点，依此类推。正如我们前面所见，最小圆包含4个点，最小球面包含6个点，最小三维球面包含8个点。由此产生一个问题：是否存在由(2n+2)个点组成、且不同于球面的闭正规 n 维空间？对体积较小的空间直接检验后发现，这样的空间并不存在。然而，要证明这一点的一般情形，还需要进一步论证。图46展示了维数为 n=1、2 和3的正规闭空间 G^n，它们的体积为2n+2。

分子空间的加法运算已在上文定义。这一运算可以得到具有新拓扑性质的分子空间。这种运算的维数性质类似于经典拓扑学中相应运算的性质。

定理 25

设 G^m 和 S^0-是维数为 m 的正规分子闭空间，0-维球面，分别带有点集 $V=(v_1,v_2,v_3,...v_q,)$ 和 $R=(a,b)$。那么它们的直和 $G^m\oplus S^0$ 是维数为 $(m+1)$ 的正规闭分子空间，$W^{m+1}=G^m\oplus S^0$.

证 明。

使用归纳法。对于 m=0，1 定理可直接验证。假设对于 G^m，其中 m ≤ k，定理成立。设 m=k+1。取 G^m 中任意一点，比如 v_1。该点在空间 W^{m+1} 中的邻域，是该点在空间 G^m 中的邻域与空间 S^0,的和。

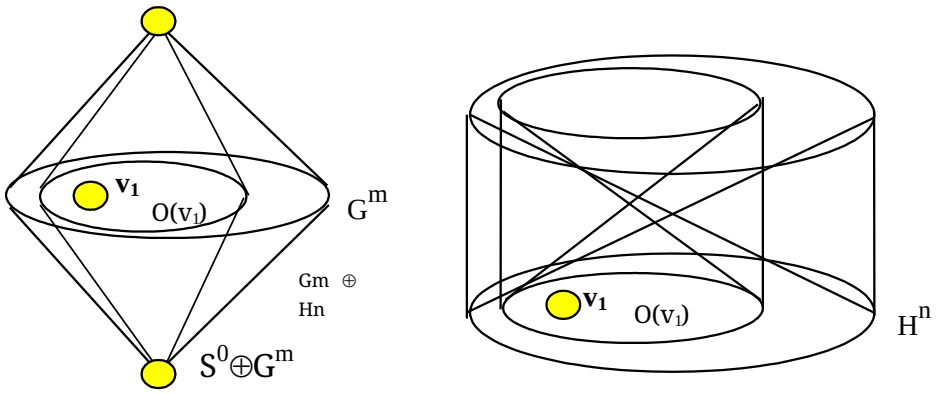


图47 零维球面 S^0 与闭 n 维空间 G^n 的和的维数为 (n+1)。闭 n 维空间 G^n 与闭 m 维空间 H^m 的和的维数为 (n+m+1)

也就是说，$O(v_1)|W^{m+1}=(O(v_1)|G^m)\oplus S^0$。由于该点在空间$G^m$ 中的邻域是一个k维空间，因此根据归纳法，$O(v_1)|W^{m+1}$ 将是一个正规（k+1）维空间。点a和b的邻域也都是空间G^m中的正规（k+1）维空间。因此，$W^{m+1}=G^m\oplus S^0$ 是一个正规（k+2）维空间（图47、图48）。定理得证。□

图48展示了两个零维球面的和，它形成一维球面，也就是圆周，$S^1=S^0\oplus S^0$。

下面的定理将前一定理推广到任意正规闭空间的和。

定理26

设 G^m 和 H^n-是两个维数分别为 m 和 n 的正规分子闭空间，其点集分别为 $V=(v_1,v_2,v_3,..v_q)$ 和 $R=(r_1,r_2,r_3,..r_t)$。那么它们的和 $G^m\oplus H^n$ 是一个维数为 $(m+n+1)$ 的正规分子闭空间，$W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n$.

证 明.

使用归纳法。对于 n, m=0, 1，定理可直接验证。假设定理对 G^m 和 H^n成立，其中 m+n ≤ p。设 n+m=p+1。由于定理已对 m=0 或 n=0证明，考虑 m > 0 或 n > 0的情形。任取一点 $v_1 \in G^m$，并考察该点在 $W^{m+n+1}=G^m \oplus H^n$中的邻域。显然,

$O(v_1)|W^{m+n+1}=(O(v_1)|G^m)\oplus H^n$，则 $\dim(O(v_1)|G^m)=m-1$，$\dim(H^n)=n$。因此，空间 $(O(v_1)|G^m)$ 和 H^n 的维数之和为 $(m-1)+n=p$，并且根据假设，它们的和是一个维数为 m+n 的正规闭分子空间，

$\dim(O(v_1)|W^{m+n+1})=\dim(O(v_1)|G^m)+\dim(H^n)+1=(m-1)+n+1=m+n$。这意味着，空间 $W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n$ 的维数等于 $(m+n+1)$。定理得证。□

在转向例子之前，我们先陈述另一个关于和的性质的定理；由于它显而易见，这里不予证明。

定理 27

Сумма нормальных молекулярных замкнутых пространств коммутативна и ассоциативна, $W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n=H^n\oplus G^m$, $W^{m+n+p+1}=(G^m\oplus H^n)\oplus F^p=G^m\oplus(H^n\oplus F^p)$.

证明显然。□

从图49可以看出，一维球面与零维球面的和是二维球面。需要指出的是，极小球面的和也是极小球面。与此有关，

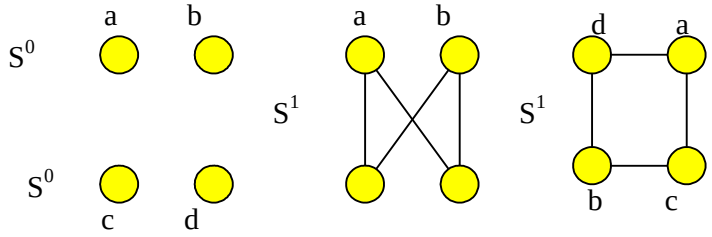


图48 两个零维球面的和是一维圆周。$S^1=S^0\oplus S^0$。

我们将以下假设表述为一个定理。

定理 28

设 G^m 和 H^n-是两个维数分别为 m 和 n 的正规分子闭最小空间。那么它们的和 $W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n$ 也将是最小空间。

自行证明或否证。□

到目前为止，我们考察了一般形式的正规空间，几乎没有对空间的整体结构和局部结构作任何限制。然而，实际中最令人关注的是那些用于模拟真实过程中产生、并由计算机处理的多维对象的空间。下面考察正规空间与其同维正规子空间之间的关系。

定理 29

设 G^n 和 H^n-是两个维数为 n 的正规分子闭空间，且 G^n 是空间 H^n , $G^n \subseteq H^n$, 的子空间。那么 G^n=H^n。

证 明。
采用归纳法。对于 n, m=0, 1，定理可直接验证。假设该定理对 G^m 和 H^n成立，其中 $n \le p$。设 n=p+1。任取点 $v_1 \in G^n$ ，并考察该点在 H^n中的邻域。显然，$O(v_1)|G^n \subseteq O(v_1)|H^n$，于是 $O(v_1)|G^n=O(v_1)|H^n$，因为这些邻域的维数等于 p，且 $O(v_1)|H^n$是连通空间。此外，由于 H^n 连通，对于 G^n 中的任意点 $v_k \in$ 和 H^n 中的任意点 $v_p \in$ ，都存在一条链，

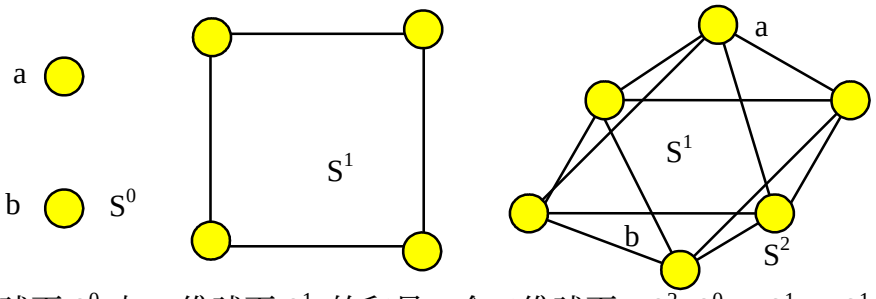


图49 0-球面 S^0 与一维球面 S^1 的和是一个二维球面。$S^2=S^0 \oplus S^1$。$=S^1 \oplus S^0$。

将它们连接起来。由于这条链上的每个点 $O(v_s)|G^n=O(v_s)|H^n$ ，因此对于 H^n 中的所有点，$O(v_s)|G^n=O(v_s)|H^n$ 。这意味着 $G^n=H^n$ 。
定理得证。□
该定理的推论显而易见。维数为n的闭正规空间不可能包含一个同维数的闭正规子空间，除非它就是自身。例如，球面不可能包含另一个球面、环面或克莱因瓶。与此同时，如果空间 H^n 不是正规空间，那么它可以包含一个维数相同但体积较小的子空间，如图50所示。空间A是一维的、闭的，但不连通。它不是正规空间，并且包含两个作为子空间的一维圆。空间B是二维的，但也不是正规空间，因为点a和b的邻域是互不连通的圆。B包含两个二维、闭且正规的空间，它们都是二维球面。一个球面是点a和b与右侧圆的直和，另一个球面则是同一对点a和b与左侧圆的直和。该定理的直接推论是下面这个定理，它进一步明确了特殊类型的正规空间的结构。

定理30

设G^n 是一个维数为n的正规分子闭空间，其中存在两个不连通点a和b，它们的公共边界是一个维数为$(n-1)$的正规分子闭空间$O(ab)$。那么G^n 是球面S^0 与$O(ab)$的直和，$G^n=S^0\oplus O(ab)$,，其中S^0 由点a和b组成。

几 证 明。
考虑子空间 H=a∪b∪O(ab)，它由点 a、b 和 O(ab) 组成（图51）。H 是由点 a 和 b 组成的零维球面 S^0, 与 O(ab) 的直和。因此，H 是维数为 (n+l) 的正规闭子空间，维(H)=维(S^0)+维(O(ab)+1=0+n-1+1=n。根据前一定理，G^n=H。定理得证。□

我们再证明一个定理，它揭示了正规空间中不同点的邻域之间的连接。假设某个空间中的所有点都有邻域，而这些邻域都是正规闭空间。问题是，这些点的邻域是否具有相同的维数？事实证明，它们确实具有相同的维数。

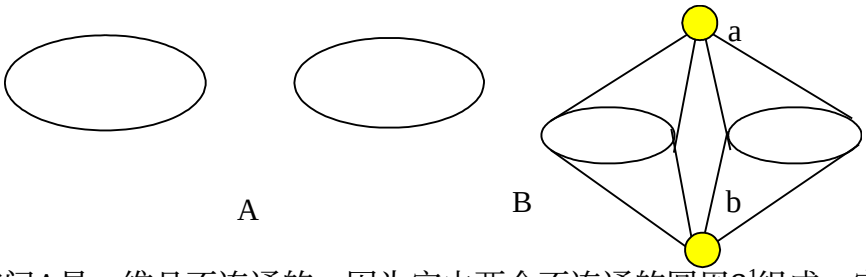


图50 空间A是一维且不连通的，因为它由两个不连通的圆周S^1组成。空间B是零维球面S^0 与空间A的直和。这两个空间都不属于正规空间类。

定理31

设G^n 是某个分子连通空间，其中每个点v_k 的边界是某个维数为n_k 的正规闭空间。那么所有点的边界具有相同的维数n，且空间 G 是$(n+1)$-维正规空间G^{n+1}。

证 明 。
选取空间 G 中两个相邻点 $v_1\in G$ 和 $v_2\in G$，并考察 $O(v_1v_2)$。由于 $O(v_1v_2)\subseteq O(v_1)$，因此 $pa_3(O(v_1v_2))=n_1-1$；由于 $O(v_1v_2)\subseteq O(v_2)$，因此 $pa_3(O(v_1v_2))=n_2-1$。因此，任意两个相邻点的 $n_1=n_2$ 。由于空间是连通的，所有点的维数都相同，均为 n。空间 G 是一个 (n+l) 维正规空间

G^{n+1}. 定理得证。□

从理论角度来看，另一个方面也颇具意义。假设存在某个连通的分子空间 G，它与某个闭正规空间 H^n 同伦。同伦意味着，通过点变换可以将 G 收缩到 H^n。G 会是一个正规 n-

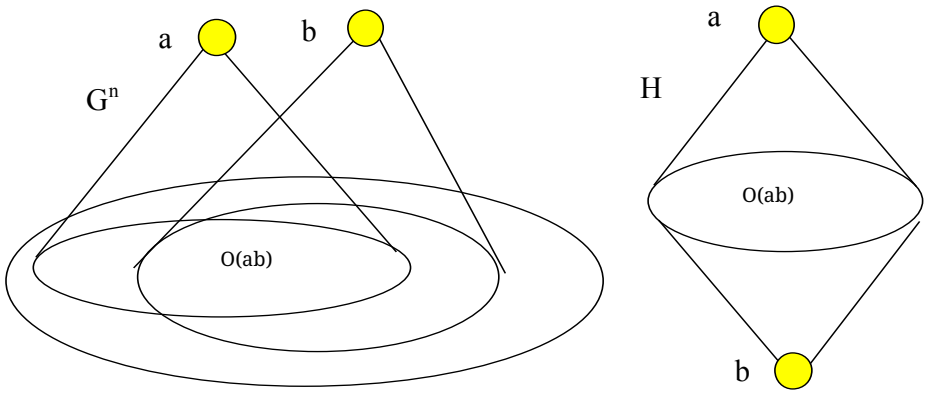


图51 在正规空间 G^n 中，不相邻点 a 和 d 的公共边界是 (n-1) 维正规空间 O(ab)。

那么 $G^n=H=S^0 \oplus O(ab)$

维空间。显然，一般情况下并非如此。然而，如果 G 没有点关联和点，也就是说，我们不能舍弃任何一个点或边，那么可以说些什么呢？因此，转变过程只能从粘接一个点或边开始。在所有已考察的具体情形中，G 也都是闭正规空间。然而，我们未能用证明来支持这一实验事实。因此，我们将其表述为一条公理。

关于正则空间同伦的公理

如果空间 G 没有点关联或点，并且同伦于某个 n 维闭正规空间 H^n，那么 G 本身就是一个 n 维闭正规空间。

我们再来指出分子空间的一个有趣特点，并将其称为“缺失一种特征”的启发式原则，或“OOO”原则。人们注意到，在分子空间中，不可能只有一个点与所有其他点不同。换言之，这一原则可以表述如下：

启发式原则“OOO”

在点数不少于 2 的分子空间中，要么没有任何点具有性质 A，要么至少有两个点具有该性质。

在本书中，我们将多次遇到这种特征的表现。作为缺少一个特征原理的体现，下面的定理断言：如果所有点的邻域

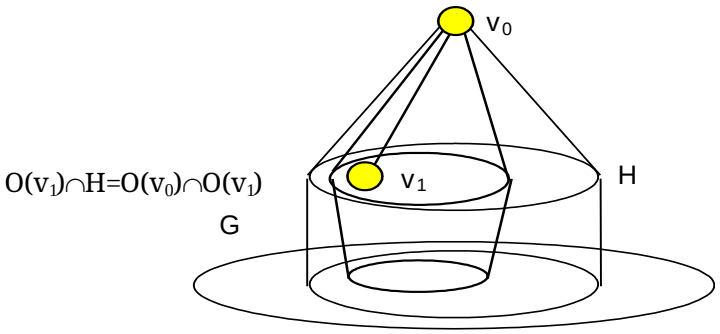


图52 H中任意一点v_1 的邻域$O(v_1)$是两个邻域$O(v_0)\cap O(v_1)$的交集，因此是一个(n-2)维正规闭空间。由此，H中每个点的邻域都是一个(n-1)维正规闭空间。

某个分子空间中除一点外，其余各点都是 n 维正规空间，那么这一最后的点也必为 n 维，且该分子空间是正规 n 维空间。

定理32

> 设 *G* 是点集 $V=(v_0,v_1,v_2,..v_n)$ 上的某个分子闭空间。设点 v_i，$i=1,2,3...n$ 的完全邻域 $O(v_i)$ 是 *(n-1)*-维正规分子闭空间。那么点 v_0 的完全邻域 $O(v_0)$ 也是 *(n-1)*-维正规分子闭空间，且 *G* 是分子正规 *n*-维空间。（图 *52).*

证　明。

必须证明，点v_0 的$O(v_0)$是一个(n-1)维正规分子闭空间。记$H=O(v_0)$。任取H中的一点，例如v_1。根据条件，$O(v_1)$是一个(n-1)维正规分子闭空间。因此

$O(v_0)\cap O(v_1)=O(v_0v_1)=O(v_1)|H$ 是一个 (n-2) 维正规分子闭空间。显然，这对属于 H 的任意点都成立。因此，根据定义，$H=O(v_0)$ 是一个 (n-1) 维正规分子闭空间。由此可知，G 是一个 n 维正规分子空间。定理得证。□

正规分子空间的同胚变换

在经典拓扑学中，有拓扑空间同胚的概念——根据定义，它是空间 X 到 Y 的连续双射，且空间 Y 到 X 的逆映射也连续。如果空间 X 和 Y 之间存在同胚，则称它们同胚。同胚空间的拓扑特征相同，尽管其几何特征可能不同；例如，这些空间可能在尺寸或形状上有所差异。从几何学的角度看，球面和立方体表面有所不同，但从拓扑上看，它们无法区分，因为立方体表面可以连续地（没有断裂或粘合）变形为球面。分子空间也需要有类似的概念。我们引入一些变换，称之为分子空间同胚变换，或称 gm 变换，它们在某种程度上类似于同胚。

为了后续讨论，我们需要给出几个类型相同的定义，以扩展此前已经给出的点和子空间的完整邻域及完整球的定义。假设点 v 的邻域 O(v) 具有确定的拓扑结构。取一个

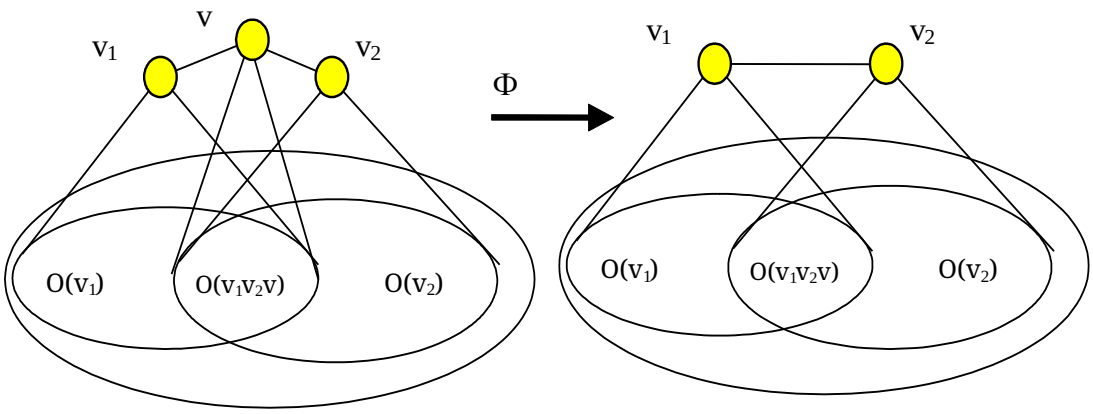


图53 分子空间的同胚变换。点 v 变为连接 (v_1v_2)。同时必须满足条件：
$O(v) = S^0(v_1,v_2) \oplus O(v_1v_2v)$，$O(v_1v_2) = v \oplus O(v_1v_2v)$。

点的 U(v) 球的 O(U(v)) 邻域。如果 O(U(v)) 的结构与 O(v) 相同，那么我们可以舍弃 O(v)，将点 v 与 O(U(v)) 联系起来。从经典的角度来看，这就像是空间略微收缩，体积减小，同时保留了所有主要的拓扑特征。

应当指出，分子空间的同胚变换首先是基于其在计算机处理分子模型中的实际用途来定义的。

因此 也可能存在其他不同于下文所引入的定义 я

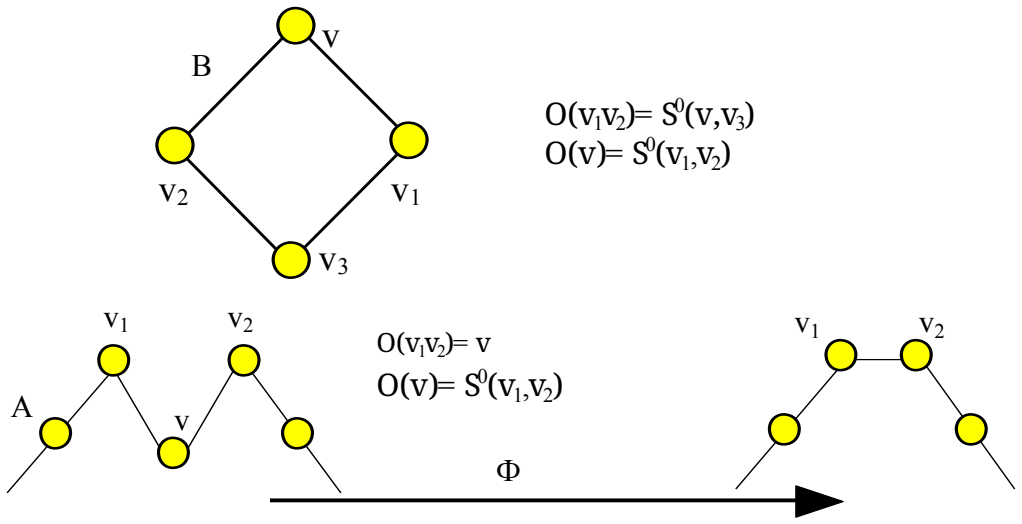


图54 将点替换为边。条件 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$ 在下方的一维情形中满足替换条件，而在上方的一维情形中不满足；上方禁止将点替换为边。

这类变换。然而无论如何，同胚变换都必须是点变换。

边替换为点的定义（3CT）

设 G 是某个分子空间，v_1 和 v_2 是该空间中通过连接（v_1v_2）相连的两个点。由舍弃连接（v_1v_2）并添加点 v 所组成的变换称为同胚变换，当点 v 的邻域 O(v) 包含点 v_1, v_2 和 $O(v_1v_2)$ 时，即 $O(v)=S^0(v_1, v_2)\oplus O(v_1v_2)$，其中球面 $S^0(v_1,v_2)$ 由两个点 v_1, v_2 组成（图55）。

点替换为边的定义（3TC）

设 G 是某个正规 n维分子空间，v 是该空间中的一个点，与点 v_1 和 v_2，相邻，而这两个点彼此不相邻。由舍弃点 v 并建立连接（v_1v_2）所组成的变换称为同胚变换，当 $O(v)=S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 且 $O(v_1v_2) =v\oplus O(v_1v_2v)$ 时，其中球面 S^0 由两个彼此不相连的点 v_1, v_2 组成。

容易看出，第一个变换使空间中的点数增加 1，第二个变换使点数减少 1。

这些变换在某种意义上是相互逆转的，舍弃一条边并粘接一个点意味着，在反向操作中，可以用被舍弃的边替换该点。同胚变换（ΓM）具有一个重要特征：它们保持正规空间的维数不变。借助同胚变换，可以改变空间的体积（提醒一下，这里的体积是指构成空间的点的数量）。

注释。

一般而言，这些变换不仅适用于正规空间，也适用于任意分子空间。其中，将边替换为点不受任何限制，而将点替换为边则由点 v 的邻域决定。这类变换将在扩展正规空间概念的正则空间中使用，也将应用于分子空间的点变换中。

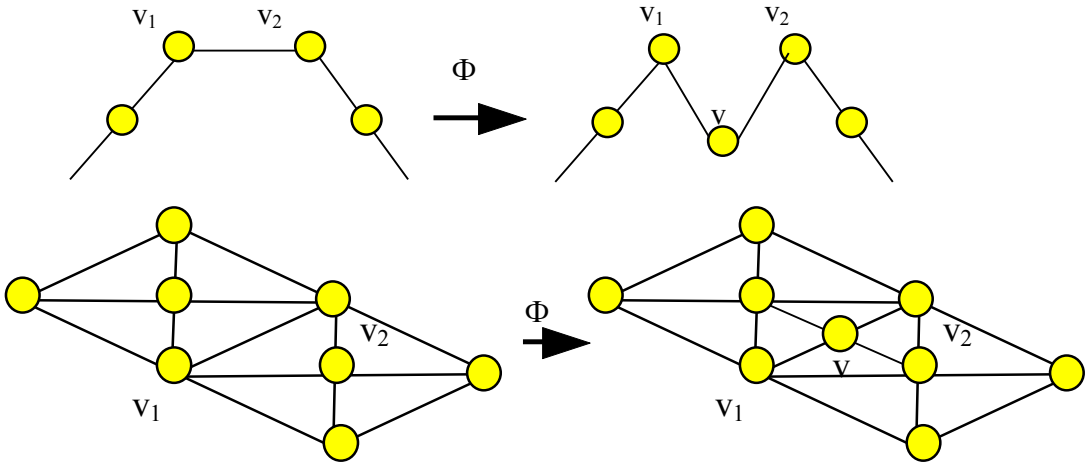


图55 一维（上方）和二维（下方）情况下将边替换为点。边 (v_1v_2) 被删除，并替换为点 v。

空间。

在图55中，连接 (v_1v_2) 被删除并替换为点 v。在一维情形中，点 v 与点 v_1 和 v_2, 相连，因为 $O(v_1v_2)$ 是空子空间。在二维情形中，点 v 与点 v_1，v_2, 相连，也与这些点的共同邻域 $O(v_1v_2)$（下方）相连。容易看出，变换后所有点的邻域仍然是一维情形中的 0 维球面，或二维情形中的圆。

将点替换为边更为复杂，而且并非总是可行。在某些情况下，这种替换无法实现。比如，在

对于由四个点组成的一维圆的情形，我们不能将点的数量减少到三个，因为空间的拓扑，特别是维数，将会改变。图57展示了一维情形下在满足条件 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$ 时将点替换为边的过程。下方的点 v 被替换为边 (v_1v_2)，因为满足这些条件；上方的点 v 不能被替换为边 (v_1v_2)，因为不满足条件 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$。在二维情形下（图56），点 v 被替换为边

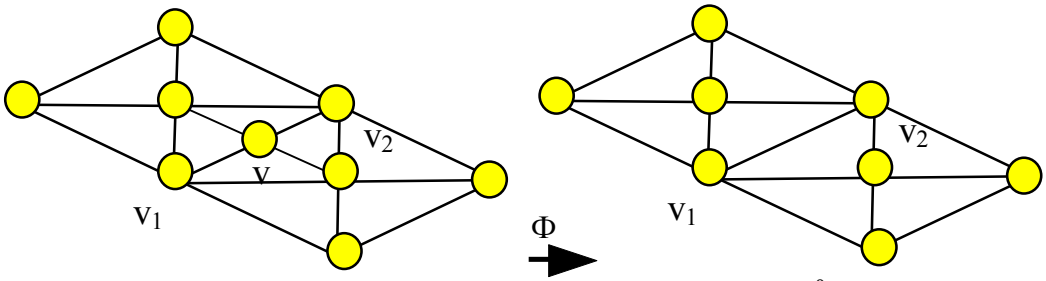


图56 点替换为连接。对于左侧的二维空间，替换条件 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$ 成立。点 v 被删去，并在右侧空间中建立连接 (v_1v_2)。

(v_1v_2)，因为两个条件都得到满足。

逆同胚变换的定义。 XE "设 G 是某个分子空间，v_1 和 v_2 是该空间中通过边 (v_1v_2) 相连的两个点。同胚变换 Φ（将边替换为点）由删除边 (v_1v_2) 并添加点 v 构成，称为同胚变换 Φ^{-1} （将点替换为边）的逆变换，后者由删除点 v 并添加边 (v_1v_2) 构成。显然，对于每个同胚变换 Φ，都存在其逆同胚变换 Φ^{-1}，使得 $\Phi^{-1}\Phi G == G$。

同胚空间的定义

如果空间 H 可以通过依次进行有限次同胚变换由空间 G 得到，则称 H 与 G 同胚，$H\approx G$，$H=\Phi_n \ldots \Phi_2\Phi_1 G$。

所有与给定空间同胚的正规空间构成同胚分子空间类。我们用 Γ(G) 表示所有与 G 同胚的空间组成的集合，则 $H\in\Gamma(G)$。显然，所有正规分子空间的集合可分解为若干互不相交的同胚空间类。

从图中可以看出，这两个同胚变换——将边替换为点和将点替换为边——都不会改变空间的维数。现在我们先对第一个变换——将边替换为点——证明这一点。

点。

定理 33

边换点同胚变换不改变正常分子空间 G^n 的维数和正规性。

证　明.

使用归纳法。对于较小的维数，定理可直接验证。假设定理对维数 $n < k$ 成立。设 $n = k$。设 G^n 是一个分子空间，v_1 和 v_2 是该空间中由连接 (v_1v_2) 相连的两个点（图55）。根据正规空间的性质，$O(v_1v_2)$ 是一个正规闭的 (n-2) 维空间。删除连接 (v_1v_2)，并将点 v 与 $O(v_1v_2)$ 中的所有点以及 v_1 和 v_2 相连。

容易看出，点 v_1, 的邻域 $O(v_1)$没有改变，只是该邻域中的点 v_2 被点 v 替换了。同样，点 v_2的邻域 $O(v_2)$也没有改变。因此，将边替换为点后，这些点的邻域仍是 (n-1) 维闭正规空间。

点 v 的邻域 O(v)具有如下结构：由两个不连通点 v_1 和 v_2 组成的 0 维球面，与 (n-2) 维空间 $O(v_1v_2)$的和，即 $O(v)=S^0\oplus O(v_1v_2)$。因此，O(v)是一个正规闭 (n-1) 维空间（图55）。设点 v_3 属于 $O(v_1v_2)$。$O(v_3)$是一个 (n-1) 维正规闭子空间（图55）。其中进行完全相同的将边替换为点变换。根据假设，经过这一变换后，空间仍是正规闭空间，且维数不变。空间 G^n 中的所有其他点的邻域均未改变。因此，每个点的边界仍是闭正规 (n-1) 维空间。定理得证。□

将点替换为边的变换，是与将边替换为点相反的变换。几乎显而易见，如果在原空间 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$ 中，点 v 可以替换为边 (v_1v_2)。尽管如此，我们仍证明这一结论成立。

定理34

3TC 的同胚变换不会改变正规分子空间 G 的维数和正规性^n。证 明。使用归纳法。对于维数 n=1 ，定理可直接验证（图54）。假设定理对于

维数 $n < k$ 的情形成立。设 $n = k$。设 G^n 是某个分子空间，v 是该空间中的一个点，且满足 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$，而 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$，其中 S^0 是 U(v) 中两个不连通点 v_1 和 v_2。删去点 v，并建立连接 (v_1v_2)。容易看出，所有不属于 $O(v_1v_2v)$ 的点的邻域均未改变。因此，将点替换为连接后，这些点的邻域仍是 (n-1) 维闭正规空间。考察邻域 $O(v_3)$

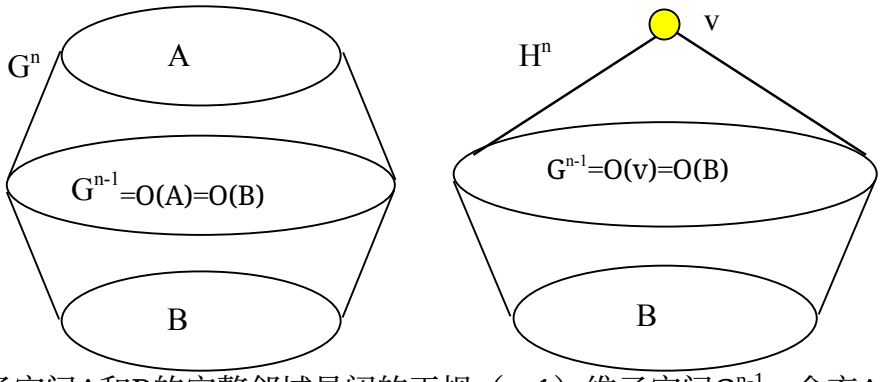


图57 子空间A和B的完整邻域是闭的正规（n-1）维子空间G^{n-1}。舍弃A，并将点v与G^{n-1}中的所有点连接起来，不会改变空间的维数。

位于 $O(v_1v_2v)$ 中的点 v_3。这个邻域是正规闭的 (n-1) 维空间，并具有原空间 G^n 的结构，即 $O(v)|O(v_3) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)|O(v_3)$ 和 $O(v_1v_2)|O(v_3) = v\oplus O(v_1v_2v)|O(v_3)$，其中 S^0 是 $O(v)|O(v_3)$ 中的两个不连通点 v_1 和 v_2。在 $O(v_3)$ 中发生完全相同的连接替换为点变换。根据归纳假设，经过此变换后，子空间 $O(v_3)$ 仍是正规闭空间，且维数仍为 (n-1)。因此，每个点的边界仍是正规闭的 (n-1) 维空间。定理得证。 □

仔细观察这两种变换可以发现，一般来说，点的邻域可能改变其类型。例如，在将边替换为点的变换中，可能会出现拓扑性质不属于该空间的邻域。不过，在一种情况下，同胚变换不会改变邻域的拓扑性质。这种情况发生在所有邻域都是球形的情况下。事实上，任意维数的球面与0维球面的乘积总是一个球面。换言之，经过同胚变换，分子流形仍然是流形。

现在转到两个分子空间的直和。设 Φ_G 是将边替换为点的同胚变换，作用于 G^m。显然，它也将是

W^{m+n+1}=G^m⊕H^n上的同胚变换，因为这种变换适用于正规空间中的任意一条边。要确认将点替换为边的同胚变换作用于 G^m 后，在 $W^{m+n+1} = G^m$⊕ H^n上也仍是同胚，则稍微复杂一些。下面证明这一点。

定理35

设 G^m 和 H^n-是维数分别为 m 和 n 的两个正规分子闭空间。设 Φ_G 是 G^m上的某个将边替换为点的同胚变换。那么 Φ_G 也是 $G^m \oplus H^n$. 上的将边替换为点的同胚变换。

证 明。
设 G^m 是一个闭正规空间，v_1 和 v_2 是该空间中两个不相连的点，并且对于点 v，满足条件 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$, 其中 A^{m-2} =$O(v_1v_2v)$ 是一个维数为 (m-2) 的正规分子闭空间。现在将点 v 同胚地替换为边 (v_1v_2)。此时 G^m 变为 Φg^m。考虑 $G^m\oplus H^n$。在子空间 G^m中选取同一个点 v，以及同样两个不相连的点 v_1 和 v_2 。此时 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus(A^{m-2}\oplus H^n)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus(A^{m-2}\oplus H^n)$，其中 $(A^{m-2}\oplus H^n)= O(v_1 v_2v)$ 属于 $G^m\oplus H^n$。因此，在 $G^m\oplus H^n$ 中，可以通过同胚方式去掉点 v，并在点 v_1 和 v_2之间建立连接。定理得证。 □

考虑两个分子空间的直和中，其中一个空间经过同胚变换 Φ 的情形。设 $W^{m+n+1} = G^m\oplus H^n$ 和 $W_1{}^{m+n+1} = \Phi_G(G^m)\oplus H^n$。问题是，$W^{m+n+1}$ 和 W_1 m+ n+1是否同胚?

定理36. 关于空间直和的同胚。

设 G^m 和 H^n-是维数分别为 m 和 n 的两个正规分子闭空间。设 Φ 是空间 G^m的某个同胚变换。那么，直和 $G^m\oplus H^n$ 同胚于直和 $\Phi(G^m)\oplus H^n$, $G^m\oplus H^n \approx \Phi(G^m)\oplus H^n$.

证 明。
设 G^m 是某个分子正规空间，v_1 和 v_2是该空间中由连接 (v_1v_2) 相连的两个点。记 $O(v_1v_2)=A^{m-2}$。将连接 (v_1v_2) 同胚地替换为点 v。在此过程中

正规分子空间的性质：点 v 的邻域形式为 $O(v)=S^0(v_1,v_2)\oplus A^{m-2}$，且 G^m 变为 ΦG^m。在空间 $\Phi(G^m)\oplus H^n$ 中，点 v 的邻域形式为 $O(v)= S^0(v_1, v_2)\oplus(A^{m-2}\oplus H^n)$。考虑 $G^m\oplus H^n$。从子空间 G^m 中选取相同的两个点 v_1 和 v_2，它们由边 (v_1v_2) 连接。显然，在 $G^m\oplus H^n$ 中，$O(v_1v_2)=A^{m-2}\oplus H^n$。通过同胚变换删除边 (v_1v_2)，并将点 v 与 $O(v_1v_2)$ 中的所有点以及 v_1 和 v_2 连接。此时，在 $\Phi(G^m \oplus H^n)$中，点 v 的邻域形式为 $O(v)=S^0(v_1,v_2) \oplus(A^{m-2}\oplus H^n)$。由于点 v 在 $\Phi(G^m)\oplus H^n$ 和 $\Phi(G^m\oplus H^n)$中的球相同，其余所有点的邻域也相同，这意味着 $\Phi(G^m)\oplus H^n=\Phi(G^m\oplus H^n)$。由于 $G^m\oplus H^n\approx\Phi(G^m\oplus H^n)= \Phi(G^m)\oplus H^n$，因此 $G^m\oplus H^n\approx\Phi(G^m)\oplus H^n$。对于将边替换为点的变换，定理得证。

设 G^m 是同一个分子正规空间，v_1 和 v_2 是该空间中两个不相连的点，并且对于点 v，满足条件 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$，其中 $A^{m-2}=O(v_1v_2v)$ 是维数为 (m-2) 的正规分子闭空间。现在将点 v 替换为边 (v_1v_2)，使之同胚

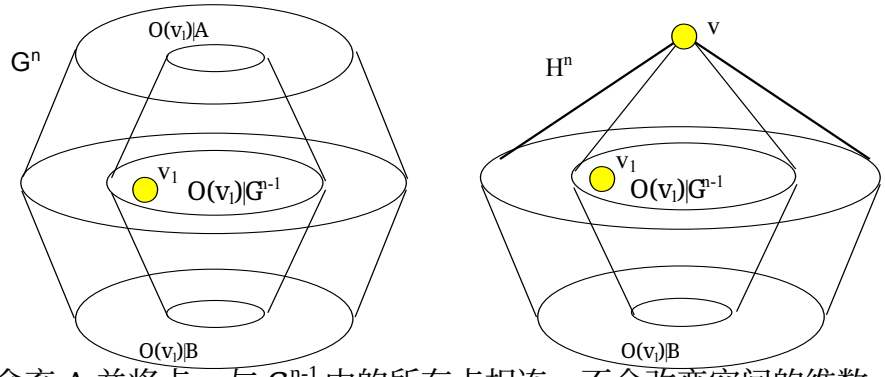


图 58 舍弃 A 并将点 v 与 G^{n-1} 中的所有点相连，不会改变空间的维数。空间 $O(v_1)$ 与 G^n具有相同的结构。

这样，G^m 过渡到 Φg^m。考察 $G^m\oplus H^n$。选取同一点 v、同样的两个点 v_1 和 v_2，它们在子空间 G^m中没有连接。此时 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus(A^{m-2}\oplus H^n)$，且 $O(v_1v_2) = v\oplus(A^{m-2}\oplus H^n)$，其中 $(A^{m-2}\oplus H^n)=O(v_1v_2v)$ 位于 $G^m\oplus H^n$中。因此，在 $G^m\oplus H^n$ 中可以同胚地去掉点 v，并在点 v_1 和 v_2之间建立连接。此时，空间 $G^m\oplus H^n$ 同胚地过渡到 $\Phi(G^m\oplus H^n)$。另一方面，空间 $\Phi(G^m\oplus H^n)$仍然是两个子空间的直和，其中一个子空间 H^n保持不变，因为所有变换都是在子空间 G^m 的点上进行的。也就是说，$\Phi(G^m\oplus H^n)$可以表示为直和 $(\Phi G^m)\oplus H^n$。由此 $G^m\oplus H^n\approx\Phi(G^m\oplus H^n)=(\Phi G^m)\oplus H^n$。因此，

$G^m \oplus H^n \approx (\Phi G^m) \oplus H^n$。对于将点替换为边的变换，定理得证。至此，定理的证明完成。□因此，我们看到，G^m（或 H^n）上的任何同胚变换都会自动诱导出 $G^m \oplus H^n$ 上相应的同胚变换。另一方面，$G^m \oplus H^n$ 上并非所有同胚变换都能由 G^m 或 H^n 上的某种变换诱导出来。只有当参与变换的点 v_1, v_2 和 v 同时属于两个子空间之一（即 G^m 或 H^n）时，才会出现这种情况。在这种情况下，关系式 $(\Phi G^m) \oplus H^n = \Phi(G^m \oplus H^n)$ 成立。

在实际工作中，常常需要缩小分子空间的体积，以减少为各种目的处理该空间所耗费的时间。因此，问题随之而来：能否不是逐个删除点，而是成组删除，同时保留空间的某些特征？下面的定理可以部分回答这个问题；它至少保留了空间的维数和正规性。在其他章节中，我们还会回到这个问题。下面的定理将讨论图57所示的一类特殊分子空间。

定理37

设分子正规 *n*-维空间 G^n 可表示为三个非空子空间 *A*、*B* 和 G^{n-1}的并集，其中空间 *A* 与 *B* 中的点之间没有连接，子空间 *A* 和 *B* 的邻域是闭的正规 *(n-1)*-维空间 G^{n-1}, $G^n = A \cup G^{n-1} \cup B$, $A \cap O(B) = O(A) \cap B = \varnothing$, $O(A) = O(B) = G^{n-1}$ *(*图 *57)*。删去子空间 *A* 的所有点，并将孤立点 *v* 与子空间 G^{n-1}中的所有点连接。所得空间 H^n 是一个正规分子 *(n-1)*-维空间。

□

证 明。

使用归纳法。对于维数 n=1 ，定理可直接验证。假设定理对维数 $n < k$ 成立。设 $n = k$。考虑空间 G^n 中位于 G^{n-1} 内的点 v_1 。该点在 G^n 中的邻域 $O(v_1)$ 是一个正规的分子闭 (n- 1) 维空间；该点在 G^{n-1} 中的邻域 $O(v_1)|G^{n-1}$ 是一个正规的分子闭 (n-2) 维空间；子空间 $O(v_1)|A$ 和 $O(v_1)|B$ 中的点之间没有连接。因此

$O(v_1)$ 的结构与 G^n 相同。因此，根据归纳假设，舍去 $O(v_1)|A$ 并将点 v 粘接到 $O(v_1)|G^{n-1}$ 后，$O(v_1)$ 将变为正规闭 (n-1) 维空间。这意味着，G^{n-1} 中所有点的邻域仍将是闭的正规 (n-1) 维空间。集合 B 中各点的邻域未发生变化。点 v_1 的邻域同样是 G^{n-1} 中一个正规的分子闭 (n-1) 维空间。由此，空间 H^n 是一个正规的分子闭 n 维空间。定理得证。□

让我们通过几个具体例子来看看这个定理如何发挥作用。图59上方展示了在由6个点组成的圆周S^1_1, 中，将子空间A替换为点v。此时得到的空间S^1_2同样是一个由4个点组成的圆周。下方

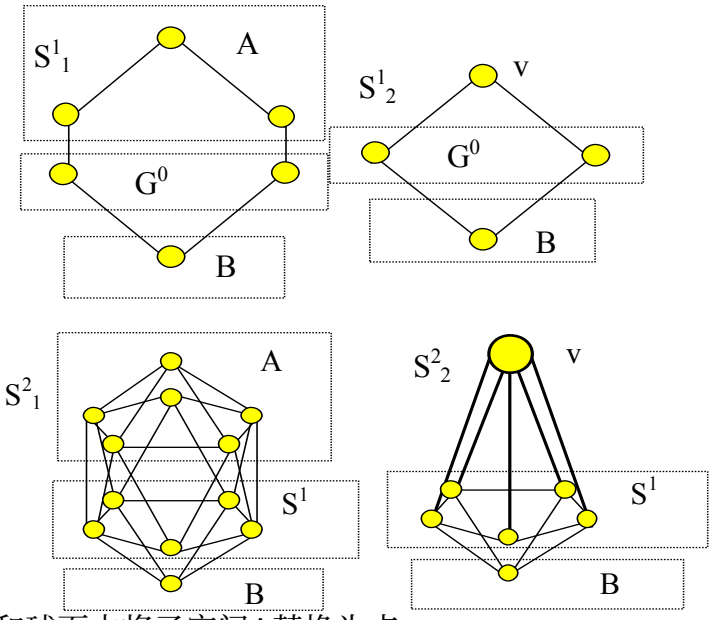


图59 在圆周和球面中将子空间A替换为点v。

展示了由12个点组成的球面S^2_1, 。空间A由6个点组成，空间B由1个点组成。将A替换为点v后，得到的球面S^2_2 由6个点组成。

在分子空间是某个一维、二维或三维连续曲面的数字图像，也就是流形时，这个定理尤其有效。通常，这类图像由大量点构成，这会增加计算机处理这些曲面的时间，并占用大量计算机内存。因此，最好先尽可能减少数字模型中的点数。在这种情况下，可以方便地将空间划分为点 v 的若干完备 n-邻域，$O^1(v)$、$O^2(v)$、$O^3(v)$、.....

$O^{p-1}(v)$、$O^{p}(v)$、B（图 60）。依次检验它们是否为 (n-1) 维闭分子空间后，我们选取这一系列中最后一个，并将其记为 G^{p-1}。所有先前的完备邻域与点 v 的并构成子空间 A；由不属于 A 的点构成的子空间 G^{n-1} 则是子空间 B。根据定理 3 用一个点替代 A 后，我们得到的空间点数更少，且与原空间同胚。

在前面的某一节中，我们引入了分子空间的点变换。这些变换适用于任意分子空间。下面证明，这些同胚变换可以表示为一系列点变换，并且适用于包括正规空间在内的任意空间。

定理38

将边替换为点的同胚变换，是分子空间 *G* 中的两个点变换的连续作用：点粘接和点删除边^{n}。

证 明】【。
使用将边替换为点的定义。首先，将点 v 连接到 G^{n}，使得 $O(v)=v_1 \oplus v_2 \oplus O(v_1v_2)$。显然，O(v) 是一个点子空间，因此，连接点 v 是一种点粘接。现在考察 $G^{n} \cup v$ 中的公共边界 $O(v_1v_2)$。它具有如下形式：$O(v_1v_2)|(G^{n} \cup v)=v \oplus O(v_1v_2)|G^{n}$。这个邻域是一个锥，并且是一个点空间。因此，可以删除边 $O(v_1v_2)$。定理得证。□ 关于将点替换为边的定理可类似证明。

定理39

同胚变换将点替换为边，是分子空间 G^{n} 中两个点变换的序列：边的点粘接和点的点删除。

证 明。
使用以连接替换点的定义。在不相邻的点 v_1 和 v_2，之间引入连接 v_1v_2。这是点变换，因为 $O(v_1v_2) = v \oplus O(v_1v_2v)$ 是锥。在所得空间 $G^{n} \cup (v_1v_2)$ 中，点 v 的邻域是 O(v)

$=v_1 \oplus v_2 \oplus O(v_1 v_2 v)$，也就是说，是可缩的点空间。因此，点 v 可以删去。定理得证。□

第4章参考文献列表。

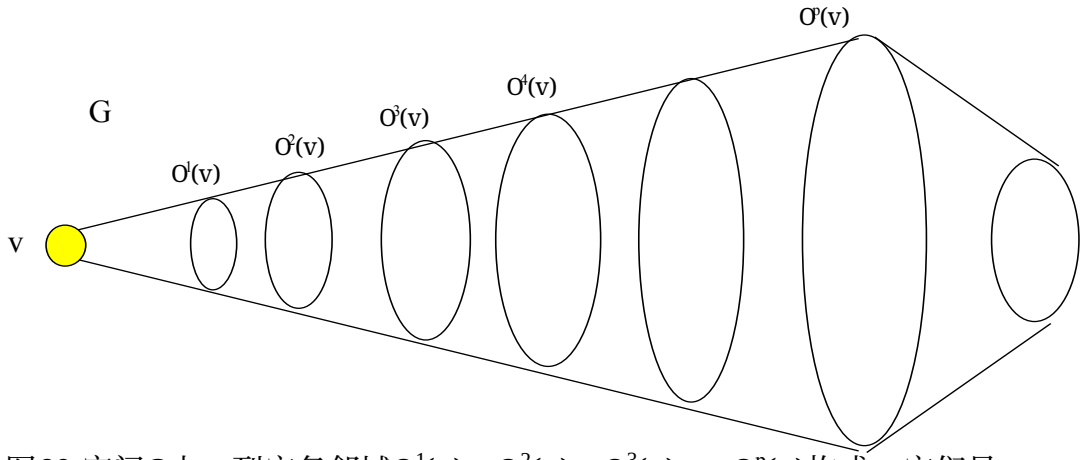


图60 空间G由一列完备邻域$O^1(v)$、$O^2(v)$、$O^3(v)$.....$O^p(v)$构成，它们是(n-1)维正规闭空间。将截至第(p-1)个完备邻域（包括该邻域）在内的所有完备邻域的并替换为点v，并使其与空间$O^n(v)$中的所有点相连。

7 Evako A.V., 离散空间上的维数，《国际理论物理学杂志》，第 33 卷，第 1553–1568 页，1994年。10 Evako A.V., Melter R.A., 《线段的图维数》，《第八届一般拓扑学及其应用暑期会议论文集》，1992年，美国纽约，第 43 页。Ивако А.В., 《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。50 Иващенко А.В., 《分子空间的维数》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6422-84 号，1984年。51 Иващенко А.В., 《分子空间的拓扑性质》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984年。

带边界的正规分子空间与正规分子流形

我们研究了带有边的正规分子空间和正规多重空间的一些性质。

本章的一些结果见文献 [43]。

带边界的正规分子空间及其性质

在前几章中，我们主要考察了每个点都是正规且为 n 维的空间。这些空间要么是有限的闭空间，要么是无限正规空间。现在来考察带边界的正规空间。在 n 维连续空间中，边界可以是连通的，也可以是由若干连通分支构成的 (n-1) 维空间（图 61）。

类似地 定义分子正规空间 c

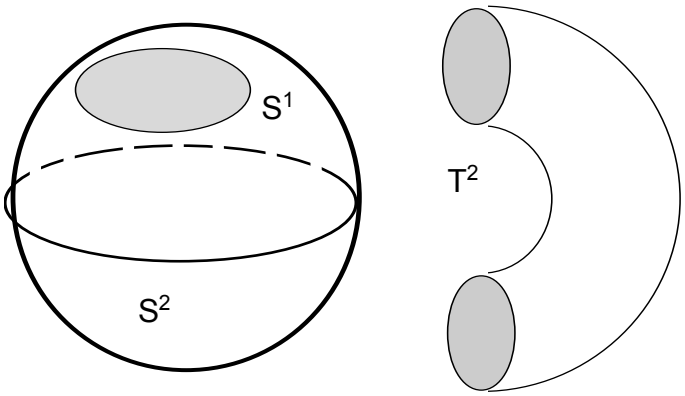


图 61 带边界的空间。带有一个孔洞的二维球面 S_2，该孔洞是一个一维圆周。带边界的圆柱面 T_2，其边界是由两个圆周组成的非连通空间。

带边界。如果空间 G 由空间 H 以及与子空间 P 的所有点相邻的点 v 组成，我们将使用以下简写记号：$G \subseteq H=(v \cup P)$。例如 $G \oplus (G-v)=(v \cup O(v))$。由于空间的并集首先是构成该空间的点的并集，因此也可以使用记号 $G \oplus G=(v \cup O(v))$。先作一个说明。为避免后文产生误解，我们

将讨论维数大于 0 的带边界空间。不过，如果考虑到我们已经定义过：唯一的零维正规闭空间是零维球面，而唯一的零维带边界空间是孤立点，那么这一限制也是可以避免的。

连通边界空间的定义

设 G^n 是一个正规 n 维空间，且点 v 属于 G^n。那么空间 $H^n=G^n-v$ 称为具有连通边界 B=O(v) 的正规 n 维空间（图 62）。

任意正规 n 维空间 H^n （其连通边界为 B）都可以表示为子空间 A、$A=G^n-B$ 与边界 B 的并集，

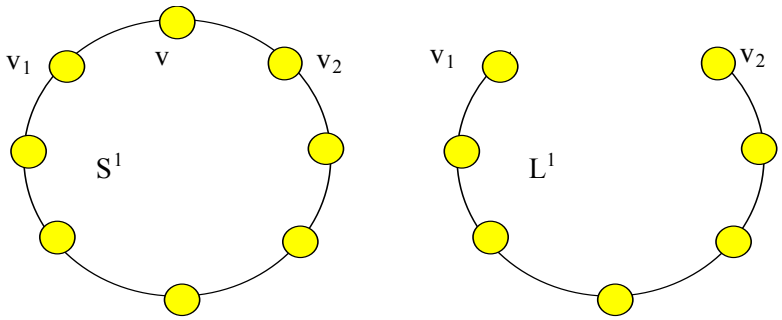


图 62 在正规圆 S_1中去掉点 v_1后，所得空间 L_1成为以 v_1和 v_2为边界的空间。L_1 是正规线段，边界 B 是由 2 个不连通点 v_1和 v_2组成的正规 0 维空间。空间 L_1中的其余所有点都是一维的。

$H^n=A\cup B=(A,B)$。仅由 n 维正常点组成的子空间 A 称为空间 H^n的内部或核。因此，H^n 是其核 A 与边界 B 的并集，$H^n=A\cup B=(A,B)$。属于核 A 的点称为空间 H^n的内点，属于边界 B 的点称为 H^n的边界点或界点。

n 维正规空间中点的球是最简单的带边界正规 n 维空间。事实上，正规 n 维点的球由该点本身及其邻域组成，根据定义，该邻域是一个正规闭 (n−1) 维空间。图 63 展示了这些最简单的带边界空间 D^1, D^2, D^3 和 D^4 ，其维数分别为 1、2、3 和 4，它们分别是 1、2、3 和 4 维球的……

范数点。具有连通边界的范数空间不仅可以通过去除点得到，也可以通过去除边得到。我们将证明，去除边同样会得到具有连通边界的范数 n 维空间。

定理 40

设 H^n 是正规 n-维闭空间，且 (v_1v_2) 是点 v_1 与点 v_2 之间的连接。那么，空间 $G^n=H^n-(v_1v_2)$ 是具有连通边界的正规 n-维空间。

证 明。
从 H^n 中去除连接 (v_1v_2)。点 v_1，v_2 和 $O(v_1v_2)$ 中的点的邻域发生了变化。将点 v 沿 $v_1\oplus v_2\oplus O(v_1v_2)$ 粘到 $H^n-(v_1v_2)$ 上。根据将连接同胚地替换为点的定理，所得空间 $G^n\cup v=(H^n-(v_1v_2))\cup v$ 是正规 n-维空间。因此，去除点 v 将空间 $G^n\cup v$ 变为正规 n-

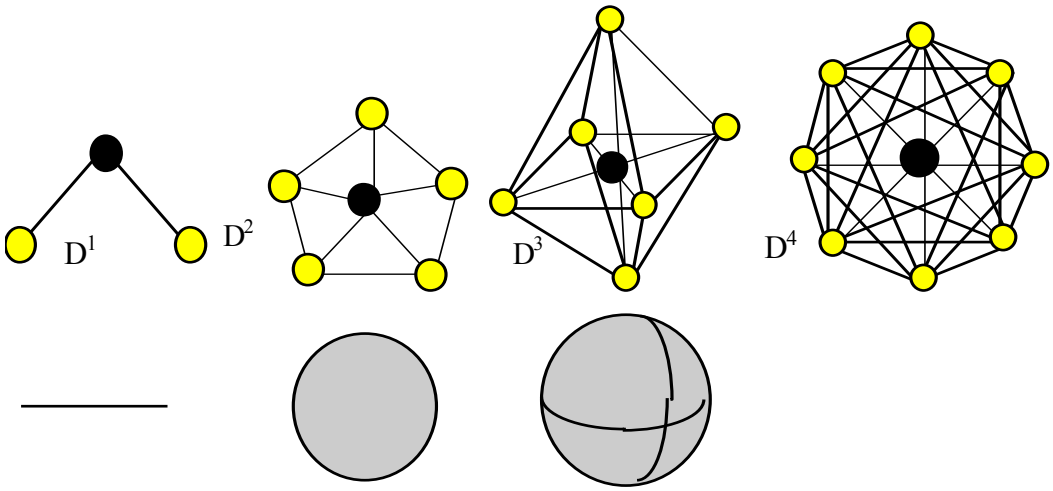


图 63 D_1、D_2、D_3 和 D_4 是最简单的带边界空间。它们分别是 1、2、3 和 4 维范数点的球，并且模拟 1、2、3 和 4 维连续圆盘。

维空间具有连通边界。由于 $(G^n\cup v)-v=((H^n-(v_1v_2))\cup v)-v=H^n-(v_1v_2)$，因此 $H^n-(v_1v_2)$ 也是具有连通边界的正规 n 维空间。定理得证。□

带边界的空间的性质由正规 n 维空间的定义得出。

定理41

设 H^n 是具有连通边界 B 的正规 n-维空间。那么边界 B 将是正规闭的 $(n-1)$- 维空间。□

证 明。
将点 v 粘到空间 H^n 的边界 B 上。所得空间

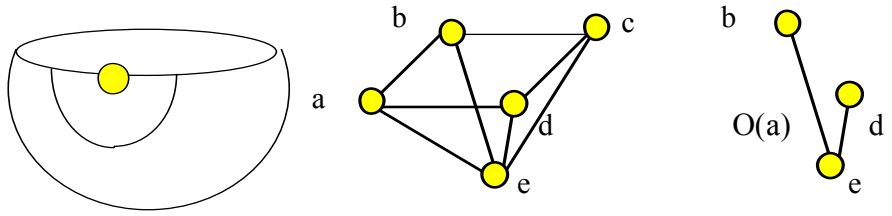


图 64 D_2 是最简单的二维带边界正规空间（a、b、c、d）。点 a 的边界则是一个一维带边界正规空间（b、d）。

$G^n=H^n\cup(v\oplus B)$。是正规 n 维空间。因此，O(v)=B 是正规闭 (n−1) 维空间。若 (n−1)>0，则 O(v)=B 是连通的。定理得证。□ 图 63 中的圆盘是带边界的空间，而这些边界本身是正规球面。

定理 42

设 H^n 是具有连通边界 B 的正规 n-维空间，$H^n=A\cup B=(A,B)$。则子空间 A 非空，且子空间 A 的所有点都是 n-维正规点。.

证 明。
将点 v 沿边界 B 粘到空间 H^n 上。所得空间 $G^n=A\cup(v\oplus B)$ 是正规 n 维空间。因此，根据前一定理的推论，至少存在一个与 v 不相邻的点。显然，该点属于 A。设点 v_1 属于 A。$O(v_1)$ 是 G^n中的一个正规闭 (n-1) 维空间。从 G^n 中去掉点 v 不会改变 $O(v_1)$。由此，H^n中所有不属于边界 B 的点都是正规 n 维点。定理得证。□

在图 62 中，正规线段 $L_1=A\cup B$ 的边界由 2 个不连通点组成，是一个正规 0 维空间。所有点

子空间 A 是正规的一维点。

定理43

设 H^n 是一个带连通边界 B 的正规 n-维空间，$H^n=A\cup B=(A,B)$。则属于 B 的任意点 v 的邻域 $O(v)$ 是一个带连通边界 $B\cap O(v)$。的正规 $(n-1)$-维空间 。

证 明 .
将点 v 沿边界 B 粘到空间 H^n 上。所得空间 $G^n=A\cup(v\oplus B)$。是一个正规 n 维空间。于是，在 G^n

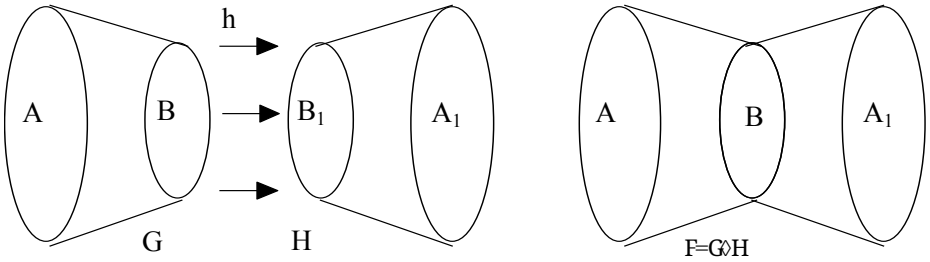


图 66 G 和 H 空间沿子空间 B 粘合成 F 空间。

属于 B 的任意点 v_1 的邻域 $O(v_1)$ 是一个正规 (n-1) 维空间。点 vv_1 的总邻域是一个正规 (n-2) 维

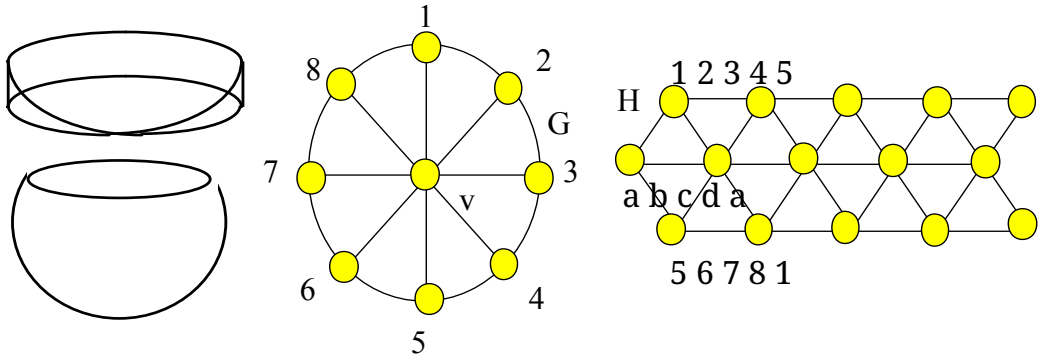


图65 左侧，带孔的连续球面用莫比乌斯带封闭。右侧，带孔的分子正规球面 G（二维圆盘）用分子正规莫比乌斯带 H 封闭。具有边界 B 的 G 和 H 沿作为圆周的子空间 B 粘合成空间 F，该圆周由 8 个点 1、2、3、4、5、6、7、8 组成。粘合 F=G◊H 将是射影平面。

空间。删去点 v 后，$O(v_1)$ 变为 $O(v_1)$-v，也就是说，它成为一个带连通边界 $B\cap O(v_1)$ 的正规 (n-1) 维空间。定理得证。□

在图 64 中，D^2 是最简单的带边界二维正规空间 (a, b, c, d)，其边界是圆周。点 e 是二维点。点 a 的邻域则是带边界 (b, d) 的一维正规空间。下面回顾空间粘合的定义。

两个空间的粘合定义

设 $G=A\cup B$ 和 $H=A_1\cup B_1$ 是两个分子空间，且子空间 B 与 B_1, $h: B\to B_1$同构。那么，称 G 和 H 按同构 h 粘合所得的空间 $F=G\Diamond H=(G\cup H)/B=A\cup B\cup A_1$, ，其中每个点 $v\in B$ 都与 $h(v)\in B_1$ 等同（图 66，图 65）。

粘合正规空间时，属于边界的点会成为正规 n 维点，属于核的点则保持不变。今后，如果 B 与 B_1 之间已经建立了一个确定的同构，我们就将空间 B_1 记作 B。显然，在空间 F 中，球 $U(A)=G$、$U(A_1)=H$ 和 $U(A)\cap A_1=U(A_1)\cap A=\varnothing$。

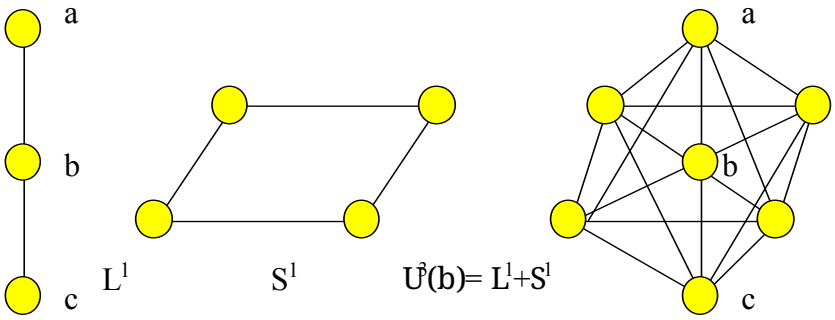


图67 由包含3个点的一维线段 L_1 与圆 S_1 的直和构成三维正规空间 $U^3(b)=L^1\oplus S_1$，其带边界为 S_2，并带有三维正规点的球。

定理44

设 $G^n=A\cup B$ 和 $H^n=A_1\cup B_1$ 是两个带边界的正规空间，且子空间 B 与 B_1, $h: B\to B_1$ 同构。那么，空间 G^n 和 H^n 沿同构 h 粘合得到的 $F=G^n\Diamond H^n=A\cup B\cup A_1$ 是一个无边界的正规 n-维空间（图 66，图 65）。

证 明。
使用归纳法。对于 n=1 ，定理可直接验证。假设定理对 G^n 和 H^n 成立，其中 n≤。设 n=。任取一点 v_1∈∈B，并考察该点在 F^n 中的邻域。显然，$O(v_1)|\subset F^n$=，$O(v_1)|\cap A\cup$，$O(v_1)|\cap B\cup$，$O(v_1)|\cap A_1$。由于 $O(v_1)|\cap A_1\cup$ 和 $O(v_1)|\cap B$，以及 $O(v_1)|\cap A\cup$ 和 $O(v_1)|\cap B$ 是正规

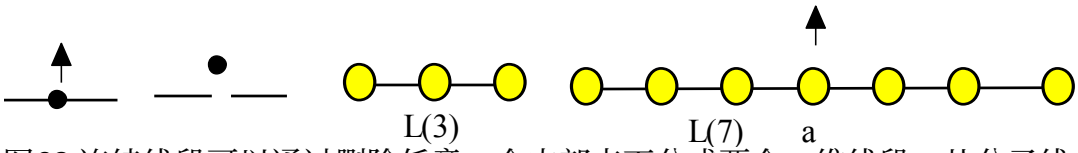


图68 连续线段可以通过删除任意一个内部点而分成两个一维线段。从分子线段 L(3) 中不能删除任何一个点。只有由至少7个点组成的线段 L(7)，才能通过删除点 a 而分成两个一维线段。

边界连通的 n−1 维空间，因此 $O(v_1)|\subset F^n$=，$O(v_1)|\cap A_1\cup$，$O(v_1)|\cap B\cup$，$O(v_1)|\cap A$ 是它们的粘合，并且根据归纳假设，是正规闭 (n−1) 维空间。因此，B 中的所有点以及 A_1 和 A 中的点，在 F^n 中都是正规 n 维的。这意味着 F^n 是正规 n 维空间。定理得证。□

图65描绘了两个带边界 B 的正常二维空间 G 和 H。空间 G 是圆盘，空间 H 是莫比乌斯带。边界 B 是由 8 个点组成的圆周。将 G 和 H 沿边界 B 粘合后，形成射影平面，也就是我们之前已经讨论过的粘合球面。在连续情形下，射影平面也是以同样的方式得到的，即将莫比乌斯带粘接到圆盘上。

定理45

> 设 G^n，$n>0$ 是正规 n-维闭空间。那么锥 $v\oplus G^n$ 将是正规 $(n+1)$-维空间，且具有连通边界 G^n。

证 明。
考虑由包含两个孤立点的 0 维正规球面 $S^0(v,u)$ 与 G^n构成的直和。那么 $T^{n+1}=S^0\oplus G^n$ 将是一个 (n+1) 维正规闭空间。从 T^{n+1} 中去掉点 u。所得空间将是一个带边界 G^n的正规 (n+1) 维空间，同时也是锥 $v\oplus G^n$。定理得证。□

容易看出，在锥 $v\oplus G^n$ 中，只有一个点 v 是 (n+1) 维的。这类最简单的锥是图 63 所示的正规点球。

定理46

> 设 G^n 是一个有限点集上的正规 *n*-维空间，具有核 *A* 和连通边界 *B*，$G^n=A\cup B$。设 H^m 是一个 *m*-维正规闭空间。那么它们的直和 $G^n\oplus H^m$ 将是一个正规 *(n+m+1)*-维空间，具有核 *A* 和连通边界$B\oplus H^m$，且是一个 *(n+m)*-维正规闭空间（图 *67)*.

证 明。
将点 v 沿着 B、O(v)=B 粘接到 G^n 上。所得空间 $F^n=G^n\cup v=A\cup(B\oplus v)$ 将是一个正规闭的 n 维

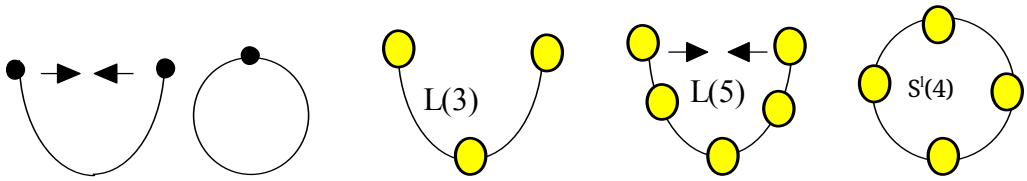


图69 连续线段总能将其端点粘合成一个圆周。分子线段 L(3)不能粘合成圆周。只有由不少于5个点组成的线段 L(5)才能粘合成最小圆周。$S^1(4)$。

空间。因此，直和 $P^{n+m+1}=F^n\oplus H^m$ 是一个正规闭的（n+m+1）维空间。从 P^{n+m+1} 中去掉点 v。P^{n+m+1} $-v=G^n\oplus H^m$ 将是一个具有连通边界 $B\oplus H^m$的正规（n+m+1）维空间，而该边界是一个（n+m）维正规闭空间。定理得证。
□

作为例子，考虑由包含3个点的一维线段 L^1, 与圆 S^1 （图67）作直和。所得空间 $U^3(b)=$ $L^1\oplus S^1$ 是三维正规带边界空间，并且是一个正规三维点的球。也不难证明，两个带边界空间的直和是无核空间，其中所有点都是边界点。

注释。

设 G^n 是一个定义在有限点集上的正规 n 维空间，其核为 A，且边界 B 连通，$G^n=A\cup B$。设 H^m 也是一个定义在有限点集上的 m 维空间，其核为 A_1 ，且边界 B_1,$H^n=A_1\cup B_1$。那么它们的直和 $G^n\oplus H^m$ 将是一个无核的连通空间。

现在考虑一个具有非连通边界的正规空间，其边界是若干个连通正规空间的并集（图 61）。

沿边界粘合带边界的连续空间这一操作，在经典拓扑学中广为人知。具有同胚边界的两个空间 G 和 H，可以通过边界之间的同胚映射将它们粘合起来。这一操作能够以已知空间为基础构造新的空间。例如，所有闭二维流形都可以通过用莫比乌斯带或把手封闭带有孔洞的球面而得到。

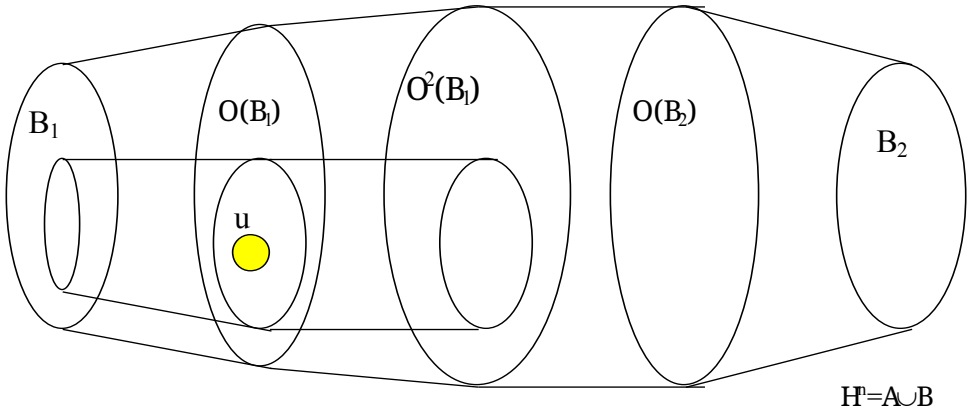


图70　在空间 Hn 中粘接两个不连通的同构边界 B1 和 B2 时，如果 U^2(B1) ∩U(B2)=∅，内点 u 的亏格不变。

处理多维计算机图像时，也会遇到类似于粘合连续空间的操作，尤其是在计算机图形学、测量结果的图形处理和医学等领域。因此，准确界定粘合操作本身以及适用这一操作的边界至关重要。同时，我们应坚持经典拓扑方法，在可能的情况下尽量运用成熟的经典几何学和拓扑学工具。将连通边界空间定义为去掉一个点的正常 n 维空间，并不会带来什么特别的困难。但如果去掉两个或更多的点，情况就不同了。由此产生的第一个问题是，这些被去掉的点彼此可以有多近

地排列。在连续情形下，这个问题根本不存在。我们可以从连续的单位区间中去掉任意有限个点，而剩下的每一段都会保留区间的所有性质，并且包含无穷多个点。在分子空间中，任何有限区间始终只由有限个点组成，因此可能出现这样的情况：去掉其中若干点后，区间便不再

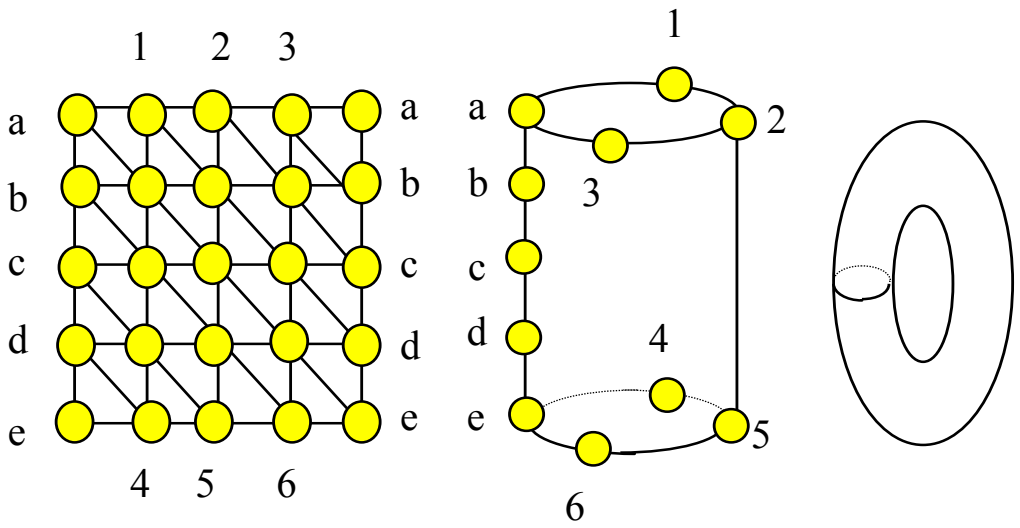


图71 圆柱 C_2 是一个二维带边界的正规空间，其边界由两个互不相连的圆周 (1,2,3,a) 和 (4,5,6,a) 组成。按照同构 (1,4), (2,5), (3,6), (a,e) 粘合边界后，得到右侧所示的环面 T_2。按照同构 (1,6), (2,5), (3,4), (a,e) 粘合边界后，得到克莱因瓶。

作为一维空间存在。在图68中，我们无法从线段 L(3) 中删去任何一点，而可以从线段 L(7) 中删去点 a；此时，剩下的每个线段仍然是带边界的一维正规空间。

同样的结论也适用于粘合（图69）。任意长度的连续线段，只要将其两端粘合，就会变成一个圆周。在分子空间的情形中，只有由5个或更多点组成的线段，在两端粘合后才会变成圆周。另一方面，两个作为带边界一维空间的线段 L(3)，可以沿边界粘合，形成一维圆 $S^1(4)$。

这些简单示例旨在说明，分子空间中的粘合操作比连续空间中的粘合更复杂。一般原则应当是：对带边界空间进行任何粘合时，都不应影响内点，也就是说，内点的拓扑不应改变。

由于点的拓扑无非就是它的邻域，因此邻域不应改变。需要注意的是，如果讨论的是具有连通边界的空间，那么这一条件会自动满足。

非连通边界空间的定义

设 G^n 是一个正规 n 维空间，属于 G^n的点 $v_1,v_2, v_3,... v_k$满足条件 $U^2(v_s)\cap U(v_p)=\varnothing$，对任意 $s\neq p$, s, p=1,2,...k 均成立。那么，从 G^n 中删去这些点所得到的空间 $H^n=G^n-v_1-v_2-v_3-...v_k$称为具有非连通边界 $B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup...B_k$的正规 n 维空间，其中 $B_s=O(v_s)$ s=1,2,...k，由 k 个连通分支组成。□

边界 B 由 k 个连通分支组成。每个连通分支 B_s 被内部的 n 维正规点 $O(B_s)\subseteq A$ 包围，其中 A 是空间 H^n 的核。考虑空间 H^n 的两个同构连通分支的粘合条件。

定理47

设空间 $H^n=A\cup B$ 是具有非连通边界 $B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup...B_k$ 的正规 n-维空间，且子空间 B_1　同构于 B_2, $h:$　$B_1\to B_2$。如果$U^2(B_1)\cap U(B_2)=\varnothing$, 那么 B_1 和 B_2 可以按照同构 h 粘合。□

证 明。

我们按照同构 h 粘合 B_1 和 B_2 ，并选取一点 $v\in B_1$。根据前面的一条定理，该点在所得空间中的邻域成为正规 (n-1) 维空间。我们还需要证明，属于核的点的邻域保持不变。设点 u 属于核 A，且 $O(u)\cap B_1\neq\varnothing$ 非空。因此，$O(u)\in U^2(B_1)=B_1\cup O(B_1)\cup O^2(B_1)$（图70）；按照同构 h 将 B_1 和 B_2 等同后，O(u) 不变，也就是说，仍是正规 (n-1) 维空间。核 A 中所有其他点的邻域同样保持不变。定理得证。□

形成的 F^n 空间具有一个核，其中增加了来自 B_1 的点，以及一个边界；该边界中不再包含 B_1 和 B_2, 的连通分支，因为它们在粘合后转移到了核中。显然，如果边界仅由这两个连通分支组成，那么 F^n 就是一个无边界空间。

图71展示了圆柱 C^2, 的粘合过程。圆柱是一个带边界的正规二维空间，其边界由两条互不相连的圆周组成。粘合后得到一个无边界正规闭空间。为便于直观理解，左侧的圆柱以剖面形式绘出，其中点1、2、3、4和5各出现两次。粘合沿着边(1,2,3,a)和(4,5,6,e)进行。根据两种不同的粘合方式，得到的空间要么是环面，要么是克莱因瓶。

正规分子流形及其性质

下面开始描述流形的性质。如前所述，计算机处理的大多数多维对象都是流形。这适用于计算机游戏、计算机图形学、医学分析和

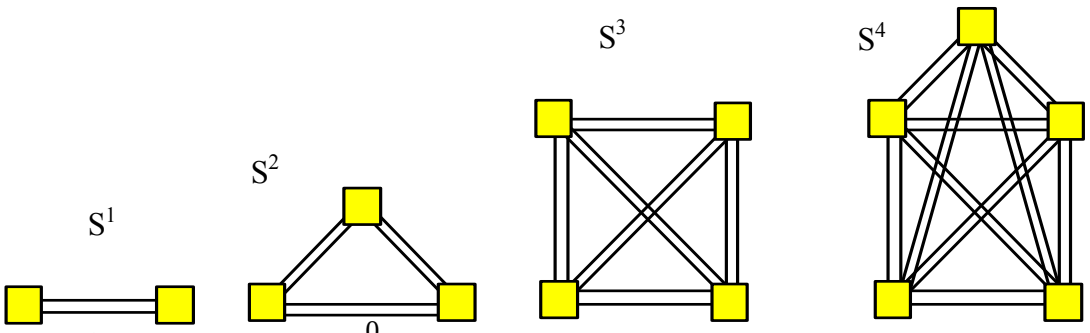


图72 方块表示 0 维球面 S^0。一个球面上的每个点都与所有其他球面上的所有点相连。两个、三个、四个和五个 0 维球面的直和分别构成维数为 1、2、3 和 4 的极小球面。

研究以及许多其他领域。因此，研究流形的性质是数字拓扑中的一个重要方向。为了使论述完整，我们将重述先前介绍过的一些定义和图。

首先，我们更详细地考察 n 维球面 S^n，它是正规分子空间中的一个重要类别。这个类别之所以重要，首先是因为在流形中，每个点的边界都是一个球面。

极小范数球面的定义

最小法向 n 维球面称为 (n+l) 个由两个孤立点构成的零维球面 S^0, 的直和。

$$S^n = S^0 \oplus S^0 \oplus S^0 \ldots \oplus S^0 = \sum_{k=0}^{k=n} S_k^0, \quad S_k^0 = S^0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

图72示意性地描绘了一些极小球面。正规 n 维球面的许多性质几乎显而易见，无需证明。其他性质将在后文中证明。下面列出 S^n 的主要性质。

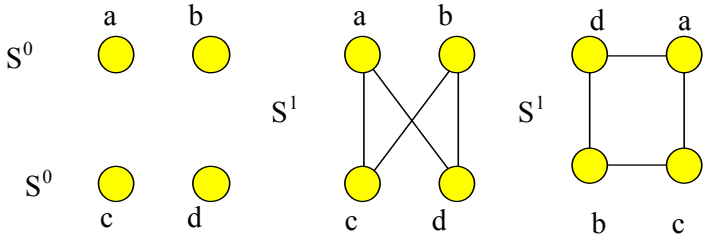


图73 两个零维球面的和是一维圆周 $S^1=S^0\oplus S^0$

最小法向 n 维球面的性质

1. S^n 是正规闭 n 维空间。2. 最小正规 n 维球面是齐性空间，即所有点的邻域同构。3. 最小正规 n 维球面的点数为 2n+2, $|S^n| = 2n+2$,（图73，图76，图74，图75）。4. 最小球面 S^n 是完备的（n+1）部空间，$S^n = K(2,2,...2)$。

性质 1 是关于闭分子空间直和的定理的直接推论。

性质 2 也显而易见。取任意一个 n 维极小的点的邻域。

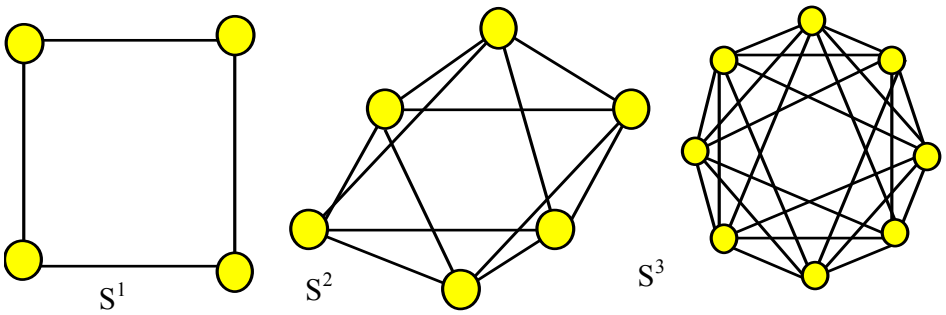


图74 球面 S1、S2 和 S3 是唯一满足关系 |Gn |=2n+1 的闭 n 维空间，其维数分别为 1、2 和 3。

球面是(n-1)-极小球面。因此，S^n 是齐性的。性质3是关于闭合范数n维空间中点的最少数量定理的推论，该定理表明，2n+2

存在该空间的极小点数。由于 $|S^n|=2n+2$，因此 S^n 按点数而言是极小的（图73，图 76，图74，图75）。
性质4只是完整的（n+1）分叶空间K(2, 2,..2)的定义。下面来看几个例子。

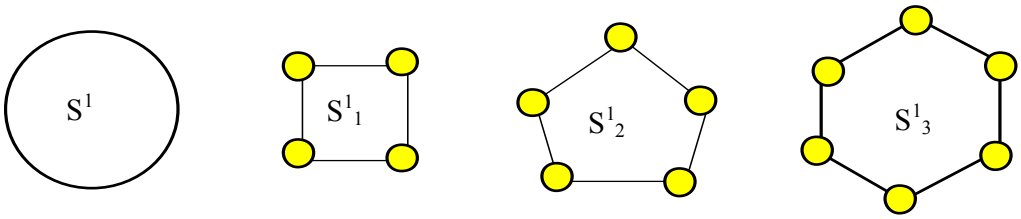


图75 展示了三个圆S11、S12和S13，分别由4、5和6个点组成。由4个点组成的球面S11是极小的。

设有两个零维球面 S^0_1，分别带有点 (a,b) 和 (c,d)，如图73所示。用连接将 S^0_1 的每个点与 S^0_2 的所有点相连。从图中很容易看出，我们得到最小的一维球面 S^1——圆周 $S^1 = S^0 \oplus S^0$。

现在，取零维球面与最小一维球面的和 S^0 和 S^1,，如图 76 所示。将一个球面上的所有点与另一个球面上的所有点连接起来，显然，我们得到最小二维球面 $S^2=S^1\oplus S^0=S^0\oplus S^0\oplus S^0$。

不难直接验证，对于三维球面（图74）：$S^3=S^0\oplus S^0\oplus S^0\oplus S^0=S^1\oplus S^1=S^0\oplus S^2$。

在例　子中，我们在前几章看到，存在　　T

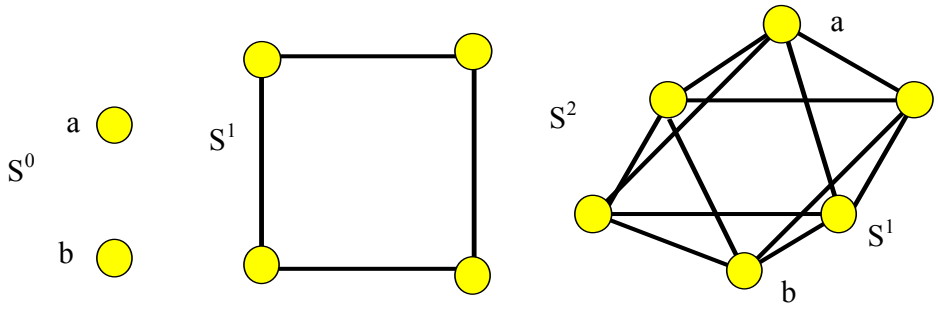


图76 0-球面S0与一维球面S1的和是一个二维球面。$S^2 = S^0\oplus S^1= S^0\oplus S^0\oplus S^0$。

若干分子圆和二维球面，它们的点数以及点与点之间的连接各不相同。图75和图77展示了这些圆和二维球面。

两个拓扑同胚的分子

空间之间通过同胚变换建立联系。现在，以最小的 n 维球面和同胚变换为基础，给出一般 n 维球面的定义。

正规 n 维球面的定义

正规 n 维球面 S^n 是由最小 n 维球面通过同胚变换——将边替换为点和将点替换为边——得到的分子空间，$S^m=\Phi_s\Phi_{s-1}\Phi_{s-2}...\Phi_1 S^m_{min}$。

由定义可知，正规 n 维球面 S^n 是可通过同胚变换——将边替换为点和将点替换为边——化为最小 n 维球面的分子空间。在图 78 中，最小圆（由4个点构成）通过将边替换为点，变为由5个点构成的圆周；由6个点构成的圆周通过将点替换为边，变为由5个点构成的圆周。

两个正规分子闭空间的直和也将是正规闭空间。类似的命题对于球面也可以得到证明。

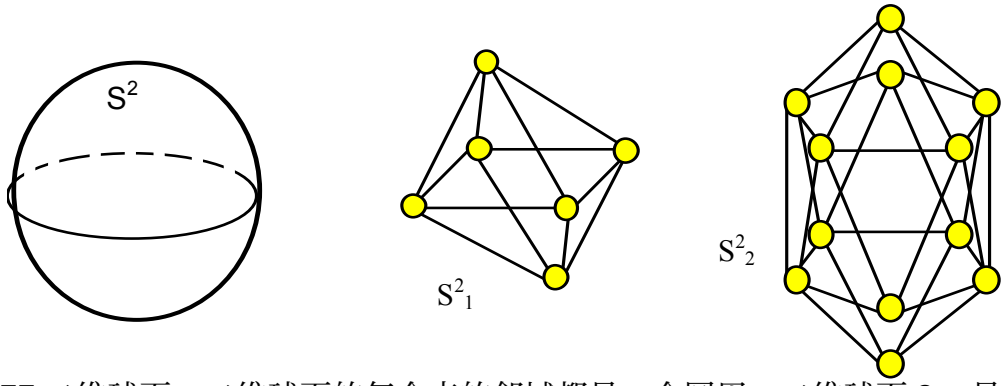


图77 二维球面。二维球面的每个点的邻域都是一个圆周。二维球面 S^2_1 是最小的，它由6个点组成——形成二维球面所需的最少点数。球面 S^2_2 由12个点组成。两个球面都是齐性的。

定理 48

设 S^m 和 S^n-是维数分别为 m 和 n 的正规球面。那么，它们的和 $W^{m+n+1} = S^m \oplus S^n$ 是维数为 $(m+n+1)$ 的正规球面。$S^{m+n+1} = S^m \oplus S^n$.

证 明。

本质上，这一定理是关于空间直和同胚的定理的推论。根据定义，球面 S^m 是由最小的 m 维球面 S^m_{min} 经过一系列同胚变换 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3,... \Phi_s$ 得到的。$S^m=\Phi_s\Phi_{s-1}\Phi_{s-2}... \Phi_1 S^m_{min}$。根据关于空间直和同胚的定理，对于每个变换 Φ_k 或 Φ_k^{-1}，都满足关系式

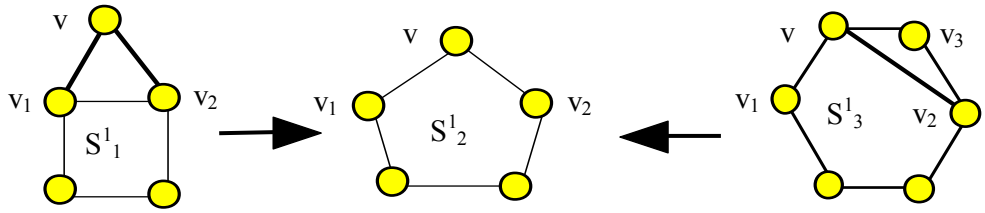


图 78 由 4个点组成的圆周 S11 通过将边 (v1v2) 替换为点 v，变为由 5 个点组成的圆周 S12。由 6 个点组成的圆周 S13 也通过将点 v3 替换为边 (vv3)，变为由 5 个点组成的圆周 S12。

$(\Phi_k S^m)\oplus S^n \approx \Phi_k(S^m\oplus S^n)\approx S^m\oplus S^n$。按相反顺序对 S^m 应用逆变换，因此对 $S^m\oplus S^n$ 我们得到：$S^m\oplus S^n \approx \Phi_s^{-1} S^m\oplus S^n \approx \Phi_{s-1}^{-1}\Phi_s^{-1} S^m\oplus S^n \approx ... \approx \Phi_1^{-1}\Phi_2^{-1}... \Phi_{s-1}^{-1}\Phi_s^{-1} S^m\oplus S^n \approx S^m_{min}\oplus S^n$。也就是说，$S^m\oplus S^n \approx S^m_{min}\oplus S^n$。同样的推理也适用于 S^n、$S^m_{min}\oplus S^n \approx S^m_{min}\oplus S^n_{min}$。这意味着，$S^m\oplus S^n \approx S^m_{min}\oplus S^n_{min} = S^{m+n+1}_{min}$。因此，两个（及更多）球面的直和 $S^m\oplus S^n$ 是一个 (m+n+1)-维球面 S^{m+n+1}，$S^m\oplus S^n = S^{m+n+1}$。定理得证。□ 下面我们从球面转向一般形式的流形。

正规流形的定义

如果分子正规 n 维空间 M^n 的每个点的邻域都是一个 (n-1) 维正规分子球面 S^{n-1}，则称其为流形。

换句话说，闭流形的所有点都是球面的。流形的例子包括所有 n 维球面 S^n和 n 维平面空间、二维环面 T^2, 、射影平面 P^2 以及克莱因瓶 K^2。流形的局部结构是什么?

定理49

设 G^n 是一个分子型（不一定是闭的）正规 n-维流形，其中 $K(m)$ 是一个点束（由 m 个两两连通的点组成的子空间 $v_1, v_2, v_3,... v_m$。那么这些点的公共边界是一个正规 $(n-m)$-维球面$O(v_1,v_2,v_3,...v_m,)=O(v_1)\cap O(v_2)\cap O(v_3)\cap...\cap O(v_m)=S^{n-m}$。

证 明。

根据正规分子 n 维流形的定义，空间 v_1 的任意点 v_1 的邻域 $O(v_1) = S^{n-1}$ 是一个分子闭正规 (n-1) 维球面。设 v_1 与 v_2 相邻，即这两点之间存在连接。这意味着 $v_2 \in S^{n-1} = O(v_1)$。因此，$O(v_2)|S^{n-1} = O(v_2v_1)$ 是一个正规 (n-2) 维球面 S^{n-2}。设 v_3 与 v_2 相邻，且 $v_1,$，也就是说 $v_3 \in O(v_2v_1) = S^{n-2}$。因此，$O(v_3)|S^{n-2} = O(v_3v_2v_1)$ 是一个正规 (n-3) 维

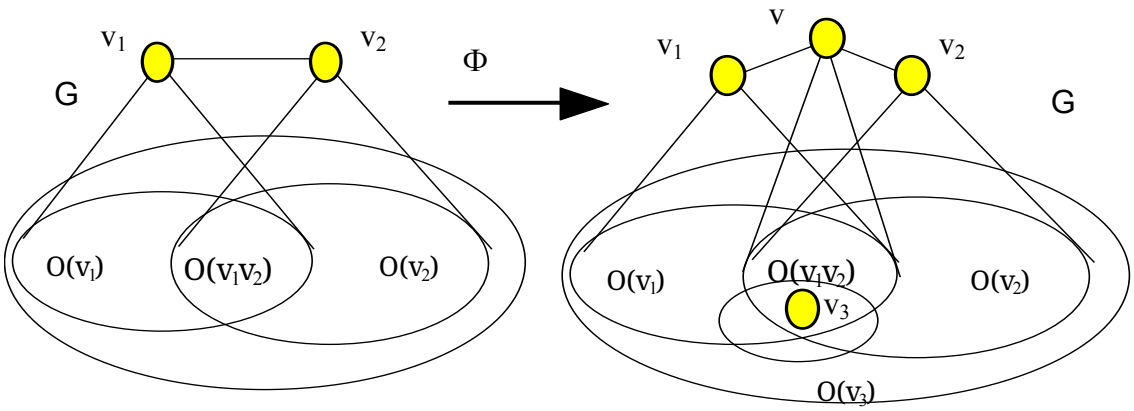


图 79 流形的同胚变换。O(v1v2)=Sn-2。连接 (v1v2) 变为点 v，满足 O(v) = S0 (v1,v2)⊕O(v1v2)。

球面。对点 $v_1, v_2, v_3,... v_m$ 重复这一过程，我们得到 $O(v_1,v_2,v_3,....v_m)= O(v_1)\cap O(v_2)\cap O(v_3)\cap...\cap O(v_m)=S^{n-m}$。定理得证。□ 该定理表明，任意数量两两相邻点的公共边界总是一个球面；而在一般的正规空间中则不同，其邻域可以是任意拓扑的闭 n 维空间。一个重要事实是，同胚变换保持流形不变，也就是说，经过同胚变换后，点的邻域仍然是球面。正如我们已经指出的，在任意正规分子空间中，邻域可以是任意闭正规空间，例如球面、环面等。在同胚变换下，邻域

该点的拓扑可能发生改变。只有在一种情况下邻域的拓扑保持不变，那就是空间为流形时。

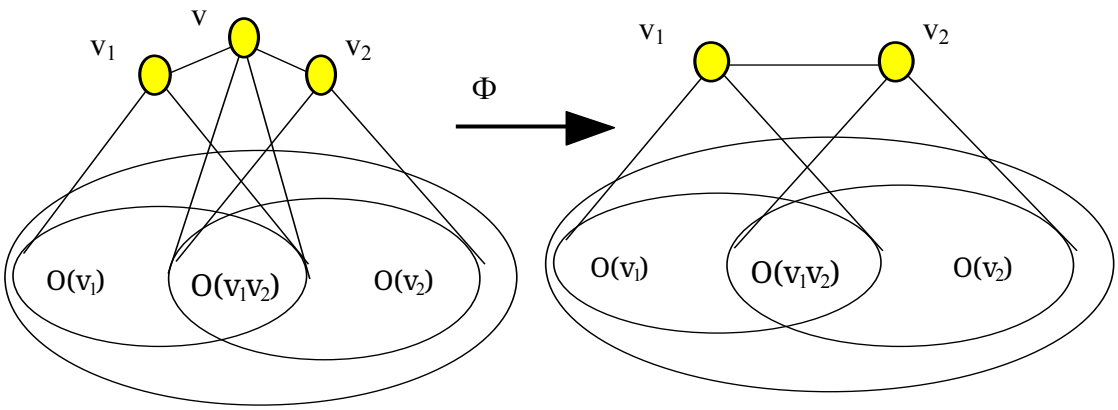


图80 分子流形的同胚变换。点 v 变为连接 (v1v2)。同时必须满足以下条件: $O(v) = S^0(v1,v2) \oplus O(v1v2v)$，$O(v1v2) = v \oplus O(v1v2v)$，其中 S0 由点 v1 和 v2 组成。

定理 50

同胚变换 Φ 将连接替换为点，把流形 G^n 变为流形 $H^n = \Phi G^n$。

证　明　。

定理的证明与正规空间的相应定理的证明相似。对于较小的维数，可直接验证定理。假设定理对于维数 $n < k$ 成立。设 $n = k$。

设 G^n 是某个流形，v_1 和 v_2 是该空间中由连接 (v_1v_2) 相连的两个点（图 79）。根据定义，$O(v_1v_2)$ 是一个 (n-2) 维正规球面。删除连接 (v_1v_2)，并将点 v 与 $O(v_1v_2)$ 中的所有点相连，同时还与 v_1 和 v_2相连。不难看出，点 v_1, 的邻域 $O(v_1)$ 未发生变化，只是该邻域中的点 v_2 被点 v 所替代。类似地，点 v_2的邻域 $O(v_2)$ 也未发生变化。因此，将连接替换为点后，这些点的邻域仍然是 (n-1) 维正规球面。

点 v 的链接 O(v) 具有 0 维球面的和的结构，该球面由两个不连通点 v_1 和 v_2 以及 (n-2) 维球面 $O(v_1v_2)$ 组成，
$O(v) = S^0 \oplus O(v_1v_2)$. 因此，O(v) 是一个正规 (n-1) 球面。设点 v_3 леж于 $O(v_1v_2)$ 中。$O(v_3)$ 是一个维数为 (n-1) 的正规球面。

其中发生了完全相同的将边替换为点的变换。根据归纳假设，经过这一变换后，$O(v_3)$ 仍是维数相同的正规球面。空间 G^n 中所有其他点的邻域保持不变。因此，每个点的边界仍是一个正规 (n-1) 维球面。定理得证。□

定理 51

同胚变换 Φ 将点替换为边，把流形 G^n 映射为流形 $H^n=\Phi G^n$.

证 明。
该定理的证明与正规空间中类似定理的证明相似。使用归纳法。对于维数 n=1 ，定理可直接验证。假设定理对维数 $n < k$ 成立。设 $n = k$。设 G^n 是某个分子空间，v 是该空间中的一个点，且满足 $O(v) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)$ 和 $O(v_1v_2) = v\oplus O(v_1v_2v)$，其中 S^0 是 U(v) 中两个不连通点 v_1 和 v_2（图 80）。删除点 v，并建立边 (v_1v_2)。容易看出，所有不在 $O(v_1v_2)$ 中的点的邻域均未改变。因此，将点替换为边之后，这些点的邻域仍是 (n-1) 维正规球面。考察位于 $O(v_1v_2)$ 中的点 v_3的邻域 $O(v_3)$。该邻域是一个正规闭 (n-1) 维球面，并具有原空间 G^n的结构，也就是说，$O(v)|O(v_3) = S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1v_2v)|O(v_3)$ 和 $O(v_1v_2)|O(v_3) = v\oplus O(v_1v_2v)|O(v_3)$，其中 S^0 是 $O(v)|O(v_3)$ 中两个不连通点 v_1 和 v_2 。在 $O(v_3)$ 中，发生完全相同的将边替换为点变换。根据归纳假设，经过此变换后，子空间 $O(v_3)$仍是维数相同的 (n-1) 维正规球面。因此，每个点的邻域仍是闭的正规 (n-1) 维球面。定理得证。 □

这两个定理表明，流形在任意同胚变换下保持不变。

推论。
同胚变换将流形映射为维数相同的流形。

分子空间分类

在此有必要再次强调，本书所论述的数字拓扑作为一门科学，诞生于数年前，

完全是实践需求促成的，也就是说，只有当人们实际需要对计算机所处理的多维图像进行形式化时，它才应运而生。令人惊讶的是，百年来包括B. 黎曼、A. 爱因斯坦、A. 爱丁顿在内的伟大数学家和物理学家的努力，在这一领域并未取得任何显著成果。对此唯一的解释是，他们的努力并不充分，因为直到不久以前，科学家都没有看到在有限或可数点集上研究几何学和拓扑的任何实质性必要。

在绝大多数情况下，程序员处理的是连续流形的数字模型，也就是分子流形。然而，流形仅构成分子空间中的一个类别，而且是相对狭窄的类别。流形属于更广泛的正规空间类别。正规空间类别的显著特征

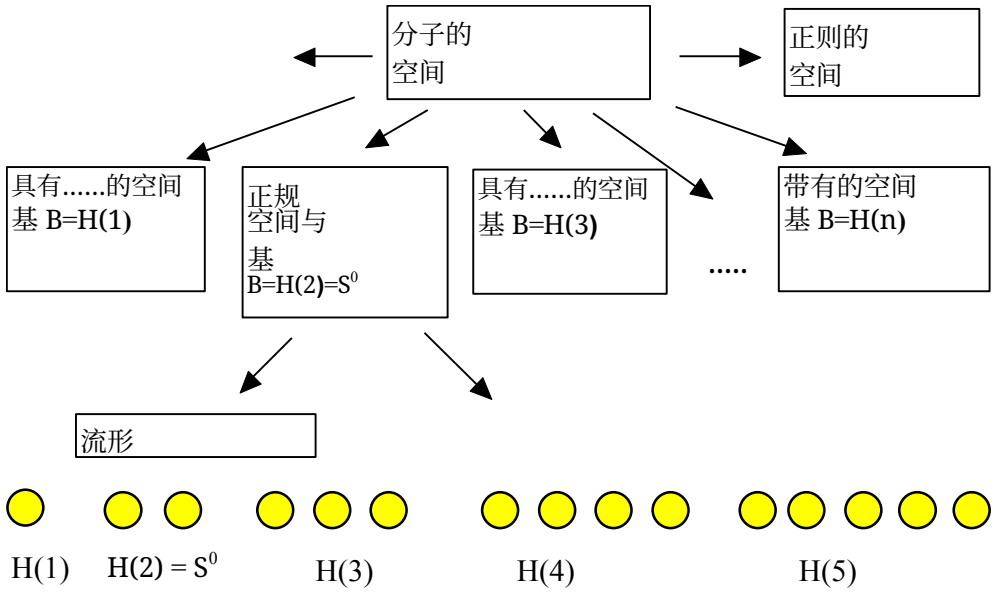


图 81 分子空间的分类。以基本元素 H(n) 为基础公理化构建空间类别。0 维基本空间 H(1)、H(2) = S0、H(3)、H(4) 和 H(5)，分别含有 1、2、3、4 和 5 个点。空间 H(2) 是正规空间类别的基本元素。

这可以从 n 维点和零维空间集合的构造方式中看出。我们提醒一下，在正规空间这一类中，只有两种零维正规空间：零维点和由两个孤立点组成的零维球面。闭正规 n 维空间和正规 n 维点通过归纳法定义。其中，零维球面起着基本元素 B 的作用，

它决定了正规空间的其余全部结构。采用更一般的方法时，相应的分子空间类别的定义几乎不受所选基本元素的影响。在正规空间中，我们选择球面 S^0 作为由两个孤立点组成的空间，只是因为这符合经典定义，而且在与连续空间比较时能得出合理且符合预期的结果。于是，一个问题立即出现：如果把由 3 个孤立点组成的空间 H(3) 作为零维球面，也就是基本元素，会发生什么?

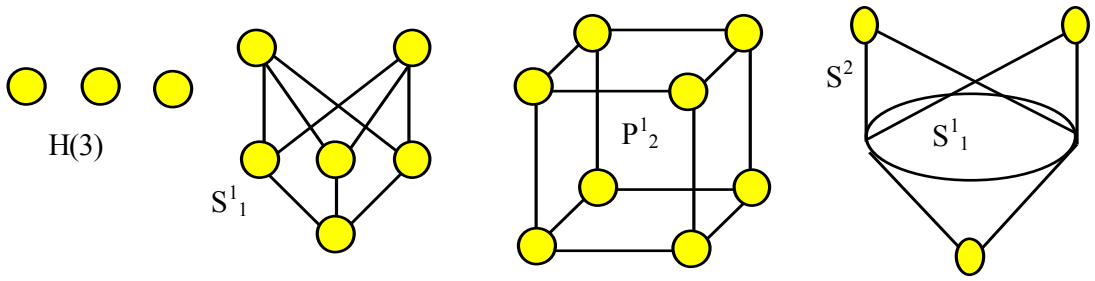


图 82：0 维空间 H(3) 用作基本元素，用于构造一维球面 S^1_1=H(3)⊕H(3} 的类似物。S11 也是一维闭空间。S2 是二维空间，S^2=H(3)⊕S11。

显然，这将得到另一类具有自身性质的空间。由此可以根据基本元素 B 对空间进行粗略分类（图 81）。基为 H(1) 的空间在某种程度上类似于组合拓扑中研究的单纯复形。基为 H(2) 的空间构成正规空间类。其他基对应的空间尚未得到研究。

正规空间的重要性在于，无论是在我们周围的现实世界中，还是在科学领域，我们所接触过和正在接触的都只有流形。在 n 维流形中，每个点都有一个邻域，同胚于 n 维欧几里得空间中的开球。因此，在模拟该流形的分子空间中，每个点的边界都应是一个 (n-1) 维分子球面。如果不满足这一条件，该分子空间就不能作为流形的模型。直到最近，物理学界才承认豪斯多夫流形是能够以数学方式模拟物理现实的空间。然而，流形只占很小一

部分分子空间。大多数空间都不是流形。我们这样说，指的是以下情况：如果我们构造出所有包含 n 个及以下点的可能的闭分子空间，就会发现，流形只占不同空间总数中极小的一部分。

TMΠ 的一个显著特点是，非流形易于构造且直观易懂。TMΠ 中非流形构造简单、直观易懂，这极大地拓展了我们研究现实对象的可能性，

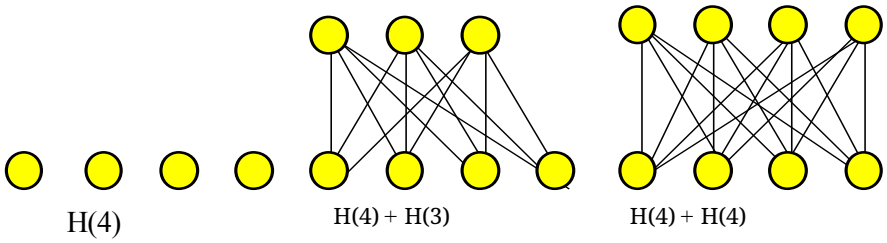


图83 具有基 H(n)、n>2 的一维闭空间，包含6、7和8个点。

这些对象存在于或可能存在于我们周围的物理世界中。此类空间的一个显而易见的例子是所谓的分子结构式，其中不考虑分子中连接的多重性和键长。大多数分子结构式都是分子空间，不属于正规空间类，更不属于流形类。

因此，一个颇具吸引力的研究方向是，研究这样一些空间的性质：它们取 H(2) 中的零维球面 S^0=作为基元素，而不是零维球面；例如取 H(3) 或 H(4)。选择由三个不连通点组成的空间 H(3) 作为基元素时，可得到图 82 所示的一维闭空间。按照传统观点，基空间 H(3) 可视为零维球面，而空间 S^1_1=H(3)⊕H(3) 和 P^1_2 是

一维闭空间，空间 S^2 将是二维球面的类比。在图83中，空间 H(4) 是基本空间。空间 H(3)⊕H(4) 由7个点组成，其中三个点具有邻域 H(3)，其余四个点具有邻域 H(4)。一维空间 H(4)⊕H(4) 由8个点组成，每个点都具有邻域 H(4)。

在正规空间中，还可以区分出一些非流形空间。当我们取闭正规空间（包括流形）的直和，且其中一个空间不是球面时，就会出现这类空间。作为这种非流形的一个例子，

由两个流形得到的正规空间，考虑由点a和b组成的零维球面 S^0, , 以及二维环面 T^2, $V^3 = S^0 \oplus T^2$。

构造示意图见图84。容易看出，在V^3 中，点a和b的邻域是环面，这两点是环面型的。因此，$O(a) = O(b) = T^2$, , 这是一个非流形。环面上每一点的邻域都是二维球面。因此，这个非流形有两个非球面型的环面点；其余所有点都是球面型的。

更复杂的例子——五维闭正规分子空间$T^2 \oplus T^2$, $T^2 \oplus P^2$, $T^2 \oplus K^2$ ， 等等。这些空间中的点没有一个是球面型的。目前还难以说这类空间在数学或应用方面可能有什么用途。只能推测，在化学或生物结构中会发现属于这类空间的对象

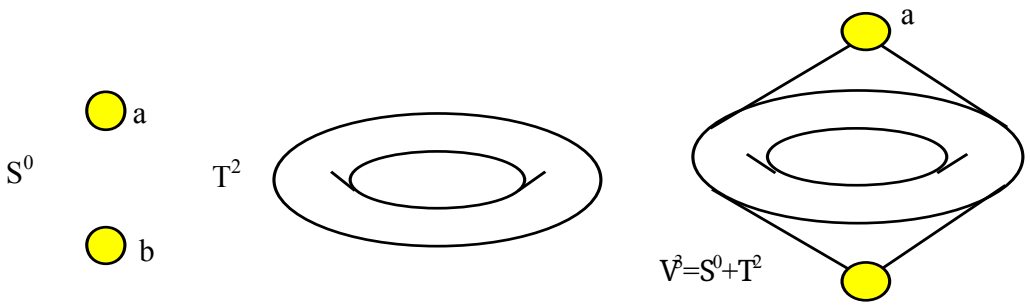


图84 三维正规空间：一个非流形，由两个流形——二维环面和零维球面——相加而成。

（目前仍属）奇异空间。

问 题。

寻找物理、化学、生物或其他任何

，作为非流形模型的对象

。现在转向正则空间。正则空间包含一个正规空间作为其子空间。此外，正则空间还包含一定数量的额外点，这些点不会改变整个空间的拓扑。可以去掉其中任意一个额外点，而不改变空间的主要拓扑特征。借助类比可以说，正则空间中包含的正规子空间是一个骨架，再附加一定数量的点，从而使数学模型或计算机模型能够更完整地对应真实对象。一般而言，可以考虑这样的正则

空间，其骨架是一个具有任意 H(n) 阶的空间，n>1。然而，鉴于本书的目的，我们将只讨论骨架为基于 H(2) 的正规空间的正则空间。

第5章参考文献列表

43 Ивако A.B.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。

分子空间的直和及其性质

本节研究两个或多个分子空间的直和性质。我们证明，可缩空间与任意空间的直和是可缩空间。两个不可缩空间的直和是不可缩空间。两个正规闭空间的直和是正规闭空间。其中一个空间中的可缩变换同时也是直和中的可缩变换。

本章的部分结果已发表于文献 [7,43]。

分子空间直和的一般性质

分子空间的直和能够以已有空间为基础构造新的空间。下面重述已经给出的定义。

空间 G⊕H 的直和定义。

设有两个空间：G，其点集为 V=(v_1, v_2, v_3,.... v_n)，连接集为 W；H，其点集为 R=(r_1, r_2, r_3,.... r_m)，连接集为 S。两个空间 G 和 H 的直和（和）称为由点 V 和 R、连接 W 和 S，以及所有连接 V 和 R 中各点的连接构成的空间 G⊕H

显然，在此运算下，空间 G⊕H 的点数等于空间 G 和 H 的点数之和，|G⊕H|=|G|+|H|，连接数等于 |W|+|S|+nm。

锥 G⊕v 的定义。

如果前一定义中的一个空间，例如第二个空间，是点 v，那么和 G⊕v 称为空间 G 的锥（cone）（图 85）。

子空间 G⊕H 的直和定义。

设空间 A 中有两个子空间：G，由点集 V=(v_1, v_2, v_3,.... v_n) 构成；H，由点集 R=(r_1, r_2, r_3,.... r_m) 构成，并且集合 V 与 H 不相交。如果 V 中的每个点都与 R 中的每个点相邻，那么由点 V 和 R 构成的子空间 G∪H=G⊕H 称为子空间 G 和 H 的直和（和）。

点的球是一个子空间，它是点与其邻域的直和。

定理 52

设 *G* 和 *H* 分别是可缩的和任意的 *MП*。那么直和

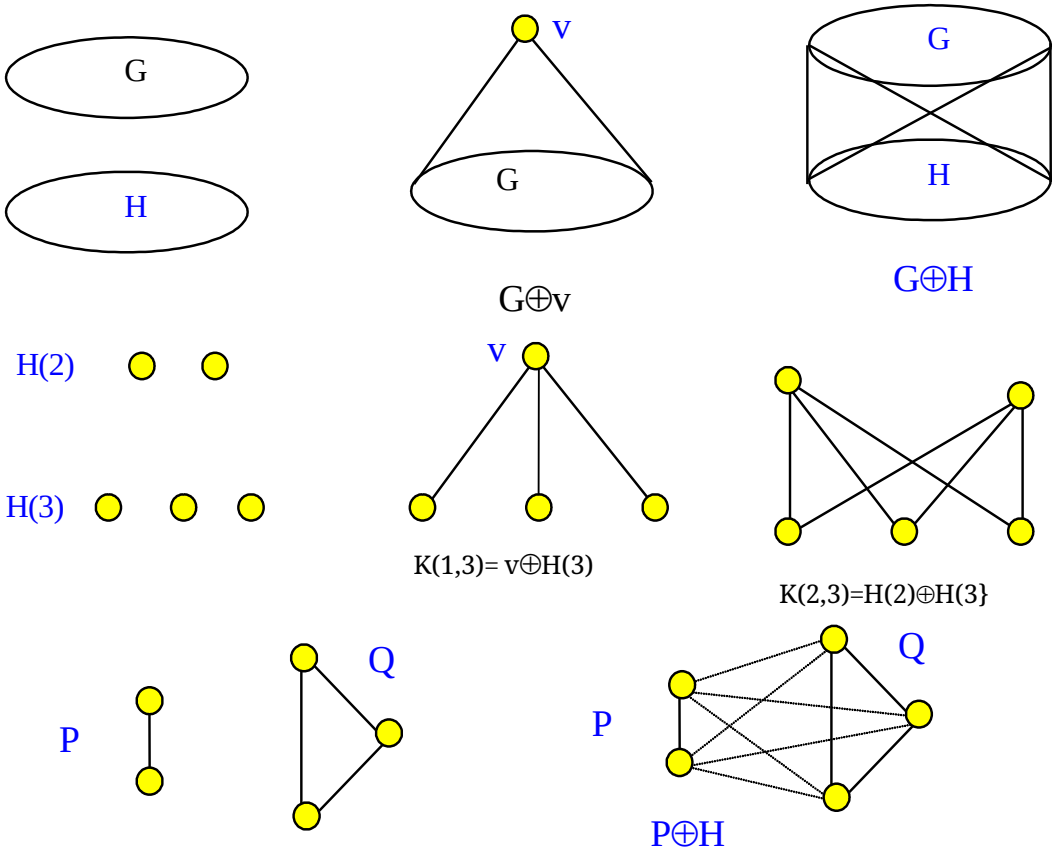


图 85 空间 G⊕v、G⊕H、v⊕H(3)、H(2)⊕H(3) 和 P⊕Q 的直和。

G⊕H 是可缩的 *MП*。

证 明。

我们用归纳法进行证明。对于点数较少的分子空间 G，定理可直接验证。假设定理对 |G|<n 成立。设 |G|=n。考虑 W=G⊕H。由于 G 是可缩的分子空间，因此至少有一个可缩点 v_1, $O(v_1)\in T$。在分子空间 W 中，点 v_1 的邻域 $OW(v_1)$ 由 $OW(v_1)=O(v_1)\oplus H$ 表示。由于 $|O(v_1)|<n$，根据归纳假设，$OW(v_1)$ 将是可缩的，因此可以从 W 中删去点 v_1。$W-v_1$ 仍是可缩的 $G-v_1$ 与 H 的直和，其中 $|G-v_1|<n$。根据归纳假设，$W-v_1=(G-v_1)\oplus H$ 是可缩的。证明完毕。□

定理53

设 *G* 和 *H* 是两个非可缩空间，其中每个空间都没有邻域可缩的点。那么直和

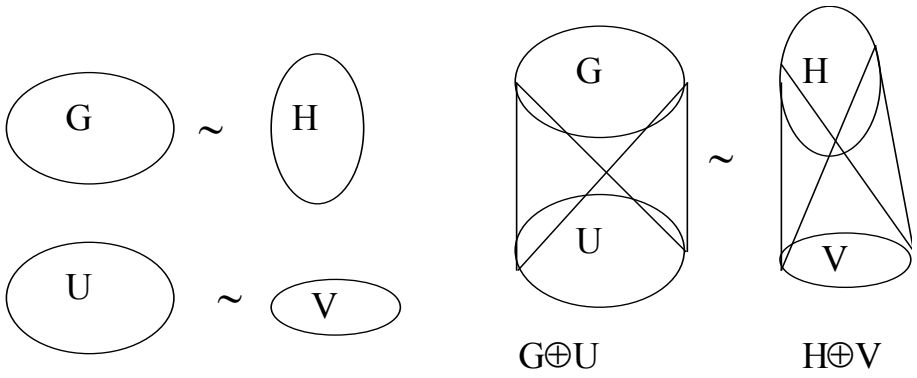


图 86 G 同伦于 H，U 同伦于 V。因此 G⊕U 同伦于 H⊕V。

G⊕*H* 是一个非点式分子空间，其中没有邻域可缩的点。

证 明。
我们通过归纳法进行证明。对于点数较少的分子空间 G，定理可直接验证。假设该定理对 $|G\oplus H|<n$ 成立。设 $|G\oplus H|=n$。在 $W=G\oplus H$ $OW(v)=O(v)\oplus H$ 中，其中 $v\in G$。因此 $|OW(v)|<n$，根据归纳假设，O(v) 不是点态的。对于属于 H 的任意点，同样的结论也成立。定理得证。
□
这个定理的一个直接例证见于正规闭空间的直和中。

定理 54

设 *G* 和 *H* 是两个分子空间。在 *G* 中的点变换也是 *G*⊕H 中的点变换。

证 明。

设 $v\in G$，且 O(v) 是 G 中的可缩空间。那么 $O_1(v)=O(v)\oplus H$ 在 G⊕H 中，因此也是一个可缩空间。这意味着可以从 G⊕H 中删除（或添加）点 v。设 $v_1\in G$、$v_2\in G$，且 $O(v_1v_2)$ 是 G 中的可缩空间。那么 $O_1(v_1v_2)=O(v_1v_2)\oplus H$ 在 G⊕H 中，因此也是一个可缩空间。这意味着可以从 G⊕H 中删除（或添加）两点之间的连接。定理得证。□

定理55

设 G 与 H 同伦，且 U 与 V 同伦。那么 $G\oplus U$ 与$H\oplus$V。

证　明。
由于 G~U、H~V，因此存在两列点变换，分别将 G 变为 U、将 H 变为 V。对邻域作相应替换后，这些变换在 G⊕U 中仍是点变换。将这些变换应用于 G⊕U，得到 H⊕V、G⊕U~H⊕V（图 86）。定理得证。□

直和 G⊕H 的子空间 [A⊕B] 定义。

设 A 是空间 G 的子空间，B 是空间 H 的子空间，则 [A⊕B] 是空间 G⊕H 的子空间，其中包含点 v_s 和 u_t，这里 v_s 属于 A，u_t 属于 B。

定理56

设 A 是空间 G 的子空间，B 是空间 H 的子空间，则子空间 $[A\oplus B]$，，其中 $[A\oplus B]\subseteq G\oplus H$ 同构于空间 $A\oplus B$, $[A\oplus B]\approx A\oplus B$.

证 明
需要证明，点 U=[A⊕B] 与 V=A⊕B 之间可以建立保持点邻接关系的一一对应。我们按自然方式建立对应关系，即属于 A 的点 $v_k=[v_k]$　在 [A⊕B], 中对应于属于 A 的点 v_k，在 A⊕B 中；属于 B 的点 $u_p=[u_p]$ 在 [A⊕B], 中对应于属于 B 的点 u_p，在 A⊕B 中。$[v_k]$ 的邻接域为 $=(O([v_k])\cap A)\oplus B$，在 [A⊕B] 中。类似地，$OV(v_k)=(O(v_k)\cap A)\oplus B$ 在 A⊕B 中。对于 B 中的点也同样适用。因此，[A⊕B] 与 A⊕B 中点之间的一一对应保持点的邻接关系。定理得证。□

今后，除非特别说明，我们不区分 [A⊕B] 和 A⊕B，并且对于 [A⊕B]，我们将使用记号 A⊕B。

定理 57

设 G 和 H 是无点空间，U 和 V 分别是它们嵌入其中且同伦的子空间。

那么 $U\oplus V$ 是空间 $G\oplus H$. 的同伦嵌入子空间。

证 明。
由于 G 和 H 可通过删除点分别收缩到 U 和 V，因此 G⊕H 可通过删除 U⊕V 中的点而收缩。由此，U⊕V 是空间 G⊕H 的嵌入同伦子空间。定理得证。
□

表述　如下一个关于和的性质的定理，我们　　ь

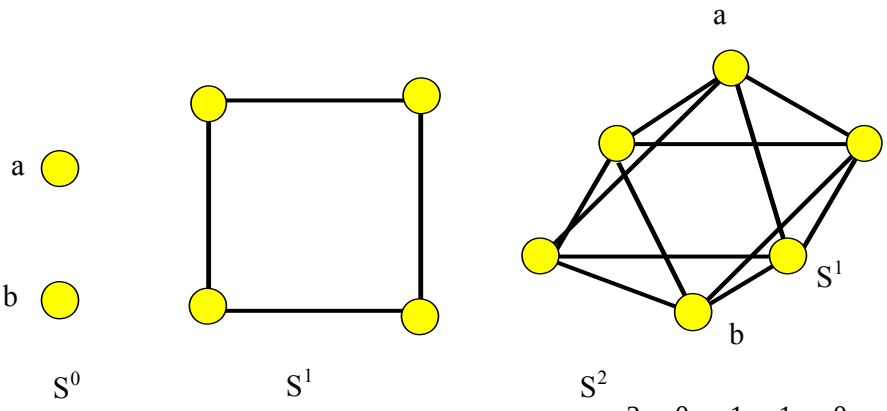


图 87 零维球面 S0与一维球面 S1的和是二维球面。$S^2=S^0\oplus S^1=S^1\oplus S^0$。

不再证明，因为它显而易见。

定理 58

分子空间的和满足交换律和结合律。 $W=G\oplus H=H\oplus G$. $W=(G\oplus H)\oplus F=G\oplus (H\oplus F)$.

从图 87 可以看出，一维球面与零维球面的和是二维球面。需要指出的是，最小球面的和也会得到一个最小球面。不排除任意最小空间的直和也具有这一性质。因此，我们将以下假设表述为一个定理。

定理 59

设 G 和 H-是两个正规分子闭最小空间。那么它们的和 $W=G\oplus H$ 也将是最小空间。 证 明。　请自行证明或反驳。□

根据直和的定义，作为因子的空间必须是有限体积空间。否则，某些点的邻域将是无限体积空间。

正规分子空间直和的性质

我们来考察正规空间直和的性质。这种运算能够得到具有新拓扑性质的分子空间。这种运算的维数性质与经典拓扑学中相应运算的性质类似。

定理 60

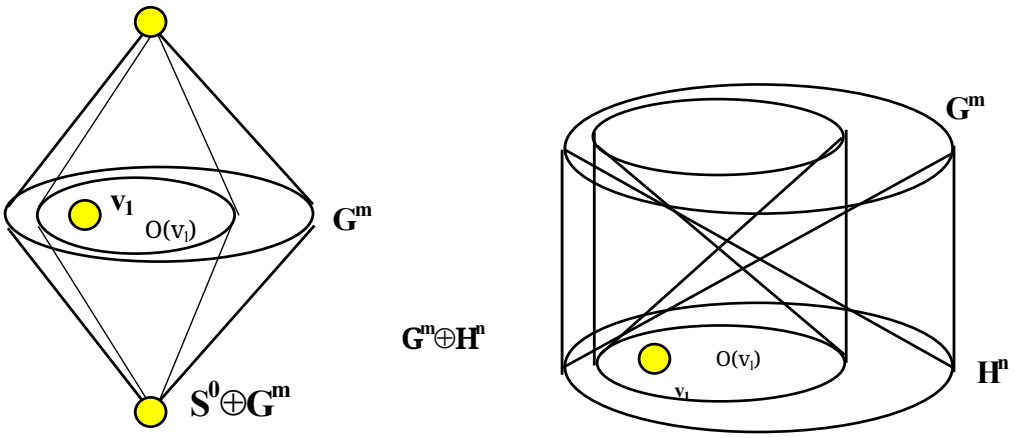


图 88 零维球面 S_0 与闭 n 维空间 G_n 的直和具有 (n+1) 维。闭 n 维空间 G_n 与闭 m 维空间 H_m 的直和具有 (n+m+1) 维。

设 G^m 和 S^0-是维数为 m 的正规分子闭空间，且 S 是一个 0-维球面，分别具有点集 $V=(v_1,v_2, v_3,...v_q)$ 和 $R=(a,b)$。那么它们的直和 $W^{m+1}=G^m\oplus S^0$ 是维数为 $(m+1)$ 的正规闭分子空间。

证 明。
我们使用归纳法。
对于 m=0, 1，定理可直接验证。假设定理对 G^m成立，其中 $m \le k$。设 m=k +1。任取 G^m中的一个点，比如 v_1。该点在空间 W^{m+1} 中的邻域是该点在空间

G^m 中的邻域与空间 S^0， 的和，即 $O(v_1)|W^{m+1}=(O(v_1)|G^m)\oplus S^0$。由于该点在空间 G^m中的邻域是 k 维空间，根据归纳法，$O(v_1)|W^{m+1}$ 将是正规 k+1 维空间。点 a 和 b 的邻域也都是 G^m中的正规 k+1 维空间。因此，$W^{m+1}=G^m\oplus S^0$ 是正规 k+2 维空间（图 88）。定理得证。□

在图89中，展示了两个零维球面的和，它构成一个一维球面，即圆周，$S^1=S^0\oplus S^0$。下一个定理将前一个定理推广到任意正规闭空间的和。

定理 61

设G^m 和H^n-是两个维数分别为m和n、点集分别为$V=(v_1, v_2, v_3,...$的正规分子闭空间

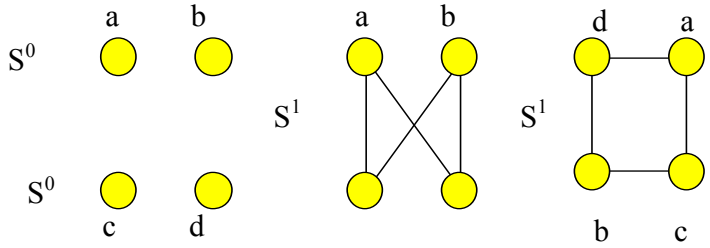


图 89 两个零维球面的和是一维圆周，$S^1=S^0\oplus S^0$。

$v_q)$和$R=(r_1, r_2, r_3,... r_t)$。于是，它们的和$W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n$ 是一个维数为$m+n+1$的正规分子闭空间。

$$W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n.$$

证 明。
使用归纳法。
对于 n，m=0，定理 1 可直接验证。
假设对于 G^m 和 H^n，定理成立，其中 $m+n \le p$。设 $n+m=p+1$。由于定理对于 m=0 或 n=0的情形已经证明，我们考虑 m>0 或 n>0的情形。

任取一点 $v_1 \in G^m$，并考察该点在 $W^{m+n+1}=G^m\oplus H^n$中的邻域。显然，$O(v_1)|W^{m+n+1}=(O(v_1)|G^m)\oplus H^n$，且维数$(O(v_1)|G^m)=m-1$，维数$(H^n)=n$。因此，根据假设，它们的

和是一个维数为 m+n 的正规闭分子空间，维数(O(v_1)|W^{m+n+1})=维数(O(v_1)|G^m)+维数(H^n)+1= (m-1)+n+1=m+n。这意味着空间 W^{m+n+1}=$G^m \oplus H^n$ 的维数等于 m+n+1。定理得证。□

为使叙述完整，我们回顾此前已经讨论过的正规空间直积的那些性质。

定理62

设 G^n, $n>0$, 是一个正规 n-维闭空间。那么，锥 $v \oplus G^n$ 将是一个具有连通边界 G^n.的正规 $(n+1)$-维空间。

定理63

设 G^n 是一个以有限点集 A 为核且具有连通边界 $BG^n=A \cup B$ 的正规 n-维空间。设 H^m 是一个 m-维正规闭空间。那么，它们的直和 $G^n \oplus H^m$ 将是一个以 A 为核、具有连通边界$B \oplus H^m$的正规 $(n+m+1)$-维空间；该边界是一个 $(n+m)$-维正规闭空间。

第 6 章参考文献表。

7 Evako A.V., 《离散空间上的维数》, 《国际理论物理学杂志》, 第33卷, 第1553-1568页, 1994年。43 Ивако A.B., 《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》, 莫斯科, 1997年。

分子空间的直积及其性质

本章研究两个或多个分子空间的直积的性质。我们证明，不可缩空间与任意空间的直积仍然是不可缩空间。两个可缩空间的直积是可缩空间。其中一个空间中的可缩变换同时生成直积空间中的可缩变换。

本章的部分结果已发表于文献 [43]。

分子空间直积的定义与一般性质

两个空间的拓扑积在数学中应用相当广泛 [53]。这一概念使我们能够将平面视为两条直线的直积，将环面视为两个圆周的直积。我们已经对分子空间引入了类似的运算。为使论述完整，我们再重复一次

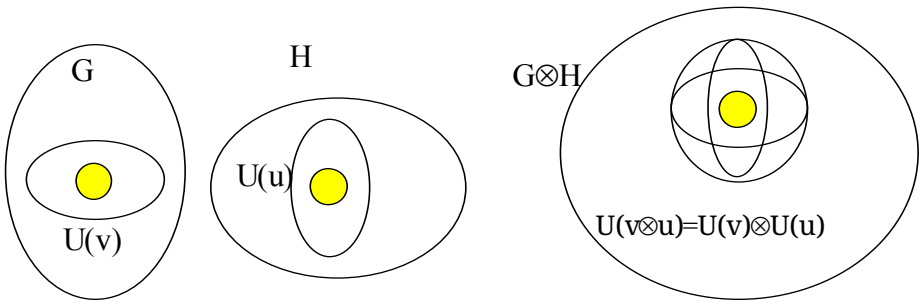


图 90 在直积 G⊗H 中，点 v⊗u 的球 U(v⊗u) 等于球 U(v) 和 U(u) 的直积 U(v)⊗U(u)。U(v⊗u)=U(v)⊗U(u)。

分子空间直积的定义。

G⊗H 的直积定义。

设有两个空间：G，其点集为 (v_1, v_2, v_3,.... v_m...)，连接集为 W；H，其点集为 (u_1, u_2, u_3,.... u_n...)，连接集为 S。我们将空间 G 和 H 的直积（乘积）定义为由点 $w^{kp}=v_k\otimes u_p$组成的空间 G⊗H，其中每个点 $w^{kp}=v_k\otimes u_p$ 的球 $U(v_k\otimes u_p)$ 由点 $w_{st}=v_s\otimes u_t$组成，其中 v_s 属于 $U(v_k)\subset G$，u_t属于 $U(u_p)\subset H$。

需要提醒的是，根据球的定义，点 $v_k\otimes u_p$ 与属于该球的所有其他点都相邻。

从定义容易看出，两个空间的直积在每一点邻域内的拓扑性质及其他性质，都由各个空间的局部性质决定。下面更详细地考察两个空间直积中点的邻域结构。首先证明，直积具有某种遗传性质：直积中任意一点的球本身就是点的球的直积。

定理 64

直积空间 G 中任意点 $w^{kp}=v_k\otimes u_p$ 的球 $U(v_k\otimes u_p)$，其中点集为 $(v_1, v_2, v_3,... v_n...)$，以及空间 H 中任意点 $w^{kp}=v_k\otimes u_p$ 的球，其中点集为 $(u_1, u_2, u_3,... u_m...)$，是球 $U(u_k)$ 和 $U(v_p)$, $U(v_k\otimes u_p)=U(v_k)\otimes U(u_p)$ (图 90)。的直积。

证 明

考察子空间 $U(v_k\otimes u_p)$。根据定义，对于点 $v_k\otimes u_p$，该点的球由点 $v_s\otimes u_t\in U(v_k\otimes u_p)$ 组成，其中 $v_s\in U(v_k)$，$u_t,\in U(u_p)$。设点 $v_s\otimes u_t$ 属于 $U(v_k\otimes u_p)$。它的球由形如 $v_m\otimes u_n\in U(v_s\otimes u_t)$ 的点组成，其中 $v_m\in U(v_s)$，$u_n,\in U(u_t)$。因此，在空间 $U(v_k\otimes u_p)$ 中，点 $v_s\otimes u_t$ 的球 $U(v_s\otimes u_t)$ 由点 $v_m\otimes u_n$ 组成，这些点满足 $v_m\in U(v_s)\cap U(v_k)=U(v_sv_k)$，$u_n\in U(u_t)\cap U(u_p)=U(u_tu_p)$。子空间 $U(v_s)\cap U(v_k)=U(v_sv_k)$ 和

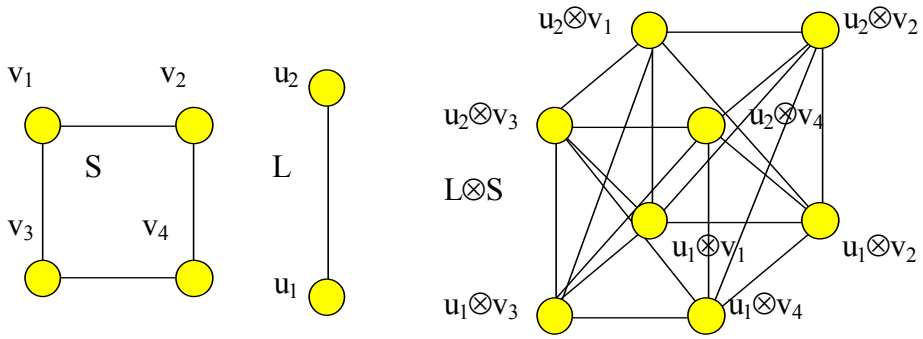


图 91 超边 L 与圆 S 的直积 L⊗S。

$U(u_t)\cap U(u_p)=U(u_tu_p)$不过就是点 v_s 和 v_t 在 $U(v_k)$ 和 $U(v_k)$ 中的球。根据定义，这意味着 $U(v_k\otimes u_p)=U(v_k)\otimes U(u_p)$。定理得证。□ 显然，这一定理可以推广到任意多个因子的情形。

确定直积 G⊗H 中点和层的坐标。

设有空间 $G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$ 的直积，其中各空间 $G_1,G_2,...G_k$ 分别包含点 $(v_1, v_2, v_3,....v_m...)$、$(u_1, u_2, u_3,....u_m...)$、...、$(w_1, w_2, w_3,....w_m...)$。那么，对于任意一点 $v_k⊗u_p...⊗w_s∈G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$，符号 v_k、u_p、...w_s 分别称为它在子空间 G_1，G_2,... G_k 中的坐标。由点 $v_k⊗u_p...⊗w_s∈G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$ 所确定的子空间 $S_1=G_1⊗u_p...⊗w_s⊆G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$，其中坐标 v_k 可以变化，而其余坐标固定，称为 $G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$ 中的一个层。直积中的其他任意层也可同样定义。

定理65

层 $G_1⊗u_p...⊗w_s⊆G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$ 与空间 G 同胚$_1$。证明层中的点与 G_1 之间显然存在一一对应。□

定理66

设有空间 $G_1⊗G_2⊗...⊗G_k$ 的直积 G_1，G_2,.. G_k，分别包含点 $(v_1, v_2, v_3,...v_m...)$、$(u_1, u_2, u_3,...u_m...)$、...、$(w_1, w_2, w_3,...w_m...)$。那么，直积中任意一点的球由表达式 $U(v_k⊗u_p...⊗w_s)=U(v_k)⊗U(u_p)...⊗U(w_s)$ 确定。

证明
定理可立即通过归纳法证明。□
图 91展示了超边 L 的直积，其中 L 由两个点组成；以及圆 S 的直积，其中 S 由 4 个点组成。下面考察直积空间的若干一般性质，这些性质将在后续研究中使用。

直积 G⊗H 的子空间 [A⊗B] 的定义。

设 A 是空间 G 的子空间，B 是空间 H 的子空间，则 [A⊗B] 是空间 G⊗H 的子空间，包含点 vs⊗ut，，其中 vs 属于 A，ut 属于 B。

定理 67

设 A 是空间 G 的子空间，B 是空间 H 的子空间，那么子空间 $[A⊗B]$，，其中 $[A⊗B]⊆G⊗H$ 与空间 $A⊗B$，$[A⊗B]≈A⊗B$。

证 明
需要证明，在 [A⊗B] 与 A⊗B 的点之间可以建立保持点的邻接关系的一一对应。我们按自然方式建立对应，即属于 [A⊗B], 的点 $v_k⊗u_p$对应于属于 A⊗B 的点 $v_k⊗u_p$。设在 [A⊗B] 中，点 $v_k⊗u_p$ 与点 $v_r⊗u_s$相邻。这意味着 $v_r⊗u_s∈U(v_k⊗u_p)$。因此，$v_r∈U(v_k)∩A$，$u_s∈U(u_p)∩B$。由于 $U(v_k)∩A$ 和 $U(u_p)∩B$ 分别是 A 和 B 中点 v_k 与 u_p 的球，所以 $v_r⊗u_s∈U(v_k⊗u_p)$ 在 A⊗B 中，这两点在 A⊗B 中相邻。同样可以证明，如果一对点在 A⊗B 中相邻，那么它们在 [A⊗B] 中也相邻。定理得证。□

今后，若未特别说明，我们不再区分 [A⊗B] 和 A⊗B，并将 [A⊗B] 记作 A⊗B。下面考察两个子空间的并集的性质。

定理68

设 A_1 和 A_2 是空间 G 的子空间，B 是空间 H 的子空间，则$(A_1∪A_2)⊗B=(A_1⊗B)∪(A_2⊗B)$.

证明
根据定义，$(A_1∪A_2)$ 是空间 G 的一个子空间，包含来自 A_1，以及来自 A_2的点。根据前一个定理，$(A_1∪A_2)⊗B$ 是空间 G 的一个子空间⊗H.子空间 (A_1 (A2)(B 由点 v(u 组成，其中 v 属于 A1 或 A2，且 u 属于 B。子空间 (A1(B)((A2(B) 也是空间 G(H 的子空间，由属于 (A1(B) 或 (A2(B) 的点 v(u 组成。设 v(u((A1(B)((A2(B)。那么 v(u((A1(B) 或 v(u((A2(B)。由此可得，÷v(A1 或 v(A2，且 u(B。这意味着，÷v((A1(A2)。因此，两个子空间中的点集相同。无需考察关系集，因为这两个子空间都属于空间 G(H，包含同一个点集，因而相同。定理得证。(

定理 69

设 A_1 和 A_2 是空间 G 的子空间，B 是空间 H 的子空间，则$(A_1∩A_2)⊗B=(A_1⊗B)∩(A_2⊗B)$。

证 明
根据前面的定理，$(A_1∩A_2)⊗B$ 是空间 G⊗H 的子空间。子空间 $(A_1∩A_2)⊗B$ 由点 v⊗u 组成，其中 v 属于 A_1 ，且 u 属于 B。子空间

$(A_1\otimes B)\cap(A_2\otimes B)$ 也是空间 $G\otimes H$ 的子空间，由同时属于 $(A_1\otimes B)$ 和 $(A_2\otimes B)$ 的点 $v\otimes u$ 组成。设同一点 $v\otimes u\in(A_1\otimes B)\cap(A_2\otimes B)$。那么 $v\otimes u\in(A_1\otimes B)$，且 $v\otimes u\in(A_2\otimes B)$。由此可知，$v\in A_1$，$v\in A_2$，$u\in B$。这意味着 $v\in(A_1\cap A_2)$。因此，两个子空间中的点集相同。无需考察连接的集合，因为这两个子空间都属于空间 $G\otimes H$，包含相同的点集，因而彼此相等。定理得证。□ 前面的定理不难推广。

定理70

设 A_1 和 A_2 是空间 G 的子空间，B_1 和 B_2 是空间 H 的子空间。则在空间 $G\otimes H$ 中成立以下关系：

$$(A_1\cap A_2)\otimes(B_1\cap B_2)=(A_1\otimes B_1)\cap(A_2\otimes B_2)=(A_2\otimes B_1)\cap(A_1\otimes B_2).$$
$$(A_1\cup A_2)\otimes(B_1\cup B_2)=(A_1\otimes B_1)\cup(A_2\otimes B_2)\cup(A_2\otimes B_1)\cup(A_1\otimes B_2).$$

证 明

显然，$(A_1\cap A_2)\otimes(B_1\cap B_2)$、$(A_1\otimes B_1)\cap(A_2\otimes B_2)$ 和 $(A_2\otimes B_1)\cap(A_1\otimes B_2)$ 都是空间 $G\otimes H$ 的子空间。下面证明它们所含的点集相同。设 $v\otimes u$ 属于子空间 $A=(A_1\cap A_2)\otimes(B_1\cap B_2)$。这意味着 v 属于 $A_1\cap A_2$，，u 属于 $B_1\cap B_2$。由此，$v\in A_1$，，$u\in B_1$，且 $v\in A_2$，，$u\in B_2$。因此，$v\otimes u$ 同时属于 $(A_1\otimes B_1)$ 和 $(A_2\otimes B_2)$，也就是说，$v\otimes u$ 属于 $(A_1\otimes B_1)\cap(A_2\otimes B_2)$。同理，$v\otimes u$ 属于 $(A_2\otimes B_1)\cap(A_1\otimes B_2)$。反向的证明也完全类似。第二个公式显然是由前述关于并集的关系推出的。定理得证。□

注释

应当指出，与连续情形类似，若 A_1,A_1 和 A_3 是空间 G 的子空间，B_1, B_1 和 B_2 是空间 H 的子空间，则 $(A_1\otimes B_1)\cap(A_2\otimes B_2)\otimes(A_3\otimes B_3)=(A_1\cap A_2\cap A_3)\otimes(B_1\cap B_2\cap B_3)$，$(A_1\otimes B_1)\cup(A_2\otimes B_2)\neq(A_1\cup A_2)\otimes(B_1\cup B_2)$。一般情况下，可得以下公式。

侦查

设 A_1, A_2,...A_n 是空间 G 的子空间，B_1, B_2,...B_m是空间 H 的子空间。那么在空间 $G\otimes H$ 中，满足以下关系：

$$(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) \otimes (B_1 \cap B_2 ... \cap B_m) = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{K \le S}^{m} (A_k \otimes B_s)$$

$$(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) \otimes (B_1 \cup B_2 ... \cup B_m) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{s=1}^{m} (A_k \otimes B_s)$$

交集公式也可以用其他形式表示。所得公式的一个重要结果是球的直积的交集。

定理 71

Пусть $v_k \in G$, $v_s \in G$, $u_p \in H$, $u_r \in H$, *тогда*
$U(v_k \otimes u_p) \cap U(v_s \otimes u_r) = (U(v_k) \cap U(v_s)) \otimes (U(u_p) \cap U(u_r)) = U(v_k v_s) \otimes U(u_p u_r) = U(v_k \otimes u_r) \cap U(v_s \otimes u_p)$.

证 明

根据前述定理

$(U(v_k) \cap U(v_s)) \otimes (U(u_p) \cap U(u_r)) = (U(v_k) \otimes U(u_p)) \cap (U(v_s) \otimes U(u_r)) = U(v_k \otimes u_p) \cap U(v_s \otimes u_r)$。定理得证。□

几何上，两个空间 G⊗H 的直积，是通过将空间 G（或 H）的每个点替换为另一个空间 H，并在属于相邻 H 副本的点之间建立额外的边，从而使空间 G 的结构变得复杂（图 92）。设 G 由点 $(v_1, v_2, v_3, ... v_m)$ 组成，H 由点 $(u_1, u_2, u_3, ... u_n)$ 组成。将每个点 $v_k \in G$ 替换为 $H_k = H$，得到一组相同的空间 $(H_1, H_2, H_3, ... H_m)$。若点 v_k 和 v_p 相邻，则称 H_k 和 H_p 相邻。按如下方式在属于不同 H_k 的点之间建立边：若 H_k 和 H_p 相邻，则点 $u_s \in H_k$ 与球 $U(u_s) \subseteq H_p$ 中的所有点相连。图 92 展示了构造圆 S 的直积的过程，圆 S 由4个点 (v_1, v_2, v_3, v_4) 组成；还展示了由三个点 (u_1, u_2, u_3) 组成的超边 K(3)。

提醒一下，如果 A_1 和 A_2 是空间 G 中没有公共点的子空间，并且 A_1 中的每个点都与 A_2, 中的每个点相邻，那么子空间 $A_1 \cup A_2$ 称为子空间 A_1 和 A_2 的直和，记作 $A_1 \oplus A_2$。下面考察 $A_1 \oplus A_2$ 在直积中的表现。

定理 72

设子空间 $A_1 \oplus A_2$ 空间 G 是A_1 与 A_2, 的直和，并设 B 是空间 H 的一个子空间，且它是一个联结体。那么 $(A_1 \oplus A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) \oplus (A_2 \otimes B)$.

证 明

根据前述定理之一，$(A_1 \oplus A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) \cup (A_2 \otimes B)$。空间 $(A_1 \oplus A_2) \otimes B$ 由形如 $v \otimes u$ 的点组成，其中 v 属于 A_1 或 A_2, ，而 u 属于 B。相同的点集构成子空间 $(A_1 \otimes B) \cup (A_2 \otimes B)$。我们来考察这些子空间中的边之间的关系。设点 $v \otimes u$ 属于 $(A_1 \oplus A_2) \otimes B$，其中 v 属于 A_1。在子空间 $(A_1 \oplus A_2) \otimes B$ 中，与该点相邻的点由以下子空间的并集确定：$v \otimes (O(u) \cap B)$、$((O(v) \cap A_1) \oplus A_2) \otimes u$、$((O(v) \cap A_1) \oplus A_2) \otimes (O(u) \cap B)$。因此，点 $v \otimes u$ 与所有属于子空间 $(A_2 \otimes u) \cup (A_2 \otimes (O(u) \cap B))$ 的点相邻。由于 $O(u) \cap B = B - u$，因此 $(A_2 \otimes u) \cup (A_2 \otimes (O(u) \cap B)) = (A_2 \otimes u) \cup (A_2 \otimes (B - u)) = (A_2 \otimes B)$。由此可知，$(A_1 \otimes B)$ 中的任意点都与 $(A_2 \otimes B)$ 中的所有点相邻。定理

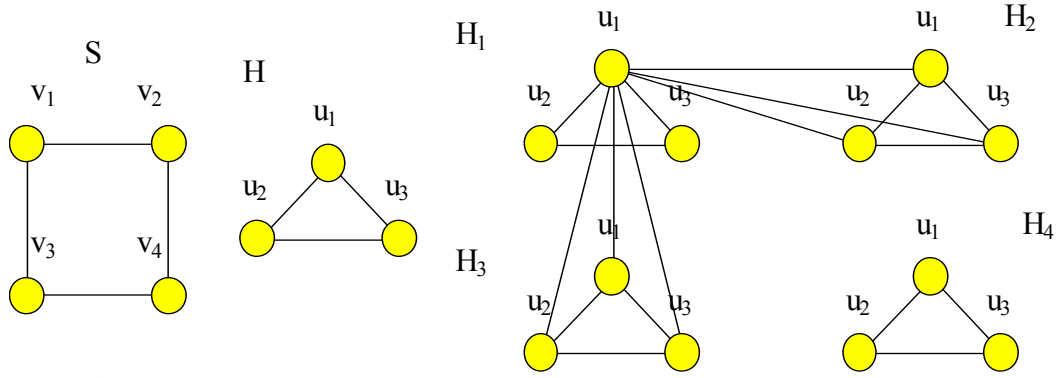


图 92 直积 S⊗H 的构造，其中 H=K(3)。圆 S 上的每个点都替换为 K(3)。点 $u_1 \in H1$ 与 H2 和 H3 中的点 u1、u2 和 u3 相连。

已证实。□

还应再次指出，要使一个点的子集构成子空间，这些点之间的所有边都必须属于该子空间。在各种运算中，这一要求可能会被破坏。因此，务必在每种具体情况下检查该条件是否成立。为便于今后使用，我们将所得关系汇总成表。

$U(v_k \otimes u_p) = U(v_k) \otimes U(u_p)$
$U(v_k \otimes u_p \ldots \otimes w_s) = U(v_k) \otimes U(u_p) \ldots \otimes U(w_s)$。
$A \subseteq G$，$B \subseteq H$，$[A \otimes B] \subseteq G \otimes H \Rightarrow [A \otimes B] \approx A \otimes B$。

7. 分子空间的直积 118 $A_1 \subseteq G$、$A_2 \subseteq G$、$B \subseteq H$、$\Rightarrow (A_1 \cap A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) \cap (A_2 \otimes B)$ 在 $G \otimes H$ 中。$A_1 \subseteq G$、$A_2 \subseteq G$、$B \subseteq H$、$\Rightarrow (A_1 \cup A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) \cup (A_2 \otimes B)$ 在 $G \otimes H$ 中。$A_1 \subseteq G$、$A_2 \subseteq G$、$B_1 \subseteq H$、$B_2 \subseteq H$、$\Rightarrow (A_1 \cap A_2) \otimes (B_1 \cap B_2) = (A_1 \otimes B_1) \cap (A_2 \otimes B_2) = (A_2 \otimes B_1) \cap (A_1 \otimes B_2)$ 在 $G \otimes H$ 中。~~$v_k \in G$、$v_s \in G$、$u_p \subset H$、$u_r \in H$、$\Rightarrow U(v_k \otimes u_p) \cap U(v_s \otimes u_r) = (U(v_k) \cap U(v_s)) \otimes (U(u_p) \cap U(u_r)) = U(v_k v_s) \otimes U(u_p u_r) = U(v_k \otimes u_r) \cap U(v_s \otimes u_p)$~~ 在 $G \otimes H$ 中。设 $A_1 \oplus A_2$ 是空间 G 的子空间，且为 A_1 与 A_2，的直和；设 B 是空间 H 的一个子空间，且是一个关联体。那么 $(A_1 \oplus A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) \oplus (A_2 \otimes B)$。

下一个定理显而易见，无需证明。

定理 73

直积空间 *G* 和 *H* 的体积 $|G \otimes H|$ 等于其体积的乘积 $|G|$ 和 $|H|$, $|G \otimes H| = |G| * |H|$.

分子空间直积的局部性质

我们将更详细地考察直积中点的邻域结构。

定理 74

设有两个空间：*G* 的点集为 $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_m)$，连接集为 *W*；*H* 的点集为 $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$，连接集为 *S*。那么在这两个空间的直积 $G \otimes H$ 中，点 $v_k \otimes u_p$ 的邻域由以下条件确定：如果 u_s 属于 $O(u_p)$，则 $v_k \otimes u_p$ 与 $v_k \otimes u_s$ 相邻。如果 v_s 属于 $O(v_k)$，则 $v_k \otimes u_p$ 与 $v_s \otimes u_p$ 相邻。如果 $k \neq r$，$p \neq s$，v_r 属于 $O(v_k)$，且 u_s 属于 $O(u_p)$，则 $v_k \otimes u_p$ 与 $v_r \otimes u_s$ 相邻。此外 $U(v_k \otimes u_p) = (v_k \otimes u_p) \oplus [(v_k \otimes O(u_p)) \oplus (O(v_k) \otimes u_p)) \cup (O(v_k) \otimes O(u_p)]$, $O(v_k \otimes u_p) = (v_k \otimes O(u_p) \oplus O(v_k) \otimes u_p)) \cup (O(v_k) \otimes O(u_p))$.

证 明 所有性质均可由下列表达式推出（图 93）。$U(v_k \otimes u_p) = U(v_k) \otimes U(u_p) = (v_k \oplus (O(v_k)) \otimes (u_p \oplus O(u_p)) = (v_k \otimes u_p) \cup (v_k \otimes O(u_p)) \cup (O(v_k) \otimes u_p)) \cup (O(v_k) \otimes O(u_p)) = (v_k \otimes u_p) \oplus [(v_k \otimes O(u_p)) \oplus (O(v_k) \otimes u_p)) \cup (O(v_k) \otimes O(u_p)]$,

$O(v_k\otimes u_p)=U(v_k\otimes u_p)-(v_k\otimes u_p)=(v_k\otimes O(u_p)\oplus O(v_k)\otimes u_p))\cup(O(v_k)\otimes O(u_p))$.
定理得证。□

定理75

在直积 $G\otimes H$ 中，任意点 $v\otimes u$（其中 $v\in G, u\in H$）的邻域 $O(v\otimes u)$ 同伦等价于邻域 $O(v)$ 和 $O(u)$ 的直和 $O(v)\oplus O(u)$，$O(v\otimes u)\sim O(v)\oplus O(u)$. 此外，$O(v\otimes u)$ 可通过点删除收缩到 $O(v)\oplus O(u)$：删除 $(O(v)\otimes O(u))$, 中属于 $O(v\otimes u)$. 的所有点。

证 明
考虑 $O(v_1\otimes u_1)=[(v_1\otimes O(u_1))\oplus(O(v_1)\otimes u_1)]\cup(O(v_1)\otimes O(u_1))$。取 $O(v_1)\otimes O(u_1)$ 中任意一点 $v_2\otimes u_2$ 。容易看出，该点在 $O(v_1\otimes u_1)$ 中的邻域是一个以 $v_1\otimes u_2$ 和 $v_2\otimes u_1$ 为顶点的锥。因此，$O(v_1)\otimes O(u_1)\subseteq O(v_1\otimes u_1)$ 中的任意点，其点邻域都是一个锥，因而可以删除。在进行这些删除时，其他作为锥的点的邻域结构不会改变。这意味着，空间 $O(v_1\otimes u_1)$ 同伦于 $(v_1\otimes O(u_1))\oplus(O(v_1)\otimes u_1)$。此外，$O(v_1\otimes u_1)$ 可收缩到 $(v_1\otimes O(u_1))\oplus(O(v_1)\otimes u_1)\approx O(u_1)\oplus O(v_1)$。定理得证。□

图 94 展示了两个一维球的直积的邻域是一个二维球，其中点 $v\otimes u$ 的邻域是正则圆周 $O(v\otimes u)$，通过删除点可将其化为最小标准圆周 $O(v)\oplus O(u)=S^1=S^0\oplus S^0$, ，它是两个零维球面的直和。

在经典拓扑学中，单位区间与圆周的直积是圆柱，它与圆周同伦等价。在 TMП 中也有类似的性质。

作为该定理的推论，我们来考察两个锥的直积。

定理 76

空间 G 和 H 的锥 $(v\oplus G)$ 与 $(u\oplus H)$ 的直积 $(v\oplus G)\otimes(u\oplus H)$
定义为 $(v\oplus G)\otimes(u\oplus H)=(v\otimes u)\oplus[((v\otimes H)\oplus(G\otimes u))\cup(G\otimes H)]$, ,
其中 $O(v\otimes u)=((v\otimes H)\oplus(G\otimes u))\cup(G\otimes H)\sim H\oplus G$（图 *93*）。

证 明
显然，在空间 $(v\oplus G)$ 和 $(u\oplus H)$ 中，$(v\oplus G)=U(v)$、$G=O(v)$ 以及 $(u\oplus H)=U(u)$、$H=O(u)$ 分别成立。其余结论由前面的定理得出。定理得证。□

下一个定理表明，在分子空间的直积中，对其中一个因子施行点删除（或粘接）一个点，会在空间直积的整个层中产生点删除，并将直积变为与其同伦的空间。

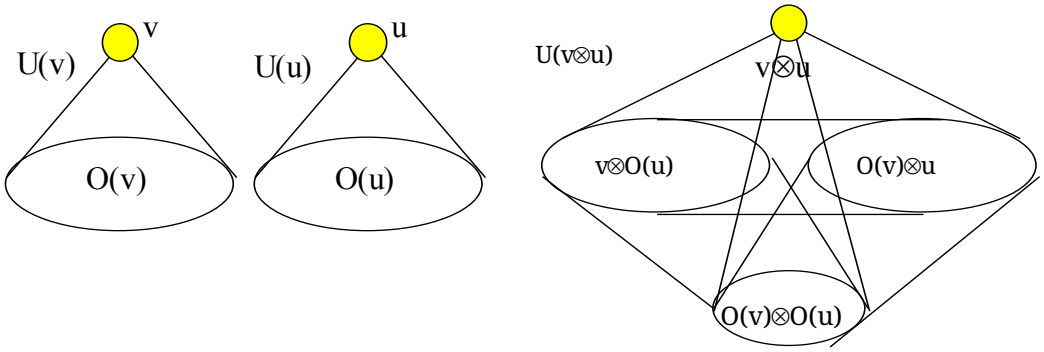


图 93 直积空间 G⊗H 中点 v⊗u 的球 U(v⊗u) 和邻域 O(v⊗u) 由下列表达式定义：U(v⊗u)=(v⊗u)⊕((v⊗O(u))⊕(O(v)⊗u))∪(O(v)⊗O(u)), O(v⊗u)=((v⊗O(u))⊕(O(v)⊗u))∪(O(v)⊗O(u)).

显然，此时在证明中只需使用去除点。

定理77

设 u 是一个点，K(n)=(u_1,u_2,...u_n) 是由 n 个点组成的点束，G 是任意空间。那么 u⊗G 与 G 同构，K(n)⊗G 与 G 同伦，u⊗G≈G，K(n)⊗G~G。

证 明 u⊗G 与 G 显然同构。设 G 由点 (v_1,v_2,...v_n) 组成。考察 K(n)⊗G 中任意一点 u_k⊗v_s, s≠l。它的邻域具有形式 O(u_k⊗v_s)=((u_k⊗O(v_s))⊕(O(u_k)⊗v_s))∪(O(u_k)⊗O(v_s))=(u_1⊗v_s)⊕)[(u_k⊗O(v_s))⊕((O(u_k)-u_1)⊗v_s)]∪(O(u_k)⊗O(v_s))] , 并且总是以 (u_1⊗v_s) 为顶点的锥。因此可以舍去这个点；舍去该点后，其余各点的邻域仍为锥。舍去所有这类点后，所得空间为 u_1⊗G，与 G 同构。定理得证。□ 该定理可推广到点邻域和任意点空间。

定理78

设 $v \in G$，且其邻域 $O(v)$ 是一个可缩的子空间。那么

$G \otimes H$ 同伦于 $(G\text{-}v) \otimes H$，$G \otimes H \sim (G\text{-}v) \otimes H$。证明 设点 v 的邻域 O(v) 是单点空间（图 95）。那么，对于任意点 $v \otimes u_1 \in G \otimes H$，该点的邻域 $O(v \otimes u_1)$ 可表示为 $O(v \otimes u_1) = [(v \otimes O(u_1)) \oplus (O(v) \otimes u_1)] \cup (O(v) \otimes O(u_1))$。如上所示，这个子空间同伦于 $O(u_1) \oplus O(v)$。由于 O(v) 是单点空间，$O(u_1) \oplus O(v)$ 也是单点空间。因此，$O(v \otimes u_1)$ 同伦于单点空间，也就是说，它是单点空间。这意味着点 $v \otimes u_1$可以删去。设点 u_2 与 u_1相邻。该点的邻域可表示为 $O(v \otimes u_2) = [(v \otimes O(u_2)) \oplus (O(v) \otimes u_2)] \cup (O(v) \otimes O(u_2))$- $v \otimes u_1 = [((v \otimes O(u_2))\text{-}v \otimes u_1) \oplus (O(v) \otimes u_2)] \cup (O(v) \otimes O(u_2))$。仍然可以删去 $O(v) \otimes O(u_2)$ 中的任意点 $v_k \otimes u_p$，因为它的邻域是单点空间，且是以 $v_k \otimes u_2$ 为顶点、由 $O(v) \otimes u_2$ 构成的锥。空间 $((v \otimes O(u_2))\text{-}v \otimes u_1) \oplus (O(v) \otimes u_2)$ 是单点空间，因为它是某个空间——此处为 $((v \otimes O(u_2))\text{-}v \otimes u_1)$——与单点空间 $O(v) \otimes u_2$ 的直和。因此，点 $v \otimes u_2$ 的邻域是单点空间，可以删去。同样的推理适用于所有形如 $v \otimes u_k$ 的点，其中 $u_k \in$ 属于 H。所有这些点都可以删去。

剩余空间是直积 $(G\text{-}v) \otimes H$。定理得证。□

还应再次指出，在 G 中去除点，等同于在直积 $G \otimes H$ 中去除整个层，即子空间 H。

在经典拓扑学中，单位区间与圆的直积是圆柱，它与圆同伦等价。在 TMΠ 中也有类似性质，下面的定理将证明这一点。

定理79

若 G 是可缩的空间，则 $G \otimes H$ 与 H 同伦，$G \otimes H \sim H$.

证 明
由于空间 G 是离散的，因此当 $|G| > 1$ 时，它至少有两个邻域仅含自身的点。设点 v 的邻域 O(v) 仅含该点。那么，根据前述定理，所有形如 $v \otimes u_k$（其中 $u_k \in$H）的点都可以删去。剩下的空间是直积 $(G\text{-}v) \otimes H$，其中 G-v 也是离散的，因此有一个邻域仅含自身的点 v_1。于是，根据前述结论，$(G\text{-}v) \otimes H$ 与 $(G\text{-}v\text{-}v_1) \otimes H$ 同伦等价。因为在

删除点后，G 归约为单点空间 v，即 G~v，因此 G⊗H 归约为 v⊗H≈H。由此，G⊗H~v⊗H≈H。定理得证。□

推论

如果 G 和 H 是可缩空间，那么 G⊗H 也是可缩空间。

现在可以更详细地定义空间 G⊗H 中各点的球与邻域的结构。与经典拓扑学一样，在 TMΠ 中，局部性质决定了空间的维数、连通性以及其他一些特征。我们来确定，

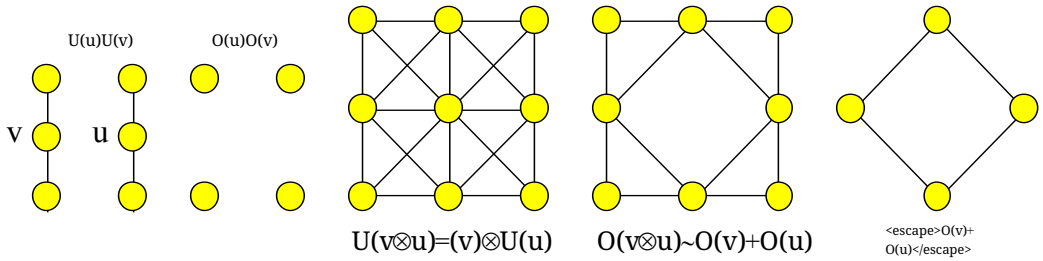


图94 两个一维正规球的直积是一个二维球；邻域 O(v⊗u) 是一个与正规圆 O(v⊗u)~O(v)⊕O(u) 同伦等价的正则圆周。

直积空间中两点的公共邻域中的一点，其邻域具有怎样的结构。

定理80

对于任意点 $v_1 \in G$、$v_2 \in G$、$u_1 \in H$ 和 $u_2 \in H$，G⊗H 中两点 $(v_1 \otimes u_1)$ 和 $(v_2 \otimes u_2)$ 的公共边界 $O((v_1 \otimes u_1)(v_2 \otimes u_2))$ 由下列关系确定：• 若 $v_1 = v_2$ 与 u_1 和 u_2 相邻，则 $O((v_1 \otimes u_1)(v_1 \otimes u_2)) = (v_1 \otimes O(u_1 u_2)) \cup (O(v_1) \otimes u_1 \oplus u_2) \cup (O(v_1) \otimes O(u_1 u_2)) = (v_1 \otimes O(u_1 u_2)) \oplus (O(v_1) \otimes (u_1 \oplus u_2)) \cup (O(v_1) \otimes O(u_1 u_2)) = (U(v_1) \otimes O(u_1 u_2)) \cup (O(v_1) \otimes (u_1 \otimes u_2)) \sim O(v_1) \oplus O(u_1 u_2)$。• 若 $v_1 = v_2$，与 u_1 和 u_2 不相邻，且 $O(u_1 u_2)$ 非空，则 $O((v_1 \otimes u_1)(v_1 \otimes u_2)) = (v_1 \otimes O(u_1 u_2)) \cup (O(v_1) \otimes O(u_1 u_2)) = U(v_1) \otimes O(u_1 u_2) \sim O(u_1 u_2)$。• 若 v_1 与 v_2 相邻，且 u_1 与 u_2 相邻，则 $O((v_1 \otimes u_1)(v_2 \otimes u_2)) = (v_1 \otimes u_2) \oplus (v_2 \otimes u_1) \oplus [((v_1 \oplus v_2) \otimes O(u_1 u_2)) \oplus (O(v_1 v_2) \otimes (u_1 \oplus u_2)) \cup O(v_1 v_2) \otimes O(u_1 u_2)] \sim (v_1 \otimes u_2) \oplus (v_2 \otimes u_1) \oplus [((v_1 \oplus v_2) \otimes O(u_1 u_2)) \oplus$

$(O(v_1v_2)\otimes(u_1\oplus u_2))]$。方括号中的表达式与 $(v_1\oplus v_2)\otimes O(u_1u_2))\oplus(O(v_1v_2)\otimes(u_1\oplus u_2))\sim O(u_1u_2)\oplus(O(v_1v_2)$ 同伦。• 若 v_1 与 v_2 相邻，u_1 与 u_2 不相邻，且 $O(u_1u_2)$ 非空，则 $O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=(v_1\oplus v_2)\otimes O(u_1u_2)\cup O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)=(v_1\oplus v_2\oplus O(v_1v_2))\otimes O(u_1u_2)\sim O(u_1u_2)$。• 若 v_1 与 v_2 不相邻，u_1 与 u_2 不相邻，$O(v_1v_2)$ 非空，且 $O(u_1u_2)$ 非空，则 $O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)$。证 明 考虑任意两点，并先纯形式地依照前述定理求出它们的公共邻域：$O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=O(v_1\otimes u_1)\cap O(v_2\otimes u_2)=U(v_1\otimes u_1)\cap U(v_2\otimes u_2))-(v_1\otimes u_1)-(v_2\otimes u_2)=U(v_1v_2)\otimes U(u_1u_2)-(v_1\otimes u_1)-(v_2\otimes u_2)$。若 $v_1=v_2$ 与 u_1 和 u_2 相邻，则 $U(v_1v_2)=U(v_1)=v_1\oplus O(v_1)$，$U(u_1u_2)=(u_1\oplus u_2\oplus O(u_1u_2))$。据此可得 $O((v_1\otimes u_1)(v_1\otimes u_2))=(v_1\otimes O(u_1u_2))\cup(O(v_1)\otimes u_1\oplus u_2)\cup(O(v_1)\otimes O(u_1u_2))=(v_1\otimes O(u_1u_2))\oplus(O(v_1)\otimes(u_1\oplus u_2))\cup(O(v_1)\otimes O(u_1u_2))=(U(v_1)\otimes O(u_1u_2))\cup(O(v_1)\otimes(u_1\otimes u_2))\sim O(v_1)\oplus O(u_1u_2)$。若 $v_1=v_2$，与 u_1 和 u_2 不相邻，且 $O(u_1u_2)$ 非空，则 $U(v_1v_2)=U(v_1)=v_1\oplus O(v_1)$，$U(u_1u_2)=O(u_1u_2)$。据此可得 $O((v_1\otimes u_1)(v_1\otimes u_2))=(v_1\otimes O(u_1u_2))\cup(O(v_1)\otimes O(u_1u_2))=U(v_1)\otimes O(u_1u_2)\sim O(u_1u_2)$。若 v_1 与 v_2 相邻，且 u_1 与 u_2 相邻，则 $U(v_1v_2)=(v_1\oplus v_2\oplus O(v_1v_2))$，$U(u_1u_2)=(u_1\oplus u_2\oplus O(u_1u_2))$。据此并整理成便于使用的形式，可得 $O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=(v_1\otimes u_2)\oplus(v_2\otimes u_1)\oplus[((v_1\oplus v_2)\otimes O(u_1u_2))\oplus(O(v_1v_2)\otimes(u_1\oplus u_2))\cup O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)]\sim(v_1\otimes u_2)\oplus(v_2\otimes u_1)\oplus[((v_1\oplus v_2)\otimes O(u_1u_2))\oplus(O(v_1v_2)\otimes(u_1\oplus u_2))]$。方括号中的表达式与 $((v_1\oplus v_2)\otimes O(u_1u_2))\oplus(O(v_1v_2)\otimes(u_1\oplus u_2))\sim O(u_1u_2)\oplus(O(v_1v_2)$ 同伦。若 v_1 与 v_2 相邻，u_1 与 u_2 不相邻，且 $O(u_1u_2)$ 非空，则 $U(v_1v_2)=(v_1\oplus v_2\oplus O(v_1v_2))$，$U(u_1u_2)=O(u_1u_2)$。因此 $O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=(v_1\oplus v_2)\otimes O(u_1u_2)\cup O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)=(v_1\oplus v_2\oplus O(v_1v_2))\otimes O(u_1u_2)\sim O(u_1u_2)$。若 v_1 与 v_2 不相邻，u_1 与 u_2 不相邻，$O(v_1v_2)$ 非空，且 $O(u_1u_2)$ 非空，则 $U(v_1v_2)=O(v_1v_2)$，$U(u_1u_2)=O(u_1u_2)$。因此 $O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)$。定理得证。□ 现在考察因子空间中的点式删除连接对空间直积的影响。我们想要说明，

与舍弃一个具有可缩邻域的点的情形一样，直积仍属于同一个同伦类。

定理81

> 设空间 H 中的点 u_1 和 u_2 相邻，且它们的公共边界$O(u_1u_2)$是一个点子空间。设空间 H-(u_1u_2)是由 H 舍弃可缩边 (u_1u_2) 得到的。那么 $G\otimes(H-(u_1u_2))$ 同伦于 $G\otimes H$, $G\otimes(H-(u_1u_2))\sim G\otimes$H。

证 明 删除 H 中的边 (u_1u_2)，等价于删除点 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_k\otimes u_2$, 之间的一系列边，其中 v_k 是 G 中任意一点；以及删除点 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_2$, 之间的一系列边，其中 v_k 和 v_p 是 G 中任意一对相邻点。考察这些点的公共邻域。$O((v_k\otimes u_1)(v_p\otimes u_2))=(v_k\otimes u_2\oplus v_p\otimes u_1)\oplus[(v_k\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_1)\cup(v_p\otimes O(u_1u\ 2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_2)]\cup O(v_kv_p)\otimes O(u_1u_2)$。取子空间$[(v_k\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_1)\cup(v_p\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_2)]\cup O(v_kv_p)\otimes O(u_1u_2)$。属于子空间 $O(v_kv_p)\otimes O(u_1u_2)$ 的点，其点邻域是以子空间 $(v_k\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_1)\cup(v_p\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_2)$ 中的点为顶点的锥。因此，这些点可以删去。另一方面，子空间 $(v_k\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_1)\cup(v_p\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_kv_p)\otimes u_2)=(v_k\oplus v_p)\otimes O(u_1u_2)\cup(O\ (v_kv_p)\otimes(u_1\oplus u_2)=(v_k\oplus v_p)\otimes O(u_1u_2)\oplus(O(v_kv_p)\otimes(u_1\oplus u_2)$ 是点子空间 $(v_k\oplus v_p)\otimes O(u_1u_2)$ 与子空间 $(O(v_kv_p)\otimes(u_1\oplus u_2)$ 的直和，因此无论点 $v_k\otimes u_2$ 和 $v_p\otimes u_1$之间是否有边，它都是点空间。由此，由于 $O(u_1u_2)$ 是点子空间，点 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_2$, 之间的所有部分，其中 v_k 和 v_p 是 G 中任意一对相邻点，都可以删去。现在考察删除这些边之后，点 $v_k\otimes u_1$ 和 $v_k\otimes u_2$, 的公共邻域，其中 v_k 是 G 中任意一点。它具有如下形式：$O((v_k\otimes u_1)(v_k\otimes u_2))=O(v_k)\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_k)\otimes(u_1\oplus u_2)$。由于 $O(u_1u_2)$ 是点子空间，$O((v_k\otimes u_1)(v_k\otimes u_2))$ 也将是点子空间。从公共邻域的形式可知，删去部分边不会影响剩余点的公共邻域结构。因此，从 G⊗H 变为 $(G-(v_1v_2))\otimes$H，是通过点式删除边实现的。定理得证。□

作为前述两个定理的推论，我们陈述一个定理，用以确定同伦变换如何影响空间的直积。

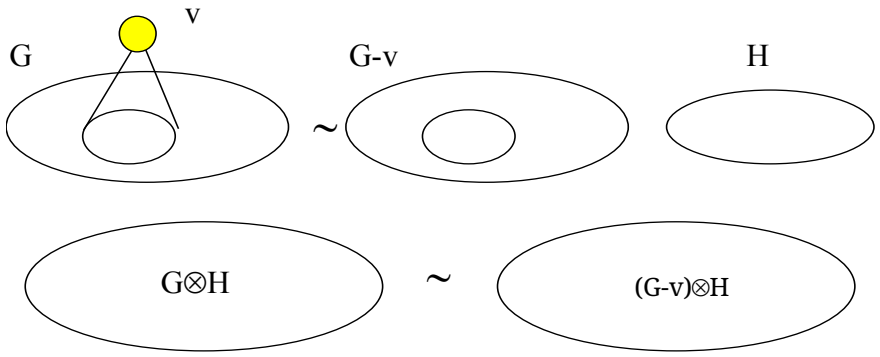


图95 若 G 和 G-v 同伦，也就是说，O(v) 是点空间，则 (G-v)⊗H 同伦于 G⊗H。

定理82

如果 $G\sim H$，那么对于任意空间P，直积 $G\otimes P$ 同伦 $H\otimes P$, $G\otimes P\sim H\otimes P$.

证明
从 G 到 H 的转变由一系列点删除以及点和连接的粘接组成。如上所示，每次这样的变换都会使直积变为同伦。因此，G⊗P~H⊗P（图96）。定理得证。□

定理83

设 $v\in G$，$u\in H$，它们的邻域 $O(v)$ 和 $O(u)$ 是非点子空间。那么，点 $v\otimes u\in G\otimes H$ 的邻域是非点的。

证明 点 v⊗u 的邻域由表达式 O(v⊗u)=[(v⊗O(u))⊕(O(v)⊗u)]∪(O(v)⊗O(u))~(v⊗O(u))⊕(O(v)⊗u)≈O(u)⊕O(v) 确定。两个非点空间的直和是非点空间。定理得证。□

我们来考察各层中直积的点的邻域的拓扑结构。在空间中，这种关系可能不是点态的，但在以该空间为层的直积中却可能是点态的。这在正规空间的直积中具有重要意义。

定理84

设 G_1 由点 x_1, G_2 由点 x_2组成。设两个相邻点 $v_1 \oplus v_2$ 和 $u_1 \oplus v_2$ 属于层 G_1。那么在直积 $G_1 \otimes G_2$ 中：如果 $O(v_1u_1)$ 和 $O(v_2)$ 都不是单点空间，则 $O((v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus v_2))$ 也不是单点空间；如果 $O(v_1u_1)$ 是单点空间和/或 $O(v_2)$ 是单点空间，则 $O((v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus v_2))$ 是单点空间。设两个不相邻点 $v_1 \oplus v_2$ 和 $u_1 \oplus v_2$ 属于层 G_1。那么：$O((v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus v_2))$ 不是单点空间，当且仅当 $O(v_1u_1)$ 不是单点空间。

证　明

根据前面的定理，如果 $v_1 \oplus v_2$ 和 $u_1 \oplus v_2$ 相邻，则 $O((v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus v_2)) \sim O(v_1u_1)) \oplus (O(v_2))$。根据直和的性质，如果两个加项都是不可缩的，则直和也是不可缩的。如果至少有一个加项是可缩的，则直和也是可缩的。如果 $v_1 \oplus v_2$ 和 $u_1 \oplus v_2$ 不相邻，则 $O((v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus v_2)) \sim O(v_1u_1) \otimes U(v_2)) \sim O(v_1u_1)$。因此，$O((v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus v_2))$ 和 $O(v_1u_1)$ 同时是可缩的或不可缩的。定理得证。□

关于分子空间的推论

这些定理对于具有非点邻域的空间，特别是对于正规空间的一个直接而重要的推论是：在正规空间的直积 $G_1 \otimes G_2$ 中，层 G_1 作为 $G_1 \otimes G_2$ 中的子空间，具有与 G_1 本身相同的拓扑结构。只有当可以在 G_1 中引入或去除连接时，才能在层中引入或去除连接。

考察去除连接时，点的邻域以及直积本身如何变化。

定理 85

设有两个任意的分子空间：空间 A，其点集为 $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_m \ldots)$，连接集为 W；空间 B，其点集为 $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots)$，连接集为 S。那么在它们的直积 $A \otimes B$ 中，对于形如 $((v_i \otimes u_k)(v_p \otimes u_s))$ 和 $((v_i \otimes u_s)(v_p \otimes u_k))$，$i \neq p$, $k \neq s$ 的每一对连接，删去其中一条连接，是一种点变换。与此同时，空间中任意一点的邻域始终与该点原来的邻域同伦

于原来的邻域。证 明 选取 $A\otimes B$ 中任意一点 $v_1\otimes u_1$。它的邻域由表达式 $O(v_1\otimes u_1)=(v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1)\cup O(v_1)\otimes O(u_1)$ 确定。考察 $A\otimes B$ 中两个相邻点 $v_1\otimes u_1$ 和 $v_2\otimes u_2$ 的公共邻域，假设 $v_1\neq v_2$ 和 $u_1\neq u_2$。$O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=(v_1\otimes u_2\oplus v_2\otimes u_1)\oplus[(v_1\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_1v_2)\otimes u_1)\cup(v_2\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_1v_2)\otimes u_2)]\cup O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)=v_1\otimes u_2\oplus v_2\otimes u_1\oplus W$。显然，此时点 $v_1\otimes u_2$ 和 $v_2\otimes u_1$ 也相邻，它们的公共邻域由类似的表达式 $O((v_1\otimes u_2)(v_2\otimes u_1))=v_1\otimes u_1\oplus v_2\otimes u_2\oplus[(v_1\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_1v_2)\otimes u_1)\cup(v_2\otimes O(u_1u_2)\oplus O(v_1v_2)\otimes u_2)]\cup O(v_1v_2)\otimes O(u_1u_2)=v_1\otimes u_1\oplus v_2\otimes u_2\oplus W$ 确定。从这些表达式可以看出，无论空间 W 的形式如何，两个公共邻域都是点空间，具体而言，是具有两个顶点的锥。因此，连接 $((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))$ 或 $((v_1\otimes u_2)(v_2\otimes u_1))$ 中的一条可以删去。完全出于同样的原因，形如 $((v_i\otimes u_k)(v_p\otimes u_s))$ 和 $((v_i\otimes u_s)(v_p\otimes u_k))$, $i\neq p$, $k\neq s$ 的每一对连接中，任意一条连接都可以删去。定理第一部分的证明至此完成。下面证明，在 $A\otimes B$ 中删去一条连接，相当于在 $O(v_1\otimes u_1)$ 中点地删去一个点。将点 $v_1\otimes u_1$ 的邻域视为一个独立空间 $O(v_1\otimes u_1)=(v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1)\cup O(v_1)\otimes O(u_1)$。考察空间 $O(v_1\otimes u_1)$ 中相邻点 $v_2\otimes u_2$ 的邻域，假设 $v_1\neq v_2$ 和 $u_1\neq u_2$。显然，$O(v_2\otimes u_2)|O(v_1\otimes u_1)=O((v_1\otimes u_1)(v_2\otimes u_2))=v_1\otimes u_2\oplus v_2\otimes u_1\oplus W$。此时点 $v_1\otimes u_2$ 和 $v_2\otimes u_1$ 也相邻，而且无论空间 W 的形式如何，$O(v_2\otimes u_2)|O(v_1\otimes u_1)$ 都是点空间，具体而言，是一个具有两个相邻顶点 $v_1\otimes u_2$ 和 $v_2\otimes u_1$ 的锥。因此，可以通过点变换从空间 $O(v_1\otimes u_1)$ 中删去点 $v_2\otimes u_2$。再选取 $A\otimes B$ 中同一个任意点 $v_1\otimes u_1$。它的邻域为 $O(v_1\otimes u_1)=(v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1)\cup O(v_1)\otimes O(u_1)$。下面证明，在 $A\otimes B$ 中删去一条连接，相当于在 $O(v_1\otimes u_1)$ 中点地删去一条连接。考察空间 $O(v_1\otimes u_1)$ 中相邻点 $v_1\otimes u_2$ 和 $v_2\otimes u_1$ 的公共邻域。显然，它由表达式 $O((v_1\otimes u_2)(v_2\otimes u_1))|O(v_1\otimes u_1)=v_2\otimes u_2\oplus W$ 确定。无论空间 W 的形式如何，$O((v_1\otimes u_2)(v_2\otimes u_1))|O(v_1\otimes u_1)$ 都是点空间，具体而言，是一个以 $v_2\otimes u_2$ 为顶点的锥。因此，可以从空间中删去连接点 $((v_1\otimes u_2)(v_2\otimes u_1))$

通过点变换 $O(v_1 \otimes u_1)$。由此可知，对于定理条件中任意一条边的删除，空间中任意一点的邻域仍与原邻域同伦。定理得证。□

这个定理很容易推广到空间 G⊗H 的某个子空间。

定理 86

设有两个任意的分子空间：空间 A 的点集为 $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_m \ldots)$，连接集为 W；空间 B 的点集为 $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots)$，连接集为 S。设 C 是 $A \otimes B$ 的直积的一个子空间，对于其中每一对相邻点，都满足以下条件：如果 $(v_i \otimes u_k)$ 与 $(v_p \otimes u_s)$ 在 $A \otimes B$ 中相邻，那么 $i \neq p$，$k \neq s$。那么，通过在空间 $A \otimes B$ 中逐点删除连接，点 $v_p \otimes u_s$ 的邻域可化为 $O(v_p \otimes u_s) = v_p \otimes O(u_s) \oplus O(v_p) \otimes u_s$，其中 $O(v_p)$ 是 A 中点 v_p 的邻域，$O(u_s)$ 是 B 中点 u_s 的邻域（图 *94*）。

证 明

任取一点 $v_1 \otimes u_1 \in C$。其邻域由表达式 $O(v_1 \otimes u_1) = (v_1 \otimes O(u_1) \oplus O(v_1) \otimes u_1) \cup O(v_1) \otimes O(u_1)$ 定义。该邻域不包含 C 中任何其他点。根据前文

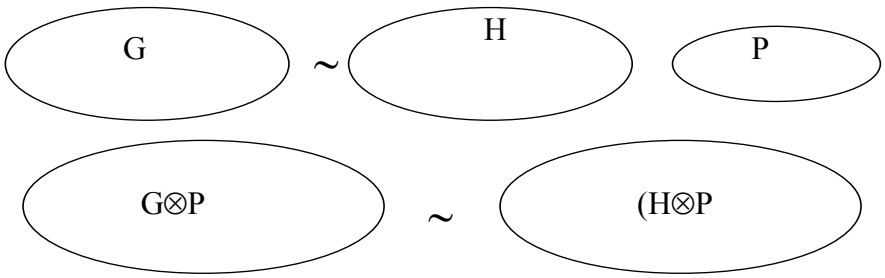


图96 若 G 和 H 同伦，G~H，则对于任意空间 P，G⊗P 同伦于 H⊗P，G⊗P~ H⊗P。

根据定理，删除所有形如 $((v_1 \otimes u_1)(v_p \otimes u_s))$ 的边，其中 $v_p \otimes u_s$ 是与 $v_1 \otimes u_1$ 相邻的点，条件是 $v_1 \neq v_p$ 和 $u_1 \neq u_s$。这些变换在 A⊗B 和 $O(v_1 \otimes u_1)$ 中都是逐点的。此时，$O(v_1 \otimes u_1) = (v_1 \otimes O(u_1) \oplus O(v_1) \otimes u_1) \cup O(v_1) \otimes O(u_1)$ 变为 $O(v_1 \otimes u_1) = v_1 \otimes O(u_1) \oplus O(v_1) \otimes u_1$。显然，可以对 C 中的任意其他点应用这些变换，并得到相同结果。对 C 子空间中的所有点进行类似的逐点删除关联后，我们得到 C 中任意形如 $((v_p \otimes u_s)$ 的点的邻域

将呈现 $O(v_p \otimes u_s)=v_p \otimes O(u_s) \oplus O(v_p) \otimes u_s$ 的形式。定理得证。□ 图97展示了两个一维空间 $L^1_1 \otimes L^1_2$ 的直积，其中每个点的边界都是零维球面。从图中可以看出，空间 C 中每个点的邻域都可化为两个零维球面 $S^0 \oplus S^0=S^1$, 的直和，它是一个一维最小圆周。

本节最后，我们来考察若干分子空间直积的性质。显然，两个空间的直积性质可以推广到任意有限个空间的直积。我们不再重新表述这些性质，只证明其中最重要的几条，即涉及正规空间的性质。虽然这个定理的结果更多是技术性的，但它们很重要，因为借此可以证明许多关于维数空间的基本定理。

正常分子空间直积的性质

此前的所有定理也都是为了弄清维数空间直积的结构。直积的度量性质非常重要，因为它们在计算机应用中尤为关键。例如，正规空间的直积虽然本身并非正规空间，却可以通过仅删除连接中的点而收缩到一个正规空间。这一结果很重要，因为它与经典拓扑学中的相应结果完全吻合。由于直积中的空间结构是在局部确定的，因此只需研究两个球的直积性质。

定理87

设球 *U(v)* 和 *U(u)* 分别不包含同伦于 *n*-维和 *m*-维闭正规空间的子空间。那么，它们的直积 *U(v⊗u)* 不包含任何同伦于正规闭 *(n+m+1)*-维空间的子空间。

证 明
反设。设球 $U(v \otimes u)=U(v) \otimes U(u)$ 包含一个与正规闭的 (n+m+1) 维空间同伦的子空间。由于 $O(v) \otimes O(u)$ 中的点都有点邻域，且可以舍去，因此它必须包含在 $v \otimes O(u) \oplus O(v) \otimes u \approx O(u) \oplus O(v)$ 中。根据直和的一个性质，空间 O(v) 和 O(u) 必须分别与正规闭的 s 维空间和 p 维

空间同伦，其中 s+p=m+n。这意味着 s≥m 或 p≥n。根据定理的条件，这是不可能的。定理得证。□

现在证明一个基本定理，它刻画两个正规空间的直积的维数性质。若 U(v) 和 U(u) 分别是 n 维和 m 维的正规球，则点 v 和 u 的邻域分别是 (n-1) 维和 (m-1) 维的正规闭空间。我们将证明，U(v⊗u) 是 (n+m) 维球，也就是说，点 (v⊗u) 的邻域包含一个正规 (n+m-1) 维闭子空间，且不包含任何与 (n+m) 维正规闭空间同伦的子空间。经典拓扑学 [40] 中也有类似性质。

定理88

设球 $U(v)$ 和 $U(u)$ 分别是 n-维和 m-维正规球。那么它们的直积 $U(v\otimes u)$ 是 $(n+m)$-维球，即在其邻域中包含一个 $(n+m-1)$-维正规子空间，并且不包含与正规闭 $(n+m)$-维空间同伦的子空间。

证　明

由于球 U(v) 和 U(u) 分别是 n 维和 m 维正规球，因此邻域 O(v) 和 O(u) 分别是 (n-1) 维和 (m-1) 维正规闭子空间。众所周知，O(v⊗u)=[(v⊗O(u))⊕(O(v)⊗u)]∪(O(v)⊗O(u))。这个子空间包含 (v⊗O(u))⊕(O(v)⊗u)≈O(u))⊕O(v)，它是邻域的直和，因而是 (m+n-1) 维闭正规空间。在空间 O(v) 和 O(u) 中，点球分别是 (n-1) 维和 (m-1) 维正规闭球，因此空间 O(v)⊗O(u)) 中的每一点都在其邻域内包含一个 (m+n-3) 维闭正规空间。O(v)⊗O(u)) 中的所有点在 O(v⊗u) 中都有点邻域，因而可以舍去。此外，根据前一个定理，U(v⊗u) 不包含任何与正规闭 (n+m)- 维空间同伦的子空间。定理得证。□

定理89

设有两个正规空间：n-维空间 G^n，其点集为 $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_m \ldots)$，连接集为 W；以及 m-维空间 H^m，其点集为 $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n \ldots)$，连接集为 S。那么它们的直积 $G^n\otimes H^m$ 具有以下性质：

- 每个点 $v\otimes u$ 的球 $U(v\otimes u)$ 都是一个 $(n+m)$-维球，也就是说，它在其邻域内包含一个 $(n+m-1)$-维正规子空间，并且不包含任何与正规闭 $(n+m)$-维空间同伦的子空间。

- $G^m\otimes H^n$ 同伦于一个维数为 $(m+n)$ 的闭正规空间，并可通过逐点删去边将其化归为该空间。

- 从每一对形如 $((v_i\otimes u_k)(v_p\otimes u_s))$ 和 $((v_i\otimes u_s)(v_p\otimes u_k)),\ i\neq p,\ k\neq s$ 的连接中逐点删去一条边，空间 $G^n\otimes H^m$ 便可化归为一个 $(n+m)$-维正规空间。

证 明
前一个性质已在前面的定理中证明。接下来的证明分为几个阶段。

证明的第一阶段。
首先，我们证明任意点的邻域都可以通过点删除边化为一个正规闭空间。任取点 $v_1\otimes u_1$，使其属于 $G^m\otimes H^n$。它的邻域由以下表达式定义：$O(v_1\otimes u_1)=(v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1)\cup O(v_1)\otimes O(u_1)$。考虑公共边界

$O((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))=v_1\otimes u_s\oplus v_p\otimes u_1\oplus[[(v_1\otimes O(u_1u_s)\oplus O(v_1v_p)\otimes u_1)\cup(v_p\otimes O(u_1u_s)\oplus O(v_1v_p)\otimes u_s)]\cup O(v_1v_p)\otimes O(u_1u_s)]$ 这两个相邻点 $v_1\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_s$ 在 $G^m\otimes H^n$ 中的公共边界，条件是 $v_1\neq v_p$ 和 $u_1\neq u_s$。不难看出，这个邻域是一个点子空间，因此可以删除边 $((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))$。出于完全相同的原因，$(v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1)$ 与 $O(v_1)\otimes O(u_1)$ 之间的所有边都可以删除。因此，删除边后，点 $v_1\otimes u_1$ 的邻域 $O(v_1\otimes u_1)=v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1$

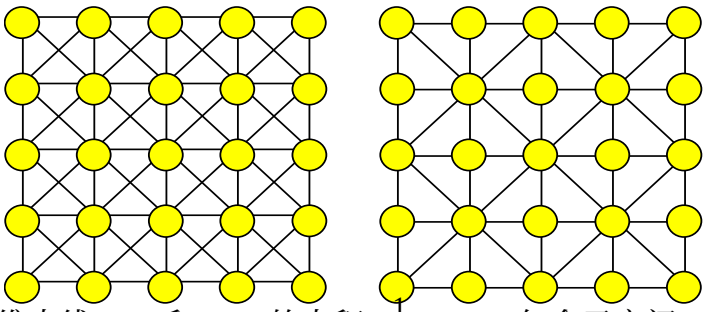


图97 两条一维直线 L11 和 L12 的直积 $L^1{}_1\otimes$ L12 包含子空间 C。通过点删除连接，C 中点的邻域可化为 $v_p\otimes O(u_s)\oplus O(v_p)\otimes u_s$。

是两个正规闭空间 $v_1\otimes O(u_1)$ 和 $O(v_1)\otimes u_1$，的直积，也就是说，它是一个正规闭的 (n+m-1)-

维空间，因为 $O(v_1)$ 和 $O(u_1)$ 分别是正规闭的 (n-1) 维空间和 (m-1) 维空间。

证明的第二阶段。

证明，从所得邻域中任意一个形如 $((v_1\otimes u_s)(v_p\otimes u_1))\in(v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1)$ 的连接，都可以替换为连接 $((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))$。具体操作如下：首先建立连接 $((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))$，然后舍弃连接 $((v_1\otimes u_s)(v_p\otimes u_1))$。因为点 $(v_1\otimes u_1)$ 和 $(v_p\otimes u_s)$ 之间的连接可以建立，这是因为它们的公共边界具有一个锥的形式，且有两个相邻的顶点 $v_1\otimes u_s$ 和 $v_p\otimes u_1$, ，即 $O((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))= v_1\otimes u_s\oplus v_p\otimes u_1\oplus(v_1\otimes O(u_1u_s)\oplus O(v_1v_p)\otimes u_1)$。建立这一连接后，顶点 $v_1\otimes u_s$ 和 $v_p\otimes u_1$ 的公共边界也将成为一个具有两个公共顶点 $v_1\otimes u_1$ 和 $v_p\otimes u_s$的锥，

O((v 1⊗ s p⊗ 1 = 1⊗ 1⊕ p⊗ s⊕ u)(v u)) v u v u (v O(u u) O(v v)
[1⊗ 1 s ⊕ 1 p ⊗ s ∪ p⊗
u) (v O(u1us)⊕O(v1vp)⊗u1)∪O(v1vp)⊗O(u1 us)]. 显然，方括号中的子空间可能与变换开始前相应的子空间不同。由于公共边界是点空间，连接 $((v_1\otimes u_s)(v_p\otimes u_1))$ 可以舍弃。证明的第三阶段。我们将证明，应用这两种变换时，点 $v_1\otimes u_1$ 的邻域仍是正规闭的 (n+m-1) 维空间。我们将 $O(v_1\otimes u_1)= v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1$ 与其余空间分开考察。前一对变换，即建立连接 $((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))$ 并在 $G^m\otimes H^n$ 中舍弃连接 $((v_1\otimes u_s)(v_p\otimes u_1))$，实际上就是在正规空间 $O(v_1\otimes u_1)=v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1$ 中进行将边替换为点的同胚变换。众所周知，经过这种变换，空间仍然是正规的，且其维数不变。这里有必要回顾一下这种变换。设 G 是某个正规空间，v_1 和 v_2 是该空间中由连接 (v_1v_2) 相连的两点。舍弃连接 (v_1v_2) 并添入点 v 的变换称为同胚变换，条件是点 v 的邻域 O(v) 包含点 v_1, v_2 和 $O(v_1v_2)$，即 $O(v)=S^0(v_1,v_2)\oplus O(v_1 v_2)$，其中球面 $S^0(v_1,v_2)$ 由两点 v_1, v_2 组成。在我们的情形中，一方面，空间 $A=v_1\otimes O(u_1)\oplus O(v_1)\otimes u_1$ 中，点 $(v_1\otimes u_s)$ 和 $(v_p\otimes u_1)$ 的公共邻域是子空间 $v_1\otimes O(u_1u_s)\oplus O(v_1v_p)\otimes u_1$。另一方面，点 $v_p\otimes u_s$ 沿子空间 $B=(v_1\otimes u_s\cup v_p\otimes u_1)\oplus(v_1\otimes O(u_1u_s)\oplus O(v_1v_p)\otimes u_1)$ 粘合到 A 上，正如上文所述，并且点 $(v_1\otimes u_s)$ 与 $(v_p\otimes u_1)$ 之间没有

边。这意味着 $B=S^0((v_1\otimes u_s),(v_p\otimes u_1))\oplus(v_1\otimes O(u_1u_s)\oplus O(v_1v_p)\otimes u_1)$。因此，在舍弃边 $((v_1\otimes u_s),(v_p\otimes u_1))$ 并建立边 $((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))$ 后，点 $v_1\otimes u_1$ 的邻域仍然是一个正规 (n+m-1) 维闭空间。

证明的第四阶段。
显然，对于 $O(v_1\otimes u_1)$ 中的任意边 $((v_1\otimes u_s)(v_p\otimes u_1))$，都可以进行同样的操作。换言之，可以舍弃边 $((v_1\otimes u_s)(v_p\otimes u_1))$，同时引入边 $((v_1\otimes u_1)(v_p\otimes u_s))$。$O(v_1\otimes u_1)$ 中点 $v_1\otimes u_1$ 的邻域始终是一个正规闭的 (n+m-1) 维空间。

证明的第五阶段。
由前文可知，可以对进行类似的过程

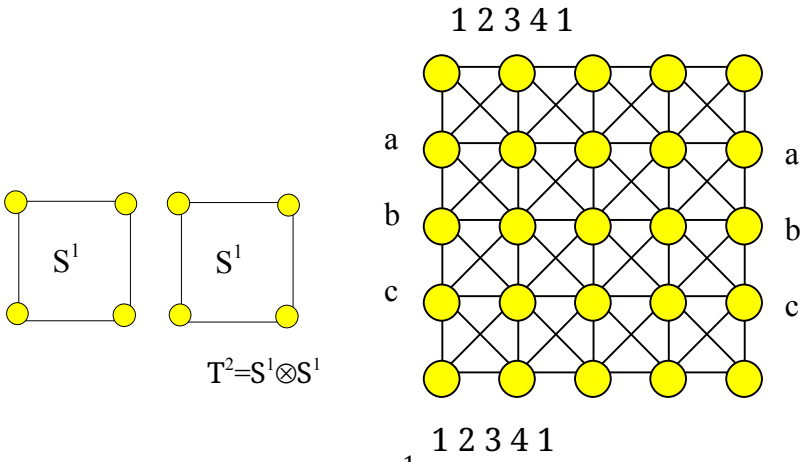


图98 在分子空间理论中，两个圆周 $S^1\otimes S1$ 的直积得到二维环面 T2，这与经典拓扑学中的情况相同。

空间 $G^m\otimes H^n$中的任意点。此时，对于每一对形如 $((v_i\otimes u_k)(v_p\otimes u_s))$ 和 $((v_i\otimes u_s)(v_p\otimes u_k))$ 的连接，$i\neq p, k\neq s$，只保留其中一个连接，另一个则舍弃。舍弃完毕后，所得空间中任意点的邻域都是正规闭的 (n+m- 1) 维空间。因此，经过这种点变换的 $G^m\otimes H^n$ 将变为正规闭的 (n+m) 维空间。定理得证。□

两个正规同名直线 $L^1_1\otimes L^1_2$ 的直积是一个二维空间，但不是正规空间。舍弃点关联后，这个空间就变成了正规二维空间 $nob(L^1_1\otimes L^1_2)$（图97）。作为这一理论的另一个例证，我们来考察两个正规圆的直积。在经典拓扑学中

这就是一个二维环面。同样，在 ТМП 中，它将是一个二维环面，但已经包含了一定数量的冗余连接。作为圆，我们取其由4个点构成的最小情形。两个圆 \($S^1 \otimes S^1$ \) 的直积给出二维环面 \(T^2, \)，如图98、图99所示。空间 \($T^2 = S^1 \otimes S^1$ \) 通过点删除向右倾斜的连接，收缩为一个正规的二维分子环面。

现在 рассмотрим 三个或更多正规空间的直积。

直积 G 的正规像定义$_1 \otimes G_2 \otimes \ldots\ldots \otimes G_k$ 三个或更多正规空间。

设有一组正规空间 $G_1, G_2, \ldots\ldots G_k$，其维数分别为 $n_1, n_2, \ldots\ldots n_k$ 。这些空间 $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots\ldots \otimes G_k$ 的直积的正规像（НОБ）称为正规空间 $nob(G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots\ldots \otimes G_k)$，其维数为 $n_1+n_2+\ldots\ldots+n_k$，它通过逐点删去空间中的点或在点之间建立连接而由 $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots\ldots \otimes G_k$ 得到。

НОБ 可以通过不同方式得到，而且这些方式彼此同伦；给定点在不同 НОБ 中的邻域也彼此同伦。然而，在大多数情况下，给定点的邻域并不同构。我们来考察一种获得直积 $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k$ 的正规像的方法。这种方法很容易实现算法化，并可用于计算机处理。

定理 90

对于任意一组维数分别为 n_1， $n_2, \ldots n_k$ 的正规空间 $G_1, G_2, \ldots G_k$，总存在一个维数为$n_1+n_2+\ldots+n_k$ 的正规空间 $nob(G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k)$，它与直积 $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k$ 同伦，并且可由 $G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k$ 通过点的删除或在空间的点之间建立连接而得到。

证 明

设有一组正规空间 $G_1, G_2, \ldots G_k$，其维数分别为 $n_1, n_2, \ldots n_k$。构造这些空间的直积 $W = G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k$。

第一阶段。

取两个空间 $G_1 \otimes G_2$ 的直积，并根据前述定理之一，通过点删除（建立连接）将 $G_1 \otimes G_2$ 收缩到 $nob(G_1 \otimes G_2)$。由于

$G_1 \otimes G_2 \sim nob(G_1 \otimes G_2)$，因此同样根据前述定理之一，空间 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$ 通过删除连接的点收缩到空间 $nob(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3$。第二阶段。

考虑两个正规空间 $nob(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3$, 的直积，并根据前述定理之一，通过逐点删除连接，将 $nob(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3$ 收缩为 $nob(nob(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3)$，与前一种情形一样。

第三步。
重复类似的推理，我们得到 $nob(...nob(nob(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3) \otimes ... G_k) \sim G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$。定理得证。□　显然，删除连接可以通过多种方式实现，而所有得到的正规空间具有相同的维数，且彼此同伦。

Algorithm 获得正规形的直积 $G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_k$ 个正规空间。定理中讨论的方法可以称为逐层或逐坐标化为正规形——ППНВ。首先，我们将子空间 $G_1 \otimes G_2$, 化为正规形，然后将子空间 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$ 化为正规形，以此类推，直到 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$。将此定理应用于具体变换时，选取 G_1 中的每一对相邻点 v_s, v_t，以及 G_2 中的每一对相邻点 u_r, u_q，并在 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$ 中删除形如 $v_s \otimes u_r \otimes ... \otimes ...$的点之间的边，同时保留形如 $v_t, \otimes u_q \otimes ... \otimes ...$的点之间的边。这样，$G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$ 中的子空间 $G_1 \otimes G_2$ 被化为正规形，即变为空间 $nob(G_1 \otimes G_2)$，而 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$变为 $nob(G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 \otimes ... G_k$。然后，选取 $nob(G_1 \otimes G_2)$中的每一对相邻点 $w(s,t), w(r,q)$，以及 G_3 中的每一对相邻点 u_b, u_c，并在 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$ 中删除形如 $w(s,t) \otimes u_b \otimes ... \otimes ...$的点之间的边，同时保留形如 $w(r,q) \otimes u_c \otimes ... \otimes ...$的点之间的边。在这种情况下，由三个子空间构成的层被化为正规形，即 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$ 在 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$ 中被化为正规形，也就是变为空间 $nob(G_1 \otimes G_2 \otimes G_3)$，而 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$变为 $nob(G_1 \otimes G_2 \otimes G_3) \otimes G_3 \otimes ... G_k$。因此，逐层变换，我们将 $G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes ... G_k$变为正规空间 $nob(G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 \otimes G_3 \otimes ... G_k)$。显然，每一层本身的维数可以任意。在讨论一维正规空间的情形下，这与连续空间的直积完全类似。某种东西，

类似于直积的构造曾被用于哈利姆斯基、Конг、Копперман等人的研究中 [30,31,34]。然而，由于他们实质上使用了非齐次一维空间以及以特殊方式定义的空间乘积，因此到了二维情形，就已经出现了拓扑类型各异的点，而且拓扑类型不同的点的数量会随着乘积中因子的数量大致呈指数增长。采用这种方法，连一个简单的圆周都难以定义，更不用说维数更高的闭空间了。在分子空间理论中，根本不会出现这些问题。现在我们来考察关于正规 n 维空间同伦的公理在直积中的应用。先回顾这条公理：如果一个空间没有孤立点和连接，并且同伦于一个正规 n 维空间，那么它本身就是正规 n 维空间。针对我们的情形，可以表述如下定理。

定理 91

任意一族维数分别为 $n_1, n_2,...n_k$ 的正规空间 $G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_k$ 的直接积，总能通过按任意顺序逐点删去空间中相邻点之间的连接，再删去邻域仅由一个点组成的悬垂点，化为维数为 $n_1+n_2+...+n_k$ 的正规空间 $nob(G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_k)$。

证 明

设有一组维数分别为 $n_1,n_2,...n_k$ 的正规空间 $G_1, G_2,... G_k$。构造这些空间的直积 $W=G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_k$。根据前文，该直积同伦于一个维数为 $n_1+n_2+...+n_k$ 的正规分子空间。此外，点删除并建立点之间的连接，会使这些连接全部消失，同时某些点的邻域变为非点邻域，而另一些点的邻域则变为点邻域。具有点邻域的点显然是悬挂点，也就是说，它们只有一个相邻点。若将这些点删除，那么根据正规空间的同伦公理，所得空间将是维数为 $n_1+n_2+...+n_k$ 的正规空间，因为其中不含点连接和点。定理得证。□

与直和相比，分子空间的直积具有一项优势：它是经典数学中一种研究充分且广泛使用的运算。在许多情况下，连续空间及其模型——分子空间——的性质相同。尽管这一事实看似显而易见，但在将其应用于实践之前，仍需针对每种具体情况加以证明。与直和一样，直积

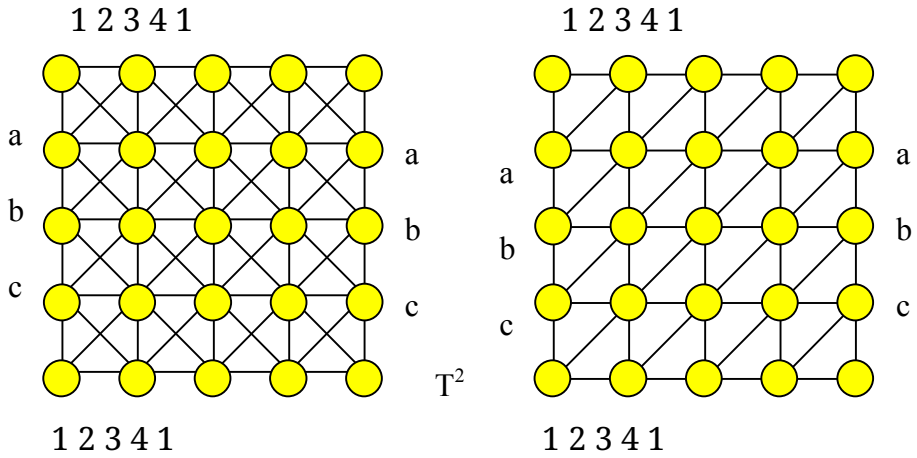


图 99 空间 $T^2=S^1\otimes S_1$ 通过点删除向右倾斜的连接收缩为标准二维分子环面

y.

直积仅在因子为流形时才得到流形，也就是说，空间的邻域都是球面的空间。如果至少有一个因子不是流形，那么直积也不是流形，因为其中点 v⊗u 的邻域同伦等价于直和 O(v)⊕O(u)，因此，只要原始邻域中至少有一个不是球面，它就不是球面。值得注意的是，两个正规空间的直积不再是正规空间。由此可见，尽管正规空间非常便于研究，但最接近连续空间的模型并非正规空间，而是正则空间。

第7章参考文献。

30 Khalimsky E., Kopperman R., Meyer P.，《计算机图形学与有限有序集上的连通拓扑》，《拓扑学及其应用》，第36卷，第1–17页，1990年。
31 Khalimsky E.，《计算机科学中的拓扑结构》，《应用数学模拟杂志》，第1卷，第25–40页，1987年。

34 Kopperman R., Meyer P., Wilson R.，《三维数字空间中的 Jordan 曲面》，《离散与计算几何》，第 6 卷，第 155-161 页，1991年。40 Александров П.С.，Пасынков Б.А.，《维数理论导论》，科学出版社，莫斯科，1973年。43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。53 Корн Г.，Корн Т.，《科学工作者和工程师数学手册》，科学出版社，莫斯科，1970年。

n-维分子空间：基于正规分子空间

我们考虑一般的分子（正则）n维空间，并研究其性质。

本章的一些结果已发表于[43]。

下面给出一般形式的n维空间的定义及其性质。正如我们已经多次提到的，任何空间模型都必须

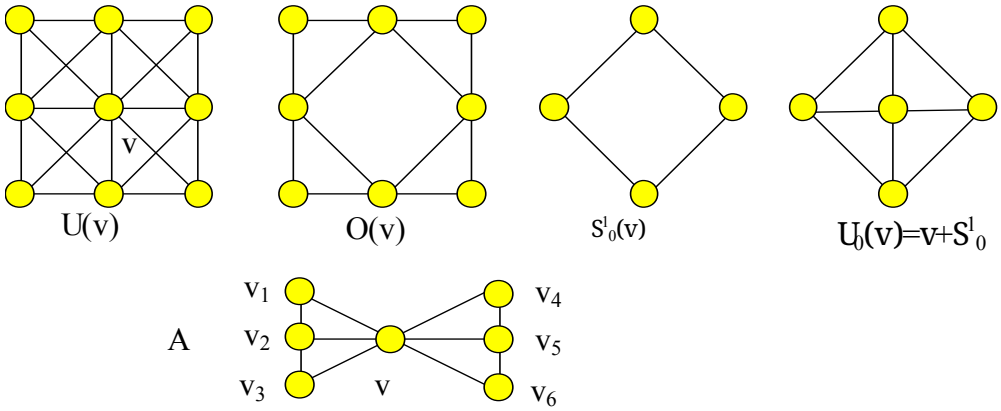


图 100 点 v 的邻域 O(v) 包含正规一维球面 S_{10}。点 v 的骨架球 $U_0(v)$ 定义为 $U_0(v)=v\oplus S_{10}$。在空间 A 中，点 v 的骨架球是形如 (v_k,v,v_p) 的子空间，其中 k=1,2,3，p=4,5,6。

应由某些实验加以证实。计算机实验将在后续章节之一中介绍。根据这些实验得出结论：连续空间的分子模型与其连续原像具有相同的维数。分子像采用覆盖或空间划分的神经。由此产生了比正规模型更复杂的分子模型。因此，有必要为这类空间定义维数。由于覆盖或划分的许多性质取决于元素的形状，因此需要定义 n维空间和 n维点，而不将这些定义与某种特定类型的覆盖联系起来。

注释

为了定义任意空间的维数，我们使用正规空间。不过，正规空间可以用正则空间替代，尤其可以用拟正规空间替代。

n维点的定义

若空间 A 中点 v 的邻域 O(v) 包含一个 (n-1) 维闭正规空间 G^{n-1}，且不包含 n 维闭正规空间 G^n，$G^{n-1}\subseteq O(v)$，$G^n\not\subset O(v)$，则称点 v 为 n 维点。

显然，任何无边界的 n 维正规空间中的所有点，都是上述定义意义下的 n 维点。在带边界的 n 维正规空间中，内点是 n 维的，而边界点是 (n-1) 维的。

n 维点 v 的骨架球 $U_0(v)$ 的定义

设空间 A 中的点 v 是 n 维的，且 $G^{n-1}\subseteq O(v)$ 是某个正规闭 (n−1) 维空间。那么子空间 $v\oplus G^{n-1}=U_0(v)$，其中 $v\oplus G^{n-1}=U_0(v)\subseteq U(v)=v\oplus O(v)$，称为该点的骨架球。

在图 100中展示了点 v 的二维球，以及同一点的骨架球。后者是点 v 与由4个点构成的法向最小圆周 S^1_0 的直和，$U_0(v)=v\oplus S^1_0$。正如图 100所示，一个点可以有多个骨架球。

n维空间的定义

如果空间 G 中至少存在一个 n维点，且不存在 (n+1)维点，则称空间 G 为 n维。

二维空间的一个例子是图 100中的 U(v)。点 v 是二维点，其余所有点或者是一维点，或者是零维点。因此，空间维数由构成该空间的各点的最高维数决定。

如前所述，分子空间的点变换一般不会保持空间维数。然而，在处理连续空间的数字模型时，许多情况下自然的要求是保持空间维数。例如，在电脑游戏中，物体是运动的三维立体，在程序运行期间不会改变其维数。因此，有必要对点变换施加一些附加限制，使维数成为在点变换下不发生变化的不变量。

作为例子，我们来考察将点粘接到空间上（点删除）的情形（图 101）。点u是一个正常的三维点，空间A是以该点为球心的球。从A中删除点v。点u将变为二维点。再删除第二个点w。点u的维数保持不变，仍为二维点。第一次删除使空间维数减小，而第二次删除则没有改变空间维数。

因此，存在这样的点删除（点粘接）：空间维数不会因此改变。删除和引入边时，情况会稍微复杂一些。删除或引入一条点连接，可能使点v的维数增加或减少1（图 103）。我们先证明几个简单的定理，后面会用到。再一次

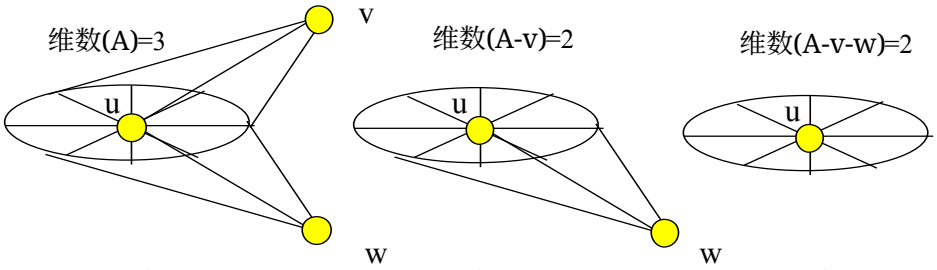


图 101 从三维空间 A 中去掉点 v 后，空间维数减少 1。从二维空间 A-v 中去掉点 w 后，空间维数不变。反向操作，即粘贴点，要么不改变空间维数，要么使维数增加 1。

需要指出的是，可以使用拟正规空间，但这会使证明变得复杂。尽管如此，以下所有结果对于一般的 n 维空间也都成立。

定理92

从 *n*-维空间 *A* 中任意删去点 *v* 后，空间中各点的维数要么不变，要么减少 *1*。

证 明

从图 101 可以看出定理的含义。不属于 O(v) 的点的维数不变。下面考察属于 O(v) 的 n 维（或 (n- k) 维）点 u 的维数如何变化。设在 A 中存在一个不含 v 的 n 维骨架球 $U_0(u)$。那么，删去点 v 后，点 u 的维数不变。

设在 A 中不存在任何不含 v 的 n 维骨架球 $U_0(u)$。也就是说，点 v 包含在属于 O(v) 的任意一个法向闭 (n-1) 维子空间 G^{n-1} 中。那么，删去点 v 后，任意 G^{n-1} 都变为具有连通边界的空间 G^{n-1}-v。A-v 中 O(v) 的闭包不再包含任何法向闭 (n-1) 维子空间 G^{n-1}，但仍包含一个法向闭 (n-2) 维子空间 G^{n-2}。因此，点 u 的维数减少 1（图 101）。定理得证。□

利用这个定理，我们可以说明去掉一个点时，整体空间的维数会如何变化。

Cledstvie

从 n维空间 A 中去除任意一个点后，空间维数要么不变，要么减少 1。

推论几乎是显而易见的。如果点 v 是空间 A 中唯一的 n维点，那么空间维数必然减少 1。另一方面，空间 A 的维数不可能减少超过 1，因为 O(v) 包含一个正规的闭 n-1维子空间 G^{n-1}。如果被去除的点 v 不是 n维点，那么根据前一定理，空间中所含 n维点的维数不可能减少超过 1。定理得证。□

这个定理的意义在于，去除任意一个点后，空间维数可能减少 1，也可能保持不变，但这种变换不可能使空间维数增加。这里引出了一个有趣的延伸。假设空间 A 只有一个 n维点 v。那么，点 v 的邻域 O(v) 是否可能是点空间？这个问题尚未解决。我们将其单独表述出来。

问 题

证明或否定下述命题：如果 n 维空间 A 只有一个 n 维点 v，那么该点的邻域 O(v) 不可能是点空间。

定理 93

对于将点 *v* 粘贴到 *n*-维空间 *A* 的任意粘接，空间的点的维数要么保持不变，要么增加 *1*。

证 明

根据图 101，定理也显而易见。对于任何与 v 相邻的点 u，其邻域 O(u) 也粘接了 v。根据定理的条件，空间 O(u) 的维数不超过 (n-1)。假设点 u 是 n维点。这意味着它的邻域包含某个闭的 (n-1)维正规空间，但不包含任何闭的 n维正规空间。再假设它的邻域包含某个带边界的 n维正规空间 D^n，其边界为 $B=G^{n-1}$，且该边界是闭的 (n-1)维正规空间。设 B 包含于 O(v) 中。那么将点 v 粘接到 A 上，同时也就是将点 v 粘接到 (u⊕B) 上。此时，$D^n \cup v$ 成为一个闭的 n维正规空间，并且属于 O(u)。这意味着点 u 的维数增加了 1，变为 (n+l)。同样的推理也适用于点 u 在 A 中的维数等于 (n-k) 的情形，其中 $0<k<n$。如果

如果上述条件不成立，则点 u 的维数不发生变化（图 101）。定理得证。□

推论

无论将点 v 粘接到何种 n 维空间 A 上，空间维数要么不变，要么增加 1。

假设通过某种方式将一个点 v 黏附到 n 维空间 A 上。如果 O(v) 包含正规闭 n 维空间 G^n，那么点 v 就变成 (n+1) 维的，而空间也变成 (n+1) 维的。属于空间 A 的点至多是 n 维的，无法增加其维数。

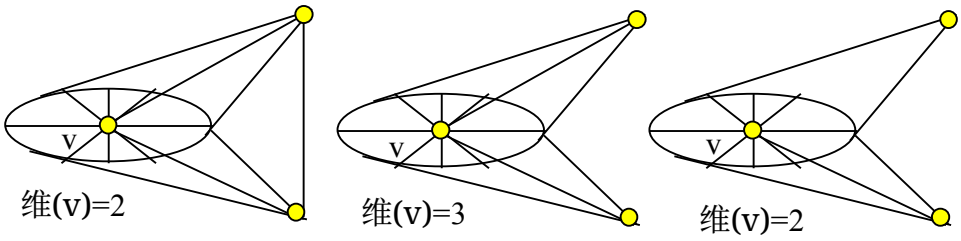


图 *102* 舍弃一条边时，点的维数可能增加或减少 *1*。

至多增加 1。因此，空间的维数至多增加 1（图 101）。

我们来提出一个问题，其解答可能有助于编写用于处理 n 维空间数字模型的程序。

问 题

证明或反驳下述命题：若 n维空间 A 含有正规闭 n 维子空间 G^n，则 A 不是点空间。

考虑关于空间中边的删除与粘接的定理。

定理94

在 *n* 维空间 *A* 中，删除任意一条边 后，点的维数可能增加或减少 *1*，也可能保持不变（图 102）。

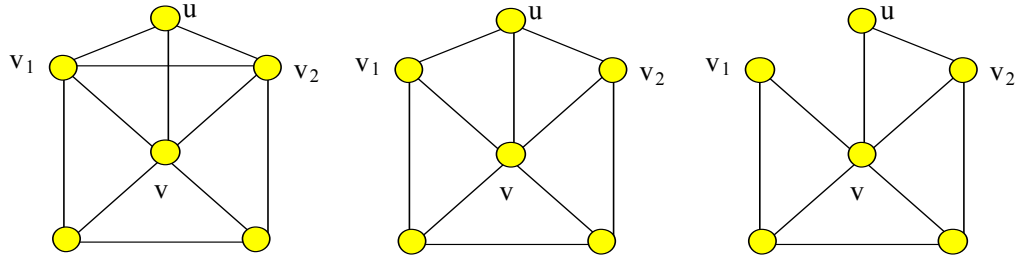
证 明

在舍弃时，边可能会改变点 v_1, v_2 以及属于 $O(v_1v_2)$ 的点的维数。点 v_1 和 v_2 则根据前一个定理，其维数要么保持不变，要么减少。

设点 v 属于 $O(v_1v_2)$，且为 n 维，其至少有一个骨架球 $U^n{}_0(v)$ 也包含在 $O(v_1v_2)$ 中。那么，删去边后，点 v 的骨架球将变为

$U_1(v)=S^0(v_1v_2)\oplus U^n{}_0(v)=S^0(v_1v_2)\oplus v\oplus G^{n-1}=v\oplus G^n$。因此，点 v 将成为 (n+1) 维点。

设点 v 属于 $O(v_1v_2)$，且为 n 维，其所有骨架球 $U^n{}_0(v)$ 都包含点 v_1 和 v_2。也就是说，每个骨架



差(v)=2 差(v_1)=1 差(v_2)=1 差(u)=0

差(v)=2 pa3(v_1)=1 pa3(v_2)=1 差(u)=1

pa3(v)=1 pa3(v_1)=0 pa3(v_2)=0 pa3(u)=0

图103 在舍弃连接后，点 v 的维数可以保持不变或减小 1；属于共同邻域的点的维数可以增加或减小 1，也可以保持不变。

球都包含点 v_1 和 v_2。那么，去掉边后，点 v 的任一骨架球将呈现为 $U_1(v)=U^n{}_0(v)-(v_1v_2)=v\oplus(G^{n-1}-(v_1v_2))$。空间 $(G^{n-1}-(v_1v_2))$ 不再是正规闭 (n-1) 维空间，而成为具有连通边界的正规 (n-1) 维空间，尽管它包含一个 (n-2) 维正规闭子空间。因此，点 v 将成为一个 (n-1) 维点。

设点 v 属于 $O(v_1v_2)$，且为 n 维点；它的任何骨架球 $U^n{}_0(v)$ 都不包含于 $O(v_1v_2)$，并且存在一个骨架球 $U^n{}_0(v)$，不包含于 $v_1\oplus v_2\oplus O(v_1v_2)$。那么，删去这条边后，点 v 的维数既不会增加也不会减少，也就是说，点 v 仍为 n 维点。定理得证。□

作为该定理的推论，我们将更详细地说明删去边时点的维数可能如何变化。

Consequence

设在 n 维空间 A 中，删去相邻点 v_1 和 v_2, 之间的边 (v_1v_2)。那么：

- 点 v_1 和 v_2 的维数要么不变，要么减少 1• 属于公共邻域 $O(v_1v_2)$ 的点 v 的维数可能增加 1、减少 1，或保持不变。

这一定理在 图 102 和 图 103 中进行了说明。去除两个点之间的边是一个比去除点更复杂的过程，因为实际上它也涉及去除点。一方面，对于点 v_1, 和 v_2 而言，这意味着

从空间 $U(v_1)$ 和 $U(v_2)$ 中删除点 v_2，和 v_1 ，即降低空间 A 的维数或保持其不变。另一方面，对于属于 $O(v_1v_2)$ 的点 v，同样的操作会导致维数增加、减少或保持不变。最终。

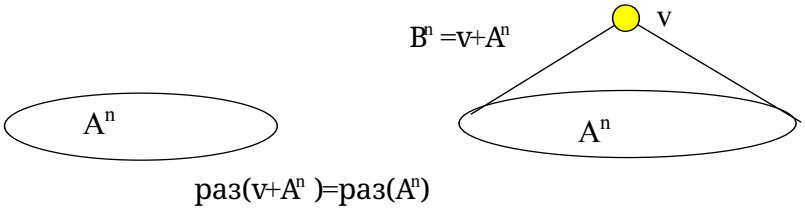


图 104 空间 An 的维数等于空间 v⊕An 的维数，前提是 An 不包含正规闭空间 Gn 作为子空间。

某些点的维数可能增加 1，而另一些点的维数则可能减少 1。因此，空间维数也可能增加或减少 1。在空间的点之间引入一条边，也会得到类似的结果。

定理 95

在 *n*-维空间 *A* 中引入任意一条边，点的维数可能增加或减少 *1*，也可能保持不变（图 102，图 103）。

证 明

建立边时，点 v_1, v_2 和属于 $O(v_1v_2)$ 的点可能改变其维数。根据前一定理，点 v_1 和 v_2 的维数要么不变，要么增加 1。

设点 v 属于 $O(v_1v_2)$，是 n 维的，且它的所有骨架球 $U^n_0(v)$ 都包含在 $S^0(v_1v_2)\oplus O(v_1v_2)$ 中，但不包含在 $O(v_1v_2)$ 中。也就是说，每个骨架球都包含点 v_1 和 v_2。显然，此时 $U^n_0(v)\cap O(v_1v_2)=v\oplus G^{n-1}$。那么引入边 (v_1v_2) 后，点 v 的任意骨架球都将呈现为 $U_1(v)=U^n_0(v)-v_1-v_2=v\oplus G^{n-1}$。因此，点 v 将成为一个 (n-1) 维点。

设属于 $O(v_1v_2)$ 的点 v 是 n 维的，并且存在一个属于 O(v)、包含点 v_1 和 v_2, 、具有连通边界的 n维正规空间 D^n ，使得建立连接 (v_1v_2) 后，D^n 变为 n维正规闭空间 $G^n=D^n\oplus(v_1v_2)$。那么，建立连接后，O(v) 的邻域将包含 $G^n=D^n\oplus(v_1v_2)$。因此，点 v 将成为 (n+1) 维点。

设属于 $O(v_1v_2)$ 的点 v 是 n 维的，不存在一个属于 O(v)、包含点 v_1 和 v_2, 、具有连通边界的 n维正规空间 D^n ，使得建立连接 (v_1v_2)

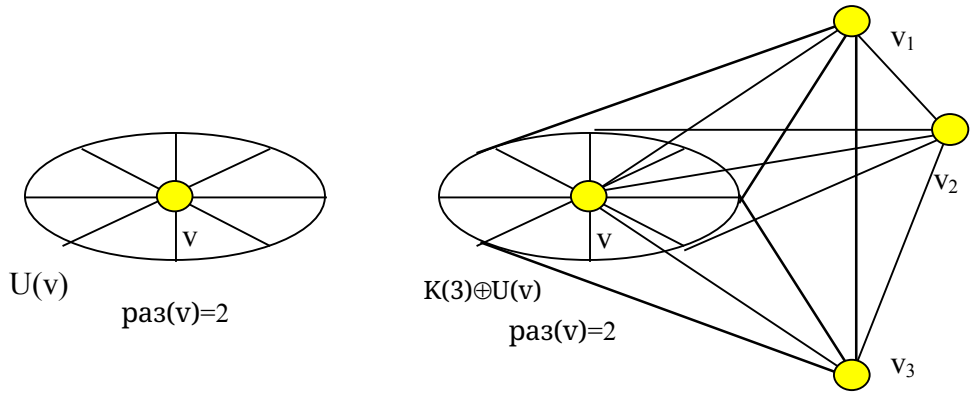


图 105 二维球 U(v) 与超边 K(3) 的直和对于点 v 以及点 v1、v2 和 v3 而言，也是一个二维球。

将D^n 映射到n维正规闭空间$G^n=D^n\oplus(v_1v_2)$，并且存在其骨架球$U^n{}_0(v)$，该球至少不包含点v_1 或v_2中的一个。那么引入一条边后，点v的维数既不会增加也不会减少，也就是说，点v仍是一个n维点（图 102，图 103）。定理得证。□ 下面更详细地强调，不同点的邻域可能如何变化。

推论

设在 n 维空间 A 中，在不相邻的点 v_1 和 v_2, 之间建立连接 (v_1v_2)。则：

- 点 v_1 和 v_2 的维数或者不变，或者增加 1• 属于公共邻域 $O(v_1v_2)$ 的点 v 的维数可以增加或减少 1，也可以保持不变（图 102，图 103）。

作为前面各定理的结果，我们可以表述如下的一般推论。

推 论

删除或粘接任意一条边或一个点，所导致的空间维数变化不超过 1。

现在考察不改变空间维数的点变换。

定理 96

如果 n-维空间 A 不包含任何闭的 n-维正规子空间 G^n，那么锥 $v\oplus A$ 也

是一个 n-维空间，并且不包含任何闭的 n-维正规子空间 G^n。

几证明

显然，v⊕A包含G^{n-1}。假设v⊕A包含G^n。由于A不包含G^n，因此附加点v必须属于

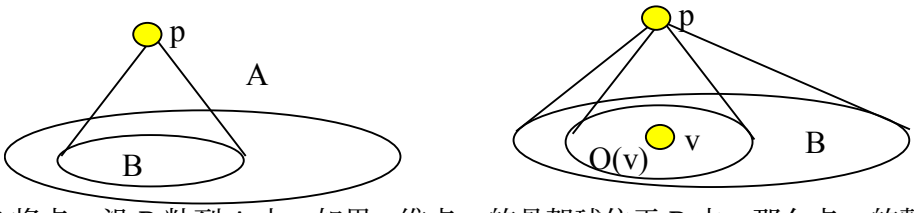


图 106 将点 p 沿 B 粘到 A 上。如果 n维点 v 的骨架球位于 B 中，那么点 v 的整个球也位于 B 中。

G^n，这意味着G^n=v⊕B，B⊆A。然而，锥不可能是正规空间。因此，假设不成立，v⊕A不包含G^n (图 104)。定理得证。□

这个定理很重要，因为一方面，点的球总是一个锥；另一方面，点的球是后续构造的基本构造。

如果用联结K(m)代替点v，也就是由m个两两相连的点组成的空间，就可以推广这个定理。

推　论

如果 n维空间 A 不包含任何闭 n 维正规子空间 G^n，那么锥 K(m)⊕A 也是 n维空间，并且不包含任何闭 n 维正规子空间 G^n。K(m) 是由 m 个点组成的连结体（$v_1,v_2,...v_m$）（图 105）。

还要强调这一定理的另一个推论，它适用于点的球。

推　论

如果空间 $U^n(v)$ 是点 v 的 n维球，那么 K(m)⊕$U^n(v)$（其中 K(m) 是由 m 个点组成的连结体（$v_1,v_2,...v_m$））也是点 v 以及点（$v_1,v_2,...v_m$）的 n维球（图 105）。

我们来考察，在更一般的情况下，对点和连接进行舍弃以及点粘接时，空间维数得以保持需要满足哪些条件。同时，有必要预先明确我们将如何定义空间维数的保持，因为后续构造的进程取决于这些要求。可能有几种方法。我们将采用这样一种方法：在对 n维空间进行任意变换时，空间始终至少具有一个 n维点。我们将这些条件表述为定义。

保持维数不变的点变换的定义

n维空间 A 的点变换 Φ 称为保持维数的点变换，如果在变换过程中空间的维数不发生改变，即 раз(ΦA)=раз(A)。

让我们更详细地考察，点变换必须满足哪些条件，才能不改变空间的维数。

定理97

设 A 是一个 n-维空间，B，$B \subseteq A$ 是它的子空间，满足以下条件：

- B 是一个点空间。
- B 不包含任何正规 n-维子空间 G^n, $G^n \not\subset$B。
- 如果对于某个 n-维点 v，存在其骨架球 $U_0(v)$ 完全包含于 B 中，那么该点的球 $U(v)$ 也包含于 B 中，$U_0(v) \subseteq B \Rightarrow U(v) \subseteq$B。

那么，将点 p 沿 B 粘接到 A 上的点粘接不会改变空间维数，即 $A \sim C = A \cup (p \oplus B)$，$раз(A) = раз(C)$。

证 明

粘附一个点时，空间的维数不会减小。下面证明它也不会增大。由于 O(p)=B 不包含 G^n，所以 p 不可能是 (n+1)维点。若 v 是 n维点，且 U_0(v)⊆B，则 U(v)⊆B。粘附点后，点 v 的球将变为 p⊕U(v)。根据前文，раз(U(v))=раз(p⊕U(v))。因此，点 v 在 C=A∪(p⊕B) 中仍是 n维点（图 106）。假设 v∈B，且 O(v) 中不存在完全包含于 B 的 (n-1)维正规子空间。那么，空间 C 中点 v 的邻域 O(v)|C 为 O(v)|C=O(v)∪(p⊕(O(v)∩B))。如果 O(v)|C 包含一个 n维闭子空间 G^n，那么点 p 必须属于 G^n，由此 O(p)|$G^n \supseteq G^{n-1}$ и $G^{n-1} \subseteq$O(v)∩B,, 这与假设矛盾。因此，该点在 C 中的维数也不超过 n。假设点 v 不属于 B。那么，从空间 A 过渡到 C 时，该点的邻域不变。因此，将点 p 添加入 A 不会改变空间的维数。由于 B=O(p) 是一个单点空间，所以 A 和 C 同伦。定理得证。□

遵循定理的条件，我们可以向 A 粘贴任意多的点，而不改变空间 A 的维数。现在考虑去除属于 n 维空间 A 的一个点。在这种情况下，限制更少，因为空间的维数只能减小。

定理 98

具有点邻域 $O(v)$ 的点 v，如果 A-v 至少包含一个 n-维点，则可以从 n-维空间 A 中删除。

证　明

根据前面的结论，去掉一个点后，空间中剩余点的维数不可能增加，也就是说，空间要么维数不变，要么空间的维数减少 1。由于 A-v 也包含一个 n 维点，所以空间的维数不变。定理得证。□

在确定或排除时，情况会更加复杂。

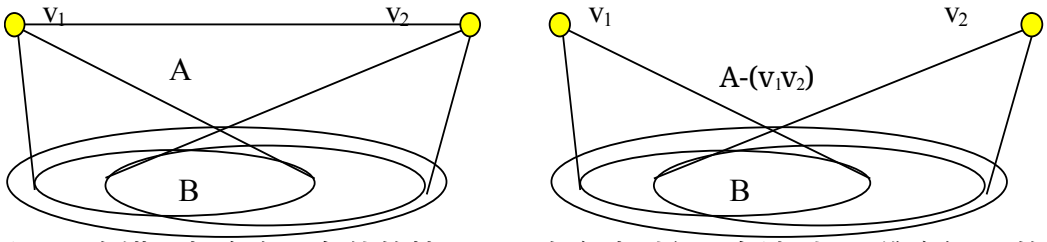


图 107 在满足相应定理条件的情况下，舍弃或引入一条边时，n维空间 A 的维数保持不变。

点之间的连接。这是因为在此过程中，点的维数可能增加，也可能减少。此外，过程中涉及两类点：建立或断开连接的点，以及属于它们公共邻域的点。因此会出现相当多种不同的情况。例如，假设断开点 v_1 和 v_2, 之间的连接，且 v 属于它们的公共邻域 $O(v_1v_2)$。在这种情况下，点 v_1 和 v_2, 的维数可能减少，而点 v 的维数可能减少或增加。如果 v_1 是唯一的 n维点，且它的维数减少，而 v 是一个 (n-1) 维点，且它的维数增加，那么整体空间的维数不会改变。

定理 99

设 A 是一个 n-维空间，B 是两个相邻点 v_1 和 v_2，$O(v_1v_2)=B$ 的公共边界，并且满足以下条件：

• B 是一个点空间。• 如果点 v_1 是 n-维的，那么存在某个闭的正规 $(n-1)$-维空间 G^{n-1}，属于 $O(v_1)$ 且与 B 没有公共点。• 如果点 v_2 是 n-维的，那么存在某个闭的正规 $(n-1)$-维空间 G^{n-1}，

属于 $O(v_2)$ 且与 B 没有公共点。• 如果点 v 属于 $O(v_1v_2)=B$，且是 n- 维的，那么它不存在任何包含于 B 中的 n- 维骨架球 $U^n{}_0$(v)，并且存在一个不完全包含于 $v_1 \oplus v_2 \oplus O(v_1v_2)$ 中的骨架球，或者，那么，删去点 v_1 与点 v_2 之间的边，不会改变每个点及整个空间的维数，即 $A\sim C=A-(v_1v_2)$，$раз(A)=раз(C)$。

证 明
根据前面的定理，空间 A 中没有一个 n维空间点会改变其维数。因此，去掉边后，空间 A 的维数不变。定理得证。□ 下面考察在点之间建立连接时空间维数不变的条件。

定理100

设 A 是 n-维空间，B 是两个不相邻点 v_1 和 v_2，$O(v_1v_2)$=的公共边界，并且满足以下条件：

• B 是点空间。• 如果点 v_1 是 n维点，则其邻域不包含任何 n维正规空间 D^n，该空间带有边界 G^{n-1}，而 G^{n-1}是一个完全包含于 B 中的闭正规 $(n-1)$维空间。• 如果点 v_2 是 n维点，则其邻域不包含任何 n维正规空间 D^n，该空间带有边界 G^{n-1}，而 G^{n-1}是一个完全包含于 B 中的闭正规 $(n-1)$维空间。• 如果属于 $O(v_1v_2)=B$ 的点 v 是 n维点，则不存在一个属于 $O(v)$、边界连通且包含点 v_1 和 v_2, 的 n维正规空间 D^n，使得建立连接 (v_1v_2) 将 D^n 变为 n维正规闭空间 $G^n=D^n\oplus(v_1v_2)$；并且存在其骨架球 $U^n{}_0(v)$，不包含点 v_1 或 v_2中的至少一个。那么，在点 v_1 和 v_2 之间建立连接不会改变每个点的维数，并且不会改变空间的维数。

$_2$），次(A)=次(C)。*Доказательство* 教义在 *целом*，即 $A\sim C=A-$ $(v_1v$

证 明

根据前面的定理，空间 A 中没有任何 n 维点会改变其维数。因此，删除边时，空间 A 的维数不会发生变化。定理得证。□ 当然，最后几个定理对保持空间维数不变的边的删除和引入施加了过于严格的限制。在实际应用中，采用以下由上述内容推导出的推论更为方便。

侦查

n维空间 A 中具有点公共边界 $O(v_1v_2)$ 的点 v_1 和 v_2，之间的连接 (v_1v_2)，如果 $A-(v_1v_2)$ 至少包含一个 n 维点（$A\oplus(v_1v_2)$ 不包含 (n+l) 维点），则可以从空间 A 中删除（粘接）。

我们将证明几个关于 n 维空间性质的定理。此前我们已经研究过分子空间的直和与直积的性质。下面考察在进行这些运算时维数如何变化。

定理101

设 A^m 和 B^n 分别是 m 维和 n-维空间。若 A^m 和 B^n 分别不含闭正规 n 维和 m-维子空间，则这些空间的直和 $A^m\oplus B^n$ 的维数为 $n+m$，即 $раз(A^m\oplus B^n)=n+m$。若 A^m 含有闭正规 n-维子空间，和/或 B^m 含有闭正规m-维子空间，则这些空间的直和 $A^m\oplus B^n$ 的维数为 $n+m+1$，即 $раз(A^m\oplus B^n)=n+m+1$.

证 明

证明，若 A^m 和 B^n 分别不包含闭的正规 n 维和 m 维子空间，则这两个空间的直和 $A^m\oplus B^n$ 的维数为 n+m，即 $раз(A^m\oplus B^n)=n+m$。设 A^m 的点集为 $V=(v_1, v_2, v_3,.... vp)$，$B^n$ 的点集为 $R=(r_1, r_2, r_3,.... rq)$，且它们分别不包含闭的正规 n 维和 m 维子空间。考虑维数为 m 的点 $v\in A^m$，以及维数为 n 的点 $u\in B^n$。这意味着 O(v) 包含一个正规

(m-1)维闭子空间 G^{v-1} 和 O(u) 包含正规 (n-1)维闭子空间 H^{n-1}。那么在 $A^m\oplus B^n$ 点的邻域 v 是 $O(v)\oplus B^n$ 的直和，并包含直和 $G^{v-1}\oplus H^{n-1}$ 作为子空间。由于 $G^{v-1}\oplus H^{n-1}$ 是正规闭的 (m+n-1)维子空间，因此点 v 的维数在

$G^{v-1}\oplus H^{n-1}$ 等于 (m+n).

假设某个点 v 在 $A^m\oplus B^n$ 中的维数为 (m+n+1)。设该点属于 A。这意味着存在一个正规 (n+m+1) 维闭子空间 W，属于 $O(v)\oplus B^n$。设该子空间由属于 A^m 的点 $v_{1,}$ $v_{2,}$, $v^{3,}$,.... vp 以及属于 B^n的所有点组成。那么 W=G⊕H，其中 G 和 H 分别是属于 A^m 和 B^n 的闭正规子空间，并且 G 的维数大于 n，或者 H 的维数大于 m。然而，这与定理的条件相矛盾。因此，我们的假设不成立，空间中任意点的维数都不能超过 n。类似地可以证明，如果 A^m 包含一个 n 维闭正规子空间，和/或 B^m 包含一个 m 维闭正规子空间，那么这些空间的直和 $A^m\oplus B^n$ 的维数为 n+m+1，раз$(A^m\oplus B^n)$=n+m+1。定理得证。□

定理102

> 设 A^m 和 B^n 分别是 m 和 n-维空间。那么，这些空间的直积 $A^m\otimes B^n$ 的维数为 $n+m$，$раз(A^m\otimes B^n)=n+m$.

证 明

实际上，该定理的证明将包含在关于拟正规空间直积维数的定理的证明中，因为直积中点的维数是通过确定该点的两个点的维数在局部确定的。

第 8 章参考文献列表。

43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。

正则 分子 空间

我们研究拟正规分子空间和块分子空间，这些空间可通过可缩变换转变为正规空间。

本章的一些结果已发表于 [43]。

正则空间

除此之外，分子空间也是直观呈现多维连续曲面的便捷方式。例如，在连续情形下，射影平面或克莱因瓶无法在三维空间中构造。若要重现它们的分子模型，只需一组小球和连接它们的杆件。

现在我们转向一个更广泛的分子空间类别，它包含前面提到的正规空间。这些空间正是在构造连续空间的分子图像时会出现的空间。在后续章节中，我们将介绍几种这样的建模算法。

由于数字拓扑在某种意义上是一门实验科学，因此任何空间模型都必须由某些实验来验证。因此，在进入定义之前，我们先来看一些典型例子，以便了解为什么需要这样的空间，以及它们是如何构造出来的。假设我们用一些小矩形覆盖单位正方形 L^2 ，这些矩形的边分别平行于正方形的边。我们认为，任一矩形的最长边都远小于 1。接下来，构造此覆盖的神经，并将其视为该正方形的分子模型 G。事实证明，G 保留了正方形的基本性质。

• G 不含三维正规点 • G 含有二维正规点 • 通过逐点删去，G 收缩为一个正规二维球，它是单位正方形的分子像

还可以参阅关于计算机实验的章节，继续查看其他例子。

所有这些都使我们相信，在获得连续多维对象的分子像时，我们实际上几乎总是会得到不同于标准形的分子空间；如有必要，应使用点变换，将这些空间变为标准形。我们将这样的空间称为正则空间。

这类空间的定义建立在实验结果的基础上，可以通过多种方式实现。

在开始讨论引入严格定义之前，我们规定，正规空间可以看作正则空间的骨架或骨架结构，并向其粘附额外的点，使空间的拓扑特征保持不变。例如，考虑一个由 4 个点组成的一维正规圆周（图 108）。点变换使我们能够向其中粘附额外的点和边，也能够将它们剥离。问题在于，哪些粘附会使空间保持为一维圆周，哪些又会改变它

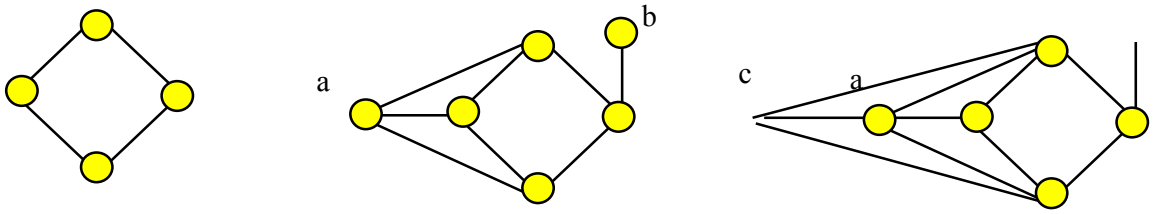


图108 将点 a 和 b 粘接到圆上是允许的，将点 c 粘接到圆上则不允许。

特征。显然，允许粘接的定义多少有些随意。我们将持续粘接点和边，直到空间中各点的维数不超过 1。若某次粘接使空间中的某个点的维数增至 2，则视为不允许。在图 108 中，粘接到圆周上的点 a 和 b 被视为允许的，但点 c 则不能再粘接，因为这样会使点 a 变成二维点，并被一个一维圆周所环绕。如果读者觉得我们的解释不够有说服力，也可以自行构思并采用自己的定义。

正规 n 维闭空间的定义 1

Пространство G называется правильным замкнутым n-мерным пространством, если оно обладает следующими свойствами: 1. G гомеоморфно некоторому замкнутому правильному n-мерному пространству H. 2. Пространство G содержит n-мерные точки. 3. Пространство G не содержит точек размерности, большей n. 4. Каждая точка пространства G имеет сколь угодно малые окрестности, граница которых имеет размерность $n-1$.

正则 n 维闭空间的定义 1

正则 n 维闭空间是指满足以下条件的空间 G：1. G 与闭正规 n 维空间 H 同伦2. 空间 G 中的一些点是 n 维的 3. 空间 G 中任意点的维数都不超过 n 4. 空间 G 中的任意点都与至少一个 n 维点相邻

条件 1 定义了空间的拓扑结构。条件 2 表示空间至少是 n 维的。条件 3 表明空间没有更高维的点。例如，这保证了模拟一维直线的分子空间中不存在二维增厚部分

。我们在最简单的层面上（图 109）考察哪些位于欧氏连续三维空间中的连续空间可以由正则一维圆 S^1_R 模拟，哪些不能。我们选择边长任意且较小、边与坐标轴平行的立方体作为覆盖元素。分子模型采用覆盖的神经。根据定义，S^1_R 与最小的

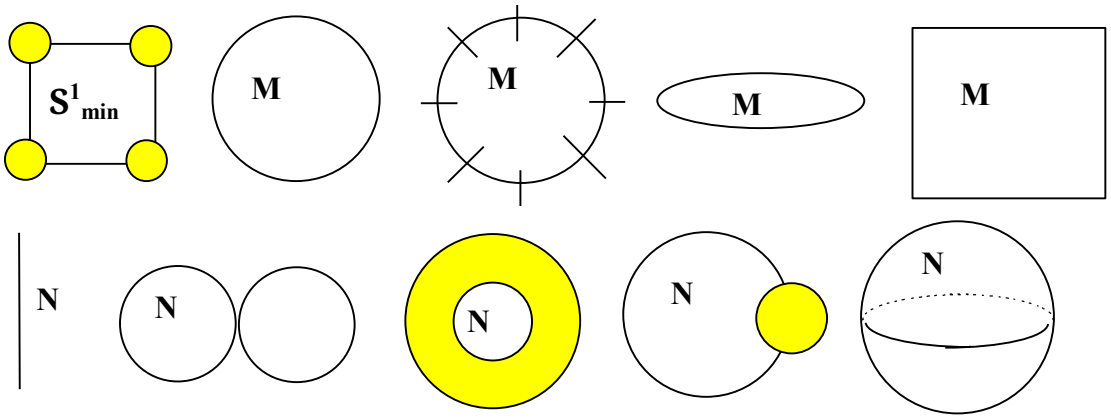


图 109 空间 M 由正则圆建模，空间 N 不由正则圆建模。

图中所示的正规圆 S^1_{min}。字母 M 表示该连续空间的分子模型是 S^1_R，字母 N 表示该连续空间的分子模型不是 S^1_R。

我们再引入一个正则闭空间的定义，从数学角度看，该定义使用起来更方便。这两个定义是否等价仍是一个悬而未决的问题。

闭正则空间的定义 2

1. 如果分子空间 G 满足以下条件，则称其为正则闭正则空间。
2. G 有一个子空间 H^n，称为 G 的骨架，且它是一个正规闭 n 维空间。
3. G 与 H^n 同伦。4. G 中任意点的维数都不超过 n。5. G 中任意一点都与 H^n 中至少一个点相邻。

下面来考察几种最简单的正规空间。

拟正规分子空间

为了获得连续空间（例如二维环面）的分子像，我们必须采用某种离散化方法。这样的方法有几种，我们稍后会讨论；具体采用哪一种取决于实际情况。例如，我们在连续空间上引入有限覆盖或可数覆盖，并将该覆盖的神经视为它的分子像。要选择一种覆盖，使得到的分子空间立即成为正规空间，是相当困难的。在大多数情况下，这种空间并不正规，需要通过点变换使其成为正规空间。因此，我们有必要扩展正规空间的概念，定义一些在形式上并不正规、但接近

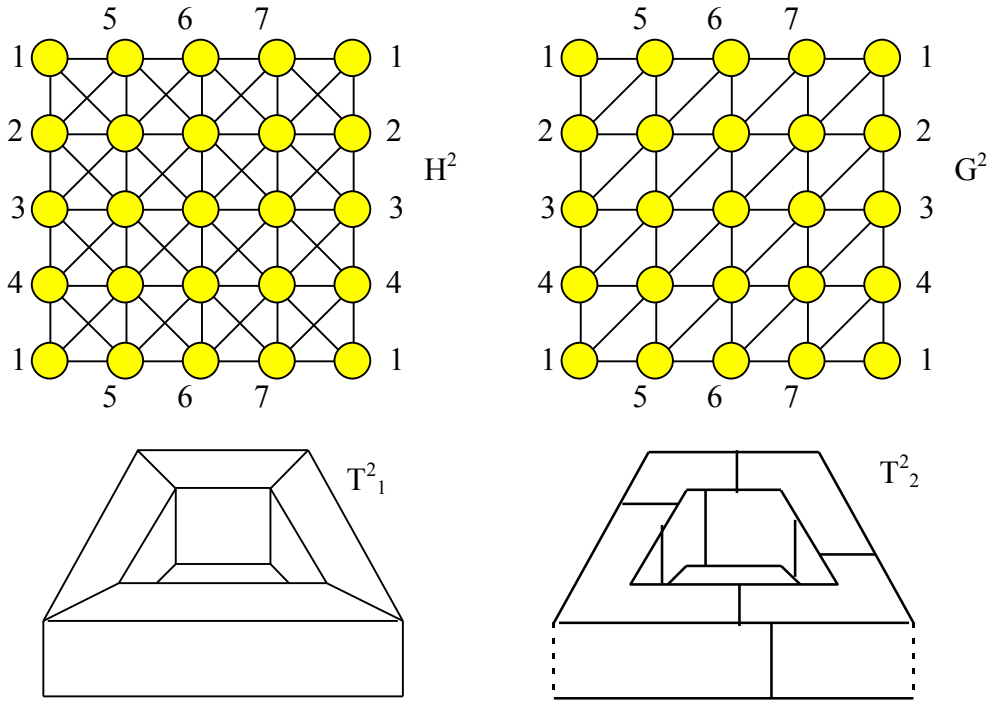


图110 准正规（左）和正规（右）二维环面 T_{21} 和 T_{22}。下方展示了环面的覆盖，其神经分别是相应的分子空间。

其性质如此。作为例子，我们来考察二维环面——甜甜圈状曲面的覆盖及其分子空间（图 110）。显然，分子空间 H^2 不是正规空间。在这个空间中，我们可以像同一幅图所示那样删去点连接，从而得到正规空间 G^2。空间 H^2 中每个点的邻域包含一个正规的

圆周作为子空间，此外还包含另外四个不属于该邻域的点。我们将这类空间称为准正规空间。

准正规 n 维闭空间的定义

空间 H^n 称为准正规 n 维闭空间，如果满足以下条件：

• 空间 H^n 与正规 n 维闭空间 G^n同伦，• 空间 H^n 中每一点的邻域都包含一个与闭正规 (n−1) 维空间同伦的子空间，但不包含与闭正规 n 维空间同伦的子空间。

该定义中的第二部分最为重要，因为它可以定义一个并非闭合的拟正规 n 维空间。

具有无限多个点的拟范数 n 维无限空间的定义

如果满足以下条件，则称空间 H^n 为具有无限多个点的拟正规 n 维空间：• 空间 H^n 与具有无限多个点的正规 n 维空间 G^n 同伦；• 空间 H^n 中每个点的邻域都包含一个与闭正规 (n−1) 维空间同伦的子空间，但不包含与闭正规 n 维空间同伦的子空间。

图 111 展示了一条拟正规一维直线。每个点的邻域都包含一个零维正规球面，且不包含任何一维正规球面。黑色标出了正规直线上的点，该直线是拟正规正则直线的子空间。

随即便产生一个问题。设某个空间 H^n 中每个点的邻域在有限点集上都包含一个与闭正规 (n−1) 维空间同伦的子空间，但不包含与闭正规 n 维空间同伦的子空间。那么这个空间是否总是与闭 n 维空间同伦？这个问题尚未解决。因此，我们在准正规 n 维闭空间的定义中引入了第一个条件。下面给出准正规 n 维点的定义。

准正规 n 维点的定义

如果点 v 的邻域包含一个同伦于闭正规 (n−1) 维空间的子空间，但不包含任何同伦于闭正规 n 维空间的子空间，则称点 v 为 n 维拟正规点。

准正规空间在基本性质方面与正规空间最为接近。关于正规空间的大多数定理都可以很容易地推广到准正规空间。容易看出，在零维情形下，只存在正规空间。正规空间与准正规空间之间的区别仅在维数为 1 及以上时才会出现。显然，任何正规空间同时也是准正规空间。我们将这一显然的命题单独列出为

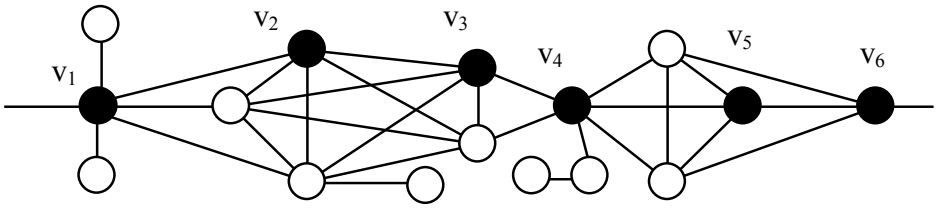


图 111 拟正规一维直线。每个点的邻域都包含一个零维正规球面，且不包含任何一维正规球面。黑色标示的是正规直线上的点，而该正规直线是拟正规正则直线的子空间。

形式的定理。

定理 103

任何正规空间都是拟赋范空间

我们来考察准正规空间的一些性质。

定理104

设 G^n 和 H^m 分别是维数为 n 和 m 的两个拟正规闭空间。那么直和 $G^m \oplus H^m$ 是维数为 $n+m+1$ 的拟正规流形。

证 明。

G^n 和 H^m 通过点变换收缩到正规闭空间 G^n_1 和 H^m_1。由于这些变换在空间的直和中同样是点变换，因此 $G^n \oplus H^m$ 同伦等价于 $G^n_1 \oplus H^m_1$。设 $v \in G^n$，$O_1(v) \subseteq O(v)$ 同伦等价于闭正规 (n−

1) 维空间 $G^{n-1}{}_2$，$u\in H^m$，$O_1(u)\subseteq O(u)$ 同伦等价于闭正规 (n−1) 维空间 $H^{m-1}{}_2$。于是 $O_1(v)|(G^n\oplus H^m)=(O_1(v)|G^n)\oplus H^m$ 同伦等价于 $G^n{}_2\oplus H^m$。因此，$G^\tau+H^m$ 中点 v 的邻域包含一个与正规闭 (n+m) 维空间 $G^n{}_2\oplus H^m$同伦等价的子空间。对于点 $u\in H^m$，结论同样成立。设 $G^n\oplus H^m$ 中点 v 的邻域包含子空间 P，该子空间同伦等价于正规闭 (n+m+1) 维空间。显然，$A\oplus B=P$，$A\subseteq O(v)$，且 $B\subseteq H^m$。A 不可能同伦等价于正规闭 n 维空间 F^n。因此，$A\oplus B=P$ 不可能同伦等价于正规闭 (n+m+1) 维空间 V^{n+m+1}。矛盾得证。定理得证。□

拟正规空间的直积也具有类似的性质。需要指出的是，在这种情况下，已不必局限于闭正规空间。

定理105

设G^n 和H^m 是两个维数分别为n和m的拟正规空间。那么直积$G^m\otimes H^m$ 是一个维数为$n+m$的拟正规分子空间。

证 明。

G^n 和H^m 分别同伦于$G^n{}_1$ 和$H^m{}_1$。因此，$G^n\otimes H^m$ 同伦于$G^n{}_1\otimes H^m{}_1$。由于 $O(v\otimes u)=[(v\otimes O(u))\oplus(O(v)\otimes u)]\cup(O(v)\otimes O(u))$同伦等价于$O(u)\oplus O(v)$，根据前一定理，$O(v\otimes u)$包含一个同伦于闭正规(n+m-1)维空间的子空间，且不包含任何同伦于闭正规(n+m-1)维空间的子空间。定理得证。定理得证。□

现在定义带边界的拟赋范空间。这比正规空间的情形要复杂一些，因为去除点并不意味着拟赋范空间会变成另一种拓扑类型的空间。从图 111 可以看出，去除点 v_2 后，空间仍然是同一类型的拟赋范空间。

具有连通边界的拟正规空间的定义

如果满足以下条件，则称空间 H^n 为具有连通边界 B 的拟正规 n 维空间：

- 将点 v 沿子空间 B（O(v)=B）粘合到 H^n 后，所得空间 $G^n=H^n\cup v$ 是一个拟正规 n 维空间。• 空间 H^n 同伦于某个带边界的正规 n 维闭空间。

根据这个定义，边界 B 是一个包含与闭正规 (n−1) 维空间同伦等价的子空间、但不包含与闭正规 n 维空间同伦等价的子空间的空间。此外，空间 B 本身似乎也与闭正规 (n−1) 维空间同伦等价。这个问题尚未解决。

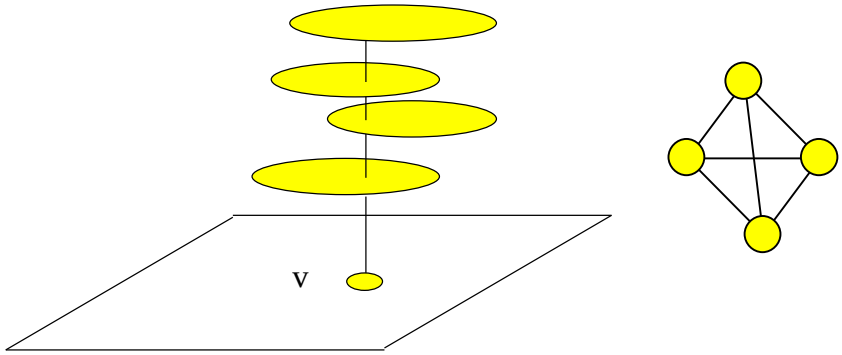


图112. 点 v 属于 4个开圆盘。覆盖的神经是由4个点组成的单纯形。

问 题

证明或反驳以下命题：设 H^n 是一个维数为 n、带边界 B 的拟正规空间。那么，B 与闭正规 (n−1) 维空间同伦等价。

分子块-空间

我们来考察块空间的性质，也就是说，这类空间中的点由某些空间所取代。下面转而定义块空间及其性质。块空间构成了比正规空间更广泛的一类空间，并将正规空间作为特例包含在内。

块空间无非是将点替换为某些空间后得到的分子空间。在转入定义之前，我们先来看一些直观的几何构造，以便理解这类空间为何必要，以及如何构造。设点 v 属于一个平面，该平面被某个开圆盘族覆盖（图 112）。将分子空间中的一个点与每个圆盘对应起来。

如果分子空间中两个点所对应的圆盘有非空交集，就将这两个点连接起来。显然，分子空间中的所有点彼此相连。

这个例子使我们有理由推测，连续空间中的一个点可以表示为分子空间中的一个由 n 个点组成的点束。它说明了我们后续工作的方向。在块空间中，点的角色由点束来承担，也就是说，由若干个彼此完全连接的点组成。另一个关键问题是，块空间中的点应当如何彼此连接，才能保持与正规模型的对应关系。

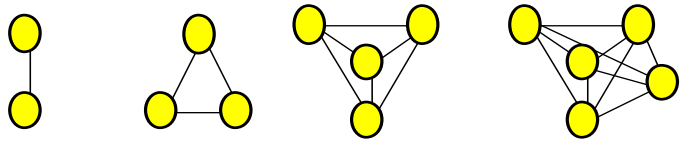


图113 由 2、3、4 和 5 个点组成的点束块点。

我们再看另一个例子（图 114）。设单位正方形被五个基本矩形覆盖。该覆盖的神经是最小的二维分子正规球，也就是说，其邻域为最小圆周的点。向这个覆盖中添加其他元素，这些元素都是小矩形。每个新增元素都与至少一个基本矩形有非空交集。此外，覆盖的神经的维数始终必须

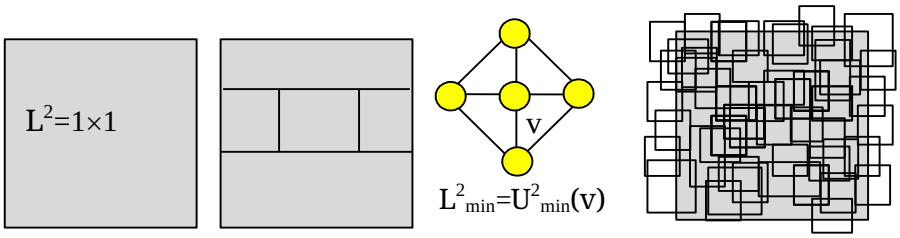


图 114 单位正方形 L_2由矩形覆盖。覆盖的神经是正方形的分子模型（未绘出）。通过保持维数的点变换，它收缩为最小分子正方形 $L^2_{min}=U^2_{min}(v)$，该正方形是右侧正方形覆盖的神经。

等于二。从几何上看，这意味着按照一定规则将点粘附到基本分子空间上，同时保证空间的维数及其他拓扑和几何性质不变。已有证明表明，分子空间的欧拉示性数和同调群在空间的点变换下保持不变。必须对

点变换施加一些条件，以保证空间维数不变。

据此，我们将块空间定义为由某个基空间构成的空间，其中的点被其他一些空间替代，而连接也按照某些不会改变空间基本特征的特定规律来规定。我们已经详细讨论过一种块空间。两个分子空间 G⊗H 的直积，是空间 G（或 H），其中每个点都被空间 H 替代，并相应地分配连接。本节将讨论另一种块空间，其中每个点

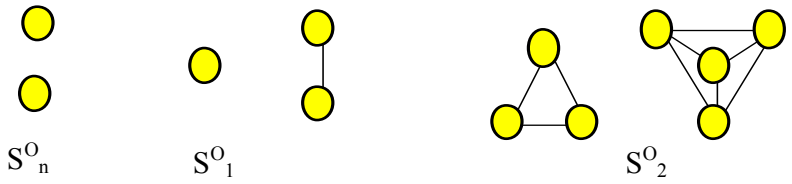


图115 S^{0}_{n} 是一个正规零维球面。S01 和 S01 是正规零维球面。

被一个链替代。如果分子空间 G 的每个点都被同一个链 K 替代，就得到直积 G⊗K。这种空间的性质已得到较充分的研究。这里我们将讨论每个点都被点数各不相同的链替代的空间。这类空间更符合通过离散化连续空间而得到的实际数字模型。

零维块点的定义

由 n 个两两相邻点组成的 K(n) 簇称为零维块点

图图 113中描绘了几个块点。这个定义与上文所述的启发式方法十分吻合；在该方法中，分子空间尤其被视为拓扑空间覆盖的神经。

零维正则球面的定义

正则零维球面 S^{0} 是由两个孤立块点组成的分子空间。所有正则零维空间的集合仅包含零维正则球面（图图 115）。

块空间的定义

Π设 A 是点集上的分子空间。 к

$(v_1,v_2,...v_p...)$。如果空间BA满足以下条件，则称空间BA为空间A的块空间：

- 每个点 v_k 都替换为块点 $V_k(m_k)$，它由 m_k 个点组成，
- 根据条件，若 v_s 与 v_t 在 A 中相邻，则 $V_k(m_k)$ 中任意一个点都与 $V_t(m_t)$ 中任意一个点相邻。

若 v_s 与 v_t 在 A 中相邻，我们称块点 $V_k(m_k)$ 和 $V_t(m_t)$ 在 BA 中相邻。换句话说，在分子空间中将点替换为块点，并添加相应的边，就会得到一个正则空间。属于 $V_k(m_k)$ 的任意点都与 $V_s(m_s)$ 中的所有点相连。图 116 展示了正则空间 L^1_{reg}，它是一条由块点 $V_1(1)$、$V_2(3)$、$V_3(2)$、$V_4(1)$、$V_5(3)$、$V_6(1)$...组成的一维直线。选出的点 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6...以黑色标出，并构成一条法线。

正规 n 维块空间的定义

如果 G^n 是正规 n 维空间，那么空间 BG^n 称为正规 n 维块空间。

下面考察块空间的一些性质。我们来研究属于某个块点的点的邻域结构。

定理 106

设点 v_1 属于正规 n 维块空间 H^n 中的块点 $V_1(m_1)$。则任意点 v_1 的邻域由表达式 $O(v_1)=(V_1(m_1)-v_1)\oplus O(V_1(m_1))$ 确定，其中 $(V_1(m_1)-v_1)$ 和 $O(V_1(m_1))$ 是由 (m_1-1) 个点构成的连结以及块点 $V_1(m_1)$ 的邻域。同时，$O(V_1(m_1))$ 是闭的 $(n-1)$ 维正规块空间。

证 明。
根据定义，空间 $V_1(m_1)$ 中任意块点的邻域 $O(V_1)$ 是一个分子闭正则 (n-1) 维空间。点 v_1 与 $V_1(m_1)$ 中的所有点相连接，也与 $V_1(m_1)$ 中其余的点相连接，即与 $V_1(m_1)$-v_1 中的点相连接。反过来，$(V_1(m_1)$-$v_1)$ 中的点与 $O(V_1)$ 中的所有点相邻。因此 $O(v_1)=(V_1(m_1)-v_1)\oplus O(V_1(m_1))$。定理得证。□

定理107

设*BA*是块-空间。那么，*BA*可以通过删除点而归约为*A*。

证　明。
点 v_k 的邻域是正规闭 (n−1) 维空间 $O(v_k)$。从每个块点 $V_k(m_k)$中通过点删除去掉除一点以外的所有点。得到空间 A。定理得证。

□

定理108

设 BG^n 是正规 *n*-维块-空间。那么，空间中任意点的邻域都包含一个正规闭 *(n-1)*-维空间，且不包含正规闭 *n*- 维空间。

证明。
点 v_k 的邻域是正规闭 (n−1) 维空间 $O(v_k)$。设点 v_{kr} 属于块点 $V_k(m_k)$。各选取一个

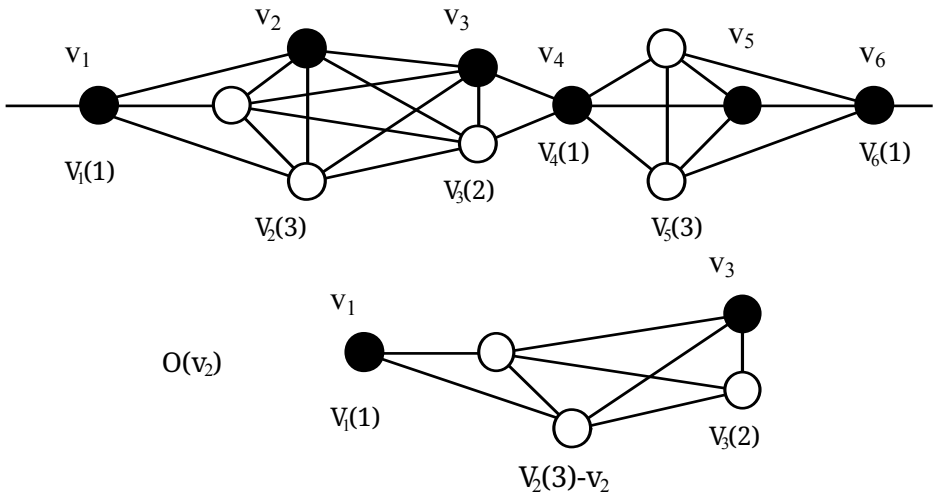


图 116 正则一维直线由块点 V1(1)、V2(3)、V3(2)、V4(1)、V5(3)、V6(1)……组成。黑色表示正规直线上的点，它是正则直线的子空间。点 v2 的边界是直和，O(v2)=(V2(3)-v2)⊕O(V2(3))..

来自与 $V_k(m_k)$ 相邻的每个块点 $V_s(m_s)$ 中的点 v_{st}。显然，所选点集是一个与 $O(v_k)$ 同构的正规闭 (n−1) 维空间。我们选取由与块点 $V_k(m_k)$ 相邻的块点组成的子空间。假设该空间包含一个正规闭 n 维子空间。

X^n. 它应包含属于同一个块点的若干点。其中一个点具有点邻域。这

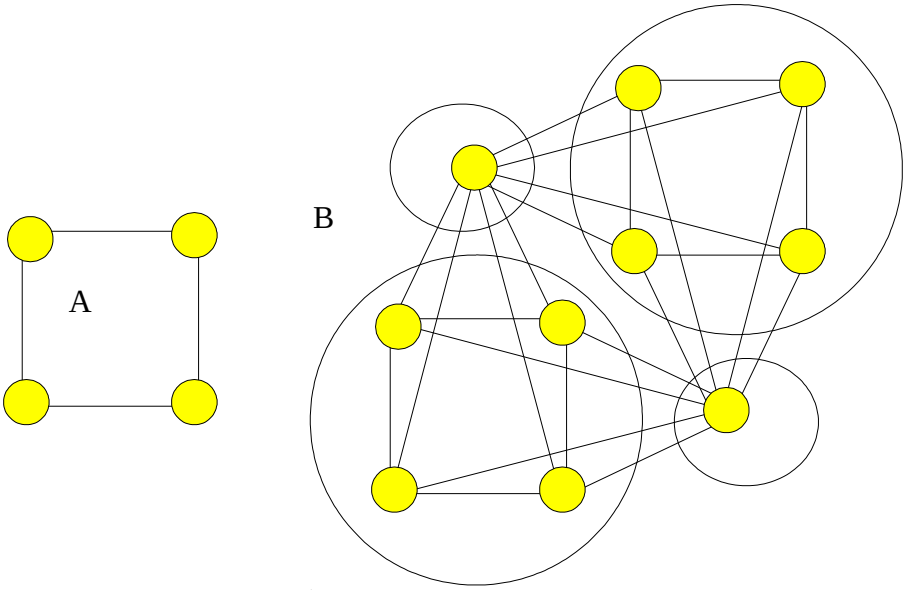


图117 正规圆 A 和块空间 B。

这与正规闭 n 维空间的定义相矛盾。因此，空间中任意一点的邻域都不包含正规闭 n 维空间。定理得证。□

以下定理显然。

定理 109

$A_1 \oplus A_2$ 块-空间的直和是 块- 空间

定理 110

空间 $A_1 \otimes A_2$ 块-空间 A_1 与 A_2, 的直积是块- 空间

（正规 n-维）块-空间（正规闭 n-维）空间 G^n，作为（n-维正规）块-空间 BG^n 的子空间，称为（正规）骨架或骨架（ n- 维正规）块 - 空间 BG^n。

显然，块空间可以包含多个闭的正规 n 维空间，它们彼此同伦。

定理111

如果块-空间有多个拟正规骨架，那么它们彼此同伦。

证　明。
根据定义，任何骨架都与原块空间同伦等价。因此，所有骨架彼此同伦。定理得证。□

一般来说，可以扩展块空间的概念：作为块点的可以不是超边，而是任意空间。例如，在某个正规空间中，将部分点替换为超边，其余点替换为球面。由此产生某种外部与内部拓扑。由块点整体构成的外部块空间仍是正规空间，并构成外部结构。同时，每个块点本身又由点组成，是一个空间，并具有内部拓扑。此外，不同块点之间的边规定了构成这些块点的空间之间的边，因此也确定了每个块点的内部结构与整体外部结构之间的连接。这条路径颇为有趣，可应用于许多物理理论、微观世界的理论，或生物学和化学构造中。图117展示了这样一种块空间：由块点构成的外部空间是一个由4个点组成的圆周，其中两个块点是普通点，另外两个块点是正规极小圆周。

第9章参考文献列表。

43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。

分子空间的欧拉示性数

本章定义分子空间的欧拉示性数，并证明可缩变换不会改变这一示性数。我们研究欧拉示性数的一些性质，并通过实例说明，分子空间的欧拉示性数与其连续对应空间的欧拉示性数相同。我们还发现了分子空间的欧拉示性数与其各顶点边界的欧拉示性数之间的联系。我们将这些结果应用于二维闭曲面的铺砌：球面、环面和射影平面。我们详细研究了由一个元素和两个不同元素进行的铺砌。利用欧拉示性数，可以得到一些描述一般铺砌性质的定理。例如，射影平面不可能具有仅包含四边形和五边形的映射，也不可能仅由顶点数超过5的多边形组成。射影平面的任意多边形三角剖分（除三角形外）都必须包含四边形和五边形，以及顶点数超过5的多边形。最后给出了最小分子空间和极小分子空间的定义，并研究了这些分子空间的一些性质。

本章所得结果部分发表于文献 [16,24,25,26,28,43]。

分子空间欧拉示性数的定义。点变换不改变分子空间的欧拉示性数

本章的结果可概括为两句话：点空间的欧拉示性数等于 1，且欧拉示性数在点变换下保持不变。

空间的欧拉示性数是一个将整个空间映射为某个数值的函数。在经典拓扑学中，它有多种定义方式。对我们而言，这个函数在拓扑等价的曲面上保持不变这一点很重要。例如，这意味着无论我们如何弯曲或拉伸二维（n 维）曲面，其上的欧拉示性数都不会改变。因此，这一特征可用于辨别曲面之间在拓扑上的相似或差异。欧拉示性数的一个重要性质是，它在分子空间的点变换下保持不变。欧拉示性数的这种不变性是本节的主要结果。这个

结果表明，分子空间理论中的点变换发挥着与经典拓扑学中相应变换相同的作用。我们需要先定义空间上的欧拉示性数，因为我们的定义与标准定义不同。尽管如此，我们仍沿用这一名称，因为我们的定义是对传统定义的推广。图 [22] 上欧拉函数 f 的标准定义是已知的。

$$f = n_1 - n_2 + n_3 \quad (1)$$

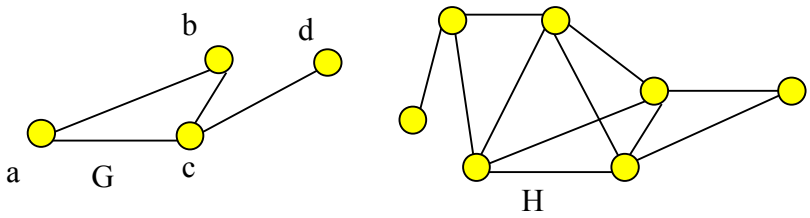


图118 空间 G 的欧拉示性数等于 1，空间 H 的欧拉示性数等于 1。根据图的欧拉公式，空间 H 的欧拉示性数等于 2。

其中，n_1, n_2, 和 n_3分别是图中的顶点数、边数和三角形数。
我们的定义与所给出的定义不同，它类似于为单纯复形 [1,54] 表述的欧拉-庞加莱特征定义。不过，这两个定义之间的区别与单纯复形和空间之间的区别相同。我们用一个例子来说明。

图 118 展示了图形 G，它既可以是一个空间，也可以表示一个单纯复形。作为空间（或图），G 由一个三角形（abc）和一条不属于该三角形的边（cd）组成。将同一图形视为单纯复形时，我们有几种可能的情况。

• G 是由二维单形 (abc) 和一维单形 (cd) 确定的二维单纯复形。• G 是由一维单形 (ab)、(ac)、(bc) 和 (cd) 确定的一维单纯复形。

由于空间 G 有一个一维点，其余点均为零维。这个例子表明，空间不能唯一确定单纯复形。现在我们转入定义。

空间的函数向量定义。

设 G 和 n_p 是有限空间，且其由 r 个顶点构成的单形数为 K(p)。那么，集合 $(n_1,n_2,....n_s)$ 称为空间的函数向量，

$$f(G)=(n_1,n_2,....n_s). \quad (2)$$

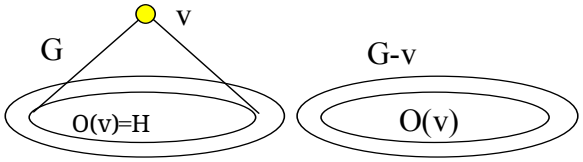
在文献中， [20,21] 在图的应用中，这个向量通常记作 f(G)。在图 118 中，空间 G 有 4 个顶点、4 条边和一个三角形。因此，f(G)=(4,4,1)。同一图中的空间 H 由 7 个顶点、11 条边、6 个三角形和 1 个四面体定义。因此，

$$f(H)=(7,11,6,1).$$

现在给出欧拉示性数应用于分子空间时的定义。

空间欧拉示性数的定义。

设空间 G 有函数向量 $f(G) = (n_1,n_2,\ldots n_s)$。则其欧拉示性数称为函数 F(G)，由下式定义。



F(G)=F(G-v)-F(O(v))+1

图 119 展示了空间 G 和 G-v 的欧拉示性数之间的连接。

$$F(G) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} n_k \,. \quad (3)$$

我们来举例说明如何分别利用公式 (1) 和我们的公式 (3) 计算空间 H 的欧拉示性数。

根据 (1)，F(H) = 7-11+6 = 2；根据 (3)，F(H) = 7-11+6-1 = 1。

很容易看出，这些量并不相同，而且这种差异至关重要，本节的结果便说明了这一点。

定理 112

Эйлерова характеристика любого конуса v⊕G равна 1,

$$F(v\oplus G)=1.$$

证　明

设空间 G 的函数向量为 $f(G)=(n_1, n_2,\ldots n_s)$。显然，空间 v⊕G 的函数向量将为 $f(v\oplus G)=(n_1+1, n_2+n_1, \quad n_3+n_2\ldots n_s+n_{s-1}, n_s)$。那么 $F(v\oplus G)=(n_1+1)- (n_2+n_1)+(n_3+n_2)-\ldots(-1)^{s+1}(n_s+n_{s-1})+(-1)^{k+2}n_s$。展开括号后得到 1. $F(v\oplus G)=(n_1+1)-(n_2+n_1)+(n_3+n_2)-\ldots(-1)^{s+1}(n_s+n_{s-1})+(-1)^{k+2}n_s=1$。定理得证。□

点变换由点删除以及边和点的粘接组成。因此，我们需要确定删除和粘接点与边时欧拉示性数的变化。

定理113

从空间 G 中任意删去一点 v 后，空间 G-v 的欧拉示性数由下式给出，其中 $O(v)$ 是点 v 的邻域（图119）。

$$F(G)=F(G-v)-F(O(v))+1,$$

证　明

设空间 G-v 的函数向量由 $f(G-v)=(n_1,n_2,n_3,...n_s)$ 给出，空间 O(v) 的函数向量由 $f(O(v))=(m_1,m_2,m_3,...m_s)$ 给出。容易看出，空间 G 的函数向量为 $f(G)=(n_1+1,n_2+m_1,n_3+m_2,....n_s+m_{s-1},m_s)$。于是欧拉示性数 $F(G)=(n_1+1)-(n_2+m_1)+...+(-1)^{s+1}(n_s+m_{s-1})+(-1)^{s+2}(m_s)$。经过简单变换，我们得到示性数 $F(G)=(n_1-n_2+....+(-1)^{s+1}n_s)-(m_1-m_2+.....+(-1)^{s}m_{s-1}+(-1)^{s+1}m_s)+1=F(G-v)-F(O(v))+1$。定理得证。□

定理114

删除空间 G 中任意一条边 v_1v_2 后，空间 G 的欧拉示性数-v_1v_2 由下式确定

$$F(G)=F(G-v_1v_2)+F(O(v_1v_2))-1,$$

其中，$O(v_1v_2)$ 是点 v_1 和 v_2. (的两点的公共邻域。图 120)。

Д 证 明

设空间 G-v 的函数向量由表达式 $f(G-v_1v_2)=(n_1, n_2, n_3,...n_s)$ 定义，空间 $O(v_1v_2)$ 的函数向量由表达式 $f(O((v_1v_2))=(m_1,m_2,m_3,...m_s)$ 定义。容易看出，空间 G 的函数向量为 $f(G)=(n_1,n_2+1,n_3+m_1,n_4+m_2,...n_s+m_{s-2},m_{s-1},m_s)$。于是欧拉示性数 $F(G)=(n_1)-(n_2+1)+(n_3+m_1),...+(-1)^{s+1}(n_s+m_{s-2})+(-1)^{s+2}m_{s-1}+(-1)^{s+3}m_s$。经过简单变换，我们得到示性数 $F(G)=(n_1-n_2+....+(-1)^{s+1}n_s)+(m_1-m_2+.....+(-1)^{s}m_{s-1}+(-1)^{s+1}m_s)-1=F(G-v)+F(O(v_1v_2))-1$。定理得证。□

这两个定理揭示了通过粘合操作从一个空间得到另一个空间时，这两个空间的欧拉示性数之间的联系。

在删去任意一个点或一条边的情况下。这是证明关于点变换下欧拉示性数不变性的基本定理所必需的。我们还将证明本节关于点空间的欧拉示性数的两条关键定理中的另一条。

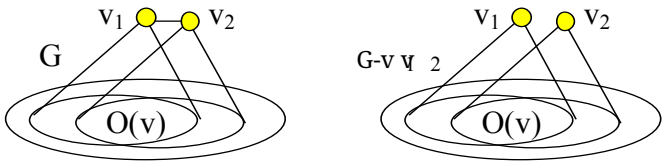
定理115

孤立点的欧拉示性数等于*1*。

点空间的欧拉示性数等于*1*。

证 明

归纳证明。显然，孤立点的欧拉示性数等于 1。设对于顶点数为 k<n、连接数为 m<p 的所有空间，定理都成立。设空间



$$F(G)=F(G-v_1v_2)+F(O(v_1v_2))-1$$

图120 展示了空间 G 和 G-v1v2 的欧拉示性数之间的连接 .

G 有 (n-1) 个顶点和 (m-1) 个连接。沿单点子空间 H 将点 v 粘到它上面，O(v)=H。将所得空间记为 G_1. Тогда，根据前一个公式，$F(G_1)=F(G_1-v)-F(O(v))+1$，其中 $G_1-v=G$，$O(v)=H$。根据归纳假设，$F(G_1-v)=F(O(v)=1$。因此，$F(G_1)=1$。将某个单点连接 v_1v_2,粘到 G 上，其中 $O(v_1v_2)$ 是点公共边界，并将所得空间记为 G_1。那么，$F(G_1)=F(G_1-v_1v_2)+F(O(v_1v_2))-1$。根据归纳假设，$F(G_1-v_1v_2)=F(O(v_1v_2))=1$。因此，$F(G_1)=1$。定理得证。□ 下面证明关于任意空间在单点变换下欧拉示性数不变的第二个关键定理。

定理116

点变换不会改变空间的欧拉示性数。 证 明 归纳证明。与前一个证明一样，$F(G_1)=F(G_1-v)-F(O(v))+1$。根据归纳假设，$F(O(v)=1$。因此，$F(G_1)=F(G_1-v)$。此外，$F(G_1)=F(G_1-v_1v_2)+F(O(v_1v_2))-1$。根据 $F(O(v_1v_2))=1$。因此，$F(G_1)=F(G_1-v_1v_2)$。定理得证。□

C 事 件。

n 个顶点上的任意点束 K(n) 的欧拉示性数等于 1，F(K(n)) = 1。

这是显而易见的，因为任意点束都收缩到由一个点组成的平凡空间 K(1)，其欧拉示性数等于 1。

图121中画出了可缩空间 K(1)、K (4)、K(5) 和 v x G。这些空间的欧拉示性数均为 1，这一点很容易通过直接计算验证。现在我们来考察两个分子空间的直和等于多少。

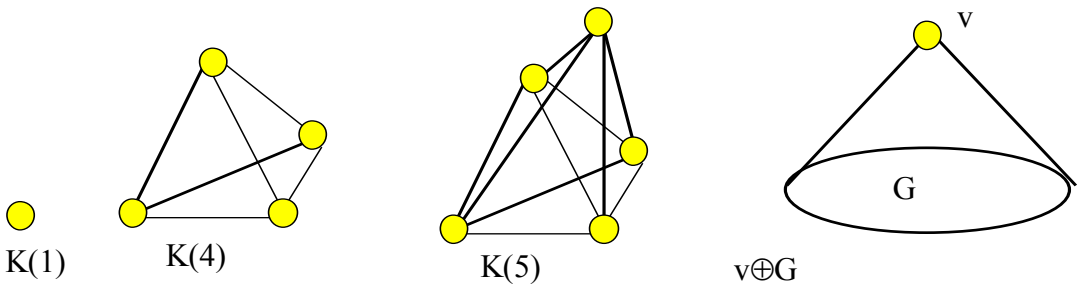


图121 所有空间的欧拉示性数均为 1，因为它们都是点。

定理117

两个分子空间 *G* 和 *H* 的直和的欧拉示性数由下式确定 $F(G\oplus H)=F(G)+F(H)-F(G)xF(H)$.

证 明

设空间 G 的函数向量由表达式 $f(G)=(n_1, n_2, n_3,...n_s)$ 定义，空间 H 的函数向量由表达式 $f(H)=(m_1, m_2, m_3,...m_s)$ 定义。在空间 G⊕H 中，G 中的每个点都与 H 中的每个点相连。因此，G 中每个超边 K(p) 的所有点都与 H 中每个超边 K(r) 的所有点相连。由此得到一个单形 K(p+r)，这样的单形数量为 $n^p m_r$。利用这一简单方法，我们得到空间 G⊕H 的函数向量：$f(G\oplus H)=((n_1+m_1), (n_2+n_1m_1+m^{2)}), (n_3+n_1m_2+n_2m_1+m_3), (n_4+n_1m_3+n_2m_2+n_3m_1+m_4),...(n_s+n_1m_{s-1},+...+n_{s-1}m_{s-1}+m_s),...(n_sm_s))$。由此可得，$F(G\oplus H)=((n_1+m_1)-(n_2+n_1m_1+m^{2)})+(n_3+n_1m_2+n_2m_1+m_3)-(n_4+n_1m_3+n_2m_2+n_3m_1+m_4)+...+(-1)^{s+1}(n_s+n_1m_{s-1},+...+n_{s-1}m_{s-1}+m_s)+...+(-1)^{2s+1}(n_sm_s))=F(G)+F(H)-F(G)xF(H)$。定理得证。

□ 通过具体例子很容易验证该公式的正确性。

欧拉示性数的一般性质与局部性质

欧拉示性数是一种重要函数，与其他函数一起可用于揭示分子空间的拓扑自然。它首先刻画同伦类型，并且在点收缩下保持不变。

Пе列举这一函数的一些性质，并考察一些例子 .

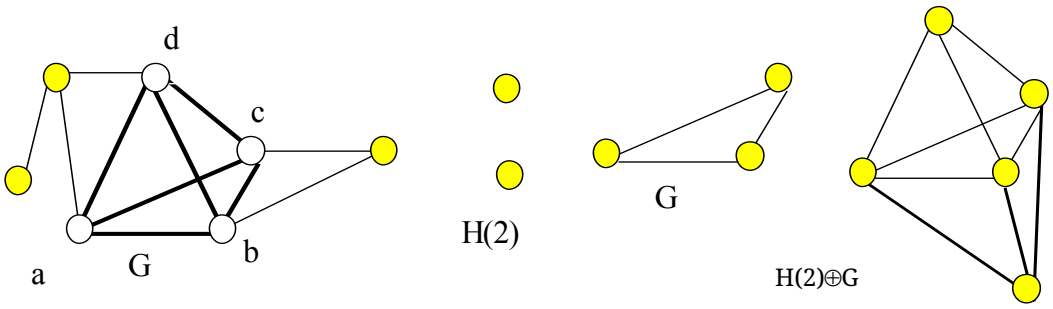


图122 子空间 H=K(4)（左侧）包含点 a、b、c 和 d，以及 m_1=4、m_2=6、m_3=4、m_4=1。显然，F(H)=1。此外，不完全位于 H 中的顶点、边和三角形的数量由以下数值确定：n_1=3、n_2=5、n_3=2。因此，F(G)=3-5+2+1=1。右侧 F(H(2)⊕G)=2-1=1。

定理118

0-维球面 S^0 与空间 *G* 的直和的欧拉示性数由下式给出（图 *122*）

$$(F(S^0 \oplus G) = 2 - F(G).$$

证明

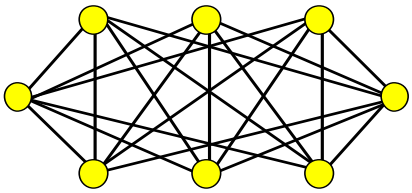


图123 三部空间 K(2,3,3)。根据公式 (3)，其欧拉示性数由表达式 F(K(2,3,3)) =1-(1-2)(1- 3)(1-3)=-3 确定。

显然，$F(S^0)$=2。由前面的结论可得，$F(S^0 \oplus G)=F(S^0)+F(G)- F(S^0)xF(G)= 2+ F(G)-2F(G)=2-F(G)$。定理得证。□

定理119

设 G 和 H 分别为空间及其子空间，具有函数向量 $f(G) = (m_1+n_1, m_2+n_2, m_3+n_3, \ldots\ldots, m_s+n_s)$，

$f(H) = (m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_s)$ 分别。因此

$$F(G) = \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k+1} n_k + F(H) \ ,$$

其中，n_p 是 G 中 $K(p)$ 的单形数量，其中至少有一个顶点不属于 H；m_p 是 H 中 $K(p)$ 的单形数量。

证 明

设 G 和 H 分别为空间及其子空间（图 119），它们的函数向量分别为 $f(G) = (m_1+n_1, m_2+n_2, m_3+n_3, \ldots\ldots, m_s+n_s)$、$f(H) = (m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_s)$。那么，$m_r$ 是完全位于 H 中的单形 K(r) 的数量，因此，n_r 是完全不位于 H 中的单形 K(r) 的数量。定理得证。□

定理120

设 $H(n)$-是具有 n 个顶点的全不连通空间，G-是任意空间。则直和 $H\oplus G$ 的欧拉示性数由下式确定： $F(H\oplus G) = n-(n-1)F(G)$。

证 明

证明由前一个定理直接得出。□ 在图 122 中，F(G)=1。因此，$F(H(2)\oplus G) = 2-(2-1)1 = 1$。直接计算可得到相同的结果。

定理121

设 $K(n_1,n_2,\ldots n_p)$ 是一个 r-部空间。其欧拉示性数由下式确定：

$$F(n_1,n_2,\ldots,n_p) = 1-\prod_{k=1}^{k=p}(1-n_k) \ .$$

证 明

根据定义 $K(n_1,n_2,\ldots n_p)=H(n_1)\oplus H(n_2)\oplus H(n_p)$。其余显而易见。□

根据这个公式，如果所有 n 都大于 1，那么 p部空间就不是点空间，因为它的欧拉示性数不等于 1。

图123展示了三部空间 K(2,3,3)。根据公式，其欧拉示性数由下式确定：

F(K(2,3,3))=1-(1-2)(1-3)(1-3)=-3。直接计算也得出相同的数值。

现在，我们来考察空间 G 的欧拉函数如何通过其顶点的某些邻域函数表示。在某种意义上，这使我们能够通过……来描述整个空间上的全局函数。

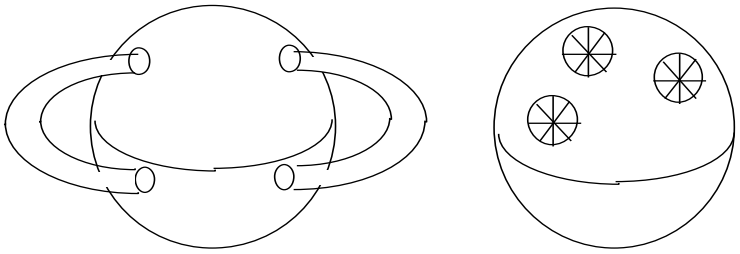


图122 左侧是带有两个把手的球面 A2，F(A2)=–2；右侧是带有三条莫比乌斯带的球面 B3，F(B3)=–1。

其子空间的一些函数，也就是说，通过空间的局部性质。我们再来回顾一下将要用到的概念。

1. 顶点集合上的空间 G (v_1, v_2,... v_t) 2. 空间 G 的 f-向量 f(G) = (n_1, n_2,.... n_s)，其中 n_i 是空间 G 在 i 个顶点上的单形 K(i) 的数量。 3. 顶点 v_i 的邻域 $O(v_i)$ 的 f- 向量 $f(O(v_i)) = (m^i_1, m^i_2,... m^i_s)$ 4. 欧拉函数 F(G) 和 $F(O(v_i))$ 5. 空间 G 和邻域 $O(v_i)$ 的对数函数，记作 L，由表达式定义

$$L(O(v_i)) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m^i_k}{k+1}.$$

6. 我们将点束 K(r) 的 p-度 $d^p(K(r))$ 定义为包含 K(r) 作为子空间的点束 K(p) 的数量。例如，在图122左侧，点束 K(2) 由点 (db) 构成，属于两个三角形 (adb) 和 (cbd)，以及一个四面体 (abcd)。因此，$d^3(bd)=2$，$d^4(bd)=1$。

我们将要证明的基本公式表述为

нами первой. $F(G) = t - \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m^i_k}{k+1} = t - \sum_{i=1}^{t} L(O(v_i))$

该公式能够通过研究该空间中各点邻域的结构，来研究整个分子空间的结构和性质。该公式在分析连续空间的齐次覆盖时将具有重要作用。

曲面，例如球面、环面、射影平面。读者可以自行验证该公式在.....

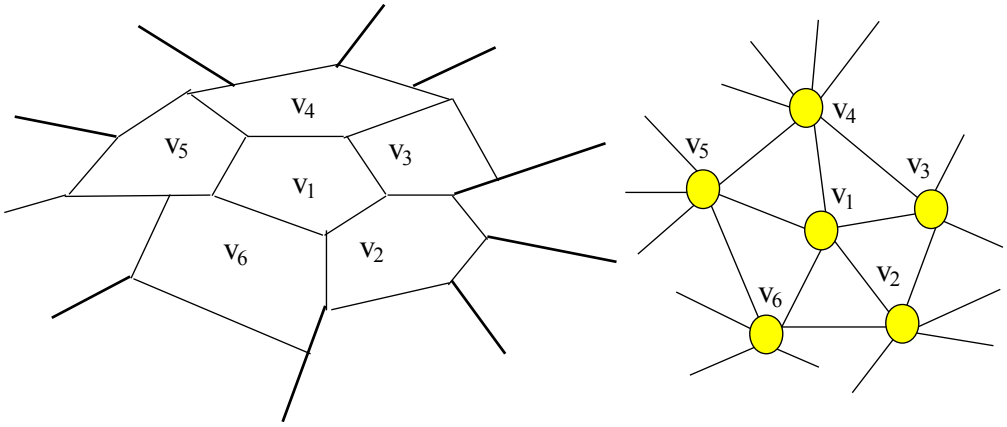


图125 二维曲面的划分及其分子空间。

图中所示的空间。最近，作者在一篇图论论文中发现了一个相似公式的独立证明。

我们将证明几个命题，它们将帮助我们证明这个公式。

命题 1

$$\sum_{K(r)\subseteq G} d^{p}(K(r)) = C^{r}{}_{p} n_{p},$$

其中 $m^{i}_{0} = 1$.□

证 明

这个公式本质上是一个恒等式。设空间 G 的函数向量为 $f(G)=(n_1, n_2,\ldots n_d)$，空间 $O(v_i)$ 的函数向量为 $f(O(v_i)) = (m^{i}_{1}, m^{i}_{2},\ldots m^{i}_{d})$。将空间 G 中的所有超边重新编号。引入数列 a^{r}_{s}，其定义条件为：若超边 $K_s(r)$ 属于超边 $K_q(p)$，则 $a^{q}_{s}(p,r)=1$；否则 $a^{q}_{s}(p,r)=0$。显然，每个超边 K(p) 中都包含 C^{r}_{p} 个超边 K(r)。于是

$$\sum_{K(r)\subseteq G} d^{p}(K(r)) = \sum_{s}\sum_{q} a^{q}_{s}(p,r) = \sum_{q}\sum_{s} a^{q}_{s}(p,r) = \sum_{q} C^{r}{}_{p} = C^{r}{}_{p} n_{p}$$

命题得证。□

命题 2

$$\sum_{i=1}^{t} m_p^i = (p+1)n_{p+1},$$

$$m_o^1 \equiv 1.$$

其中 $m_0^i = 1.$

证 明 乐彩

根据记号，m^i_p 是点 v_i 的邻域 $O(v_i)$ 中由 p 个点构成的单形 K(p) 的数量。若将点 v_i 本身添入每个这样的单形，则 m^i_p 就是球 $U(v_i)$ 中包含点 v_i 、由 p+1 个点构成的单形 K(p+l) 的数量。对空间 G 的所有点求和时，每个这样的单形都会在总和中计入 (p+l) 次，因为它包含 (p+l) 个点。因此，m^1_p+ m^2_p+m^i_p+...+m^t_p=(p+1)n_{p+1}。断言得证。□

定理 122

设分子空间 G 含有 t 个点 v_p ，且 m^p_s 是点 v_p 的邻域内单形 K(s) 的数量。那么，G 的欧拉示性数由下式确定：

$$F(G) = t - \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m_k^i}{k+1} = t - \sum_{i=1}^{t} L(O(v_i)),$$

где $\sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m_k^i}{k+1} = L(O(v_i)).$

证 明 乐彩

从前一个公式中解出 n_{p+1} ，并代入欧拉示性数的表达式中。

$$F(G) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} n_k = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{t} m_{k-1}^i = \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m_{k-1}^i}{k} =$$

$$t - \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m_k^i}{k+1} = t - \sum_{i=1}^{t} L(O(v_i))$$

定理得证。□

这个公式在分析连续曲面的齐次覆盖时很有用，例如球面、环面和射影平面。

将欧拉示性数应用于某些闭二维空间划分与镶嵌性质的研究

在本节中，我们将研究所得公式在传统的二维空间集合——球面、环面、射影平面和克莱因瓶——以及其他一些空间中的应用。数学中存在一个完整的方向，研究可能如何被

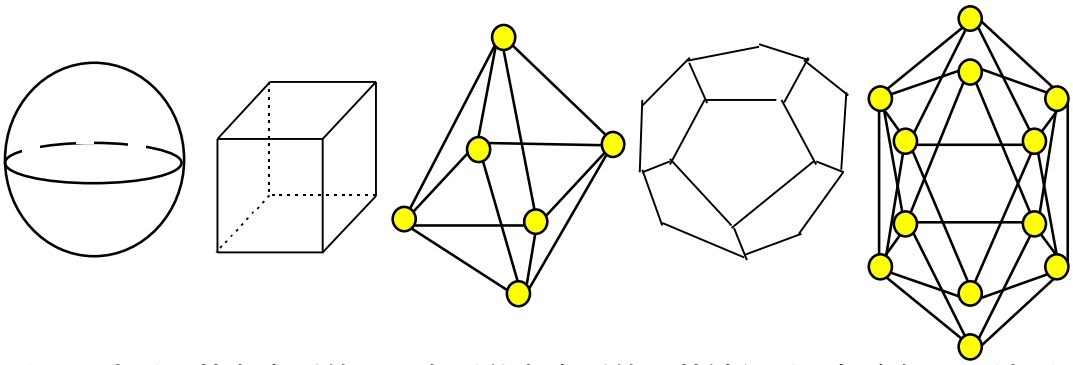


图126 球面及其齐次覆盖。只有两种齐次覆盖，其神经是正规空间。四边形覆盖由 6 个元素组成，五边形覆盖有 12 个元素。

这类曲面由顶点数各不相同的多边形镶嵌而成。这项研究通常被认为始于古代，当时人们描述了所谓的柏拉图立体。我们不深入探讨其历史，而是尝试将所得结果用于分析二维闭曲面的覆盖与划分。

我们将证明几个定理，它们更确切地说是前一个定理的推论。如果空间是齐次的，那么空间中所有点的邻域都彼此同构。

q-齐次空间的定义。

如果一个分子空间中各点的不同（非同构）邻域（或球）的数量等于 q，则称其为 q-齐次空间。考虑欧拉示性数的形式。

断言3

如果空间 G 是 1-齐次的，那么它的欧拉示性数具有如下形式

$$F(G) = t(1 - \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m_k}{k+1}) = t(1 - L(O(v)).$$

如果空间 G 是 q-齐次的，那么它的欧拉示性数具有如下形式

$$F(G) = t - \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \frac{m_k^i}{k+1} = t - t_1 L(O(v_1) - t_2 L(O(v_2) - t_3 L(O(v_3)....-t_q L(O(v_q).$$

其中，$t_q(O(v_1)) = \sum_{k=1}^{s} \frac{(-1)^{k+1} m_k}{k+1}$ 与 v_q 同构的邻域数。

证 明棋牌游戏官网

证明在于合并上面已证明的公式中的同类项。□

需要回顾经典拓扑学中的一个结果：任意二维光滑紧致闭曲面都同胚于带有 2k 个洞并用 k 个把手封住的球面，A^2_k，其中 k 为非负整数（曲面的亏格）；或者同胚于带有 k 个洞并用 k 条莫比乌斯带封住的球面，B^2_k，其中 k 为正数（图 124 ）。同时，$F(A^2_k)=2-2k$，$k\geq 0$，$F(B^2_k)=2-k$，$k\geq 1$。现在引入二维闭曲面在多边形上的铺砌和划分，并考察欧拉示性数如何用于这些目的。我们将铺砌或划分的神经作为分子空间。需要提醒的是，在这种情况下，对每个】【。

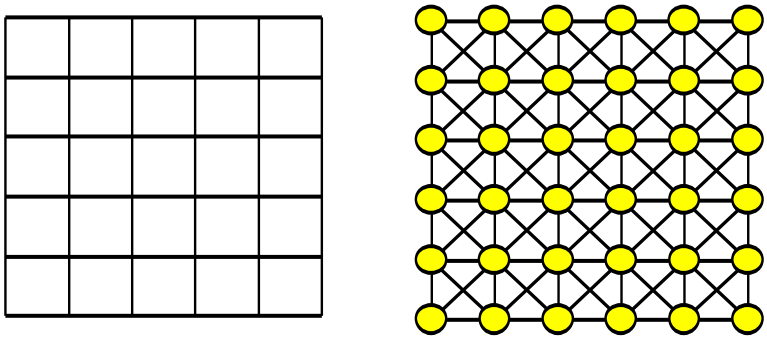


图127 用正方形覆盖平面，其神经是由两个一维空间的直积形成的分子空间。球面无法以这种方式覆盖，而环面和克莱因瓶则存在这样的覆盖。

我们将一个点与多边形对应到分子空间中的一个点；如果两个元素至少有一个公共点，那么与它们对应的点就是连通的。所谓相同的多边形（同一类型的多边形），我们指的是这样一类多边形：它们在分子空间中的邻域是同构的。

二维球面 S^2

二维球面 S^2 的欧拉示性数等于 2。首先，考虑将二维球面划分为多边形，使得多边形之间的交集仅发生在它们的边上（图125）。更一般地，n 边形将被理解为划分的一个元素，该元素具有 n 个相邻元素，并且与每个相邻元素的交集为长度非零的线段。考虑由相同多边形构成的球面覆盖。在这种情况下，对于任意点 $f(O(v_i)) = (m, m, 0, 0,...)$。那么，根据前面的结论，

$$F(S^2) = t(1 - L(O(v))) = t(1 - (\frac{m}{2} - \frac{m}{3})) = t(1 - \frac{m}{6}) = 2$$

由于 t 和 m 必须是正整数，且 $m \geq 4$，我们只有两个解：m=4，t=6 和 m=5，t=12 （图126）。从这个公式还可以得出，不可能用边数大于 5 的多边形覆盖球面。这一结果为牛顿时代便已存在的一道古老难题提供了另一种解法：能将多少个相同的球放在另一个球上，使相邻的球彼此接触？通过几何计算已证明，12 个球可以做到。人们长期以来试图弄清楚 13 个球是否也可以做到；19 世纪末，人们证明了这是不可能的。这类情况下的几何计算非常复杂且费时。我们得到的结果表明，除了 6 个和 12 个球以外，无法用任何数量的球覆盖球面。

现在来考虑用两种类型的多边形覆盖球面。此时，自然地，每个点的邻域必须至少包含4个点，且 $t=t_1+t_2$。

$$F(S^2) = t - t_1 L(O(v_1)) - t_2 L(O(v_2)) = 1 + 1 = \frac{1}{t_1(1 - L(O(v_1)))} + \frac{1}{t_2(1 - L(O(v_2)))} = \frac{1}{t_1(1 - \frac{m}{6})} + \frac{1}{t_2(1 - \frac{m}{6})} = 2,$$

其中，m_1 和 m_2 分别是与两个给定点相切的多边形数量（或两个多边形各自的边数）。不难验证，所有柏拉图立体都满足这一条件。

现在来考虑用四边形覆盖球面，这些四边形构成的分子空间由两个一维线段的直积产生（图127）。

在这个空间中，任意点邻域的 f-向量由表达式 f(O(v))=(8, 12, 4) 确定，因此 L(O(v))=1。将这个值代入欧拉示性数的表达式，欧拉示性数便为 0。这意味着无法用这种方式对球面进行均匀覆盖。

二维环面 T^2

众所周知，二维环面的欧拉示性数等于零。与球面的情形一样，我们先考虑将环面划分为同类型多边形，使多边形之间仅沿边相交（图125）。此时，对于任意点，$f(O(v_i)) = (m, m, 0, 0,...)$。那么，根据前面的结论，

$$F(T^2) = t(1 - L(O(v\ ))) = t(1 - (\frac{m}{2} - \frac{m}{3})) = t(1 - \frac{m}{6}) = 0$$

由于 t 和 m 必须是正整数，且 $m \geq 4$，所以我们只有一个解：$m=6$。从这个公式还可以得出，环面只能用六边形铺砌，不可能用

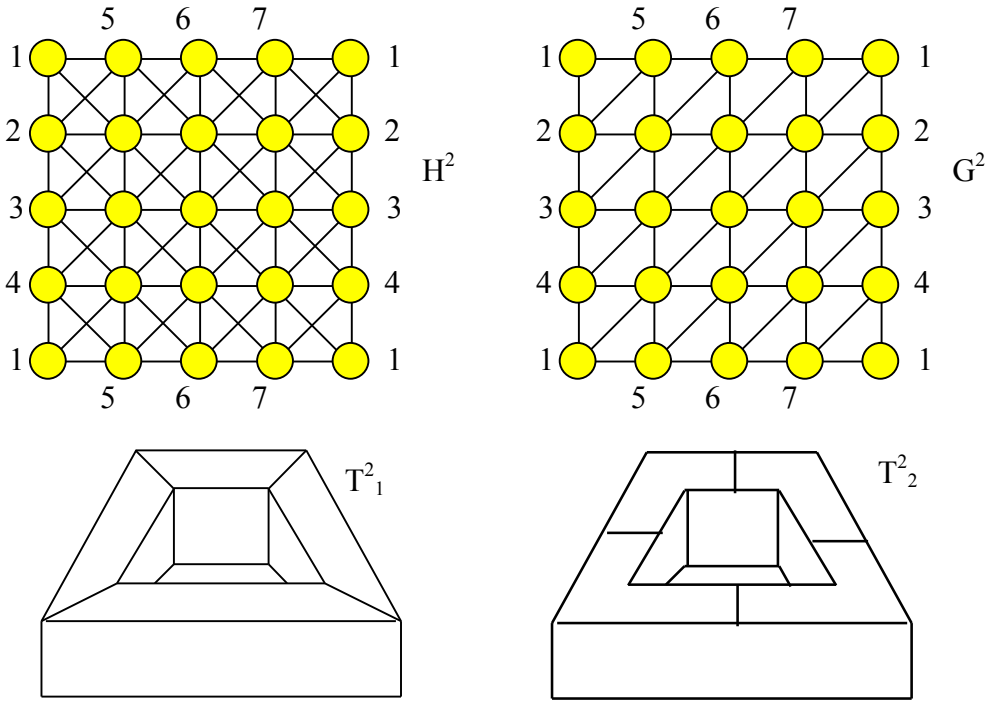


图128 右侧展示了将环面划分为 16 个元素的方式，其中每个划分元素都与环绕它的六个元素中的每一个共用一条边。左侧展示了与图127所示类型相同的环面划分。这两个分子空间均由 16 个元素组成。

边数不等于 6 的多边形铺砌。同时，划分中的元素数量无法通过欧拉示性数确定。然而，直接验证表明，16 个六边形是划分所需元素的最小数量（图110）。

现在考虑用两种不同类型的多边形覆盖环面。同时，显然，每个点的边界必须至少包含4个点。显然，$t=t_1+t_2$。

$F(T^2)\ t\ t1L(O(v1)\ t2L(O(v2)\ =t1(1-L(O(v1))\ +t2\ (1-L(O(v2))\ =t1(1-m)\ +t2\ (1-m)\ =0,=\ -\ -\ \frac{1}{6}\ \frac{2}{6}$

其中，m_1 和m_2 分别表示与给定的两个多边形相切的多边形数量（或两个多边形各自的边数）。由该公式可知，当用两个多边形覆盖环面时，其中一个多边形的边数必须小于6，另一个则必须大于6。作为示例，考虑m_1=4、m_2=7。由此得到t_2=2t_1。

现在，考虑由四边形构成的环面的覆盖。该覆盖形成的分子空间由两个一维线段直积而得（图127）。在这个空间中，任意点的邻域 f-向量由表达式 f(O(v))=(8, 12, 4) 确定，因此 L(O(v))=1。将此值代入欧拉示性数的表达式，可使欧拉示性数变为 0。图110展示了这种划分及其分子空间。

克莱因瓶 K^2

与环面大致相同的结果也适用于克莱因瓶，其欧拉示性数为零。连续的克莱因瓶无法在三维空间中实现。与环面的情形一样，克莱因瓶只能用六边形铺砌，不可能用边数不等于 6 的多边形覆盖。16 个六边形可能是划分所需的最少元素数（图 129）。用两个多边形覆盖克莱因瓶时，其中一个的边数必须小于 6，另一个则必须大于 6。克莱因瓶也可以像环面一样用四边形覆盖，这些四边形构成一个分子空间，该空间由两个一维线段的直积生成（图127）。

射影平面 R^2

射影平面的欧拉示性数等于 1，$F(P^2)$=1。我们来检验，是否存在由某个 n 边形构成的射影平面的齐次覆盖。

$$F(P^2) = t(1-\frac{m}{6}) = 1$$

对该公式进行分析可得 m=4、t=3 或 m=5、t=6。这两种情况下，点的数量都不足以构造分子射影平面，这一点通过简单检验即可确认。因此，不存在齐次分子射影平面，正如不存在用唯一一种铺砖对连续射影平面进行齐次铺砌一样。作为反例，我们画出了一个由十一个点组成的最小正规分子射影平面，以及一种对平面的铺砖覆盖，其分子空间是神经。

考虑 用不同的 n 边形铺砌射影平面 .

$$F(P^2) = t_1\ (1-\frac{m_1}{6}) + t_2\ (1-\frac{m_2}{6})+...+t_n\ (1-\frac{m_n}{6}) = 1.$$

对这一等式进行分析，可以得到与球面情形大致相同的推论。我们来尝试用四边形和五边形铺砌 P^2 。取 m_1=4、m_2=5，其余均为 m_k=0。那么由关系式可得：$2t_1+t_2=6$。由此可知，铺砌块的总数不超过 6。直接验证可知，不存在

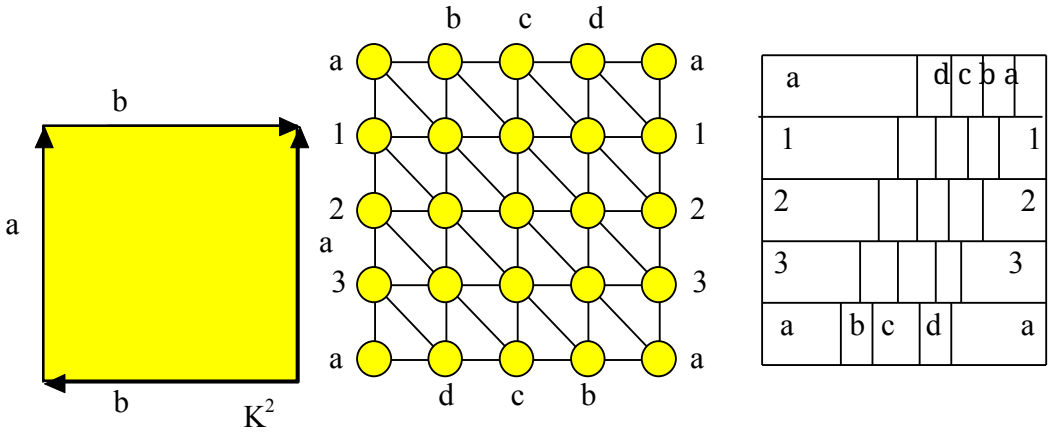


图 129 左侧绘出了连续的克莱因瓶，右侧展示了它的一种划分，其中每个元素都有六个邻居。中间绘出了该划分的神经。划分的元素也可以画成六边形。

这样的射影平面铺砌。显然，射影平面也不可能具有由两个一维线段的直积构成的分解。

我们简要考察了数学文献中最常见的四种闭二维曲面的铺砌与分解。同样的分析也可以应用于其他闭曲面。最后，我们将所得结果表述为命题。

命题 4

- 球面只有两种均匀铺砌方式：由八个四边形和十二个五边形铺成。
- 球面不可能仅由边数大于 *5* 的多边形铺成。球面的任何凸多边形铺砌中 都必然含有四边形和/或五边形。

命题 5

• 环面的齐次铺砌仅由六边形组成。 • 任何由多边形构成的环面非齐次铺砌，都必须同时包含边数小于 *6* 和大于 *6* 的多边形。

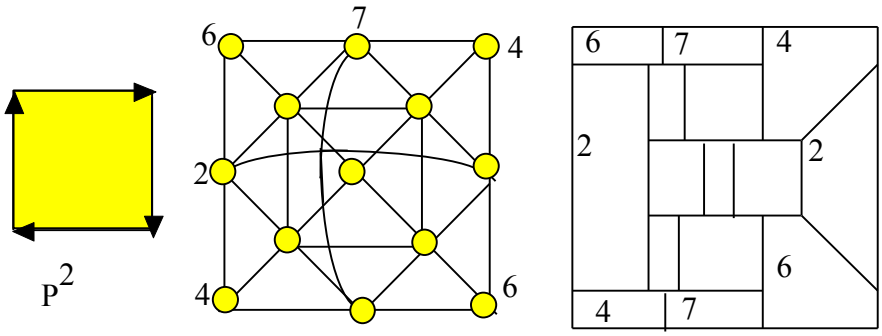


图130 将射影平面划分为 11 个元素及其神经；该神经是一个闭二维空间。

断言 6

• 克莱因瓶的齐次铺砌仅由六边形组成。 • 任何由多边形构成的克莱因瓶非齐次铺砌，都必须同时包含边数小于 *6* 和大于 *6* 的多边形。

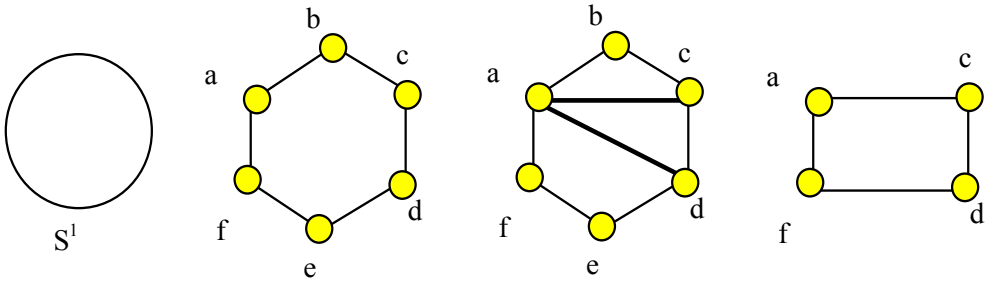


图 131 将圆化简为由4个点组成的最小圆。

断言 7

• 不存在由相同多边形构成的射影平面齐次铺砌。 • 不存在仅由 *4*-边形和／或 *5*-边形构成的射影平面铺砌。射影平面不能仅由边数大于 *5* 的多边形铺砌。在任何

由凸多边形铺砌射影平面时，一侧必定有边数大于 *6* 的多边形，另一侧则有四边形和／或五边形。

最小分子空间

在计算机上工作时，经常会遇到如何最小化计算机内存中存储的信息这一问题，尤其是在处理大型数据集时。空间对象的图像广泛应用于游戏、科学、工业及其他程序中，对这些图像进行最小化，可以释放部分机器内存，并减少处理它们所需的运算次数。赋予了数学结构的空间，是连续多维对象的数字图像，因此，对空间进行最小化是分子空间理论中一个组成性且重要的部分。下面将在分子空间理论的框架内，考察这一方向的若干方面。

空间可以由不同数量的点组成。例如，一维球面—圆周包含四个或更多的点（图 131）。此外，即使点的数量相同，连接的数量也可能不同。图 131 展示了连续的一维球面及其分子像，这些分子像是正规且正则的分子圆。显然，在计算机内存中存储圆的信息时，最好使用由 4 个顶点和四条边组成的分子像，因为它占用的计算机内存最少。如果圆由六个点表示，那么应用同一图 131 中所示的点变换，可以将边和点的数量减少到 4 个。然而，在应用变换之前，我们必须引入某种分子空间最小性判据。基于这一要求，我们将重述几个定义，并引入最小性判据。

定义：分子空间的体量

分子空间 G 的点数称为分子空间 G 的体积，记作 |G|。

分子空间的权的定义。

空间 G 的权是指该空间的边集 P(G) 的边数。

最小分子空间的定义。

空间 G 被称为最小空间，如果在所有与其同伦的空间中，它具有最小体积 V(G)，并且在体积相等时具有最小权重 P(G)。

提醒一下，能够通过点变换彼此收缩的空间称为同伦空间。于是便产生了这样一个问题：是否存在两个同伦空间，它们的体积和权重不同，其中一个在所有同伦空间中权重最小，而另一个体积最小。分析

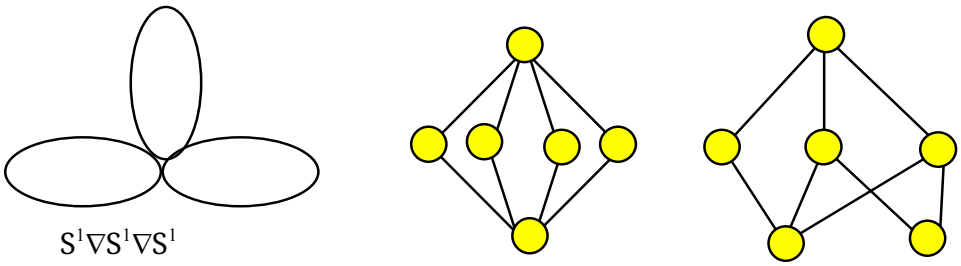


图 132 3个圆周的花束的极小化。

点数较少的空间表明，事实并非如此：体积最小的空间并不一定也是权重最小的空间。不过，一般情况下，这个问题尚未解决。我们将其表述为一个猜想。

猜想 1。

在任意同伦类中，都存在一个权重和体积均最小的空间。

在许多情况下，出于具体目的，通常只需找到一个点数相对较少的空间；从这个空间开始，寻找最小空间会变得困难，或者需要对各种方案进行简单的穷举。选择这种空间的判据可以各不相同。我们将以极小空间的定义形式表述这样一个判据。

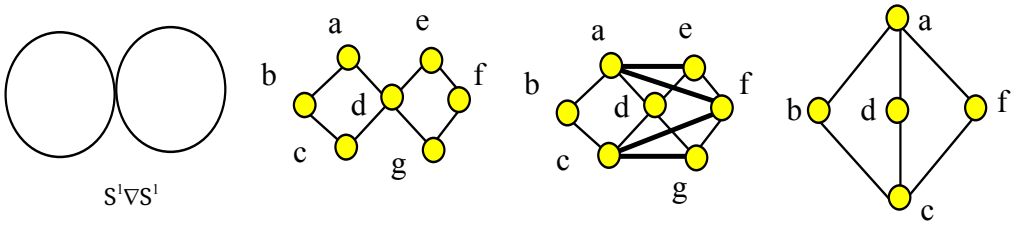


图133 2个圆周的花束的极小化。

极小空间不一定是所有同伦空间中最小的。然而，从实用角度来看，极小空间往往是最佳模型，因为寻找最小空间可能需要付出很大努力。

Опр极小空 рост间的定义。

如果满足以下条件，则称空间 G 为极小空间：

1. 空间中任意一点的邻域都不是可缩的。2. 空间中任意两个相邻点的公共邻域都不是可缩的。3. 将所有可能的连接逐一收缩后，空间中任意一点的邻域仍然不是可缩的。

这个定义保证了空间的局部极小性，也就是说，对该空间进行任何可缩变换，都只会增加其体积或权重。

注释。

如果空间是最小的，那么它也就是极小的。

我们来考察极小空间和最小空间的一些性质。

定理 123

任意的 r-部空间 $K(n_1, n_2,... n_p)$ 都不是点空间，若每一部中的顶点数都不少于二，$n_i > 1$，$i = 1, 2,... p.$ 证明

$$F(K(n1, n2, , np)) \ldots = 1 - \prod 1 - (nk). k\ 1k\ p$$

根据前述内容，因此，空间的欧拉示性数不等于 1，且空间不是单点空间。定理得证。□

定理 124

任何一个 r-部空间 $K(n_1, n_2,... n_p)$ 都是极小的，只要任一部中的顶点数不少于两个，$n_i > 1$，$i = 1, 2,... r$。

证　明

我们必须证明，按照定理的条件，极小性判据在任意 p 部空间中都成立。我们使用归纳法。对于较小的 p，定理可直接验证。假设定理对 $K(n_1,n_2,... n_s)=H(n_1)\oplus H(n_2)\oplus H(n_s)$, $s<p$ 成立。设 $s=p$。考察任意点 v 的邻域 O(v)。显然，这个邻域是一个 (p−1) 部空间，并且根据假设，它是非空且极小的。同样，任意两点的公共邻域是一个 (p−2) 部空间，并且根据假设，它是非空且极小的。为检验判据 3，考察空间中任意两个不相邻点。显然，它们属于同一部，例如 $H(n_1)$，而它们的公共邻域是一个 (p−1) 部空间，并且根据假设，它是非空且极小的。因此，

在这个空间中不可能建立任何连接。定理得证。□

我们将在所有点集有限的分子空间构成的集合上引入偏序关系。

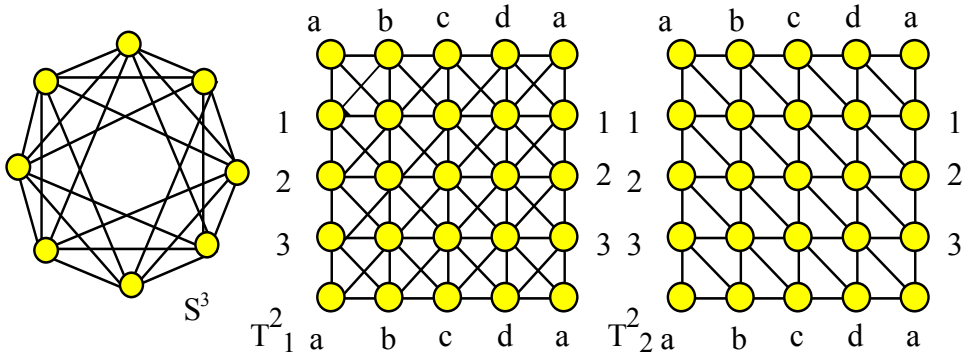


图 134 n维球面和环面的极小化。

记号。

设 G(a,b) 和 H(c,d) 是两个分子空间，其顶点数分别为 a 和 c，边数分别为 b 和 d。若 a<c，或 a=c 且 b<d，则记 G<H。

定理125

若对所有满足 $G<H$ 的 G 都有 $F(H)\neq F(G)$。，则空间 H 是最小的。

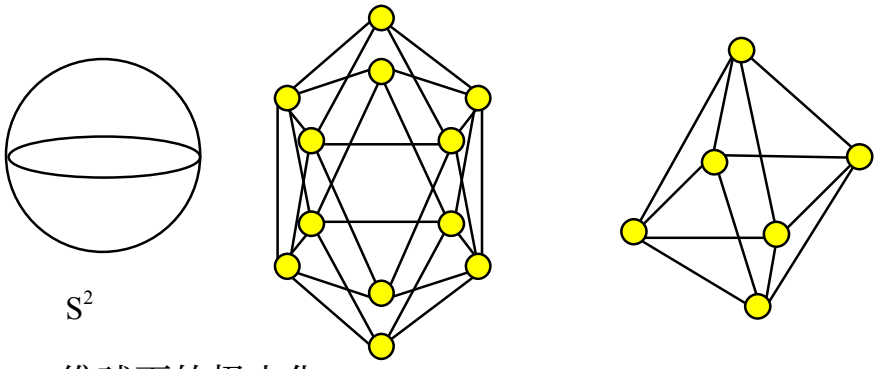


图 135 二维球面的极小化。

证 明

假设 H 具有一个单点顶点 v。那么 G=H-v<H，但 F(G)=F(H)。由于根据定理的条件，这是不可能的，因此 H 不包含单点顶点。类似地可以证明，H 不包含单点边。假设两个不相邻点具有公共点边界 $O(v_1v_2)$。引入边 (v_1v_2)。假设某个点 v 的邻域在引入这条边后变成了单点空间。那么可以舍弃该点，所得空间与原空间同伦。

原来的。这意味着 $(G+(v_1v_2)-v)<G$, $F(G+(v_1v_2)-v)=F(G)$。这与定理的条件矛盾。因此，引入点边后，所有点仍然是非点。定理得证。□

考　　察一些最小和最小的空间　　B.

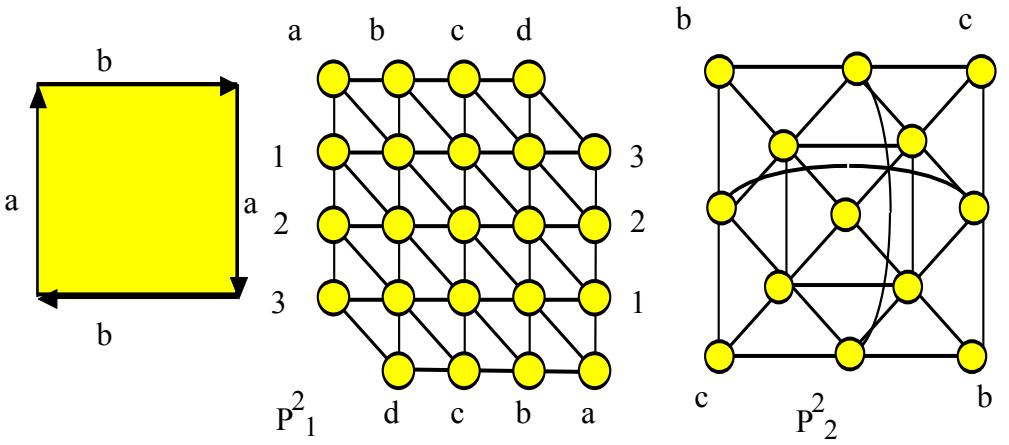


图 136 射影平面的极小化。

一维球面 S_1 - 圆周（图 131)

圆周由六个点 a、b、c、d、e 和 f 构成。粘合点边（ac）和（ad），然后去掉点顶点 b 和 c。得到由四个点 a、d、e 和 f 构成的圆周，它是最小的。它是

$$\text{ростр空间 } K \quad (2,2) \text{。} F(S^1) = 0\text{。}$$

两个圆的花束 $S^1 \nabla S_1$（图 133）

花束 $S^1 \nabla S^1$ 由七个点 a、b、c、d、e、f 和 g 组成。粘上点边 (ae)、(af)、(cg) 和 (cf)，然后去掉顶点 e 和 g，得到最小空间 $S^1 \nabla S^1$, ，它由点 a、b、c、d、f 组成，并且是二部空间 K(2,3)，$F(S^1 \nabla S^1) = -1$。

由三个圆组成的花束 $S^1 \nabla S^1 \nabla S_1$ (图132)

该空间是同一个同伦类中存在两个极小的，甚至是最小的非同构空间的直观例子。其中一个是 K(2,4)，另一个是去掉一条边的 K(3,3)，即 K(3,3) - e，其中 e 是 K(3,3) 中的一条边。二者都是极小的，因为根本无法在其中任何一个上粘接任何点边。显然，从其中一个转变为另一个，只能通过增加顶点数、粘接一个点顶点，然后再将其转化为另一个空间来实现。这个例子表明，在给定的同伦类中，可能存在多个非同构的极小空间，甚至是最小空间。F

$$(S^1 \nabla S^1 \nabla S^1) = -3.$$

二维球面 S_2（图 135）

由12个顶点组成的球面，可以通过粘接点边并随后舍弃点

10. 分子空间的欧拉示性数 190顶点，从而变换为由六个点组成的最小球面。这一球面是三部空间 K(2,2,2)。读者可以轻松地自行进行点变换。$F(S^2) = 2$.

三维球面 S3，球面 SN (图 134)

图中所示的三维球面由八个点组成，是一个四部分空间 K(2,2,2,2)。根据定理，它是极小的。直接验证表明，它也是最小的。任何 n 维球面 S^n 都可以表示为形如 K(2,2,...2) 的 (n+1) 部分空间。在这种情况下，它是极小的。证明它同时也是最小的并不特别困难。n 维球面 S^n 的欧拉示性数由以下表达式确定：

F(S n = 2,2, 2 = 0 = 2 + 1 n = 2,2, 2 = 2 =) F(K(...)), 若 n к, F(S) F(K(...)), 若 n к。
2

二维环面 T^2

图 134 展示了一个二维环面。左侧的模型不是最小模型，因为我们可以去掉所有向左倾斜的边。去掉这些边后得到的模型（如图右侧所示）已经是最小模型。可以证明，这个模型也是最小的。环面的欧拉示性数很容易验证为零。$F(T^2) = 0$。

射影平面 P^2

图 136 展示了射影平面的分子模型。分子空间 P^2_1 不是最小的。它可以

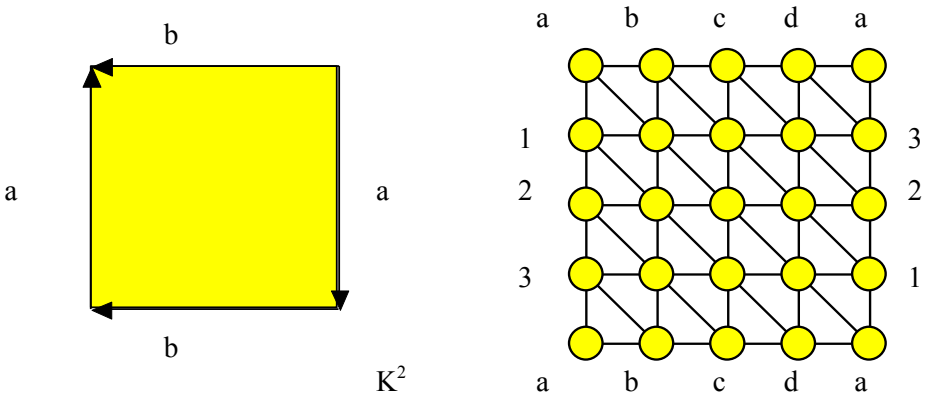


图 137 最小克莱因瓶。

可收缩至点和连接数更少的空间 P^2_2。分子空间 P^2_2 是极小的，但尚不清楚它是否最小。容易计算得出，射影平面的欧拉示性数等于 1。$F(P^2) = F(P^2_1) = F(P^2_2)=1$。

Задача

证明射影平面 P^2_2 是最小的，或者通过找出一个最小的射影平面来反驳这一点。

克莱因瓶。K2（图137）

克莱因瓶是通过将正方形的相对边相应粘合而得到的，就像射影平面和环面一样。图中所示的克莱因瓶是最小的。这个分子空间也可能是最小的。离散克莱因瓶的欧拉特征为零，这与连续情形相同。$F(K^2) = 0$。

习题 证明克莱因瓶 K^2 是最小的，或者通过找出一个更小的来否证这一点。

第10章参考文献表。

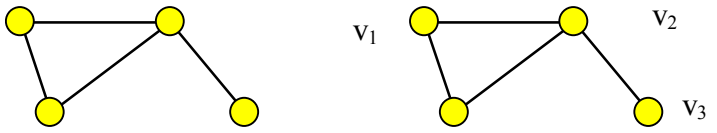
1 Croom F.H.，《代数拓扑基本概念》，Springer，纽约，1978年。16 Evako A.V.，《区间图与圆弧图的欧拉示性数和同调群》，预印本 SU-GP 93/7-4，雪城大学物理系，美国。20 Gilmore P.C.、Hoffman A.J.，《可比图和区间图的刻画》，《加拿大数学杂志》，第16卷，第539-548页，1964年。21 Golumbic M.C.，《算法图论与完美图》，Academic Press，纽约，1965年。22 Harary F.，《图论》，Addison-Wesley，Reading，MA，1969年。24 Ivashchenko (Evako) A.V.，《球面图与环面图》，《离散数学》，第128卷，第247-255页，1994年。26 Ivashchenko (Evako) A.V.，《用图表示光滑曲面。保持图的欧拉示性数不变的图变换》，《离散数学》，第122卷，第219-233页，1993年。28 Ivashchenko (Evako) A.V.、Yeong-Nan Yeh，《环面、射影平面和球面的极小图》，《离散数学》，第126卷，178，1994年 171页。- 。43 Ивако A.B.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。54 Pontryagin L.S.，《组合拓扑学基础》，科学出版社，莫斯科，1973年。

分子空间的同调群。点变换不改变分子空间的同调群。

我们在分子空间上定义同调群，并证明可缩变换会保留同调群。

本章所得结果部分发表于文献 [16,25,43,47] 中。

拓扑空间 [1,54] 的同调群是空间在某些变换下保持不变的特征之一。在经典组合拓扑中，同调群尤其可通过空间的单纯剖分来计算。这直接表明，同调群可以是



未标记分子空间　　标记分子空间

图138 标记的和未标记的空间。空间具有 3-链 $c_3=a_1[v1v2v_4]$, 2-链 $c_2=a_1[v1v_2]+a_2[v2v_4]+a_3[v1v_4]+a_4[v2v_3]$ и 和 1-链 $c_1=a1v_1+a2v_2+a3v_3+a4v4$。

以合理的方式定义于分子空间上。哈拉雷 [22] 关于图论的著作中提到了循环和余循环，可以将其视为定义一维同调群所必需的基础。然而，令人奇怪的是，图上的同调群此前并未被定义和研究。我们弥补了这一空白。我们定义了图和分子空间上的同调群，并证明它们是分子空间点变换的不变量，也就是说，对分子空间应用点变换不会改变其同调群。从应用角度来看，这一结果使我们能够区分两个分子空间，而无需进行点变换，因为点变换通常涉及大量计算机运算。假设我们有两个分子空间，需要确定它们是否同伦。为此，我们计算它们各自的同调群。如果至少有一个 n 维群不相同，那么这两个空间肯定不同伦。遗憾的是，与经典拓扑学一样，

反过来似乎并不成立。如果两个空间的同调群相同，我们不能据此断言它们同伦。至少在分子空间理论中，这个问题仍然悬而未决。

现在，我们来定义分子空间上的同调群。

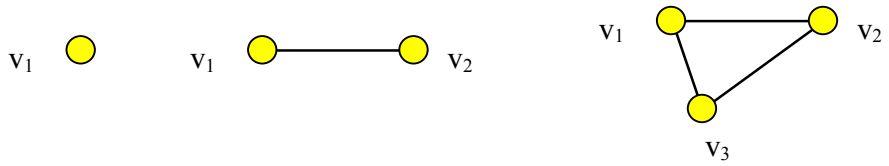


图 139 定向超边 $\phi^1=[v_1]$, $\phi^2=[v1, v_2,]$, $\phi^3=[v1,, v2,, v3,]=-[v2,, v1,, v_3]$。

空间中，补充一点说明。

当把分子空间与单纯复形对应起来，并将其中每个点束视为该复形的全单纯形时，分子空间上的同调群便可自动确定。然而，正如我们已经多次提到的，单纯复形和分子空间是性质不同的对象。我们用一个例子来说明这一点。按照单纯复形同调群的标准定义，[1,54] 点被视为0维对象，两点由边连接时被视为一维对象，依此类推。在分子空间理论中，这种方法毫无意义，因为任意数量的两两连通的点（点束）始终都是0维空间。因此，我们将完全不使用“(n-1)维单形”这一说法，而用“由n个点组成的点束”或“n点束”来代替。

标记空间的定义

设有一个分子空间 G，其中包含由 n 个点组成的集合 V。如果该分子空间中的点彼此由某些标记区分，则称它为标记的或重新编号的（labeled），$V=(v_1, v_2, v_3,.... v_n)$。

图138展示了未标记和已标记的分子空间。下文我们讨论标记的分子空间。

n 个点上的超边记法

由 n 个点构成的超边 ϕ^n 表示为 $\phi^n=(v_{1,}, v_{2,}, v^{3,}.... v_{n,})$。（请注意，在超边中，所有点彼此相邻。）

有向超边的定义

如果选定了点的次序，则称超边 ϕ^n 为定向超边。$\phi^n=[v_1, v_2, v_3,.... v_n]=-[v_1, v_2, v_3,.... v_n]$。

定向超边用方括号表示。图 139 中画出了定向超边 $\phi^3=[v_{1,}, v_{2,}, v3,]=-[v_{2,}, v_{1,}, v_3]$。

定向 n-超边的等价类定义

设选定了超边 $\phi^n=[v_1, v_2, v_3,.... v_n]$ 的某个定向，并将其视为正定向。那么，通过偶数次置换由此得到的所有定向超边构成正定向超边的一个等价类，该等价类可用其中任意一个代表元表示，例如 $\phi^n=[v_1,v_2, v_3,.... v_n]$。通过奇数次置换由此得到的所有定向超边构成负定向超边的一个等价类，该等价类可用其中任意一个代表元表示，例如 $-\phi^n=[v_2\ v_1,v_3,.... v_n]$。

定向分子空间的定义　如果已指定标记分子空间 G 的每个超边的定向，则称其为定向的。

空间直和的定向定义

设有两个定向分子空间 G 和 H，分别具有点 $V=(v_1, v_2, v_3,.... v_n)$ 和 $U=(u_1, u_2, u_3,.... u_n)$。则它们的直和 G⊕H 的定向由各自的定向及其排列顺序确定。其中，$v_i<u_k$ 对于任意 v_i 和 u_k。应用于单形 $\phi^n=[v_1, v_2, v_3,....v_n]${V=}$v_1\oplus[v_2, v_3,.... v_n]=v_1\oplus v_2\oplus[v_3,.... v_n]$。

定向边界 $\partial\phi^n$ 单形 ϕ^n 的定义

定向边界 $\partial\phi^n$ 单形 ϕ^n 定义为其在 (n-1) 个点上的子空间（单形）的以下线性组合：

$$\partial\phi^n=\partial[v_{1,}, v_{2,}, v_{3,},.... v_{n,}]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[v_1v_2..\bar{v}_k...v_n],$$

其中，v 上方的横线表示相应的点被省略。根据定义，

∂ =1　　0 -超边的边界是空空间，或 , v_o。

例如，$\partial[v_1,v_2,v_3]=[v_1,v_2]-[v_2,v_3]+[v_2,v_3]$。

定理 126

若空间 G 是点束，则 $\partial\partial G=0$ 证明定理可直接验证。□ 定义。n-分子空间 G 的链和 n-链群$C_n(G)$

设给定一个定向分子空间 G。具有整数系数 a 的分子空间 G 的 n-链（一般情况下，系数取自某个阿贝尔群 A）称为分子空间 G 的各个不同 n-单形的如下形式的形式线性组合:

$$c_n=\sum a_k\phi^n_k,$$

其中，单形的定向由分子空间 G 的点的定向顺序确定，而k是任意整数。在链的集合上，以自然方式定义加法

$$c_n=\sum a_k\phi^n_k,\ d_n=\sum^{p} b_k\phi^n_k,\ c_n+d_n=\sum^{p} (b_k+b_k)\phi^n_k.$$

显然，所有链的集合在加法运算下构成阿贝尔群 $C_n(G)$。

图138中的空间具有 3-链 $c_3=a_1[v_1v_2v_4]$, 2-链 $c_2=a_1[v_1v_2]+a_2[v_2v_4]+a_3[v_1v_4]+a_4[v_2v_3]$ 和 1-链 $c_1=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4$。

提取公共因子 n-链分子空间 G

设链中的每个点束都可以表示为 $\phi^n_k=v_0\oplus\phi^{n-1}_k$，则该链可以表示为$c_n=\sum a_k\phi^n_k=\sum a_k(v_0\oplus\phi^{n-1}_k)=v_0\oplus\sum a_k\phi^{n-1}_k=v_0\oplus c_{n-1}$，其中 $c_{n-1}=\sum a_k\phi^{n-1}_k$。

定向 n-链的边界定义

定向的边界 n-链 $c_n=\sum a_k\phi^n_k$ 称为表达式 $\partial c_n=\sum a_k\partial\phi^n_k$。

根据定义，1-链（分子空间点的线性组合）的边界为 0。

n-循环的定义和 n-循环群 $Z_n(G)$

n-循环是指边界为 0 的 n-链 z_n，$\partial z_n=0$。

所有 n-循环的集合是所有 n-链组成的群的子群，称为分子空间 G 的 n-循环群。记作-$Z_n(G)$。

n-边界和 n-边界群 $B_n(G)$ 的定义。

n-边界是指某个 (n+1)-链的边界 n-链 b_n，$\partial c_{n+1}=b_n$。所有 n-边界的集合是所有 n-链所成群的子群，称为分子空间 G.. 的 n-边界群。记作-$B_n(G)$。

n-循环的定义，零同调的 n-循环

设 z_n 是一个圈，即 $\partial z_n=0$。如果存在一条链 c_{n+1}，使得 $\partial c_{n+1}=z_n$，则称 z_n 同调于零，$z_n \sim 0$。

同调 n 圈的定义

两个 n-环称为同调的，如果它们的差与 0 同调，也就是说，它是某个链的边界。如果$\partial c_{n+1}=z_n-y_n$，那么 $z_n \sim y_n$。

分子空间 G 的 n 阶同调群的定义 分子空间 G 的 n 阶同调群是商群 $H_n(G)=Z_{n+1}(G)/B_{n+1}(G)$。这个群定义良好，因为群 $B_{n+1}(G)$ 是群 $Z_{n+1}(G)$ 的子群，这是因为 $\partial\partial c_{n+1}=0$。

注释

考察环群。容易看出，同调关系是一种等价关系，它将环群划分为若干等价类。这些等价类是同调群的元素。

为便于理解后续证明，我们列举同调群的若干性质，后文将使用这些性质。证明中，我们将直接使用这些性质，而不再注明出处。

C 属 性

在任意空间 G:$\partial(v_0\oplus c_n)=c_n-v_0\oplus\partial c_n$,$\partial(v_0\oplus v_1\oplus c_n)=v_1\oplus c_n-v_0\oplus c_n+v_0\oplus v_1\oplus\partial c_n$. $H_{n-1}(G)=0$ 当且仅当由条件 $\partial c_n=0$ 可推出 $c_n=\partial c_{n+1}$。如果空间 G 由一个点组成，则 $H_0(G)=A$，$H_n(G)=0$，其中 $n>0$。

如果空间 G 连通，则 $H_0(G)=A$。

若空间 G 有 s 个连通分支，则群 $H_0(G)$ 等于 s 个群的直积 A, $H_0(G)=A\otimes A\otimes....\otimes A$。

现在转到下面这些定理；关于图的证明见下列文献。

定理127

设 *v*-点，*G*-空间，则直和 $v\oplus G$ 的同调群为 $H_0(v\oplus G)=A$，$H_n(v\oplus G)=0$，其中 $n>0$。

证 明

由于 $v\oplus G$ 连通，所以 $H_0(v\oplus G)=A$。设 c_n 是 $v\oplus G$ 中的某个 n-链，$n>0$。那么它可以表示为 $c_n=a_n-v\oplus a_{n-1}$，其中 a_n 和 a_{n-1} 是 G 中的链。由方程 $\partial c_n=\partial a_n-a_{n-1}+v\oplus\partial a_{n-1}=0$ 可得，$\partial a_n-a_{n-1}=0,\partial a_{n-1}=0$。因此，n-圈可以表示为以下形式：$z_n=a_n-v\oplus\partial a_n$。由此可知，$z_n=a_n-v\oplus\partial a_n=\partial c_{n+1}=\partial(v\oplus a_n)$。这意味着任何 n-圈都同调于零，并且 n 维群

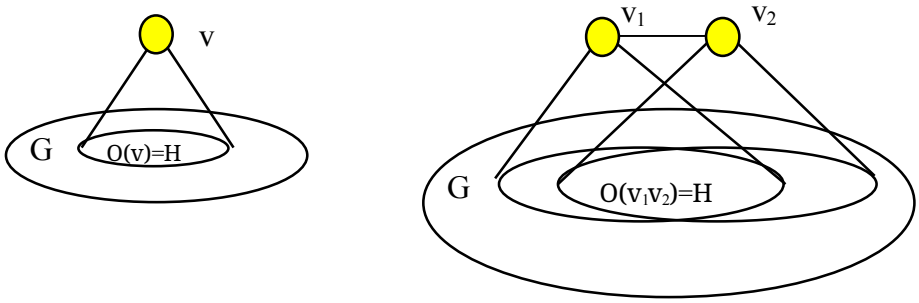


图 140 分子空间 G，点 v（左侧）的邻域 O(v)=H，以及点 v1 和 v2 的公共边界 O(v1v2)=H（右侧）具有点的同调群。于是 G+v 和 G+(v1v2) 也具有点的同调群。

同调为零。定理得证。□

定理128

设 *G* 为一个空间，*H* 为其子空间，且其同调群满足 $H_0(H)=H_0(G)=A$, $H_n(H)=H_n(G)=0$, 其中 $n>0$。那么沿 *H* 将点 *v* 粘接到 *G* 上，$O(v)=H$，不会改变空间 *G* 的同调群。$H_0(G+v)=A$, $H_n(G+v)=0$ (图 *140*).

证 明

由于 $H_0(G)=A$，因此 G 是连通的。将点 v 粘到 G 上时，连通性不会受到破坏，因此 $H_0(G+v)=A$。

设 G 和 H 分别为所求的空间及其一个不与 G 重合的子空间。沿 H 将点 v 粘到 G 上，使得 O(v)=H，U=G+v。由 $c_n \in C_n(U=G+v)$ 可知，$c_n=a_n-v\oplus b_{n-1}$，其中 $a_n \in C_n(G)$，$b_{n-1} \in C_n(H)$。由 $c_n=z_n \in Z_n(U=G+v)$ 可知，$z_n=a_n-v\oplus b_{n-1}$,$\partial z_n=\partial a_n-b_{n-1}+v\oplus\partial b_{n-1}=0$。由 $\partial a_n-b_{n-1}=0$, $v\oplus\partial b_{n-1}=0$ 可知 $\partial b_{n-1}=0$。由$\partial b_{n-1}=0$ 和 $H_n(H)=0$可知，存在这样的 b_n，使得 $\partial b_n=b_{n-1}$。由 $\partial a_n-\partial b_n=0$ 和 $H_n(G)=0$ 可知，存在这样的 a_{n+1}，使得 $\partial a_{n+1}=a_n-b_n$。由$\partial a_{n+1}=a_n-b_n$ 和 $\partial(v_0\oplus c_n)=c_n-v_0\oplus\partial c_n$可知，$z_n=a_n-v\oplus b_{n-1}=\partial a_{n+1}+b_n-v\oplus\partial b_n=\partial a_{n+1}+\partial(v\oplus b_n)=\partial(a_{n+1}+v\oplus b_n)$。因此，U 中任意 n-圈都是边界，且 $H_{n-1}(U)=0$，其中 n-1>0。定理得证。□

定理129

设 *G* 和 *H* 分别为空间及其子空间，且 *H* 是点 *v* 的邻域，*O(v)=H*，其同调群为 $H_0(H)=H_0(G)=A$、$H_n(H)=H_n(G)=0$，其中 $n>0$。那么从 *G* 中去除点 *v* 不会改变空间 *G* 的同调群。$H_0(G-v)=A$、$H_n(G-v)=0$ (图 140）。

证　明

删去点是与前一个定理中讨论的粘贴操作互逆的操作。该定理的证明就是将前一个定理的证明倒过来。□

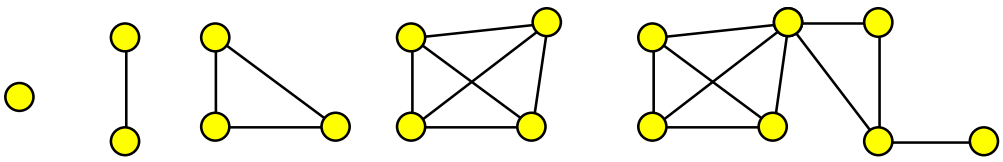


图141 这些空间的同调群 $H_0(H)=Z$, $H_n(H)=0$，其中 n>0，因为它们都是单点空间。

定理130

设 *G* 和 *H* 分别是空间及其子空间，它们的同调群为 $H_0(G)=H_0(H)=A$，$H_n(G)=H_n(H)=0$，其中 $n>0$。设 *H* 是两个不相邻点 v_1 和 v_2,的公共边界 $O(v_1v_2)=H$。那么沿 *H* 将边 (v_1v_2) 粘接到 *G* 上，不会改变空间 *G* 的同调群。$H_0(G+(v_1v_2))=A$，$H_n(G+(v_1v_2))=0$，$n>1$　（图 138）。

证 明 由于 $H_0(G)=A$，因此 G 是连通的。将边 (v_1v_2) 粘接到 G 上时，连通性不会被破坏，因此 $H_0(G+(v_1v_2))=A$。设 G 和 H 分别为所求的空间及其一个不与 G 重合的子空间。沿着 H 将边 (v_1v_2) 粘接到 G 上，使得 $O(v_1v_2)=H$。设 $U=G+(v_1v_2)$。由 $c_n\in C_n(U=G+(v_1v_2))$ 和 $n>2$，可得 $c_n=a_n+v_1\oplus v_2\oplus b_{n-2}$，其中 $a_n\in C_n(G)$，$b_{n-2}\in C_{n-2}(H)$。由 $c_n=z_n\in Z_n(U=G+(v_1v_2))$ 可得 $z_n=a_n+v_1\oplus v_2\oplus b_{n-2}$ 和 $\partial z_n=\partial(a_n+v_1\oplus v_2\oplus b_{n-2})=\partial a_n-v_1\oplus b_{n-2}+v_2\oplus b_{n-2}+v_1\oplus v_2\oplus\partial b_{n-2}=0$。由 $\partial z_n=\partial a_n-v_1\oplus b_{n-2}+v_2\oplus b_{n-2}+v_1\oplus v_2\oplus\partial b_{n-2}=0$ 可得 $\partial a_n-v_1\oplus b_{n-2}+v_2\oplus b_{n-2}=0$，$\partial b_{n-2}=0$。由 $\partial b_{n-2}=0$ 和 $H_n(G)=0$，$n>1$ 可知，存在这样的 b

$_{n-1}\in\ _{n-1}\quad\partial\ _{n-1}=\ _{n-2}\quad\partial\ _{n\ \ 1}\oplus\ _{n-2}$

+

C (G)，使得 b b。由 a -v b

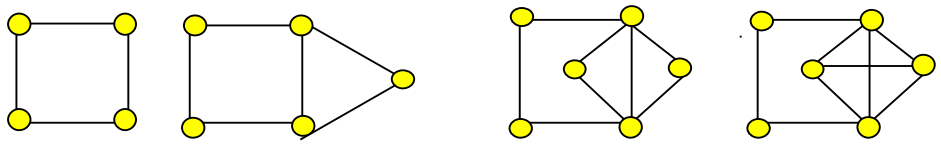


图142 所有图示空间都收缩到一维圆，并具有相应的同调群：$H_0=H_1=Z$，$Hn=0$，$n>1$。

$v_2\oplus b_{n-2}=0$, $\partial b_{n-1}=b_{n-2}$, $\partial(v_1\oplus b_{n-1})=b_{n-1}-v_1\oplus\partial b_{n-1}$ 和 $\partial(v_2\oplus b_{n-1})=b_{n-1}-v_2\oplus\partial b_{n-1}$可知，$\partial(a_n-v_2\oplus b_{n-1}+v_1\oplus b_{n-1})=0$。由 $\partial(a_n-v_2\oplus b_{n-1}+v_1\oplus b_{n-1})=0$ 和 $a_n-v_2\oplus b_{n-1}+v_1\oplus b_{n-1}\in H_n(G+(v_1v_2))=0$, $n>2$，可知 $a_n-v_2\oplus b_{n-1}+v_1\oplus b_{n-1}=\partial w_n$，其中 $w_n\in C_n(G)$。由 $a_n-v_2\oplus b_{n-1}+v_1\oplus b_{n-1}=\partial w_n$ 可知，$z_n=v_2\oplus b_{n-1}-v_1\oplus b_{n-1}+\partial w_{n+1}+v_1\oplus v_2\oplus\partial b_{n-1}=\partial(v_1\oplus v_2\oplus b_{n-1})+\partial w_{n+1}=\partial(v_1\oplus v_2\oplus b_{n-1}+w_{n+1})$。因此，这个圈同时也是边界，并且 $H_{n-1}(G+(v_1v_2))=0$, $n-1>0$。

设 c_2 是 $C_2(U=G+(v_1v_2))$ 中的某个 2-链。由 $c_2\in C_2(U=G+(v_1v_2))$，可知 $c_2=a_2+av_1\oplus v_2$,，其中 $a_2\in C_2(G)$。由 $c_2=z_2\in Z_2(U=G+(v_1v_2))$，可知 $z_2=a_2+av_1\oplus v_2$，且 $\partial z_2=\partial(a_2+av_1\oplus v_2)=0$。由方程 $\partial z_2=\partial a_2-av_1+av_2=0$ 可知 $\partial a_2=av_1-av_2$。选取链

$b_2=a(v_2\oplus v_3+v_3\oplus v_1)\in C_2(G)$，其中 v_3 是 H 中的某个点。由于 $\partial b_2-\partial a_2=\partial(b_2-a_2)=0$，$b_2-a_2\in C_2(G)$ 且 $H_n(G)=0$，$n>1$，因此 $a_2=b_2+\partial w_3$,，其中 w_3 是某个 3- 链，$w_3\in C_3(G)$。由 $z_2=a_2+av_1\oplus v_2$ 和 $a_2=b_2+\partial w_3$ 可知，$z_2=a(v_2\oplus v_3+v_3\oplus v_1)+av_1\oplus v_2+\partial w_3=\partial(av_1\oplus v_2\oplus v_3)+\partial w_3=\partial(av_1\oplus v_2\oplus v_3+w_3)$。因此，这个圈同时也是一个边界，且 $H_1(G+(v_1v_2))=0$。定理得证。□

定理 131

设 G 和 H 分别为空间及其子空间，它们的同调群为 $H_0(G)=H_0(H)=A$，$H_n(G)=H_n(H)=0$,其中 $n>0$。设 H 是两个相邻点 v_1 和 v_2,$O(v_1v_2)=H$ 的公共边界。那么，从 G 中删去边 (v_1v_2) 不会改变空间 G 的同调群，$H_n(G-(v_1v_2))=H_n(G)$.

证 明

定理的证明由前一个定理的证明反向进行而得。□

定理 132

设 G 是一个点空间。那么，空间 G 的同调群就是点的同调群，$H_0(G)=A$, $H_n(G)=0$, $n>1$ (图 141).

证 明

根据点空间的定义，任何点空间都是由一个孤立点经过可缩粘接以及删去点和连接而得到的，在此过程中同调群不变。因此，点空间 G 的同调群就是点的同调群，即 $H_0(G)=A$，$H_n(G)=0$，$n>1$。定理得证。□

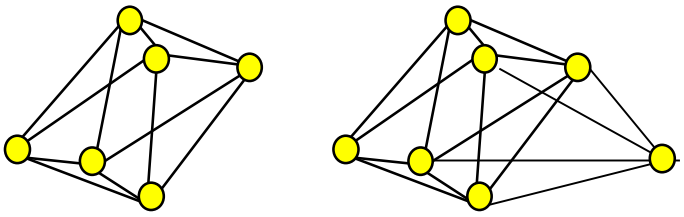


图143 二维球面及与其同伦的空间，具有同调群 $H_0=H_2=Z$、$H_1=Hn^{=0}$，$n>2$。

定理 133

设 G 是一个空间，H 是它的子空间，其同调群为 $H_0(H)=A$，$H_n(H)=0$, 其中 $n>0$。那么，沿 H 将点 v 粘接到 G（或从 G 中删去点 v），$O(v)=H$，不会改变空间 G 的同调群。$H_n(G+v)=H_n(G)$.

证 明

将点 v 粘到 G 上时，连通分支的数目不变。因此，$H_0(G+v)=H_0(G)$。

设 G 和 H 分别为所求的空间及其某个不与 G 重合的子空间。沿 H 将点 v 粘到 G 上，使得 O(v)=H，U=G+v。利用前一定理的证明，我们得到，U=G+v 中任意一个圈 z_n 都具有如下形式：$z_n=w_n+\partial(v\oplus b_n)$，其中 w_n

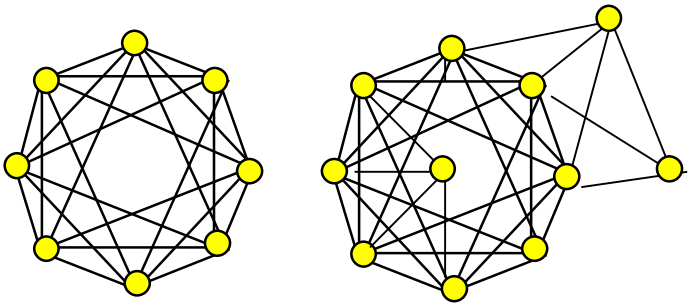


图 144 三维球面及与其同伦的空间，它们的同调群为 $H_0=H_3=Z$、$H_1=H_2=Hn^{=0}$，$n>3$。

G 中存在某个圈。定义同态 $f: Z_n(U)\to Z_n(G)$，$f(z_n)=f(w_n+\partial(v\oplus b_n))=w_n$。

显然，U 上的任意圈都会映射为 G 上的圈，并且对于 G 上的任意圈，都存在一个原像，该原像是 U 上的圈。显然，U 中的任意边界也会映射为 G 中的边界，并且对于 G 中的任意边界，都存在一个原像，该原像是 U 中的边界。

$f(\partial(a_{n+1}+v\oplus b_n)=f(\partial a_{n+1}+\partial(v\oplus b_n))=\partial a_{n+1}$.

След因此，f 是从 $H_n(G+v)$ 到 $H_n(G$ 的同构映射 ），也就是说，$H_n(G+v)$ 和 $H_n(G)$ 同构。定理得证。□

我们将证明一个类似的定理，该定理适用于在任意空间 G 中粘接和舍弃一个点边。

定理134

设 G 为一个空间，H 为其子空间，其同调群为 $H_0(H)=A$、$H_n(H)=0$，其中 $n>0$。设 H 为两个不相邻点 v_1 和 v_2，的公共邻域$O(v_1v_2)=H$。那么，沿 H 将边 (v_1v_2) 粘接到 G 上，不会改变空间 G 的同调群 $H_n(G)=H_n(G+(v_1v_2))$.

证 明cuntegn

将边 (v_1v_2) 粘到 G 上时，连通分支的数量不变。因此，$H_0(G)=H_0(G+(v_1v_2))$。

设 G 和 H 分别为所求的空间以及其中一个不与 G 重合的子空间。沿 H 将连接 (v_1v_2) 粘到 G 上，使得 $O(v_1v_2)=H$。设 $U=G+(v_1v_2)$ 。由 $c_n\in C_n(U=G+(v_1v_2))$ 和 $n>2$,

可知 $c_n=a_n+v_1\oplus v_2\oplus b_{n-2}$，其中 $a_n\in C_n(G)$，而 $b_{n-2}\in C_{n-2}(H)$。利用前一个定理的证明，我们得到，U 中的任意圈 z_n в 都可以表示为 $z_n=\partial(v_1\oplus v_2\oplus b_{n-1})+w_n$，其中 w_n 是 G 中的圈。引入同态 $f: Z_n(U)\to Z_n(G)$,

$f(z_n)=f(w_n+\partial(v_1\oplus v_2\oplus b_{n-1}))=w_n.$

显然，U 上的任意一个圈都映射为 G 上的一个圈，并且对于 G 上的任意一个圈，都存在一个原像，它是 U 上的一个圈。显然，U 中的任意一个边界都映射为 G 中的一个边界，并且对于 G 中的任意一个边界，都存在一个原像，它是 U 中的一个边界，正如下面所示：

$f(\partial(a_{n+1}+v_1\oplus v_2\oplus b_{n-1})=f(\partial a_{n+1}+\partial(v_1\oplus v_2\oplus b_{n-1}))=\partial a_{n+1}.$

因此，f 是从 $H_n(U)$ 到 $H_n(G)$ 的同构映射，也就是说，$H_n(U)$ 与 $H_n(G)$ 同构，$n>1$。

设 c_2 是 $C_2(U=G+(v_1v_2))$ 中的某个 2-链。由 $c_2\in C_2(U=G+(v_1v_2))$，可知 $c_2=a_2+av_1\oplus v_2,$，其中 $a_2\in C_2(G)$。由前一个定理可知，$z_2=\partial(av_1\oplus v_2\oplus v_3)+w_2,$，其中 w_2 是 G 中的一个圈。引入同态 $f: Z_2(U)\to Z_2(G)$,

$f(z_2)=f(\partial(av_1\oplus v_2\oplus v_3)+w_2)=w_2.$

显然，U 上的任意 2-循环都会映射为 G 上的 2-循环，并且对于任意

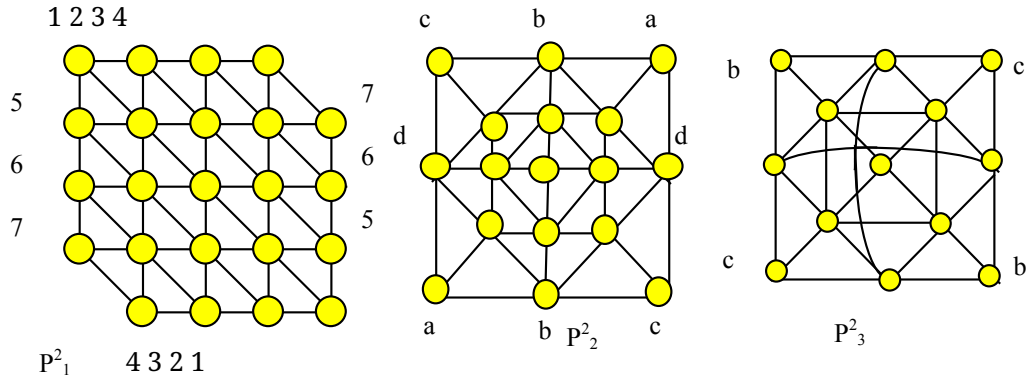


图 145 射影平面的分子模型。$H_0=Z$、$H_1=Z2$、$Hn^{=0}$（n >1）的同调群。

在 G 上的每个 2-循环都有一个原像，该原像是 U 上的 2-循环。显然，U 中的任意 2-边界也会映射为 G 中的 2-边界，并且 G 中的每个 2-边界都有一个原像，该原像是 U 中的 2-边界，正如下文所示：

$f(\partial(a_2+av_1\oplus v_2\oplus b_3)=f(\partial a_3+\partial(av_1\oplus v_2\oplus b_3))=\partial a_3.$

因此，f 是从 $H_1(U)$ 到 $H_1(G)$ 的同构映射，也就是说，$H_1(U)$ 和 $H_1(G)$ 同构。
定理得证。□
最后，我们陈述本节的基本定理。无需证明它，因为它是前面各定理的推论。

定理135

空间 *G* 的点变换不改变该空间的同调群。

拉斯莫 我们来看一些分子的同调群示例。 x

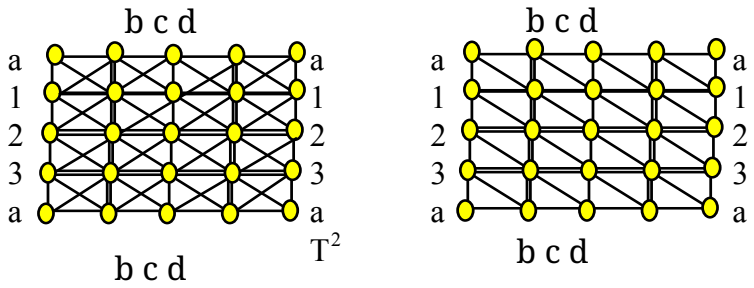


图146 同胚于环面 T2 的空间，其同调群为 H_0=Z、H_1=Z⊗Z、H_2=Z、Hn=0，n > 2。

空间。
示例
设系数群为整数群 Z

= 0 ± 1 ± (, , , ,..)

2 点式分子空间
所有点式分子空间都可收缩到一个点，并具有相应的同调群：H_0=Z, H_n=0, n > 0。图 141 展示了一些点式分子空间。

一维圆 S^1.

图142所示的所有空间都可收缩到一维圆，并具有相应的同调群：H_0=H_1= Z, H_n=0, n > 1。

二维球面 S^2

图143展示了一个二维球面及与其同伦的空间。它们的同调群由表达式 H

0= 2= 1= n=0 > H Z, H H ,n 表示。

2

三维球面 S^3

图 144 展示了与三维球面同伦的分子空间。它们的同调群由表达式 $H_0=H_3=Z$, $H_1=H_2=H_n=0$, $n > 3$ 表示。

二维环面

二维环面（图 134）及与其同伦的空间的同调群，与连续情形一样，由以下表达式确定：$H_0=H_2=Z$，$H_1=Z\otimes Z$，$H_n=0$，$n>3$。

射影平面

类似地，可以通过直接计数验证，射影平面的同调群由关系 $H_0=Z$，$H_1=Z_2$, $H_n=0$，$n>1$ 确定（图 145）。

克莱因瓶

考察克莱因瓶（图 137）的同调群。通过直接计算很容易验证，其同调群为 $H_0=Z$, $H_1=Z\otimes Z_2$, $H_n=0$, $n>1$。

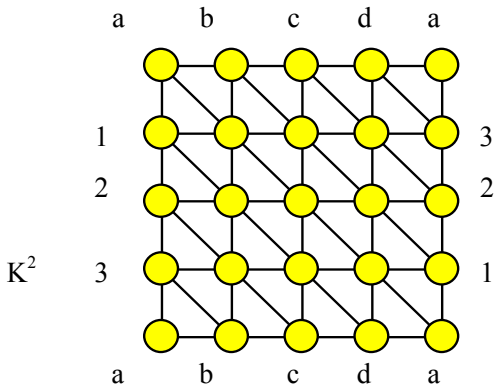


图 147 克莱因瓶的同调群形式为 $H_0=Z$、$H_1=Z\otimes Z2$、$Hn^{=0}$、$n>1$。

由此引出了若干有趣的数学研究方向。

习题。

研究分子空间上同调群的性质。例如，如何确定分子空间的直和与直积的同调群。

习题。

求出非流形空间的同调群，并研究其性质。

题目。

求出根据分子空间的关联矩阵、分子空间的坐标矩阵计算同调群和欧拉示性数的方法。

第 11 章参考文献列表。

1 Croom F.H.，《代数拓扑基本概念》，Springer，纽约，1978年。16 Evako A.V.，《区间图和圆弧图的欧拉示性数与同调群》，预印本 SU-GP 93/7-4，雪城大学物理系，美国。22 Harary F.，《图论》，Addison-Wesley，Reading，MA，1969年。25 Ivashchenko (Evako) A.V.，《图上的同调群：不改变图的同调群的图变换》，《离散数学》，第126卷，第159–170页，1994年。47 Иващенко А.В.，《分子空间的同调群》，ВИНИТИ，莫斯科，第2346-85号，1985年。43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。54 Понтрягин Л.С.，《组合拓扑学基础》，科学出版社，莫斯科，1973年。

第 2 部分 分子建模

分子空间的砖块（几何）模型与矩阵（代数）模型

我们研究如何为分子空间找到一个连续对应体这一问题。为了使这一过程具有普适性，我们取无穷维欧几里得空间 E^{∞}，并定义一个 kirpich，它是 E^{∞} 中的无穷维单位立方体。Kirpich 是这一方法中的基本元素。若干 Kirpich 元素构成一个普适基本空间（UBS）。UBS 中任意有限个 Kirpich 元素称为 UBS 中的一个曲面 S。S 的神经称为 S 的分子空间 M(S)。由 S 中所有 Kirpich 元素的坐标组成的矩阵称为 S 的坐标表示或矩阵表示。我们考察 S 的一些性质，并探讨引入 UBS 的几何和视觉背景。获得分子空间连续对应体的方法如下：
给定一个分子空间 N，我们构造任意满足 N=M(S) 的 S。利用同伦拓扑学的方法，我们可以在连续的欧几里得空间 E^{n} 中构造一个与 M(S) 同伦的连续曲面。

本章的部分成果已发表于文献 [3,7,14,26,27,43,45,46,49,51]。

无限-维欧几里得空间作为通用基础空间

有人可能会认为，分子空间是一个相当抽象的工具，难以用几何或代数方式实现。事实上，存在若干种具有几何或代数性质的模型，它们与分子空间等价，而且或许

会更便于理解。分子空间的几何模型本质上也是一个连续的对象，显然比起分子空间本身，它更像一个曲面。如果我们有一个连续曲面，并据此构建它的分子模型，那么我们必然会对结构进行粗化和简化，从而损失一部分信息。根据给定的分子空间反过来寻找连续曲面，无法提供任何新信息，所得信息都已包含在分子空间本身之中。另一方面，我们面临着这样一个选择：应当将哪一个连续曲面视为分子空间的可靠模型。我们将探讨一种方法，以尽可能减少这类构造中的各种歧义和任意性。

我们将引入普适砖块空间这一概念，并可对其应用同伦变换，以求得与给定砖块空间同伦的连续曲面。这是经典拓扑学中一个相当成熟的问题。由于分子空间中的所有点都没有个体差异、可以相互替换且彼此相同，因此砖块空间中的所有元素也必须完全相同。下面将介绍普适砖块空间以及与之相关的其他概念。

无限维欧几里得空间 E^{∞}的定义

无限维欧几里得空间 E^{∞} 是指点集 x，$x \in E^{\infty}$，其坐标为实数的无限序列 x_k，

$$x = (x_1,x_2,...x_k,...) = [\ x_k\ ],\ k \in N.$$

砖块的定义。

在 E^{∞} 中，称满足以下关系的点集 $x \in K$ 为砖块（kirpich）K:

$$n_k \le x_k \le n_k+1,\ k \in N,\ n_k \text{ - целые числа.}$$

砖块坐标的定义。

若 $x=[x_k]$，$x \in K$，$n_k \le x_k \le n_k+1$，$k \in N$，且 n_k 为整数，则不等式左端点的序列称为 E^{∞} 中砖块 K 的坐标，$K=(n_1,n_2,...n_k,...) = [n_k]$，$k \in N$。¤

显然，砖块不过是 E^{∞} 中的无限维单位立方体。我们在此前的文章中已经使用过术语 kirpich。根据其定义，砖块本身是一个无维度元素，这与例如点不同，点在经典数学中是一个零维元素。这样的

这种方法使砖块能够作为通用构造元素，用于创建不同维度的空间。下面引入砖块之间的距离。

砖块之间的距离的定义。

砖块 $K_1 = [n_k]$ 与 $K_2 = [m_k]$ 之间的距离 $D(K_1,K_2)$ 定义为它们相应坐标之差的绝对值中的最大值，其中 $k \in N$。

$$D(K_1,K_2) = \max|n_k - m_k|, k \in N. ¤$$

相邻砖块的定义。

如果两个砖块之间的距离等于 1，则称这两个砖块相邻或邻接。任意一对相邻砖块称为一条连接。

注 释

如果砖块具有公共点，则它们总是相邻的。当一个砖块的每个坐标与另一个砖块的每个坐标相差 1 时，可能会产生一些不确定性。例如，K_1=(0,0,0,0,...0,...) 和 K_2=(1,1,1,1,...1,...)。在这种

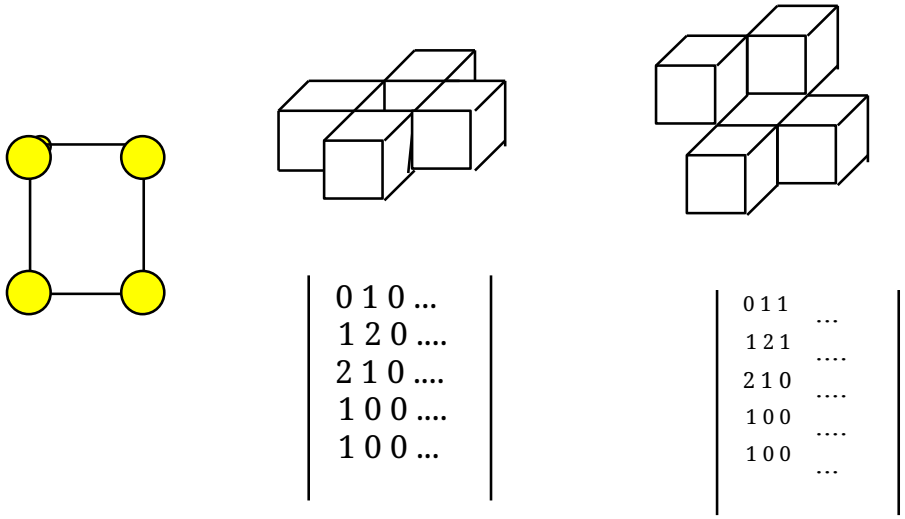


图148 由四个点构成的分子最小圆，在二维和三维空间中分别以砖块和坐标矩阵表示。

情况下，按照定义，我们认为砖块具有公共点。

普适砖块空间 $B(E^{\infty})$ 的定义。

将 E^{∞} 中所有砖块构成的集合称为通用砖块空间 $B(E^{\infty})$，简称通用砖块空间。

由于砖块空间和分子空间本质上是离散空间的不同表示，我们将给出通用分子空间的定义。

普适分子空间 $M(E^{\infty})$ 的定义。

普适砖块空间 $B(E^{\infty})$ 的神经称为普适分子空间 $M(E^{\infty})$。

这意味着，$B(E^{\infty})$ 中的每个砖块都对应于 $M(E^{\infty})$ 中一个坐标相同的点；当且仅当 $M(E^{\infty})$ 中的点相邻时，$B(E^{\infty})$ 中的砖块才相邻。采用这种方法，砖块空间与分子空间之间的区别便消失了，所有关于砖块空间所得出的结论都适用于分子空间。

砖块 n 维子空间 $B(E^{n})$ 的定义。

称为通用基空间 $B(E^{\infty})$ 的 n 维砖块子空间 $B(E^{n})$，是 E^{∞} 中所有满足从 (n+1) 开始及以上的坐标均为 0 的砖块的集合，$B(E^{n}) \subseteq B(E^{\infty})$。

分子 n 维欧几里得子空间 $M(E^{n})$ 的定义。

称为通用基空间 $M(E^{\infty})$ 的 n 维分子子空间 $M(E^{n})$，是 E^{∞} 中所有满足从 (n+1) 开始及以上的坐标均为 0 的点的集合，$M(E^{n}) \subseteq M(E^{\infty})$。

$B(E^{\infty})$ 中砖块空间或曲面 S 的定义。

$B(E^{\infty})$ 中的砖块空间或曲面 S 是任意有限或可数的砖块集合。

对于任意砖块空间 S，我们构造分子空间 M(S)，它是砖块集合的神经。将分子空间中的一个点对应于每个砖块；如果两个砖块相邻，那么与它们对应的分子空间中的点也相邻。显然，这一从砖块集合到分子空间集合的映射是一一对应的。同时，泛基空间 $B(E^{\infty})$ 也是一个砖块空间，并且存在与之对应的泛基本分子空间

$M(E^{\infty})$。关于砖块空间得出的所有结论，对分子空间也成立，反之亦然。

曲面坐标矩阵 A(S) 的定义：砖块曲面 S （以及 空间 M(S)）。

设曲面 S 由砖块（$K_1,K_2,\ldots K_p$）组成，其坐标为 $K_1=(n_{11},n_{12},\ldots n_{1m},\ldots)=[n_{1m}]$, $K_2=(n_{21},n_{22},\ldots n_{2m},\ldots)=[n_{2m}],\ldots K_p=(n_{p1},n_{p2},\ldots n_{pm},\ldots)=[n_{pm}]$。曲面 S 和分子空间 M(S) 的坐标矩阵 A(S) 是指矩阵 $[n_{tm}]$，它有 p 行和无限多个列（图148）。

曲面 S 在 B(E 中的嵌入维数 vr(S) 的定义 $^{\infty}$).

曲面 S 在 $B(E^{\infty})$ 中的嵌入维数，定义为曲面砖块集合中非零坐标的数量。

在图149中，由砖块构成的曲面位于三维空间中。因此，它们的嵌入维数为三。由此，从现在起，如同经典情形一样，对于每个分子空间，我们都有由邻域性质确定的空间内在维数，以及由整个空间的性质确定的嵌入维数，而在其

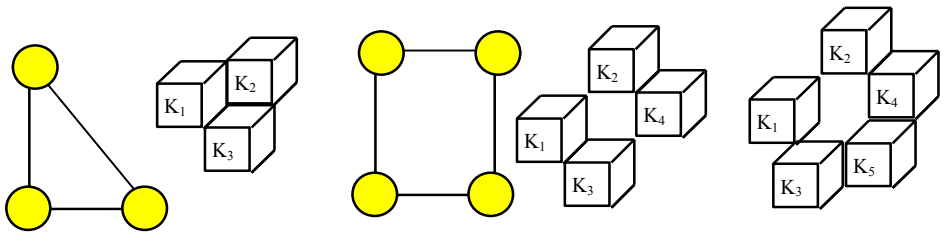


图149 不可能将三块砖块摆放成彼此之间有一个“洞”的样子。四块或更多砖块则有可能，

嵌入外部空间。

定理 136

对于每个砖块空间S ，都存在一个与其同构的分子空间M(S)。

对于空间S 中每个砖块空间$B(E^{\infty})$，都存在一个与其同构的分子空间 $M(S)$，位于$M(E^{\infty})$中。

证 明。

建立一一对应如下：将砖块空间中的每个砖块对应于分子空间中的一个点，并且当且仅当两个砖块相邻时，两个点才相邻。证明结束。□ 采用这种方法的优点在于，它能够从几何上解释分子空间的许多性质，并且可以利用完善的坐标工具研究分子空间。例如，这直观地说明了为什么正常分子圆不可能少于四个点。不可能将三个砖块排列成在它们之间形成“空洞”的形状。对于四个或更多砖块，这却是可能的，如图149所示。显然，对于 $B(E^{\infty})$ 中的不同曲面，可能存在同一个神经。这意味着这些曲面是等价的，只是在空间 $B(E^{\infty})$ 或 E^{∞} 中的排列不同。另一方面，对于给定的曲面，存在唯一的（在同构意义下）分子空间。

曲面 S 的体积 V(S) 或 |S| 定义

曲面 S 的体积 V(S)（或该曲面的分子空间）称为构成该曲面（分子空间）的砖块（分子空间的点）的数量。

通用砖块空间中曲面的性质

我们引入了曲面 S 的矩阵坐标表示。这是一种便捷的数学工具，可用于研究分子空间和砖块曲面。需要注意的是，关于曲面所说的一切，也同样适用于该曲面的分子空间。这样的曲面或分子空间描述，可以将该曲面表示为一个矩形矩阵。来看一个例子。很容易验证，这个由五个点组成的圆，无法表示为基本砖块二维空间 $B(E^2)$ 中的单位正方形族。利用三维空间，我们可以将这个圆表示为三维空间中的单位立方体族（图149）。这些立方体的坐标构成了该圆的矩阵。

列举坐标矩阵的显然性质。

坐 标 矩 阵 的 性 质。

• 如果两个砖块相邻，那么它们同名的坐标相差不超过 1。$K_1=(n_{11}, n_{12},...n_{1m},...)=[n_{1m}]$, $K_2=(n_{21},n_{22},...n_{2m},...)=[n_{2m}]$, $\Rightarrow |n_{1m}-n_{2m}|\le 1$.• 如果两个砖块不相邻，那么至少有一对同名坐标相差超过 1。$K_1=(n_{11}, n_{12},...n_{1m},...)=[n_{1m}]$, $K_2=(n_{21},n_{22},...n_{2m},...)=[n_{2m}]$, $\Rightarrow \exists\, s, |n_{1s}-n_{2s}|\ge 2$.

我们引入砖块性的概念。经典数学，尤其是图论中，也使用类似的概念。对于任意分子空间，都可以通过不同方式引入砖块空间，例如，可以将其构造为具有不同的嵌入维数。然而，最小嵌入维数始终存在。例如，对于最小正规圆（图148），可以构造砖块

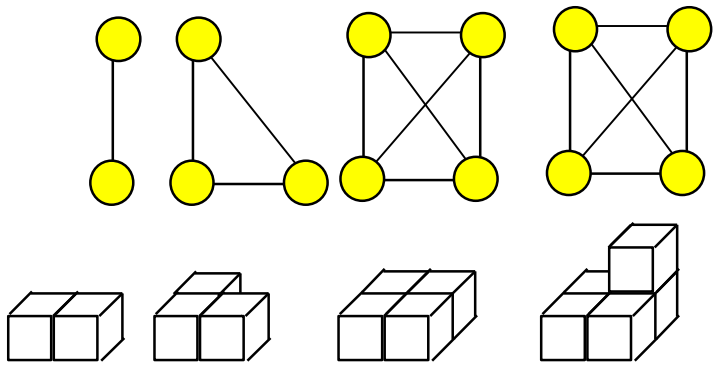


图150 由 2、3、4 和 5 个砖块组成的砖块单形铺设 $kir(K(n))=\lceil \log 2n \rceil$，其中 $\lceil \log 2n \rceil$ 是不小于 $\log 2n$ 的最小整数。

空间，其嵌入维数为 2、3 及更高。与最小化嵌入维数相关的问题，例如会在图论研究生物学问题时出现 [20,21]。

$B(E^{\infty})$ 中曲面 S 的砖块性（kirpicity）kir(S) 的定义 .

$B(E^{\infty})$ 中曲面 S 的砖块性 kir(S) 称为该曲面的最小嵌入维数 [27,46]。

注 意

需要指出，任何有限维空间都可以视为无限维空间 E^{∞} 的子空间。此时，所有缺失的坐标都可以视为零。实际上，我们始终使用有限维空间。正如我们已经说过的，形式上引入无限维空间的逻辑依据，是希望创建某种不依赖于维数、适用于描述各种元素的通用元素。

维数：零维点、一维线、二维曲面，等等。从这一观点来看，任意维数的曲面都是由同一类元素构成的若干族，仅因这些元素的相对位置不同而有所区别。采用这种方法，本质上就失去了砖块空间与分子空间之间的区别。可以认为，分子空间、砖块空间和坐标矩阵，分别是同一对象——离散空间的分子（图形）、几何和代数（矩阵）表示。其中，分子空间是最抽象的表示，因为它不需要嵌入另一个空间。图148展示了同一个分子空间（即最小圆周）的砖块曲面及其矩阵。我们来估算欧几里得空间的维数。

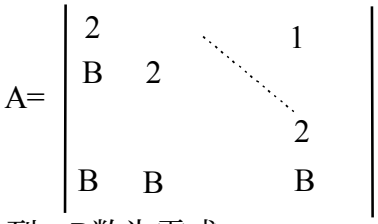


图151 坐标矩阵有 (p-1) 列。B数为零或一。

在该空间中，可以确定为给定曲面构造砖块空间。

定理137

设*S* 是体积为*V(S)=p*的砖块空间。则该空间的砖块性*n* 不超过*p-1*, *kir(S)≤ p-1 (*图150)。

证　明。

将曲面 S 的砖块记为 $a_1, a_2,...a_p$。构造该曲面的坐标矩阵 a_{ks} ，其中含有非零元素的列数决定了嵌入空间的维数。选取坐标 $a_{kk}=2$，其中 k=1,2,...p-1。选取坐标 $a_{ks}=1$，其中 k<s<p，若 a_k 和 a_s 相邻。选取坐标 $a_{ks}=0$，其中 k>s，s<p=1,2,...p-1，若 a_k 和 a_s 不相邻。显然，我们得到坐标矩阵 A(S)，它有 p 行和 (p-1) 列不同的坐标。其余所有砖块的坐标均取为 0（图150）。因此，kir(S)≤ p-1。证明完毕。□

定理138

在任意有限曲面 S 中，任意两个相邻砖块都可以变为不相邻，同时不改变其余砖块的邻接关系。

证　明。
将曲面 S 的砖块记为 $a_1, a_2,...a_p$。设砖块具有 n 个不同的坐标，其余坐标相同。设两个相邻砖块 a_r 和 a_q 有 m 个前面的相差 1 的坐标，其中 $m \le n$，并由坐标 $a_r=(c_1,c_2,...c_n,t,t,..)$ 、 $a_q=(d_1,d_2,...d_n,t,t,..)$ 确定。将砖块 a_r 的第（ n+1 ）个坐标增加 1，并将砖块 a_r 的第（n+1）个坐标减少 1。即 $a_r=(c_1,c_2,...c_n,t+1,t,..)$、$a_q=(d_1,d_2,...d_n,t-1,t,..)$。这些砖块将变得不相邻，与其余砖块的邻接关系不变。定理得证。 □

定理139

在任意有限曲面 S 上，任意两个不相邻的砖块都可以变为相邻，同时不破坏其余砖块之间的相邻关系。

证 明。
将曲面 S 的砖块记为 $a_1, a_2,...a_p$。设砖块具有 n 个不同的坐标，其余坐标相同。设两个不相邻的砖块 a_r 和 a_q 具有 m 个最前面的不同坐标，其中 $m \le n$，并由坐标 $a_r=(c_1,c_2,...c_n,t,t,..)$、$a_q=(d_1,d_2,...d_n,t,t,..)$确定。设 $c_1<d_1$。对于第一坐标小于或等于 c_1, 的砖块，将该坐标增加 1，同时将第一个公共坐标 t 增加 1。这样可能会出现新的相邻砖块，我们将其变为不相邻。重复这些操作足够多次，就能使原本不相邻的砖块变为相邻，同时不改变其余砖块之间的相邻关系。定理得证。 □ 引入

类似于分子超边的砖块超边定义
砖块超边 K(n) 的定义。

由 n 个砖块组成的曲面 S 称为砖块连接，如果每一对砖块都彼此相邻。

考虑包含 n 个砖块的超边的砖块性。

定理140

超边 $K(n)$ 的粗度由比值$log_2 n \le kir(K(n)) < log_2 n+1$确定，或者 $kir(K(n))=\lceil log_2 n \rceil$，其中 $\lceil log_2 n \rceil$ 是大于或等于$log_2 n$.的最小整数。

证 明。

设超边中的某个砖块具有零坐标$a_1=(0,0,...0,..)$。那么，所有其他砖块的坐标都必须由0和1（或-1）组成。由0和1组成的长度为s的数组共有 2^s个。因此， $2^s \le n < 2^{s+1}$。对该表达式取对数，得到$s \le \log_2 n < s+1$。因此，$kir(K(n))=\lceil \log_2 n \rceil$，其中$\lceil \log_2 n \rceil$是一个不小于$\log_2 n$的最小整数（图150）。定理得证。□再证明

一个确定曲面砖块性的公式

定理141

设S 是一个具有n 块砖和 k 个连接的曲面。那么在空间$B(E^{\infty})$中，存在一个基本的n-维砖块空间 $B(E^n), S \subseteq B(E^n)$，使得$kir(S) \le C^2_{n-k} + \lceil log_2 n \rceil$，其中$\lceil log_2 n \rceil$是大于或等于$log_2 n$.的最小整数。

Д 证 明。

任意由 n 个砖块组成的砖块超边都包含 C^2_n 个由两个砖块组成的超边。将两个相邻的砖块分开时，空间的嵌入维数可能增加 1。此类分开操作的数量等于 (C^2_{n-k})。因此，空间 S 的嵌入维数最多比由 n 个砖块组成的砖块超边的嵌入维数大 (C^2_n-k)。所以，$kir(S) \le C^2_n - k + \lceil \log_2 n \rceil$。证明结束。□

显然，对于砖块空间存在两种不同类型的变换。第一种是不改变砖块之间邻接关系、只改变这种邻接程度的变换。在这类变换下，两个砖块可以沿面、边或顶点相互接触，这并不重要；重要的是，它们始终保持相邻（或始终不相邻）。砖块曲面在欧几里得空间中的位置发生变化，但分子空间保持不变。类比而言，这类变换类似于在三维或更高维空间中对二维曲面的弯曲。这种变换可以称为砖块曲面的光滑变换。第二种变换类型是分子空间点变换的直接反映。与第一种类型不同，这类变换不能称为光滑变换。在分子空间中粘附（或去除）一个点，等价于在砖块曲面上粘附（或拆除）一个砖块。在分子空间中粘附（或去除）一条边，等价于将曲面上的两个砖块粘合（或拆开）。在经典数学中，这类变换通常

对应于从一个空间到另一个空间的同伦过渡。关于砖块空间作为无限维空间的子空间的几何学问题，几乎完全没有得到研究，尽管已有一些尝试。

问 题

引入分子空间和/或砖块空间的几何特征，并研究其性质。

通用砖块立方体及其性质

我们再来考察砖块表面的另一种性质，称为紧致性（compactness）。

通用砖块n-维U^n 和通用分子n-维立方体的定义（图152）。

称 U^n 为通用砖块 n 维立方体，它是由 $(a_1,a_2,\ldots a_p)$、$p=3^n$ 个砖块组成的曲面，其非零列构成的坐标矩阵 $A(U^n)$ 是3^nxn 矩阵，具有 3^n 行和 n 列，坐标由 0、1 和 2 组成，

$$A(U^n)=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots 0 \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

通用分子 n 维立方体称为通用砖块 n 维立方体 U^n的神经（或交图）。

通用分子 n 维立方体 U^n 的一个重要特点是，它是由 n 个一维正规线段的副本作直积而成，每个线段包含 3 个点。

定理 142

通用分子*n*-维立方体U^n 是*n* 个一维正规线段副本的直积，每个线段包含 *3*-个点，$U^n=U^1\otimes U^1\otimes U^1\ldots\otimes U^1$。

证 明。

由图153可知，定理显然成立。对于任意维数，将一维通用立方体 U^1 的顶点记为 0、1 和 2。考虑 $U^n=U^1\otimes U^1\otimes U^1...\otimes U^1$。容易看出，只有当直积中的点的坐标相差不超过 1 时，它们才相邻。因此，坐标矩阵将是一个矩阵

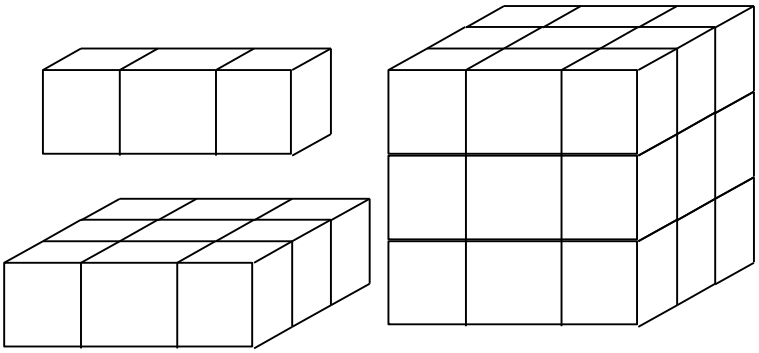


图 152 一维、二维和三维通用立方体 U^1, U^2 和 U^3。

通用 n 维立方体。定理得证。.□ 通用立方体具有一项重要性质：它包含任意分子空间。此外，它的半径为 1，也就是说，通用立方体中的任意一点都与中心点相邻。通用立方体是以中心点 v 为球心的 n 维球，$U^n=U^n(v)$。

$B(E^\infty)$ 中曲面 S 的紧致度（compactness）com(S)。

$B(E^\infty)$ 中曲面 S 的紧致度 com(S) 定义为满足以下条件的最小整数 n：曲面 S 是通用立方体 U^n [27] 的子空间，$com(S)=\min(n, S\subseteq U^n)$。

注释

显然，砖块性不超过紧致性，$kir(S)\le com(S)$。例如，由 4 个互不相邻的砖块构成的空间，其砖块性为 1，紧致性为 2（图 155）。

注释

紧致性意味着，在嵌入万能立方体的任意曲面中，两个不相邻砖块之间的距离总是等于 2。换句话说，如果砖块相邻，那么它们之间的距离等于 1；如果不相邻，那么它们在万能砖块空间中的距离等于 2。也就是说，任何曲面都可以弯曲并嵌入外部空间，使任意两个不相邻点之间的距离达到可能的最小值。虽然在连续空间中也可以考虑类似的情况，但这并没有太大意义，因为不存在适用于任意维数曲面的通用曲面体积概念。例如，三维空间中的二维球面体积为 0，因此任意两点之间的距离都可以无限接近于零。从这个角度看，经典数学的对象与日常实践相去甚远，它们是某种理想化对象，这一点在计算机实践中显露得尤为清楚。

定理143

设*S* 是体积为*V(S)=p*的砖块空间。那么，该空间*n* 的紧致性不超过 *p-1*, *com(S)≤ p-1*.

证 明。

证明逐字重复了相应的砖块性定理的证明。曲面 S 的坐标矩阵 A(S)

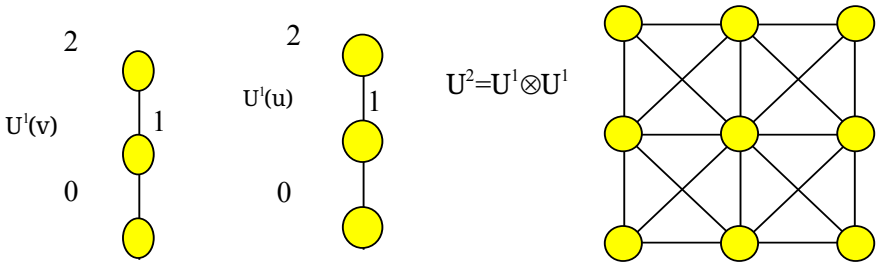


图153 两个一维正规球的直积是一个二维球，同时也是一个通用二维立方体。

由 0、1 和 2 构成，有 p 行和 (p-1) 列，各坐标互不相同，并且是通用立方体矩阵 U^{p-1} 的子矩阵。因此，com(S)≤ p-1。证明完毕。□

定理144

超边 *K(n)* 的紧致性由关系$log_2 n \le com(K(n)) < log_2 n + 1$确定，或者$com(K(n)) = \lceil log_2 n \rceil$，其中$\lceil log_2 n \rceil$是一个不小于$log_2 n$的最小整数。此外，$com(K(n)) = kir(K(n))$ (图 150)。

证 明。
证明与关于砖块性的证明相同。设超边中的某个砖块具有零坐标 $a_1=(0, 0,...0,..)$。那么其余所有砖块的坐标都应由 0 和 1（或 -1）组成。由 0 和 1 构成的长度为 s 的序列数量等于 2^s。因此，$2^s \le n < 2^{s+1}$。对该表达式取对数，得到 $s \le \log_2 n < s+1$。因此，

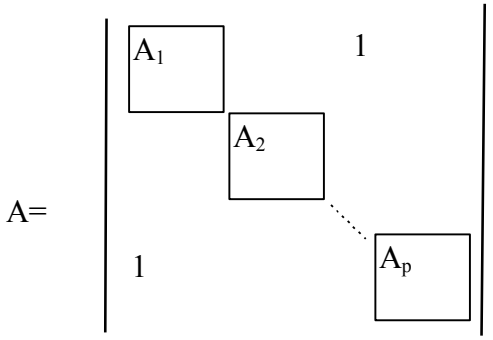


图 154 r-部空间矩阵的构造。矩阵 Ak 由零组成。

$com(K(n)) = \lceil \log_2 n \rceil$，其中$\lceil \log_2 n \rceil$是不小于 $\log_2 n$ 的最小整数。定理得证。□

定理145

由*H(n)*，构成的、包含*n* 个互不连通砖块的完全不连通空间的紧致性（图*155*）由关系式$log_2 n \le com(H(n)) < log_2 n + 1$确定，或者$com(H(n)) = \lceil log_2 n \rceil$，其中$\lceil log_2 n \rceil$是一个不小于$log_2 n$.的最小整数。

证 明。
证明与前一个定理相同，只需将所有的 1 替换为 2。定理得证。□

推 论。$kir(H(n)) < com(H(n))$ 对于 $n>2$。证 明 显然，$kir(H(n))=1$ 对于 $n>1$。因此，$kir(H(n))=com(H(n))$ 仅当 n=1，2。□

定理146

设 S 为砖块空间，S_1 为其子空间。则 $com(S)=com(S_1)+|S|-|S_1|$，其中 $|S|$ 和 $|S_1|$ 分别是 S 和 S_1.中的砖块数。

证 明。
设空间 S 具有砖块 $(a_1, a_2,...a_n, b_1, b_2,...b_s)$，$S_1$ 具有砖块 $(a_1, a_2,...a_n)$。条件 $com(S_1)=r$ 表示，坐标矩阵 $A(S_1)$ 具有 r 个非零列。将 b_1 的第一坐标标记为 1，将 (r+1) 坐标标记为 2。对于每个砖块 a_p ，如果 a_p 和 b_1 相邻，则将坐标 $a_{p(r+1)}$ 标记为 1；如果 a_p 和 b_1 不相邻，则将其标记为 0。利用这些操作，我们将 $b_1, b_2,...b_s$ 添加到 S_1 中，得到 S。同时，矩阵 $A(S_1)$ 中的列数增加不超过 s。因此，$com(S)\le r+s$，其中 $s=|S|-|S_1|$。定理得证。
□

定理147

设S 是砖块空间，$|S|\ge 4$。那么$com(S)\le |S|-2$. 证 明。

容易直接验证，任何包含4块砖的曲面，当 |S|=4时，都是普适二维立方体 U^2,$com(S)\le 2$的子空间。因此，当 |S|>4时，$com(S)\le 2+|S|-4=|S|-2$。定理得证。
□

回顾p-分块空间的定义

p-分块空间的定义。

空间$K(n_1, n_2,... n_p)$称为p-分块的，若它可表示为p个完全不相交空间 $H(n_1)$、$H(n_2)$...$H(n_p)$之和，$K(n_1,n_2,...n_p)= H(n_1)\oplus H(n_2)\oplus...\oplus H(n_p)$。

定理148

设 $K(n_1,n_2,...n_p)= H(n_1)\oplus H(n_2)\oplus...\oplus H(n_p)$ 是一个 p部空间，其中任意 $n_k>1$。那么 com(K(n
$=\lceil \quad _{2\ 1}\rceil+\lceil \quad _{2\ 2}\rceil+\ +\lceil \quad _{2\ p}\rceil$
n)) com(H(n) H(n) ... H(n)) logn log n ... log n 。

证 明。

根据前面的定理，空间 H(n) 可表示为坐标矩阵 A(H(n))，该矩阵有 $\lceil \log_2 n_1 \rceil$ 列和 n 行。构造矩阵 $A(K(n_1,n_2,...n_p))$，它由块 $A_1=A(H(n_1))$、$A_2=A(H(n_2))$、$...A_p=A(H(n_p))$ 组成，其中所有不属于这些块的元素均为 1（图 154）。容易看出，这个矩阵

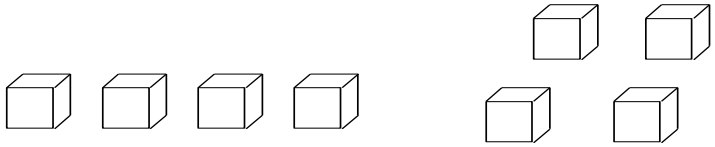


图 155 空间 H(4) 的砖性为 1，紧致性为 2。

有 $\lceil \log_2 n_1 \rceil + \lceil \log_2 n_2 \rceil + ... + \lceil \log_2 n_p \rceil$ 列，是空间 $K(n_1,n_2,...n_p) = H(n_1) \oplus H(n_2) \oplus ... \oplus H(n_p)$ 的坐标矩阵。定理得证。□

引入砖块作为通用建筑元素的一些直观论证

读者中，尤其是数学家，可能会产生这样的疑问：为什么必须引入某种无限维砖块？原则上，它们不过是分子空间中点的一种图示。我们将在此阐述我们的理念，这一理念可以称为物理的或实验的（我们已经描述过计算机实验），它无非是对离散空间研究方法的解释。本书将呈现这一理念，并尽可能详尽地加以说明。

首先，让我们来看看描述二维曲面的经典数学方法。数学家认为，球面就是二维曲面的一个例子，其厚度和体积均为零。平面片也属于二维曲面，平面厚度为零，平面片的体积也为零。换言之，在数学中，二维曲面的厚度（和体积）均为零。

然而，也存在另一种观点。从学生时代起，我们就知道，所有立体都是由分子构成的。任何物质球体的曲面都是由分子构成的外层。因此，这个曲面具有非零厚度。该曲面的物理厚度等于一个分子的直径。在一道中学物理习题中，要求求出水面上油膜的最大面积。其中隐含的假设是，最小厚度

薄膜的厚度也等于一个分子，但并非为零。换言之，自然界中不存在零厚度的二维曲面。我们的方法恰恰反映了这一规律，并将其引入数学和应用领域。

我们可以认为，除相差一个非零常数比例系数外，二维曲面的最小厚度等于单位长度。

另一方面，该曲面在多大的厚度下仍然保持二维？在这种方法的框架内，这个问题的答案同样简单明了。要形成三维空间，必须至少有一些

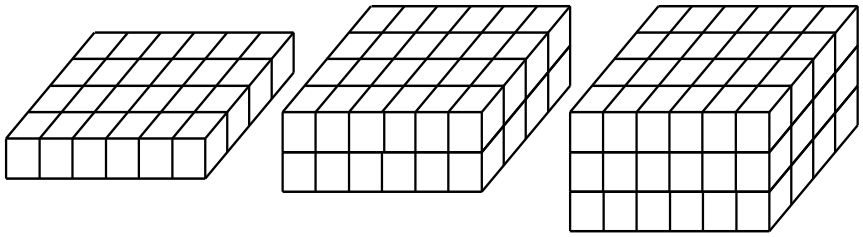


图156 二维曲面的厚度可以为一或二，并由一层或两层组成。三层已经形成三维空间。三层将构成三维空间，因为中间层的每个点都有一个包含二维球面的邻域。

点是三维的。取若干层由砖块构成的二维平面，并按照图156所示，将它们依次叠放在一起。我们来确定需要叠放多少层才能得到三维点。

容易看出，图 156 所示的两层空间仍然是二维的，因为每个点的邻域中都有一维圆周，但没有二维球面。然而，图 156 所示的三层已经构成三维空间，因为中间层的每个点都有一个包含二维球面的邻域。因此，二维曲面的厚度可以是一或二，并由一层或两层组成。三层则构成三维空间。我们可以认为，除去一个非零常比例因子，二维曲面的厚度等于一或二。三维（以及任意 n 维）层的最小厚度等于三，其中中间层由三维（n 维）点组成，而两个外层包含二维（(n-1) 维）点。因此，可以将 n 维层构造成三个粘合在一起的 (n-1) 维空间层，粘合方式与前面类似。

第12章参考文献列表。

3 Evako A., Kopperman R., Mukhin Y., 图与数字空间的维数性质，《数学成像与视觉期刊》，第 6 卷，第 109-119 页，1996年。 7 Evako A.V., 离散空间上的维数，《国际理论物理学杂志》，第 33 卷，第 1553-1568 页，1994年。 14 Evako A.V., 正规数字 n 维空间在 n 维欧几里得空间 En 中由盒族表示，第十一届一般拓扑学及其应用暑期会议，纽约，1995年。 20 Gilmore P.C., Hoffman A.J., 可比图和区间图的刻画，《加拿大数学杂志》，第 16 卷，第 539-548 页，1964年。 21 Golumbic M.C., 算法图论与完美图，Academic Press，纽约，1965年。 26 Ivashchenko (Evako) A.V., 用图表示光滑曲面。保持图的欧拉示性数不变的图变换，《离散数学》，第 122 卷，第 219-233 页，1993年。 27 Ivashchenko (Evako) A.V., 图的坐标表示与半径 1 的 n 通用图，114，1993 120，107 《离散数学》，第 卷，第 - 页。 43 Ивако A.B., 分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用，莫斯科，1997年。 45 Иващенко A.B., 分子空间的嵌入，ВИНИТИ，莫斯科，第 6421-84 号，1984年。 46 Иващенко A.B., 图的几何映射，《控制论》，5，120 121，1988-。（苏联）。 49 Иващенко A.B., 分子空间的变换，ВИНИТИ，莫斯科，第 2345-85 号，1985年。 51 Иващенко A.B., 分子空间的拓扑性质，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984年。

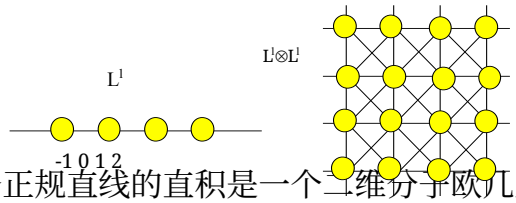
分子模型 N-维欧几里得空间

本章将介绍并研究视为 n 维欧几里得空间 E^n 的分子模型。n维欧几里得分子空间是指其点为具有整数坐标的 E^n 中的点的分子空间。这些点之间的连接决定了模型的维数及其他特征。我们将研究齐次正规、齐次正则及其他分子模型。

本章的部分研究结果已发表在文献[3,4,7,11,12,13,14,26,42,43]中。

齐次完备欧几里得分子空间

我们将考察一个 n 维欧几里得空间的分子模型，它在性质上最接近连续平面空间。该模型具有齐次性，即其中各点的邻域是同构空间。该空间是各向同性的，并且可以嵌入一个有限分子空间。此类空间的性质在两个或更多空间的直积下保持不变。这种空间的一个重要性质是，它允许采用类似于平面空间的坐标表示，这使得



2. 3. 图 1 两条正规直线的直积是一个二维分子欧几里得空间。

以自然的方式在其上引入经典模型中使用的代数和几何构造。该空间上的度量，与任何分子空间一样，可以自然地定义。这个空间是此前讨论过的通用分子空间的子空间，因此通用分子空间的许多性质都适用于它。此外，通过从该空间中逐点舍弃连接，可以得到此前已知的所有离散空间。我们从定义开始。众所周知，由无限多个一维点组成的正规连通空间，

将是正常的无限直线

分子n维完备欧几里得空间L^n

分子 n 维完备欧几里得空间 L^n 称为 n 个一维正规直线 L^1, $L^n=L^1\otimes L^1\otimes...\otimes L^1$的直积。用整数 0, ±1, ±2, ±3,... 表示一维直线 L^1 上的点。考虑直积 $L^n=L^1\otimes L^1\otimes...\otimes L^1$。我们将整数序列 $(s_1,s_2,..s_n.)=[s_k]$, k=0, 1,...n 视为点 $v=s_1\otimes s_2\otimes..\otimes s_n$的坐标。

定理 149

欧几里得 n维空间 L^n 是由点 $v=(s_1,s_2,..s_n.)=[s_k]$, k=0,1,...n 组成的集合，这些点在 n维欧几里得空间 E^n中具有整数坐标 s，并且若两点 $v_1=[sk]$ 和 v2=[mk] 对应坐标之差的绝对值中的最大值等于 1，则称这两点相邻,

$$D(v_1,v_2) = \max|s_k - m_k|=1,\ k=0,1,...n.$$

证　明。

用整数 0, ±1, ±2, ±3,... 表示一维直线 L^1 上的点。当 n=2 时，定理显然成立，这可由图 1 和图 157 得出。考虑直积 $L^n=L^1\otimes L^1\otimes...\otimes L^1$。它包含点 $v=(s_1, s_2,..s_n.)=[s_k]$，k=0,1,...n，这些点具有整数坐标。根据直积的定义，任一点的球，例如 $v_1=(0,$

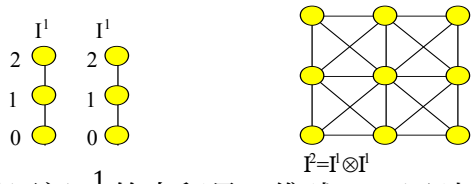


图 157 两个一维范数区间 I^1 的直积是二维球 I_2，同时也是通用二维立方体。

$0,..0)$由一些点组成，这些点的第一坐标属于点 0 的一维球 $I^1(s_1)=I^1(0)$，第二坐标属于点 0 的一维球 $I^1(s_2)=I^1(0)$，依此类推，第“n”个坐标属于点 0 的一维球 $I^1(s_n)=I^1(0)$。显然，点 $v_1=(0, 0,..0)$ 的球由坐标取值为 0, ±1 的点组成。这意味着，所有与点 $v_1=(0, 0,..0)$ 相邻的点，以及

只有这些点满足条件 $D(v_1,v_2) = \max|s_k - m_k|=1, k=0,1,...n$。对于 L^n 中任意一点，结论同样成立。定理得证。..□ 图 1 展示了二维欧几里得空间。根据直积的性质，直积中任意一点的球可表示为 $U(v_k\otimes u_p...\otimes w_s)=U(v_k)\otimes U(u_p)...\otimes U(w_s)$，也就是说，它是各点的球的直积。就本例而言，这意味着 n维欧几里得空间 L^n 中任意一点的球，都是由三个点构成的一维线段的 n 个副本的直积（图 157）。按照惯例，将 n维欧几里得空间 L^n 中点 v 的球记为 I^n。空间 L^n 具有一些重要特性，使它与连续的欧几里得空间极为相似。我们试着探讨其中一些最有趣的性质。

定理150

空间 L^n 是齐次的。证 明。

空间的齐次性源于其定义，即它是 n 个正规一维直线 L^1，的直积，而后者自然是齐次的。点 v_0 的邻域（其坐标为 (0,0,...0)）由坐标为 0、1、-1 的点组成。所有点的邻域形式相似，与点 v_0 的坐标相比，每个坐标上相差一个常数项。$O(v)э(x_1+a_1,x_2+a_2,...x_n+a_n)$，其中 $O(v_0)э(x_1, x_2,...x_n)$。定理得证。□

定理151

空间 L^n 中任意一点的邻域与 (n-1) 维球面 S^{n-1} 同伦等价，并且包含最小球面 S_0^{n-1} 作为其子空间。证明。拓扑上，任意邻域的结构形式为 $O(v)=(x_1\otimes x_2\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes O(x_n))\oplus(x_1\otimes x_2\otimes...\otimes O(x_{n-1})\otimes x_n)\oplus...\oplus(O(x_1)\otimes x_2\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes x_n)\cup B$，其中 B 中的所有点都可以通过点变换舍去。子空间 $(x_1\otimes x_2\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes O(x_n))\oplus(x_1\otimes x_2\otimes...\otimes O(x_{n-1})\otimes x_n)\oplus...\oplus(O(x_1)\otimes x_2\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes x_n)$定义如下：$(x_1\otimes x_2\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes O(x_n))\oplus(x_1\otimes x_2\otimes...\otimes O(x_{n-1})\otimes x_n)\oplus...\oplus(O(x_1)\otimes x_2\otimes...\otimes x_{n-1}\otimes x_n)\approx O(x_n)\oplus O(x_{n-1})\oplus...\oplus O(x_1)=S^0\oplus S^0\oplus...\oplus S^0=S_0^{n-1}$。容易看出，属于包含在点 v_0= (0,0,...0) 的邻域中的 S_0^{n-1} 的点由坐标矩阵确定。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

定理已证。□

定理1

通过点变换，空间 L^n 可以收缩为标准n维欧几里得空间。

证 明。
证明是相应的任意正规空间直积定理的推论。□□ 我们再指出几个此前已经讨论过的显然性质。

注 释

- n维欧几里得空间 L 中点 v 的球 $I^n(v)^n$ 是

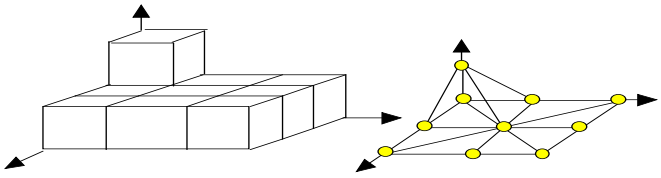


图 2 砖块通用空间与分子通用空间之间的同构。

由 n 个三点一维线段组成的直积（图 157）。$I^n(v)=I^1\otimes I^1 \dots \otimes I^1$。

- n维欧几里得空间 $L^nI^n(v)=I^1\otimes I^1 \dots \otimes I^1$ 中任意点 v 的球都是一个通用 n 维立方体，可以将任何由 (n-2) 个点组成的分子空间嵌入其中。n维欧几里得空间 L^n 中点 v 的球 $I^n(v)$ 是一个通用分子 n 维立方体 U^n。• 空间 L^n 中任意一点的邻域都不同伦等价于任何 n 维正规闭空间。

这些性质由先前证明的定理得出。
图 2 展示了 L^n（即分子空间 $M(E^n)$）与砖块空间 $B(E^n)$ 之间的同构。

定理152

L^n 是通用无限维点空间的子空间。

证 明。该定理是通用坐标无限维空间性质的推论。□

B L n 上的向量代数。

在 L^n 上自然地定义了向量代数，即坐标为整数的向量集合。这使得我们能够定义与向量相关、且在连续情形中存在的所有标准结构。向量上的一些标准运算也可以自然地定义，例如向量长度（定义为向量坐标绝对值中的最大值）、内积等。

齐次正规在线*a* 欧几里得式的分子空间

一般来说，欧几里得空间存在多种分子模型，其中既有正规模型，也有非正规模型。我们将介绍其中具有特定性质或已在科学文献中研究过的模型，并给出分子模型生成算法。

考虑一个分子正规欧几里得空间，其中任意两个点的邻域都是同构子空间。我们将这个空间引入为 n 维欧几里得空间的离散正规齐次模型。需要指出的是，

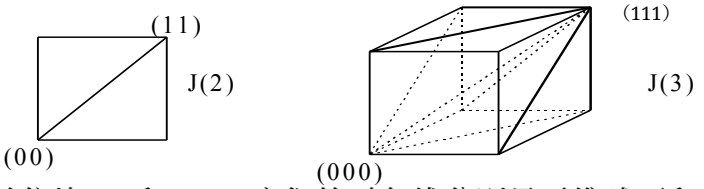


图 158 结构单位块J(2)和J(3)。它们的对角线分别是零维球面和1维球面。

此前讨论过的空间 L^n 并非正规空间。首先，我们来考察一种特殊空间的性质：该空间由 n 个由两个点组成的 K(2) 连接的直积去除点关联后得到。下面给出这个空间的定义。

结构单位块J(n)（СЕБ-1）的定义。

设 K(2) 是由两个相邻点 0 和 1 组成的边。引入直积 $(K(2))^n=K(2)\otimes K(2)...\otimes K(2)$，并舍弃除点 $v=(v_1,v_2,...v_n)$ 和 $u=(u_1,u_2,...u_n)$ 之间的边以外的所有连接，其中这些点满足条件 $v_k\le u_k$，k=1,2,..n，或者

$v_k \geq u_k$，k=1,2,..n。所得空间称为结构单位块 J(n)（СЕБ-1）。我们规定，当 $v_k \leq u_k$ 时，$v \leq u$。在图158中展示了 J(2) 和 J(3)。从该图可以看出，如果去掉具有全零坐标和全一坐标的两个点，那么所得空间就是零维和一维正规球面。我们将证明，这一性质对任意 n 都成立。

结构单位块的对角线定义J(n)（结构单位块-1）。对角线D(n) 结构单位块J(n)称为

я

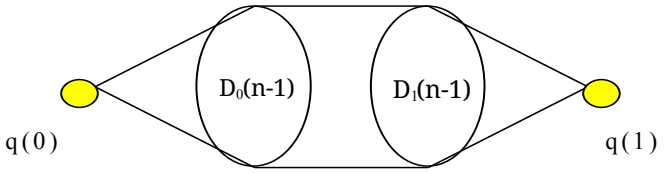


图 3 对角线 D(n) 的构造，它是一个 (n-2) 维正规球面。

从 J(n) 中删去所有坐标均为零和所有坐标均为一的两个点后得到的空间。$D(n)=J(n)- p_0(0,0,..0)-p_1(1,1,..1)$。

定理 2

1. $|J(n)|=2^n$. 2. $|D(n)|=2^n-2$. 3. J(n) 是一个点空间，即以 $p_0(1,1,...1)$ 和 $p_1(0,0,...0)$ 为顶点的锥。4. 如果 $v \leq v_1$ и $v_1 \leq v_2$, то $v \leq v_2$ ($v \geq v_1$ и $v_1 \geq v_2$, то $v \geq v_2$).

证　明。
前两个性质显然。第三个性质源于：对于 J(n) 中任意一点 v，都满足关系 $p_0(0,0,..0) \leq v \leq p_1(1,1,..1)$。因此，$p_0$ 和 p_1 与空间中的所有其他点都相邻。为证明第四个性质，取点 $v_1=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 b_k。如果 $v \leq v_1$, то $v=(a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)$，如果 $v_1 \leq v_2$, то $v_2=(c_1,c_2,...c_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $c_k=0,1$。由此可见，$v \leq v_2$。□

定理153

结构单位块J(n)的对角线D(n)，n>1，是一个正规(n-2)维球面S^{n-2}。

证 明。对于n=2,3，这个定理显然成立（图3）。我们使用归纳法。设定理对于D(k)，k<n成立。考察D(n)。取D(n)中的任意一点$v_1=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有$a_s=0$、所有$b_k=1$，$s>1$，$t>1$。那么O(v)由点$v\le v_1$, $v=(a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)$和$v_1\le v_2$,$v_2=(c_1,c_2,...c_s,b_1,b_2,...b_t)$组成，其中所有$c_k=0,1$。显然，所有点v构成对角线$D(s)=S^{s-2}$，所有点$v_2$ 构成对角线$D(t)=S^{t-2}$。由于所有点v都与所有点v_2, 相邻，因此$O(v)=D(s)\oplus D(t)=S^{s-2}\oplus S^{t-2}=S^{s+t-3}=S^{n-3}$。对于坐标中含有s个零和t个1的任意点，情况也相同。取D(n)中的一点v_1，$v_1=(a_1,b_2,...b_n)$，其中$a_1=0$，所有$b_k=1$。那么O(v)由点$v\le v_1$, $v=(a_1,c_2,...c_n)$组成，其中所有$c_k=0,1$。显然，所有点v构成对角线$D(n-1)=S^{n-3}$。对于坐标中仅含一个零或一个1的所有点，情况也相同。因此，D(n)中每个点的边界都是正规球面$=S^{n-3}$，也就是说，D(n)是一个正规的(n-2)维闭空间。

证明现在 D(n) 是一个正规 (n−2)维球面。从 D(n) 中选出两个点 q(0)=(0,1,1,...1) 和 q(1)=(1,0,0,...0)。与点 q(0) 相邻的点 v，由坐标 $v=(0,c_2,...c_n)$ 确定，其中所有 $c_k=0,1$, $0<c_2+c_3+...c_n<n-1$。与点 q(1} 相邻的点 v_2, ，由坐标 $v_2=(1,c_2,...c_n)$ 确定，其中所有 $c_k=0,1$, $0<c_2+c_3+...c_n<n-1$。点 v 构成对角线 $D_0(n-1)$，其所有点都与 q(0) 相邻，而与 q(1) 不相邻。同理，点 v_2 构成对角线 $D_1(n-1)$，其所有点都与 q(1) 相邻，而与 q(0) 不相邻。所得结构如图 3 所示。

现在证明，点 q(0) 可以通过点变换与子空间 $D_1(n-1)$ 的所有点相连，而子空间 $D_0(n-1)$ 的所有点随后都可以舍弃。考虑点 $O(q(0)v_2)$ q(0) 与某一点的公共边界。

$v_2=(1,a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$ 属于 $D_1(n-1)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $b_k=1$、$s>0$、$t>0$。显然，$O(q(0)v_2)$ 是一个属于 $D_0(n-1)$ 的子空间，由点 $v_1\le q(0)$、$v_1\le v_2$ 组成。因此，
$O(q(0)v_2)\ni v_1(0,a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)$, 其中所有 $c_k=0,1$, $0<c_2+c_3+...c_t$。这是一个点子空间，即以 $v_0(0,a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$ 为顶点的锥。基于此，我们可以将 $D_1(n-1)$ 中只有一个零坐标的所有点与点 q(0) 相连。然后，将 $D_1(n-1)$ 中只有两个零坐标的所有点与点 q(0) 相连。假设我们已经将具有少于 s 个零坐标的所有点与点 q(0) 相连。

取 $D_1(n-1)$ 中任意一点 $u(1,a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，它有 s 个零坐标，并且与 $q(0)$ 不连接。公共邻域 $O(q(0)u)=A\cup B$，其中 $A= O(q(0)u)\cap D_0(n-1)$，$B= O(q(0)u)\cap D_1(n-1)$。显然，$A\ni v_1(0,a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)$，其中所有 $c_k=0,1$，$0<c_2+c_3+...c_t$；$B\ni v_2(1,c_1,c_2,...c_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $c_k=0,1$, $0<c_1+c_2+...+c_s,<s$。此时，点 $v_0(0,a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$ 与 A 和 B 中的所有点都相邻。因此，子空间 $O(q(0)u)$ 是一个点子空间，具体来说，是以 $v_0(0,a_1,a_2,...a_s, b_1,b_2,...b_t)$ 为顶点的锥，因此可以建立点 $q(0)$ 与 u 之间的连接。由于 $D_1(n-1)$ 中任意两个恰有 s 个零坐标的点都不相邻，因此可以同时建立点 $q(0)$ 与所有这类点之间的连接。这样，子空间 $D_1(n-1)$ 中的所有点都可以与点 $q(0)$ 连接。之后，子空间 $D_0(n-1)$ 中的所有点都可以舍弃，因为它们的点邻域是锥。所得空间 H 是零维球面 $S^0(q(0),q(1))$（由两个不相邻点 $q(0)$ 和 $q(1)$ 组成）与子空间 $D_1(n-1)$（一个 $(n-3)$ 维球面 S^{n-3}）的直和，$H=S^0\oplus S^{n-3}=S^{n-2}$。因此，原空间 D(n) 也是一个 $(n-2)$ 维正规球面。定理得证。□ 我们研究 СЕБ-1 的性质，是因为它们决定了正规齐次欧几里得空间的性质，我们现在将给出它的定义。

正规齐次欧几里得空间的定义

分子正规齐次 n 维欧几里得空间 R^n，是指这样一种空间：其中每个点 v 都由一组 n 个整数坐标 $v=(s_1,s_2,..s_n.)=[s_k]$，$k=0,1,...n$ 确定；且其中两点 $v_1=(s_1, s_2,..s_n)=[s_k]$ 和 $v_2=(r_1, r_2,..r_n)=[s_k]$相邻，当且仅当 $|s_k-r_k|\le 1$，$s_k\le r_k$，$k=0,1,...n$。并且，我们规定 $v_1\le v_2$。

虽然我们称这个空间为正规空间，但我们还需要证明，该空间中每个点的邻域都是一个正规的 $(n-1)$ 维球面。图159展示了二维空间 R^2。

定理154

空间 R^n 中每个点的边界都是一个标准的（n−1）维球面 S^{n-1}。

Д 证　据。

对于 n=2，这个定理显然成立。使用归纳法。设定理对 R^k，k<n 成立。考虑 R^n。由于空间是齐次的，只需证明该定理对坐标为 (0,0,...0) 的点 v_0 成立。根据空间的定义，该点的邻域 $O(v_0)$ 包含点 $v=(a_1,a_2,...a_n)$，其中所有 a_s=0,1,-1，且满足条件 $v_0 \le v$，或 $v \le v_0$。由此可见，$O(v_0)=A \cup B$，其中 A 由点 v_1, $v_0 \le$构成，v_1, B 由点 v_2, $v_2 \le$构成，v_0。因此，$A=\{v_1=(c_1,c_2,...c_n)\}$，其中所有 c_k=0,1；$B=\{v_2=(d_1,d_2,...d_n)\}$，其中所有 d_k=0,-1。显然，$O(v_0)$ 中没有任何一点同时含有坐标 1 和 (-1)。下面证明，邻域 $O(v_0)$ 中的任意一点都有一个邻域，该邻域是一个法向闭的 (n−2)维球面。

设 $v_1=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t) \in A$，其中所有 a_k=0，所有 b_k=1，s>1，t>1。点的任何其他排列顺序，都可以通过简单地重新标记坐标，在不改变点的邻接关系的情况下化为上述形式。于是

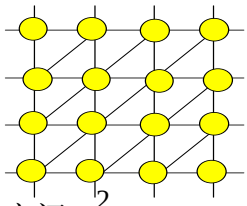


图159 二维正规齐次欧几里得空间 R^2.

$O(v_0v_1)=\{v=(d_1,d_2,...d_s,0,0,...0)\} \cup \{v=(c_1,c_2,...c_s,1,1,...1)\} \cup \{v=(0,0,...0,c_1,c_2,...c_t)\}=C \cup D \cup E$，其中所有 c_k=0，1，所有 d_k=0，-1。显然，由点 $C \cup D=\{v=(d_1,d_2,...d_s,0,0,...0)\} \cup \{v=(c_1,c_2,...c_s,1,1,...1)\}$组成的子空间，是 R^s中零坐标点的邻域。根据归纳法，该子空间是正规的 (s-1)维球面 S^{s-1}。子空间 $C=\{v=(0,0,...0,c_1,c_2,...c_t)\}$是正规的 (t-2)维球面 S^{t-2}，因为它是 J(t)中的对角线。此外，S^{s-1}中的每个点都与 S^{t-2}中的每个点相连。因此，$O(v_0v_1)=S^{s-1} \oplus S^{t-2}=S^{s+t-2}=S^{n-2}$。现在，考虑点 $v_1=(b_1,b_2,...b_n)$，其中所有 b_k=1。$O(v_0v_1)=\{v=(c_1,c_2,...c_n)\}$，其中所有 c_k=0，1。该子空间是正规的 (n-2)维球面 S^{n-2}，因为它是 J(n)中的对角线。由此可得，$O(v_0)$的每个邻域都是正规的 (n-2)维球面，也就是说，$O(v_0)$是正规的 (n-1)维闭空间（流形）。

现在证明，$O(v_0)$ 是一个法向 (n−2) 维球面 S^{n-1}。为此，我们将说明，点 u=(1,1,...1) 可以通过点变换与子空间 $B=\{v_2=(d_1,d_2,...d_n)\}$ 中的所有点相连，其中所有 d_k=0 均为 -1；然后再说明子空间中的所有点

A 可以舍去，因为它们具有可缩的点邻域。先将点 u 与 B 中所有恰有一个坐标为 (-1) 的点连接起来。然后将点 u 与 B 中所有恰有两个坐标为 (-1) 的点连接起来。假设我们已经将点 u 与 B 中所有少于 s 个坐标为 (-1) 的点连接起来。考虑点 u 与恰有 s 个坐标为 (-1) 的点 v 的公共边界，$v=(d_1,d_2,...d_s,0,0,...0)$，其中所有 $d_k==-1$。那么 $O(uv)=F\cup G=\{v=(d_1,d_2,...d_s,0,0,...0)\}\cup\{v=(0,0,...0,c_1,c_2,...c_t)\}$，其中所有 $d_k=0=-1$，$0<d_1+d_2+...+d_s<=s$，所有 $c_k=0=1$。显然，F 由子空间 B 中那些已建立连接的点组成。也清楚，O(uv) 是一个可缩空间，具体而言，是以 $w=(0,0,...0,e_1,e_2,...e_t)$ 为顶点的锥，其中所有 $e_k=l=1$。因此，可以在 u 和 v 之间建立可缩连接。由于任意两个恰有 s 个坐标为 (-1) 的点都不相邻，可以同时将点 u 与所有这样的点连接起来。将点 u 与 B 中除点 $w=(-1,-1,...,-1)\in$ 以外的所有点连接起来。考虑任意一个不等于 u 的点 $v=(c_1,c_2,...c_s,1,1,...1)$ 的邻域，其中所有 $c_k=0=1$，且该点属于 A。每个这样的点的邻域都是以 $u=(1,1,...1)$ 为顶点的锥。因此，A 中的任意点都可以舍去。所得空间 H 由两个不相邻的点 u 和 w 组成，它们各自都与子空间 $B=\{v_2=(d_1,d_2,...d_n)\}$ 中的所有点相连，其中所有 $d_k=0=-1$，$0<d_1+d_2+...+d_n)<n$。显然，B 是对角线 $D(n)=S^{n-2}$。因此，$H=S^0(u,w)\oplus D(n)= S^0(u,w)\oplus S^{n-2}=S^{n-1}$。因此，原空间 $O(v_0)$ 也是一个 (n-1) 维正规球面。定理得证。□下面考察空间 R^n 的一些性质。

定理 3

空间 R^n 中任意点的邻域 O(v) 的体积为 2^{n+1}-2，$|O(v)|=|S^{n-1}|=2^{n+1}$-2. 证明。对于 n=2，这个定理显然成立。考虑 R^n。由于空间是齐次的，只需证明该定理对坐标为 (0,0,...0) 的点 v_0 成立。根据空间的定义，该点的邻域 $O(v_0)$ 包含点 $v=(a_1,a_2,...a_n)$，其中所有 $a_s=0$，1，-1，且满足条件 $v_0\le v$，或 $v\le v_0$。由此可见，$O(v_0)=A\cup B$，其中 A 由点 $v_1, v_0\le$组成，B 由点 $v_1, v_2, v_2\le$组成。因此，$A=\{v_1=(c_1,c_2,...c_n)\}$，其中所有 $c_k=0$，1；$B=\{v_2=(d_1,d_2,...d_n)\}$，其中所有 $d_k=0$，-1。显然，子空间 A 的体积等于 2^n-1, $|A|=2^n$-1。

子空间 B 的体积同样为 $|B|=2^n-1$。A 和 B 没有公共点。因此，$|O(v_0)|=|A\cup B|= O(v_0)=|A|+|B|=2^{n+1}-2$。定理得证。□ 再证明一个定理，它揭示了完备空间 L^n 与正规空间 R^n之间的连接。

定理155

完备欧几里得空间 L^n 通过点删除连接收缩为正规空间 R^n（图 4）。

证 明。

考察 L^n。在 L^n 中选取两个相邻点 u 和 v，使得它们的拓扑坐标不满足关系式 v≤u、u≤v 中的任何一个。为简单起见，设点 v 的几何坐标为 $v=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $b_k=1$;

$u=(b_1,b_2,...b_p,a_1,a_2,...a_q)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $b_k=1$，$p>s$，$q<t$。L^n 中这些点的公共边界 $O(uv)=\{w=(d_1,d_2,...d_s,c_1,c_2,...c_r,e_1,e_2,...e_m)\}$，其中所有 $d_p=0$、1、所有 $c_k=0$、1、2、所有 $e_k=0$、1、r=p-s、m=n-p。显然，该子空间是一个以 $v_0=(1,1,..1)$ 为顶点的锥，并且对于 O(uv) 中的任意点，$w\le v_0$。因此，可以删除点 u 和 v 之间的连接。由于删除连接不会改变点之间的序关系，因此在任意步骤中，对于不满足关系式 v≤u、u≤v 的任意一对相邻点，它们的公共边界都是一个锥。这样一来，可以删除所有不满足关系式 v≤u、u≤v 的相邻点之间的连接，最终得到空间 R^n。定理得证。□

非齐次正规分布 欧几里得分子空间

非齐次正规欧几里得分子空间似乎有无穷多个。若要确定一种特殊类型的空间，就必须引入额外限制。作为一个非齐次空间的例子，我们考虑一种分子空间：在二维和三维情形下，它的外观类似于所谓的两个和三个连通有序拓扑空间（COTS）的拓扑积。有序拓扑空间（COTS）由哈利姆斯基提出，作为一维欧几里得空间的离散模型。两个和三个 COTS 的拓扑积被视为二维和三维欧几里得空间的分子模型，并由威尔逊、迈耶、Конг、Копперман、哈利姆斯基等人加以研究 [30,31,32,33,34,35]。在

上述模型框架内，针对二维和三维证明了乔丹定理的离散对应物。这种方法的缺点在于，尽管一维空间 COTS 是一个全序集合，二维及更高维的模型却变成了偏序集合，因此点之间会出现大量不同类型的关系（例如，两点之间的各种邻接关系）。而且，随着维数增加，不同类型的数量也会增加。分子空间与 COTS 类型空间的根本区别在于，分子空间中不存在序关系，而序关系正是定义 COTS 类型空间的基础。

我们先给出定义，并考察分子欧几里得正规非齐次空间 N 的若干性质。

提醒一下，$|s_k| \bmod 2$ 等于 0，当整数 s_k 为偶数时；当 s_k 为奇数时，等于 1。

点$v=(s_1, s_2,..s_n.)$的拓扑坐标定义

点 $v=(s_1,s_2,...s_n)$ 的拓扑坐标 $tv=(t_1,t_2,...t_n)$ 称为数 t_k，其值为 0 或 1，由表达式 $t_k=|s_k| \bmod 2$ 确定。

换言之，如果几何坐标是偶数，那么拓扑坐标为 0；如果几何坐标是奇数，那么拓扑坐标为 1。例如，v=(2,3,4,-5,6)，tv=(0,1,0,1,0)。

分子 n维欧几里得法向非齐次空间 N^n 的定义。

分子欧几里得 n维法向非齐次空间 N^n 是由点 $v=(s_1,s_2,..s_n.)=[s_k]$，k=0, 1,...n 构成的集合，这些点在 n维欧几里得连续空间 E^n中具有整数坐标 s；其中，若满足以下条件，则认为两点 $v_1=[s_k]$ 和 $v_2=[m_k]$ 相邻：

- 其对应坐标之差的绝对值中的最大值等于 1，$\max|s_k - m_k|=1$, k=0, 1,...n
- $tv_1 \le tv_2$, 或 $tv_1 \ge tv_2$ （图161）。

注释

在本节中，我们认为点 $v_1=[s_k]$ 和 $v_2=[m_k]$通过关系 $v_1 \le v_2$, 相连，当且仅当这些点的几何坐标满足关系 $\max|s_k - m_k|=1$, k=0,1,...n，并且点 v_1 的拓扑坐标不超过点 v_2, $tv_1 \le tv_2$的拓扑坐标。

作为示例，考虑三个点：v=(0,0,1,-1,2)、u=(1,-1,3,5,1)、w=(2,-2,2,4,2)，以及 tv=(0,0,1,1,0)、tu=(1,1,1,1,1)、w=(0,0,0,0,0)。于是，v 和 u 不相邻，v 和 w 也不相邻，u 和 w 相邻，且 w≤u。考察在该空间中，至少有多少个点具有彼此不同构的邻域。

定理156

在 N^n 维空间中，至少有 [n/2] 个点具有不同构的邻域，其中 [n/2] 是不超过 n/2 的最大整数。

证 明。

设两个点 $v=(s_1,s_2,...s_n)=[s_k]$，k=0,1,...n，以及 $u=(m_1,m_2,...m_n)=[m_k]$ 的几何坐标相邻，也就是说，它们对应坐标之间的差值中的最大值，取按

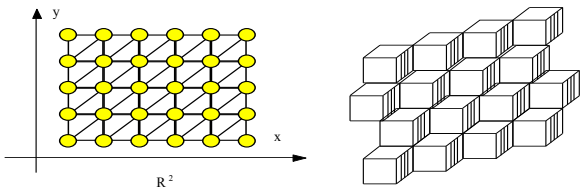


图 4 空间 R^2 及其用砖块搭建的模型。

模的绝对值等于 1，$\max|s_k-m_k|=1$，k=0，1,...n，且 $|s_k| \bmod 2 \le |m_k| \bmod 2$，k=1，2,...n。将每个几何坐标都增加 1。这样，偶数坐标将变为奇数，奇数坐标则变为偶数。表达式 $\max|s_k - m_k|=1$，k=0，1,...n 不变，不等式 $|s_k| \bmod 2 \le |m_k| \bmod 2$，k=1，2,...n 将变为不等式 $|s_k| \bmod 2 \ge |m_k| \bmod 2$，k=1，2,...n。这意味着各点仍然相邻。因此，在拓扑坐标中有 s 个零和 t 个一的点的邻域（s+t=n），与在拓扑坐标中有 t 个零和 s 个一的点的邻域同构。下文只需考虑几何坐标由 0 和 1 构成的点，因为通过改变欧几里得空间中的原点，任何点的几何坐标都可以化为 0 和 1。此外，只需考虑前面的坐标为 0、后面的坐标为 1 的点。这可以通过改变坐标轴的顺序来实现。

在这些变换下，各点之间的联系保持不变。同时，坐标原点总是置于几何坐标为偶数的点上。

设点 v 的几何（和拓扑）坐标为 $v=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $b_k=1$、$s>0$、$t>0$。点 v 的邻域 O(v) 由点 u（$u\le v$）组成，这些点构成子空间 A(s)；还由点 w（$w\ge v$）组成，这些点构成子空间 B(t)。于是 $u=(a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $c_k=0$、1、2、$s>0$、$t>0$；$w=(d_1,d_2,...d_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $d_k=0$、1、-1、所有 $b_k=1$、$s>0$、$t>0$, $|c_1|+|c_2|+...|c_s|>0$,$|d_1|+|d_2|+...|d_t|>0$。显然，$u\le w$。因此，A(s) 中的每个点都与 B(t) 中的每个点相邻。于是 $O(v)=A(s)\oplus B(t)$，$s+t=n$。从这个公式显然可知，不同 s 对应的点的邻域可能不同。考虑到具有全偶数或全奇数几何坐标的点的邻域同构，可得 s 的取值范围为 0 到 n-1。因此，可能不同构的完备邻域数为 n。（下文将证明，所有这些邻域都不同构。）定理得证。□

纯点和混合点的定义

在空间 N^n 中，所有几何坐标

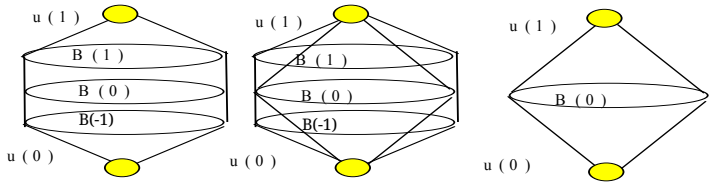


图 160 空间 N_n 中纯点邻域的结构及其向 (n-2) 维标准球面的变换。

均为偶数（奇数）的点称为纯点。其余点称为混合点。纯点的拓扑坐标要么全为 0，要么全为 1。由于所有纯点的邻域都同构，将纯点 v 的邻域记为 $O_P(v)$。对于具有 s 个偶数几何坐标和 t 个奇数几何坐标（或 t 个偶数几何坐标和 s 个奇数几何坐标）的混合点 v，其邻域记为 $O_{st}(v)$。

定理157

围绕空间中的每个点 N^n 都有一个法向的（*n-1*)- 维球面 S^{n-1}，（图160）。

证 明。

对于 n=2，这个定理是显然的。使用归纳法。设定理对 N^k、k<n 成立。考察 N^n。设某个混合点 v 的几何（及拓扑）坐标为 $v=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $b_k=1$，s>0，t>0。该点的邻域 O(v) 由点 u 和点 w 组成，其中 u≤v 且构成子空间 A(s)，w≥v 且构成子空间 B(t)。于是 $u=(a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $c_k=0$、1,2，s>0，t>0；$w=(d_1,d_2,...d_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $d_k=0,1,-1$、所有 $b_k=1$，s>0，t>0，$|c_1|+|c_2|+...|c_s|>0$，$|d_1|+|d_2|+...|d_t|>0$。显然，u≤w。因此，A(s) 中的每个点都与 B(t) 中的每个点相邻。于是 O(v)=A(s)⊕B(t)，s+t=n。空间 A(s) 是空间 N^s中纯点的邻域。同理，空间 B(t) 是空间 N^t中纯点的邻域。因此，$O_{st}(v)= O_s(v)⊕O_t(v)$。根据归纳法，$O_s(v)$ 和 $O_t(v)$ 分别是维数为 (s-1) 和 (t-1) 的正规球面，所以 $O_{st}(v)$ 是 (s+t-1)=(n-1)维正规球面。取一个几何坐标为 (0,0,...0)、拓扑坐标相同的纯点 v（图 161）。首先说明，该邻域中作为子空间的任一点，其自身也具有一个邻域，且该邻域是一个 (n−2)维球面。设 O(v) 中某个混合点 u 的几何（及拓扑）坐标为 $u=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $a_k=0$、所有 $b_k=1$，s>0，t>0。则 O(vu)=A∪B，其中 $A=\{w=(a_1,a_2,...a_s,c_1,c_2,...c_t)\}$，其中所有 $a_k=0$、所有 $c_k=0$、1、$|c_1|+|c_2|+...|c_t|>0$，s>0，t>0，v≤w≤u；$B=\{q=(c_1,c_2,...c_s,b_1,b_2,...b_t)\}$，其中所有 $d_k=0$、所有 $c_k=0$、1,-1、$|c_1|+|c_2|+...|c_s|>0$，s>0，t>0，v≤q，u≤q。由于 A=D(s)（J(s) 中的对角线），$B=O_s(v)$ 且 w≤q，所以 $O(vu)=D(s)⊕O_s(v)=S^{s-2}⊕S^{t-1}=S^{s+t-2}=S^{n-2}$。因此，纯点与混合相邻点的公共邻域 O(vu) 是一个正规的 (n−2)维球面。

设 O(v) 中某个纯点 u 的几何（及拓扑）坐标均等于 1，即 u=(1,1,...1)。那么 $O(vu)=A=\{w=(c_1,c_2,...c_n)\}$，其中所有 $c_k=0,1$，$|c_1|+|c_2|+...|c_n|>0$，v≤w≤u。由于 A=D(n)（J(n) 中的对角线），所以 $O(vu)=D(n)=S^{n-2}$。因此，两个纯相邻点的公共边界 O(vu) 是一个正规的 (n-2) 维球面。由此 O(v) 是一个正规闭 (n−1) 维空间。

现在我们证明，O(v) 的邻域可以通过点变换化为正规的 (n−1) 维球面。将 O(v) 表示为三个子空间的并集：O(v)=u(1)∪B(1)∪B(0)∪B(-1)∪u(-1)，其中 u(1)=(1,0,0,...0)，B(1)={w=(1,c_2,c_3,...c_n)}，其中所有 c_k=0, 1,-1, $|c_2|+|c_3|+...|c_n|>0$，B(0)={w=(0,c_2,c_3,...c_n)}，其中所有 c_k=0,1,-1, $|c_2|+|c_3|+...|c_n|>0$,

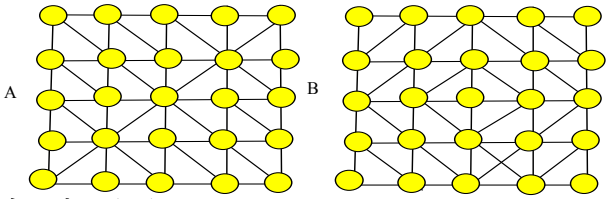


图 162 二维非齐次正规平面。

B(-1)={w=(-1,c_2,c_3,...c_n)}，其中所有 c_k=0,1,-1, $|c_2|+|c_3|+...|c_n|>0$, u(-1)=(-1,0,0,...0)。

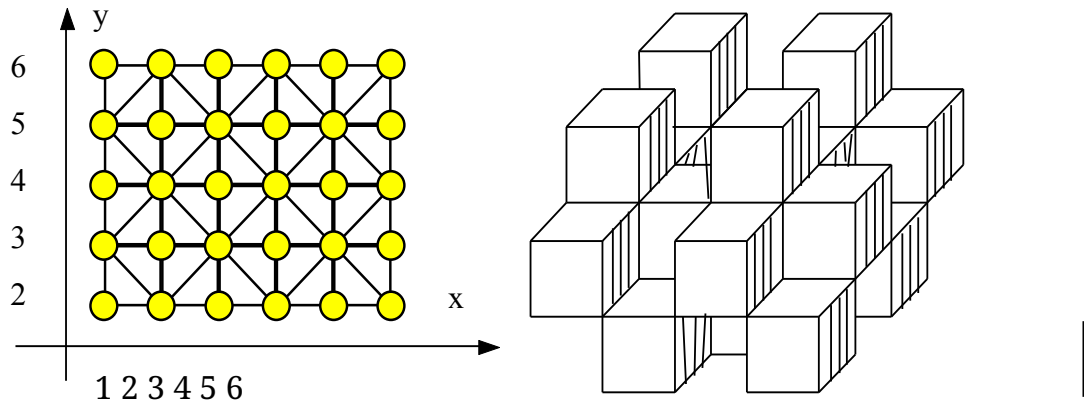


图 161 正规空间 N_2及其砖块模型。

由归纳可知，B(0) 是一个（n−2）维球面。显然，点 u(1) 与 B(1) 中所有点且仅与这些点相邻，点 u(-1) 与 B(-1) 中所有点且仅与这些点相邻，B(1) 和 B(-1) 中的点两两不相邻。我们证明，可以用点连接将点 u(1) 与 B(0) 中所有点连接起来，然后删去 B(1) 中所有具有点邻域的点。

将点 u(1) 与 B(0) 中仅有一个非零坐标的所有点相连，然后与 B(0) 中有两个非零坐标的所有点相连。重复这一过程，将点 u(1) 与 B(0) 中非零坐标少于 s 个的所有点相连。设点 w 属于 B(0)，且恰有 s 个非零坐标，w=(0,a_1,a_2,...a_s,0,0,...0)，其中所有 $|a_k|$=l。于是 O(u(1)w)=C∪D，其中 C⊆B(1)，D⊆B(2)。显然，C={q=(1,a_1,a_2,...a_s,d_1,d_2,...d_t)}，其中所有 d_k=0, 1,-1, $|d_1|+|d_2|+...|d_t|\geq 0$，w≤q,

$u(1)\leq q$。$D=\{p=(0,d_1,d_2,...d_s,0,0,...0)\}$，其中所有 $|d_k|=0,1$, $|d_1|+|d_2|+...|d_s|\geq 0$, 因为 u(1) 已经与这些点相连。容易看出，点 $r=(1,a_1,a_2,...a_s,0,0,...0)\in B(1)$ 与 $O(u(1)w)=C\cup D$ 中的所有点都相邻，因此 O(u(1)w) 是一个锥，可以将点 u(1) 与点 w 相连。由于任意两个恰有 s 个非零坐标的点都不相邻，因此可以同时将所有这类点与点 u(1) 相连。使用这种方法，我们将点 u(1) 与 B(0) 中的每个点相连。之后可以删去 B(1) 中的任意点，因为该点的邻域是以 u(1) 为顶点的锥。同样，也可以将点 u(-1) 与 B(0) 中的每个点相连，并删去子空间 B(-1) 中的所有点。由此得到的

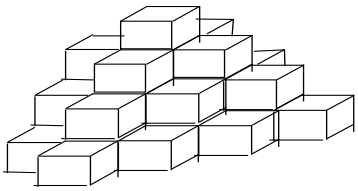


图 163 空间 B 的砖块模型。

空间是由零维球面（由两个不相邻点 u(1) 和 u(-1) 组成）与 (n-2) 维正规球面 $B(0)=S^{n-2}$ 的直和，并且是正规 (n-1) 维球面 $S^0\oplus S^{n-2}=S^{n-1}$。定理得证。□

我们来考察完全空间 L^n 与正规空间 N^n 之间的连接（图161）。

定理158

完全欧几里得空间 L^n 通过逐点删除连接收缩到正规空间 N^n。

证 明。

证明与上一节完全相同。考虑 L^n。在 L^n 中选取两个相邻点 u 和 v，它们的拓扑坐标不满足以下任何一个关系：$v\leq u$、$u\leq v$。为简单起见，设点 v 的几何坐标（也是拓扑坐标）为 $v=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$，其中所有 $a_k=0$，所有 $b_k=1$；$u=(b_1,b_2,...b_p,a_1,a_2,...a_q)$，其中所有 $a_k=0$，所有 $b_k=1$，$p>s$，$q<t$。这两点在 L^n中的公共邻域 $O(uv)=\{w=(d_1,d_2,...d_s,c_1,c_2,...c_r,e_1,e_2,...e_m)\}$，其中所有 $d_p=0,1$，所有 $c_k=0,1,2$，所有 $e_k=0,1$，$r=p-s$，$m=n-p$。显然，这个子空间是一个以 $v_0=(1,1,..1)$为顶点的锥，并且对于 O(uv)中的任意点，都有 $w\leq v_0$。

因此，可以删除点 u 和 v 之间的连接。由于删除边不会改变点之间的序关系，因此在

任意一步中，对于任何不满足关系 $v \le u$、$u \le v$ 的相邻点对，它们的公共边界都是一个锥。因此，可以删除所有不满足关系 $v \le u$、$u \le v$ 的相邻点之间的连接，最终得到空间 N^n。定理得证。□

不同于前面讨论的正规空间 R^n，空间 N^n 是不齐次的。随着空间维数的增加，不齐次程度也会增大。

定理4

- 空间 N^n 具有 $([n/2]+1)$ 个邻域不同构的点，其中 $[n/2]$ 是一个不超过 $n/2$ 的最大整数。• 所有点的邻域都是正规的 $(n-1)$ 维球面。• 具有所有坐标均为偶数或均为奇数的纯点 $v=(a_1,a_2,...a_n)$ 的邻域 $O_p(v)=S_p^{n-1}$ 包含 3^n-1 个点，$|S_p^{n-1}|=3^n-1$。混合点 $v=(a_1,a_2,...a_s,b_1,b_2,...b_t)$ 的邻域 $O_p(v)=S_m^{n-1}$，其中所有 a_k 为偶数、所有 b_k 为奇数，或所有 b_k 为偶数、所有 a_k 为奇数，由表达式 $O_m(v)=S_m^{n-1}=S_p^{s-1}\oplus S_p^{t-1}$ | $S_m^{n-1}|=3^s+3^t-2$, $s+t=n$ 确定。

证　明。
实际上，这个定理是对先前证明前面那些定理时所得结果的总结。□

3.1 欧几里得分子空间的一般构造方法

我们考察了两种由空间 L^n 去掉点关联而得到的欧几里得正规空间。其中一个空间 R^n是齐次的；另一个空间因与 COTS 型空间相似而被考察，是非齐次空间。这些空间展示了从空间 L^n得到正规空间的一种途径：去掉点关联即可得到正规空间。这类空间的分类与研究不在我们的研究范围内，需要另行探讨。下面再介绍两个具有特殊性质的正规二维空间：其中一个是齐次的，其邻域由 5、6 和 8 个点组成；另一个具有中心对称性。这两个空间

如（图 162）所示。空间 B 的砖块模型如图163所示。空间的类型可以推广到任意维数。

第13章参考文献列表。

3 Evako A., Kopperman R., Mukhin Y.,《图与数字空间的维数性质》，数学成像与视觉期刊，第6卷，第109-119页，1996年。4 Evako A., Kopperman R., Mukhin Y.,《数字 n 维空间中任意点的边界是一个离散的 (n-1) 维球面》，《视觉几何 III 》摘要，SPIE 工业应用光子学国际研讨会，美国马萨诸塞州波士顿，1994年。7 Evako A.V.，《离散空间上的维数》，《国际理论物理学杂志》，第33卷，第1553-1568页，1994年。11 Evako A.V., Mukhin Y.V.，《齐次数字 n 维空间》，预印本 SU-GP 94/10-1，雪城大学物理系，美国。12 Evako A.V., Mukhin Y.V.，《关于数字 n 维空间中任意点边界的结构》，预印本 SU-GP 93/7-7，雪城大学物理系，美国。13 Evako A.V., Mukhin Y.V.，《连通有序拓扑空间的维数性质》，预印本 SU-GP 93/7-3，雪城大学，1993年，美国。14 Evako A.V.，《正规数字 n 维空间在 n 维欧几里得空间 En 中的盒族表示》，第十一届一般拓扑学及其应用暑期会议，纽约，1995年。26 Ivashchenko (Evako) A.V.，《用图表示光滑曲面：不改变图的欧拉示性数的图变换》，《离散数学》，第122卷，第219-233页，1993年。30 Khalimsky E., Kopperman R., Meyer P.，《计算机图形学与有限有序集上的连通拓扑》，《拓扑学及其应用》，第36卷，第1-17页，1990年。31 Khalimsky E.，《计算机科学中的拓扑结构》，《应用数学模拟杂志》，第1卷，40，1987年 32 25页。- Kong T., Kopperman R., Meyer P.，《数字拓扑的拓扑学方法》，《美国数学月刊》，第98卷，第901-917页，1991年。33 Kong T., Rosenfeld A.，《数字拓扑：导论与综述》，《计算机视觉、图形与图像处理》，第48卷，第357-393页，1989年。34 Kopperman R., Meyer P., Wilson R.，《三维数字空间的 Jordan 曲面》，《离散与计算几何》，第6卷，第155-161页，1991年。

35 Kovalevsky V.A.，《应用于图像分析的有限拓扑》，《计算机视觉、图形与图像处理》，第46卷，第141-161页，1989年。42 Ивако A.B.，《作为真实物理空间离散基础的分子空间》，《意识与物理实在》，第3卷，第5期，第25-32页，1998年。43 Ивако A.B.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。

构建 连续　　空间　　分子 模型

本章第一部分讨论分子空间与由一族子空间构成的覆盖之间的联系。我们证明了若干定理，确定覆盖的神经复形何时与分子空间本身同伦。随后，我们探讨如何为连续空间构建分子模型。为此，我们定义连续空间的一种特殊覆盖，称为完备覆盖，然后构建该覆盖的神经复形，并证明所有这类覆盖的神经复形都是同伦分子空间。我们扩展完备覆盖的类别，并引入具有与完备覆盖相同性质的覆盖。最后，我们介绍另一种获取连续空间分子模型的方法，该连续空间是欧几里得空间中的一个曲面。本章所述方法可用于计算机，自动构建分子对应物。首先，我们将基本的 Kirpich（及分子）空间定义为一组相同的立方体（块），它们构成欧几里得空间的三角剖分。给定曲面 S，我们筛选出与 S 相交的块，并取这组块的神经复形（交图）。在许多定理所涵盖的大多数情况下，这个神经复形就是 S 的分子模型。

本章中获得的部分结果已发表于文献 [3,4,10,14,16,17,18,26,27,43,51]。

用子空间族正确覆盖分子空间及其性质

为了从数学上论证我们在构建连续多维对象的分子模型时将使用的方法，我们需要考察空间与其子空间覆盖之间的关系。我们希望确定覆盖何时具有与空间本身相同的性质。空间可能由大量点组成，处理这些点需要大量内存和时间。而同一空间的覆盖可能只包含少数几个元素。但是，如果覆盖与空间具有相同的性质，我们就可以处理覆盖中的元素，从而大幅减少所需的计算机内存和处理时间。

首先，我们纯粹形式化地考虑由 G 的子空间族构成的覆盖。

用子空间族覆盖空间的定义。

设有空间 G 及其子空间族F=(G_1,G_2,...Gn)。如果每个点至少属于族F中的一个子空间，则称F为空间 G 的覆盖（cover）。

图 164 展示了空间 G 及其由三个子空间 G_1, G_2 和 G_3 构成的覆盖。构成覆盖的子空间，

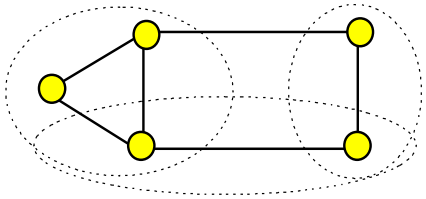


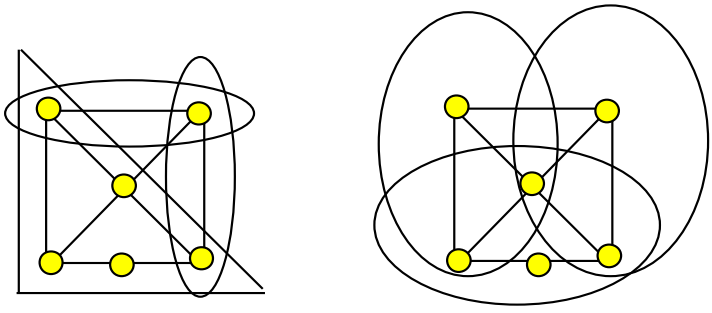
图164：空间 G 及其由三个子空间 G1、G2 和 G3 构成的覆盖。构成覆盖的子空间位于相应的圆圈中。

位于相应的圆圈内。

Буде可以认为，给定了空间 G 及其覆盖 F=(G_1, G_2,...Gn).

.连续子空间族的定义（图 165）。族 F=(G_1, G_2,...Gn) 称为连续的（continuous），如果由条件 可推出。

$$G_{p_1} \cap G_{p_2} \cap \ldots \cap G_{p_r} \neq \varnothing \quad \forall k, m = 1, 2, \ldots\ldots$$



非连续　　连续的

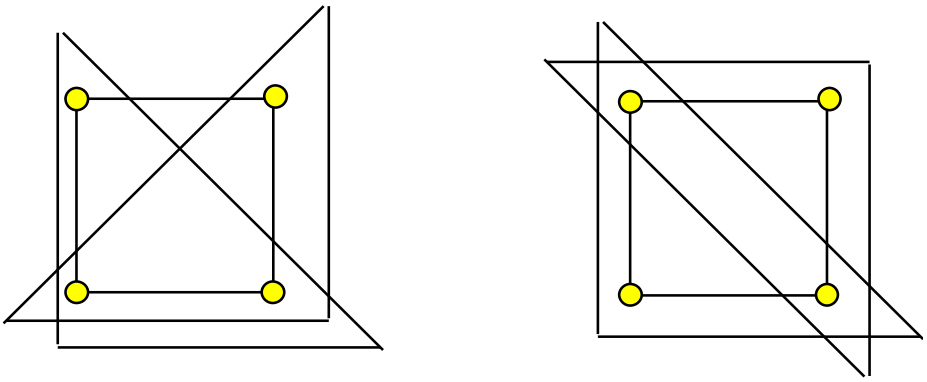
图165：在连续族中，三个子空间两两交集非空，且它们的公共交集也非空，包含一个元素。在非连续族中，三个子空间也两两交集非空，但它们的公共交集为空，不包含任何元素。

图165展示了连续和非连续的族（覆盖）。在连续族中，三个子空间两两相交，且它们的公共交集也非空，包含一个元素。在非连续族中，三个子空间也两两

彼此相交，但它们的公共交集为空，不含任何元素。

可缩子空间族的定义（图166）。

子空间族（或覆盖）F=(G_1,G_2,...G_n)称为可缩的（contractible），如果任意数量的交集



可缩的　　不可缩的

图166 该族包含两个点子空间。在可收缩族中，它们的交集也是一个点子空间，由两个通过连接相连的点组成。在不可收缩族中，交集是一个非点子空间，由两个孤立点组成，即 0 维。

覆盖子空间是可缩的或空的。 或可缩的子空间。

$G\ G\ G_{k\ p\ s}$ ⌈⌉ ⌈⌉... = ∅

根据可缩性定义，可缩空间族的所有子空间都是单点的。下面考察连续子空间族和可缩子空间族的一些简单性质。

定理159

如果族$F=(G_1,G_2,...G_n)$是可缩的，那么 族F的任何子族都将是可缩的。任何族$A=(A_1,A_2,...A_p)$，其中A_k 是来自F的元素的交运算，都将是可缩的。

定理160

若族$F=(G_1,G_2,...G_n)$是连续的，则 族F的任何子族都是连续的。任何族$A=(A_1,A_2,...A_p)$，其中A_k 是F中元素的交运算，都是连续的。

Док这些定理的证明并不复杂，我们就不再列出了。 □

在图166中，族包含两个点子空间。在可收缩族中，它们的交集也是一个点子空间，由两个通过连接相连的点组成。在不可收缩族中，交集是一个非点子空间，由两个孤立点组成，也就是说是零维的

子空间正则族的定义。

如果对于空间 G 中任意点 v 的球 U(v)，都存在该族的一个子空间 G_k，使其包含该点的球与该族所有子空间的并集的交集 $(G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n) \cap U(v) \subseteq G_k$（图167），则称族 $F=(G_1, G_2,...G_n)$ 为正则（regular）的。

应用于覆盖时，这一定义会简化。

由其子空间覆盖空间的定义。若对于空间 G 中任意点的球，都存在覆盖中的一个子空间包含该球，则覆盖 $F=(G_1, G_2,...G_n)$ 称为正则（regular）。

在图167中，在正则覆盖中，任意点的球都属于覆盖的某个子空间。在非正则覆盖中，点a和b的球都不完全属于覆盖的任何一个子空间。覆盖由两个子空间组成。在正则覆盖中，任意点的球都属于覆盖的某个子空间。在非正则覆盖中，点a和b的球都不完全属于覆盖的任何一个子空间。

子空间完备族的定义。

如果一个族 $F=(G_1,G_2,...G_n)$ 是连续、可缩且正则的，则称其为完备（complete）。

利用子空间族，我们将构造几个新的空间，它们具有与原空间相同的性质。

与族 F 对应的空间 G 的膨胀的定义。

设 G、$F=(G_1,G_2,...G_n)$ 和 D 分别为空间、其子空间族，以及一个以 $(d_1,d_2,...d_n)$ 为点的分子空间；其中，F 是其神经（每个顶点 d_κ 对应一个子空间 G_k，且两点 d_k 和 d_p 相邻，当且仅当子空间 G_k 和 G_p 的交集非空，$G_k \cap G_p \neq \varnothing$）。构造空间 V(G,F,D)，其点为 $(v_1,v_2,...v_m,d_1, d_2,...d_n)$，并将 G 和 D 作为其子空间，且

其中，空间 G 和 D 之间的连接由关系 $O(d_k)\cap G=G_k$确定。空间 V(G,F,D)（或 V(G,D)）称为与族 F 对应的 G 的膨胀。

定理 161

设 *G* 和 $F=(G_1,G_2,...G_n)$ 分别为点空间及其子空间的一个可缩的连续族。那么，*V(G,F,D)* 的膨胀将是一个点分子空间。

证明
使用归纳法。对于点数较少的空间，该定理可直接验证。假设该定理成立

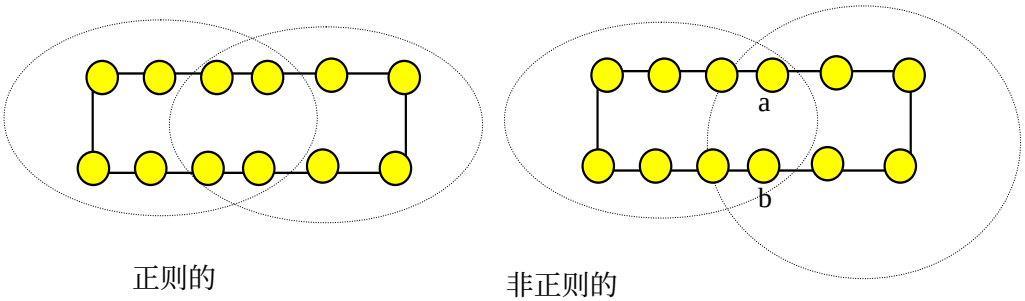


图167 在正则覆盖中，任意一点的球都属于覆盖的某个子空间。在非正则覆盖中，点a和b的球均不完全属于覆盖的任何一个子空间。

对于所有点数小于 n 的空间。设 $|G|=n$。将点 $d_1,d_2,...d_n$ 粘到 G 上，使得 $O(d_k)=G_k.$, $k=1,2,...n$。此时所有点 d_k 均不相邻。所得空间与 G 同伦。若 $O(d_1d_2)\neq\varnothing$，则这个公共边界是一个点，点 d_1 和 d_2 可以用一条边连接。假设我们已经建立了点 $d_1,d_2,...d_{s-1}$之间所有可能的边。将由这些点构成的子空间记为 $H(s-1)=\{d_1,d_2,...d_{s-1}\}$。取点 d_s ，并建立该点与 H(s-1) 中各点 $d_1,d_2,...d_{r-1}\in$之间所需的边。假设 $G_s\cap G_r\neq\varnothing$。那么 $O(d_sd_r)=V(G_s\cap G_r),H(s-1))$ 是在 $G_s\cap G_r$ 上的膨胀。由于 $|G_s\cap G_r|<n$，根据归纳假设，该空间是一个点空间。因此，我们可以连接点 d_s 和 d_r。继续这一过程，建立所有所需的边。由于所有变换都是点变换，所得空间 V(G,D) 与原空间同伦。定理得证。

□
将前面的定理推广到任意空间 G .

定理162

设 G 和 $F=(G_1,G_2,...G_n)$ 分别为任意空间和其子空间的可缩连续族。那么，膨胀 $V(G,D)$ 将同伦于 空间 G。

Д 证明

证明与前一个证明相同。使用归纳法。对于点数较少的空间，可以直接验证该定理。假设该定理对点数少于 n 的所有空间都成立。设 $|G|=n$。将点 $d_1,d_2,...d_n$ 粘到 G 上，使得 $O(d_k)=G_k., k=1,2,...n$。此时所有点 d_k彼此不相邻。所得空间与 G 同伦。如果 $O(d_1d_2)\neq\varnothing$，那么这个公共边界是可缩的，点 d_1 和 d_2 可以通过一条边连接。假设我们已经确定了点 $d_1,d_2,...d_{s-1}$之间所有可能的边。将这些点上的子空间记作 $H(s-1)=\{d_1,d_2,...d_{s-1}\}$。取点 d_s ，并建立该点与 H(s-1) 中的点 $d_1,d_2,...d_{r-1}\in$之间所需的边。假设 $G_s\cap G_r\neq\varnothing$ ，因此它是一个可缩空间。那么 $O(d_sd_r)=V(G_s\cap G_r),H(s-1))$ 是 $G_s\cap G_r$上的膨胀。由于 $|G_s\cap G_r|<n$，根据归纳假设，该空间是可缩空间。因此，我们可以连接点 d_s 和 d_r。继续这一过程，建立所有所需的边。由于所有变换都是可缩的，所得空间 V(G,D) 与原空间同伦。定理得证。 □

空间 G 的完备覆盖的定义。

覆盖 $F=(G_1,G_2,...G_n)$ 称为完备（complete）的，当且仅当它是连续的、可缩的且正则的。

覆盖 F 下空间 G 的覆盖 D 和覆盖膨胀 COV(G,F,D) 的定义。

设 G、$F=(G_1,G_2,...G_n)$ 和 D 分别是由点 $(v_1,v_2,...v_m)$ 构成的空间、它的覆盖，以及由点 $(d_1,d_2,...d_n)$ 构成的分子空间；后者是覆盖 F 的神经（每个顶点 $d_к$对应子空间 G_k，且两点 d_k 和 d_p 相邻，当且仅当子空间 G_k 和 G_p 的交集非空，$G_k\cap G_p\neq\varnothing$）。我们构造膨胀 COV(G,F,D)= V(G,F,D)。空间 D 称为空间 G 的覆盖，空间 COV(G,F,D) 称为与族 F 对应的空间 G 的覆盖膨胀（简称 накраз），空间 G 本身称为 накраз 的基。

图 1 左侧示意性地展示了某个空间 G 的覆盖 F=(G_1,G_2,G_3,G_4,G_5)，它由五个子空间组成；右侧展示了覆盖 D。问题是，空间 COV(G,F,D) 何时与空间 G 同伦。换言之，空间 G 何时可以替换为另一个点数更少、但具有相同性质的空间。下述定理给出了这个问题的答案。

主 要 定 理。

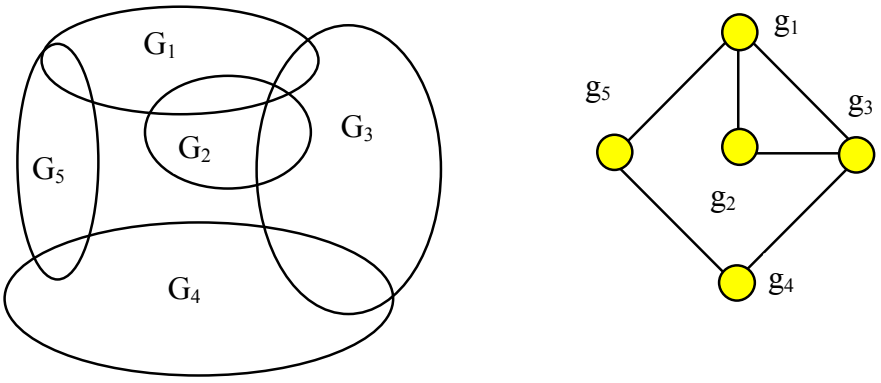


图 168 左侧示意性地绘出了某个空间 G 的覆盖 F=(G_1,G_2,G_3,G_4,G_5)，它由五个子空间组成；右侧绘出了覆盖 D

定理 163

设 *G*、*F=(G1,G2,..Gn)* 和 *COV(G,F,D)* 分别为空间 *G*、它的正规覆盖以及空间 *G* 的覆盖膨胀。那么覆盖 *D* 同伦于 *G*，*D~G*.

证　明

根据前面的定理，覆盖 COV(G,F,D) 同伦等价于 G。任取 G 中的一个点 v，并考察它在 COV(G,F,D) 中的邻域 O(v)。显然，O(v)=(O(v)∩G)∪(O(v)∩D)。由于 F 是正则覆盖，因此存在这样的子空间 G_k，使得球 U(v)∈G_k。这意味着，点 d_k （来自 D）与 O(v) 中属于 D 的所有点均相邻，因为如果 d_s∈O(v)，则 v∈G_s ，从而 G_s∪∩G_k≠∅ ，且 d_s与 d_k相邻。因此，O(v) 是 COV(G,F,D) 中的锥，点 v 可以被删去。这样，我们从 COV(G,F,D) 中删去所有属于子空间 G 的点，得到 D。由此可知，COV(G,F,D) 同伦于 D。由于 COV(G,F,D) 同伦于 G，因此 G 同伦于 D，G~COV(G,F,D)~D，G~D。定理得证。□

基本定理的一个重要推论是另一条定理，它可以确定空间 G 的正规覆盖对应的覆盖空间之间的连接。

定理 164

设有空间 G 及其两个正规覆盖 F_1 uF_2.. 则

- *Накрывающие раздутия* $COV(G,F_1,D_1)$ *и* $COV(G,F_2,D_2)$ *гомотопны,* $COV(G,F_1,D_1)$~$COV(G,F_2,D_2)$.
- *Накрытия* D_1 *и* D_2 *гомотопны,* D_1~D_2.

证 明。

G 与 COV(G,F,D) 同伦，也与 COV(G,F,D) 同伦。因此，$COV(G,F_1,D_1)$~$COV(G,F_2,D_2)$。此外，G 与 D_1 同伦，也与 D_2 同伦。因此，D_1~D_2。□

这个定理的意义在于，覆盖和覆盖膨胀

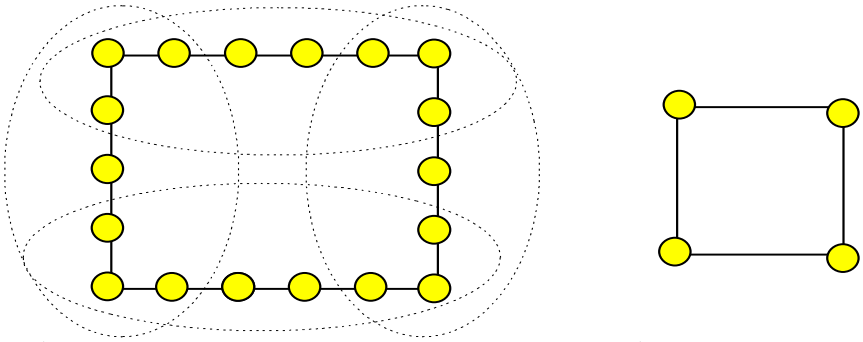


图 169 原空间是由 18 个点组成的圆周，并由四个子空间覆盖。该覆盖是正规的。显然，这个覆盖给出了一个与原空间同伦、由 4 个点组成的覆盖空间。

具有与空间 G 相同的基本拓扑性质。从这一角度来看，选择哪一种覆盖来替代原来的覆盖，完全无关紧要。

图 169 展示了原空间，它是由 18 个点组成的圆周，以及覆盖它的 4 个子空间。不难验证，这个覆盖是正规的。显然，这个覆盖给出了一个与原空间同伦、由 4 个点组成的覆盖空间。该定理为覆盖空间同伦存在提供了相当强的条件。很容易举出一个不是正规覆盖的例子，而它的交空间却与给定空间同伦。显然，只需考虑由若干子空间组成的覆盖，这些子空间可以稍加“膨胀”，从而变成正规覆盖。

定理 165

设 G 和 $F_1=(G_1,G_2,...G_n)$ 是一个空间及其某个覆盖。如果存在一个正规覆盖 $F_2=(H_1,H_2,...H_n)$，其中 H_k 的每个元素都包含 G_k，$G_k \subseteq H_k$, $k=1,2,...n$, 并且$H_k \cap H_p \neq \varnothing$ mmmκ $G_k \cap G_p \neq \varnothing$，那么覆盖 F_1 的神经 D_1 与原空间 G 同伦等价，$D_1 \sim G$.

证 明。

G 与覆盖 F_2 的神经 $D_2=(H_1,H_2,...H_n)$ 同伦。另一方面，空间 D_1 和 D_2 同构，因为 F_1 和 F_2 中的元素或者同时相交，或者同时不相交。因此，$G \sim D_1 \sim D_2$。□

例如，在我们考察过的所有具体情形中，只需满足以下条件：

设 G、$F=(G_1,G_2,...G_n)$ 和 COV(G,F,D) 分别为空间 G、其覆盖以及覆盖 F 对空间 G 的覆盖膨胀。若覆盖 F：

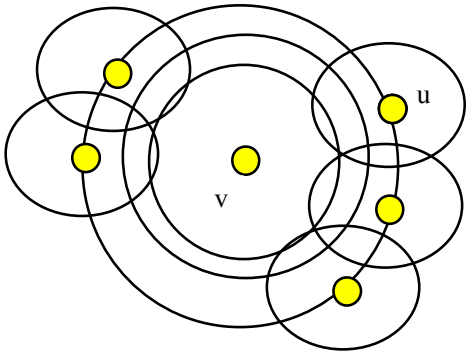


图170 覆盖构造算法。

• 连续，• 可缩，• 任意两个相邻点都属于覆盖中的至少一个子空间，则 COV(G,F,D) 与 G 同伦等价，COV(G,F,D)~G。

构造覆盖的算法。

现在描述一种能够获得正规覆盖的最简单算法。回顾空间 G 中点 v 的 2-球的定义。空间 G 中点 v 的 2-球 $B^2(v)$ 是一个子空间，其中包含空间 G 中所有与点 v 的球 B(v) 中的点相邻的点，包括球 B(v) 中的点。点 v 的 n-球定义类似。我们将 2-球作为构建算法的基础。

- 任取空间 G 中的一个点 v 及其 2-球 $B^2(v)$。

- 选取所有与 v 距离为 3 的点，并选取这些点的 2-球。• 选取所有与 v 距离为 6 的点，并选取这些点的 2- 球。• 选取所有与 v 距离为 9 的点，并选取这些点的 2-球。继续这一过程，直到用所选取的 2-球作为子空间覆盖整个空间。• 检查所得覆盖是否正确。• 为该覆盖构造覆盖。

图170示意性地描绘了该算法的第一阶段。

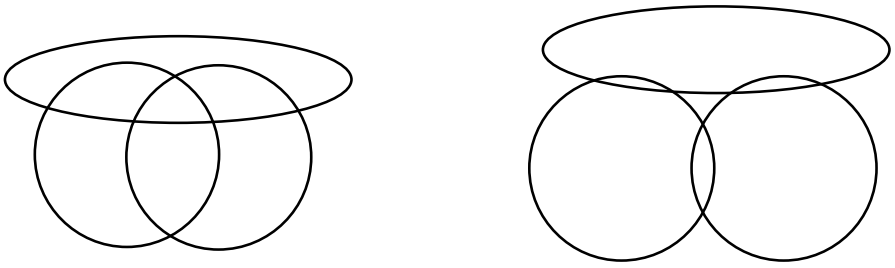
问 题 寻找其他求正确覆盖空间的算法。

借助覆盖构建连续空间的分子模型

3.1.1单纯复形作为多面体的分子模型。

我们将讨论如何根据分子空间的连续原像来构造分子空间。一般来说，这里介绍的方法适用于连续 n维欧几里得空间中定义的任意集合。分子空间必须满足的要求——连续原像及其分子像的性质相对应。为了说明如何满足这些要求，我们来考察分子模型构造的理想化方案。数学研究所谓的多面体，它是欧几里得空间中的某个集合，可以表示为单纯复形。我们尝试用单纯复形来构造多面体的分子模型。假设我们有一个空间 S，它是连续 n维欧几里得空间 E^n 中的一个单纯多面体。为 S 构造所有可能的单纯复形，使其成为空间 S 的划分。将所有此类复形组成的族记作 K(S)。我们把 K(S) 中的所有单纯复形都视为分子空间，并认为任意单形都是一个连接体。通过足够精细的划分（这总能借助所谓的重心细分实现），所得的分子空间将彼此同伦，并且可以

被视为多面体的分子模型。当然，需要注意的是，并非每个单纯复形都能被视为该空间的分子像；此外，许多概念（例如单形维数）并不适用于分子空间。这个方案几乎显而易见，在所有具体情形中都成立。证明这一点对于从数学上论证这种方法的正确性具有意义。一种证明途径是说明其中一个单纯划分是正规覆盖。从实践角度来看，这个方案意义不大，因为构造单纯复形本身就是一项相当复杂的任务。



连续　　非连续

图171 连续覆盖与非连续覆盖。

问 题。

表述并证明关于该方案正确性的定理。

3.1.2分子空间作为连续空间覆盖的神经。

我们将介绍另一种方法，用来获得某个集合（包括拓扑空间）的分子图像。设有集合 X 及其某个覆盖。假设我们有空间 X 的两个有限覆盖 $F_1(a_1,a_2,...a_n)$ 和 $F_2(b_1,b_2,...b_n)$。

取覆盖 $F_3(a_1,a_2,...a_n,b_1,b_2,...b_n)$，其中包含两个覆盖的元素。构造分子空间 $G(F_1)$、$G(F_2)$ 和 $G(F_3)$，它们是覆盖的神经。显然，可以认为 $G=G(F_1)$、$D=G(F_2)$ 且 $COV(G,F,D)=G(F_3)$，或者 $G=G(F_2)$、$D=G(F_1)$ 且 $COV(G,F,D)=G(F_3)G(F_2)$。如果可以认为 $G(F_1)$ 是 $G(F_2)$ 的正规覆盖（或反之），那么 $G(F_1)$ 和 $G(F_2)$ 同伦。在此意义下，我们可以认为这些覆盖是空间 X 的等价数字模型。将这些简单的论述归纳为定理的形式。这一方法的重要部分，是覆盖的神经的性质与拓扑空间本身的性质之间的对应程度。这个问题可以通过几种途径解决。可以将所讨论的单纯复形视为

分子空间，并将其视为拓扑空间的真实数字模型。于是，覆盖的神经可以与

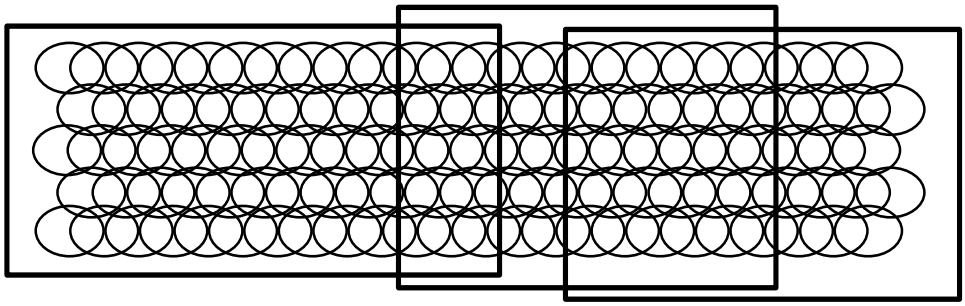


图172 覆盖 Q 的元素是圆，而覆盖 P 的元素是矩形。容易验证定理的所有条件均满足，因此覆盖 P 的神经将是覆盖 Q 的神经的正规覆盖，故二者同伦。

这一模型。出于众所周知的原因，这种途径更多是为理论论证所关注，而非用于实际工作。第二种途径是细分覆盖的元素，并检验由此得到的覆盖的神经是否同伦。如果转向元素越来越细的覆盖时，覆盖的神经仍与分子空间同伦，那么每一个这样的神经都可以视为拓扑空间的数字模型。当然，这种方法也存在许多难点。例如，覆盖元素形状的改变可能会显著改变覆盖的神经中各点的邻接关系。因此，有必要预先对覆盖元素的类型作出某种限制。

拓扑空间数字模型的真实性判据

设有序列 $F_a=(G(A)_1,G(A)_2,...G(A)_n,...)$、$A\in A$ 的某个拓扑空间 X 的覆盖，具有以下特点：

- 每个覆盖中的所有元素都属于某个特定的类 K,
- 如果 $a_1<a_2$，那么对于任意 $G(a_1)_k$ ，存在 $G(a_2)_p$ ，使得 $G(a_1)_k\subseteq G(a_2)_p$，并且不存在任何 $G(a_2)_t$ ，使得 $G(a_2)_t\subseteq G(a_1)_k$。

那么，如果对于所有 $a<a_0$ 覆盖的神经 $F_a=(G(a)_1,G(a)_2,...G(a)_n,...)$ 都彼此同伦，则这些神经中的每一个都被视为拓扑空间 X 的真正分子模型。

拓扑空间 X 的覆盖同伦的定义。 假设我们有空间的两个有限覆盖X, $F_1(a_1, a_2,...a_n)$ 和 $F_2(b_1,b_2,...b_n)$。如果

分子空间 $G(F_1)$ 和 $G(F_2)$ 是这些覆盖的神经，且彼此同伦。

由此产生一个问题：覆盖需要满足什么条件才能彼此同伦？下面引入几个定义。

集合 X 的连续覆盖的定义。

集合 X 的覆盖 $P=(p_1,p_2,...p_n)$ 称为连续的（continuous），如果由条件 可推出，

$$p_{i_1} \cap p_{i_2} \neq \varnothing \quad \forall i_1, i_2, \ldots$$

что $p_{i_1 i_2 \ldots i_r} = p_{i_1} \cap p_{i_2} \ldots \cap p_{i_r} \neq \varnothing$.

图171展示了连续和非连续覆盖。

定理166

设有集合 X 的两个覆盖 $P(p_1,p_2,...p_n)$ 和 $Q(q_1,q_2,..q_m)$ ，它们具有以下性质：

1. 覆盖 P 是连续的。
2. Q 中覆盖任意非空子集的元素具有一个神经，该神经是 $\underline{A}_{1\ 2} p_{i_1} \cap p_{i_2} \neq \varnothing$ 点状分子空间。</style>
3. 对于覆盖 Q 的任意元素 q_i ，总存在覆盖 P 的元素 p_s ，使得 q_i 以及所有与之相交的覆盖 Q 的元素都完全包含于 p_s。

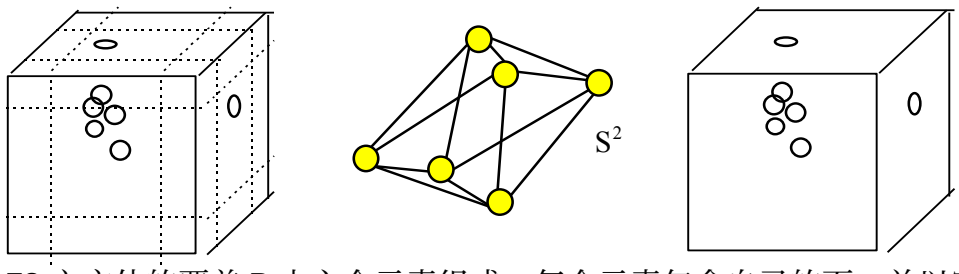


图 173 立方体的覆盖 P 由六个元素组成，每个元素包含自己的面，并以宽度为 2d 的带状区域覆盖与其相邻的四个面。覆盖 Q 由直径为 d 的小圆组成。那么根据定理，这两个覆盖的神经同伦。覆盖 P 的神经是最小的二维球面。

覆盖 P 的神经与覆盖 Q 的神经同伦等价。 证 明

考虑覆盖 PQ，它是覆盖 P 和 Q 的并集，并构造该覆盖的神经 G(PQ)（对于神经，使用与原覆盖相同的记号）。这个神经是一个分子空间，其中分子子空间 G(Q)（覆盖 Q 的神经）是基，G(P)（覆盖 P 的神经）是 G(Q) 的覆盖，并且

G(PQ) 是空间 G(Q) 的覆盖膨胀。记 $G_k=O(p_k)\cap G(Q)$。容易看出，族 $F=(G_1,G_2,...G_n)$ 是分子空间 G(Q) 的覆盖。由条件 2 可知，这个覆盖是可缩的。由条件 1 可知，F 是连续的。由条件 3 可知，F 是正则的。这意味着该覆盖是正规的，因此分子空间 G(P) 和 G(Q) 同伦。定理得证。□

这个定理的要点非常简单。集合 X 有两个覆盖 P 和 Q。我们构造这两个覆盖各自的神经 G(P) 和 G(Q)。那么 G(P) 将是 G(Q) 的正规覆盖，因此根据先前证明的定理，G(P) 与 G(Q) 同伦等价。

在图172中，覆盖 Q 的元素是圆，覆盖 P 的元素是矩形。容易验证，所有条件

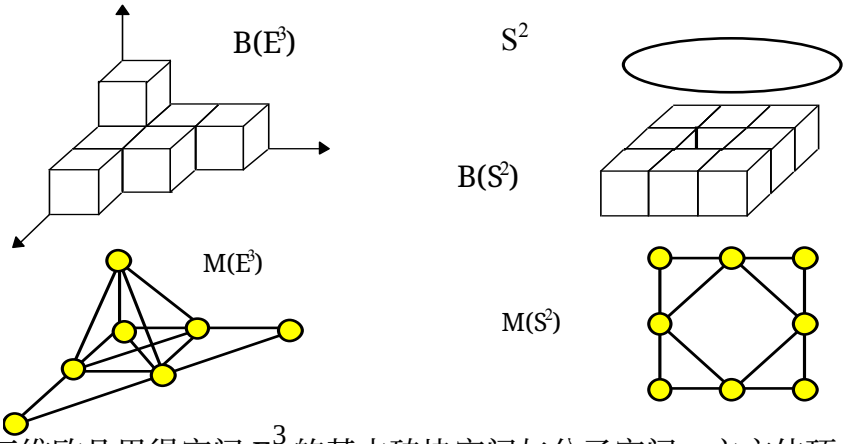


图 174 三维欧几里得空间 E^3 的基本砖块空间与分子空间。立方体顶点的坐标是 l0 的整数倍。

都满足，因此覆盖 P 的神经是覆盖 Q 的神经的正规覆盖，由此可知它们同伦。任何一个这样的神经都可以看作集合 X 的分子模型；在本例中，集合 X 是被圆覆盖的二维平面的一部分。这个相对简单的定理可以确立一般情况下两个覆盖之间的连接。例如，考虑用小凸多边形或圆覆盖球面的覆盖 Q。现在我们将证明，这种覆盖的神经总是与最小二维球面同伦。为此，考虑单位立方体的表面（图 173），它与二维球面同胚。

用直径小于 d、$d<<1$ 的圆覆盖立方体表面。不难证明，立方体每个面的覆盖都有一个同伦于点分子空间的神经。现在考虑立方体的覆盖 P，它由六个元素组成，每个元素都包含一个面，并与其相邻的四个面各重叠一条带状区域。

宽度为 2d。这些元素类似于纸板箱的盖子，并以虚线表示。因此，根据定理，这两个覆盖的神经是同伦的。覆盖 P 的神经是一个最小二维球面。因此，覆盖 Q 的神经也同样是一个二维球面。完全相同的推理也适用于任何闭二维曲面。

我们来考察一个由上文已证明的定理得出的简单但在实践中很重要的推论，它能在两个不直接满足该定理条件的覆盖之间建立连接。

C 推 论 。
设有集合 X 的两个覆盖 $R(r_1, r_2,...r_m)$ 和 $Q(q_1, q_2,...q_m)$。再设有 X 的覆盖 $P(p_1, p_2,...p_n)$，且覆盖 $P(p_1, p_2,...p_n)$ 与 $Q(q_1, q_2,...q_m)$，以及覆盖 $P(p_1, p_2,...p_n)$ 与 $R(r_1, r_2,...r_m)$，均满足上文所证定理的条件。那么，覆盖 Q 的神经 G(Q) 与覆盖 R 的神经 G(R) 同伦等价。

利用基本元素构建连续空间的分子模型

3.1.3构成连续空间分子形象的基本元素选择准则。

上述结果表明，可以根据拓扑空间的覆盖构建分子空间；从原理上看，这些结果是明确的。然而，如何具体选择覆盖仍未解决。对此，需要考虑以下几点:

- 覆盖的选择方法应具有普适性，适用于任何实际问题。
- 覆盖应便于在计算机上进行自动分析。

因此，我们必须提出一种符合上述要求，且易于理解和使用的方法。与上一章介绍的构建分子空间的方法相比，本文提出的方法范围更窄，但能够避免主观选择覆盖的环节，并在计算机上自动完成分子空间的整个构建过程。

БА砖石与分子空间 .

一如既往，我们先引入几个基本定义。此前，我们将砖块 n 维空间定义为通用基础空间 $B(E^{\infty})$ 的子空间。现在稍微改变一下尺度，不再使用单位砖块，而是考虑边长为 l_0 的任意砖块。

基本砖块 n维空间 $B(E^n)$ 的定义 .

设有欧几里得空间 E^n。将 E^n 剖分成集合，包含边长为 l_0 且各边平行于坐标轴的相同立方体（砖块）。称这个立方体族为欧几里得空间 E^n 的基本砖块空间（此处元素指立方体）。

将基空间记作 $B(E^n)$，或简称为 B^n。

基分子 n维空间 $B(E^n)$ 的定义。族 $B(E^n)$ 的神经 $M(E^n)$ 称为欧几里得空间 E^n 的基分子 n维空间，记作 $M(E^n)$ 或 M^n。

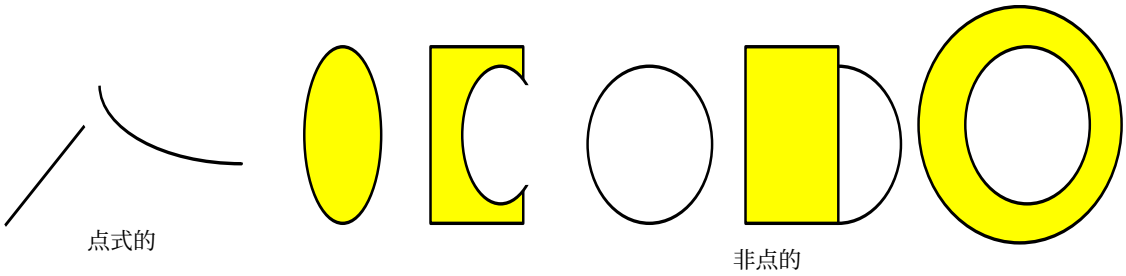


图175 如果存在 $\delta>0$，使得对于所有 $l_0<\delta$ ，集合A的基本分子空间 M(A) 都是点空间，则称集合 A 为点集。

不难证明，$M(E^n)$ 是一个 n维分子正则空间，尽管它不具备正规性。注意，两个元素（立方体）只要有至少一个公共点，就被视为相邻。图174展示了三维欧几里得空间 E^3 的基砖块空间和基分子空间。为简单起见，我们假设立方体的顶点坐标是 l_0 的整数倍。

立方体坐标的定义。

设立方体包含由 E^n 空间的坐标 $(x_1,x_2,...x_n)$ 确定的点，这些点满足以下条件

$l_0 k_i \le x_i \le l_0(k_i+1),\ i=1,2,...n,$ $-k_i$ - целые числа. Тогда
立方体的坐标定义为整数 $(k_1,k_2,...k_n)$,
用于确定左边界。
显然，相邻砖块的坐标之差不超过一。现在设 E^n 中有某个集合 A。

基本砖块曲面 B(A) 的定义。
E^n 中曲面 A 的基本砖块曲面 B(A) 定义为与该集合相交的立方体族。

基本分子曲面 M(A) 的定义。
曲面 B(A) 的神经 M(A) 称为曲面 A 的基本分子空间，记作 M(A)。

图174展示了三维空间中的一个圆周、它的基本砖块空间以及该圆周的基本分子空间。

欧几里得空间中的点集。

欧几里得空间中点集的定义。
如果存在$\delta>0$ 使得对于所有 $l_0<\delta$，集合 A 的基本分子空间 M(A) 都是点集，则称集合 A 为点集。数值 δ 称为集合 A 的点集度（图 175）。

根据这个定义，与集合 A 相交的立方体族的神经收缩到一个点。从经典的观点来看，任意可缩的点集都与一个点同伦。

E^n 中块的定义。
$E^{n\cdot}$ 中的块称为由空间 E_1,的坐标 $(x_2,x_n...x^n)$ 确定的直角平行六面体，其中 。块的坐标称为形如 $((a_1,b_1),(a_2,b_2),...(a_n,b_n))$ 的数对序列。
A. V. 伊瓦科≤ ≤ < ¡, a , i =1, 2,...n i

注释
假设某些 a_k 和 b_k 可以重合。在这种情况下，块的维数将小于 n，但这不会对后续讨论的展开施加任何限制。

定理167
E^n 中的任意 *A* 块都是点空间。
Д证明

设基本砖块空间中立方体的边长为 $l_0<<\min|b_k-a_k|$。构造 M(A)，并考察所有第一坐标最大的点。显然，每个这样的点的邻域 $(k_1,k_2,...k_n)$ 都是一个锥，其顶点为点 $((k_1-1),k_2,...k_n)$；该点的第一坐标比原点的第一坐标小 1，而这些点的其余坐标都相同。因此，所有这些点都可以舍弃。逐层进行，舍弃 M(A) 中除最后一个点以外的所有点。定理得证。□

推 论

块上层中的点可以按任意顺序舍弃。对于上层中已舍弃若干个点的块，其中任意一点始终具有点邻域，因此可以舍弃。

请记住，在凸集A中，任意两个属于该集合的点都可以用一条同样属于该集合的直线线段连接。因此，凸

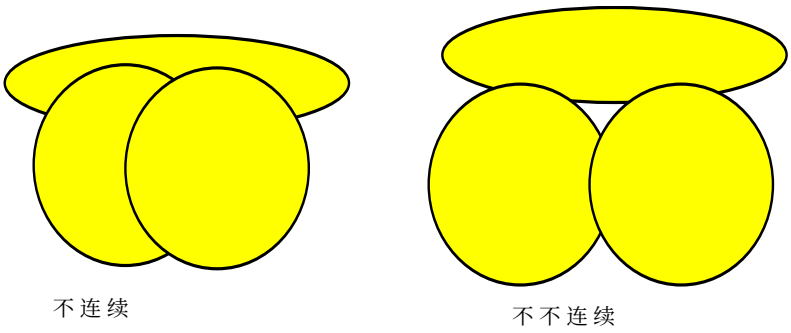


图176 连续与非连续的集合族。

集合可以是直线段、矩形、圆、球、n维平行六面体、n维球等。图175展示了点集和非点集。

定理168

E^n 中的任意凸集 A 都是可缩空间。 证明

设集合 A 的直径长度满足条件 $l_0<<diamA$，且集合 A 的直径平行于第一坐标轴。构造 M(A)，并考察所有第一坐标最大的点。显然，每个这样的点的邻域都是一个锥，其顶点的第一坐标比原点的第一坐标小 1，而这些点的其余坐标均相同。由集合 A 的凸性，至少在...上满足这一条件。

从最上层开始逐层进行。当这一条件不满足时，选取第一坐标最小的点，并重复剔除过程。与前一种情况一样，逐层进行，除最后一个点外，剔除 M(A) 中的所有点。定理得证。□

一般来说，看来可以证明下面的定理。

定理 169

E^n 中任何一个与某个凸集同胚的集合 A，都是可缩空间。

我们不证明这个定理，因为对于标准曲面，这个定理是显而易见的。

连续、可缩、正则和正规的集合族。正规集合族的性质。

下文中，我们只考虑由欧几里得空间 E^n 中的点集组成的族。下面给出几个定义，类似于分子空间的各种覆盖的定义。

连续集合族的定义。

集合族 $F=(A_1,A_2,..A_n)$ (图 176) 称为连续的（continuous），如果由条件 可以推出 。

$A_{pk} A_{pm} \cap \neq \varnothing \ \forall, k, m = 1, 2,..., r$ $A_{p1} A_{p2} A_{pr} \neq \varnothing$

可缩集合族的定义。

若任意数量集合的交集要么是单点，要么为空，则称族 $F=(A_1,A_2,...A_n)$ 为可缩的（contractible）（图177）。

集合族点态程度的定义。

族 F 的点度 δ 定义为该族中各集合交集的最大点度。

根据这个定义可知，族中的所有集合也都是点状的。图177左侧描绘的是由 2 个集合组成的可缩族，右侧则是不可缩的，因为该族中两个集合的交集由两个不连通的分支组成，因此不是点状的。

正则族 F 的定义。

族 $F=(A_1,A_2,...A_n)$ 称为正则的（regular）（图178），如果存在 $\varepsilon>0$ ，使得对于任意点

$p \in H=A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ и对于任意一个以p为中心且满足$l_0<\varepsilon$的立方体K，都存在一个集合A_s，使得$K \cap H \subseteq A_s$。数值 ε 称为该族的正则性阶数。

图178左侧展示了一个非正则族。集合的并与以点 a 为中心的正方形的交集不属于其中任何一个。右侧展示了由两个集合组成的正则族。集合的并与以点 a 为中心的正方形的交集属于其中任意一个。我们将讨论具有全部三种性质的族。

F 的正确族的定义。

族 F 称为正规（complete）的，当且仅当它是连续的、可收缩的且正则的。正规族的特征称为点态性和正则性的阶数（δ,ε）。

在 n 维空间 E^n 中，最简单的正则集合族的例子是边平行于坐标轴的 n 维长方体族，其中任意两个长方体的交集要么为空，要么也是非退化的 n 维长方体，如二维空间的图179所示。图中还画出了二维欧几里得空间 E^n 上的非正则族和基本砖块空间。很容易看出，在正则族中，可以使立方体 K 不仅属于族中的某个集合，而且与它相邻的所有立方体也都属于该集合。为此，需要取

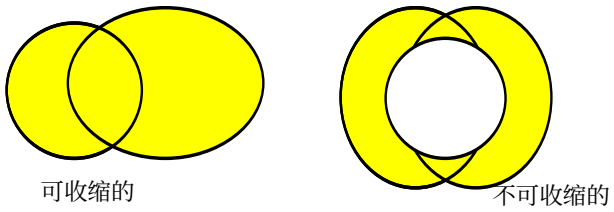


图177 可缩与不可缩的集合族。

边长小于 ε、$l_0<<\varepsilon$ 的立方体。例如，图178右侧所示的正方形可以分成 25 个相同的正方形，其边长小 5 倍。于是，这种划分中的中央正方形包含一个球，该球完全属于该族的两个集合中的每一个。这里的球指与该族所有集合的并集的交集。我们将其表述为一个定理。

定理170

如果族$F=(A_1,A_2,...A_n)$是正则的（*regular*），那么存在$\varepsilon>0$，使得对于任意点$p\in H=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$,对于任意以$p$为中心且具有$l_0<\varepsilon$的立方体$K$，以及该立方体的球$S(K)$（该立方体本身及所有与其相邻的立方体），存在集合$A_s$，使得$S(K)\cap H\subseteq A_s$.

证　明　。

设族F在$l_0<\varepsilon$时是规则的。考虑棱长为K_1的立方体。

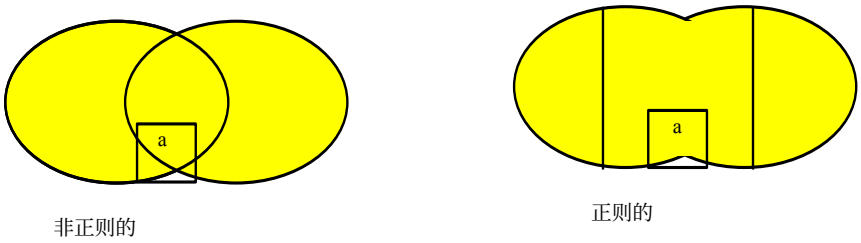


图178 正则与非正则集合族。

$l_0/8$。它位于边长为l_0.的立方体 K 的中心。因此，所有边长为$l_0/8$且与K_1,相邻的立方体都将位于立方体 K 内。由于$K\cap H\subseteq A_s$，因此$S(K)\cap H\subseteq A_s$。证毕。

□

n-维欧几里得空间中曲面的正规覆盖。正规覆盖的神经与曲面的基本分子空间同伦

现在设我们有一个正则族$F=(A_1,A_2,...A_n)$和$H=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$，它们位于欧几里得空间$E^n$中。

设(δ,ε)是该族的特征。为 H 选取一个基本砖块空间，其立方体的边长$l_0<\min(\delta,\varepsilon/8)$足够小。对于$H=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$，构造族 F 的神经 G(F)，以及 H 的基本分子空间 M(H)。容易验证，这些神经同胚，因为基本分子空间$M(A_1)$、$M(A_2)$、...$M(A_n)$是空间 M(H) 的子空间，并构成其正规覆盖，而 G(F) 是该覆盖的神经。现将这一论证表述为定理。

定理171

设 X 和 $F=(A_1,A_2,...A_n)$ 分别是 E^n 中的某个集合及其正规覆盖。那么存在 $\varepsilon>0$，使得对于所有 $l_0<\varepsilon$，集合 X 的基本分子空间 $M(X)$ 同伦等价于集合族 F 的交集的神经 $G(F)$。

证　明

如果 F 是正规覆盖，那么在转到 M(X) 时，集合族 F 是分子空间 M(X) 的正规覆盖，因此其神经同伦等价于 M(X)。证毕。□

根据这条定理，只需找到至少一个曲面的正规覆盖；一般而言，则是空间 E^n 中某个集合的正规覆盖。它的神经将与给定的基本分子空间同伦等价。

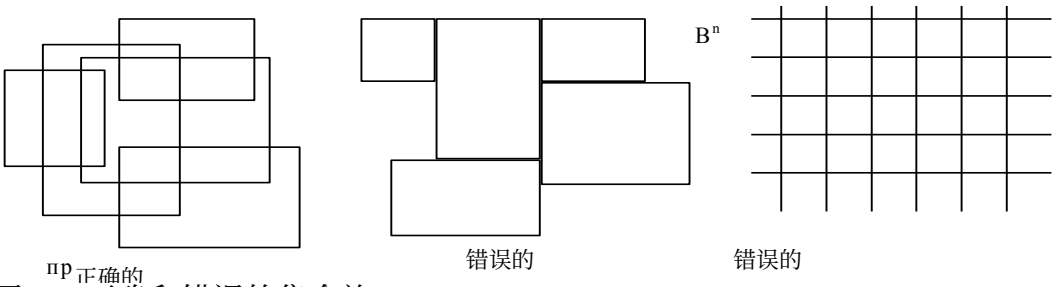


图179 正确和错误的集合族。

因此，它也属于任何其他正规覆盖的神经。由此，任何正规覆盖都会产生一个分子空间，它是连续空间的离散像。然而，应用的不仅限于正规覆盖。如果某个覆盖经过小幅变形后可以转化为正规覆盖，那么我们也可以用它来构建分子模型。

可化为正规覆盖的 F 的定义。

设 X 和 $F=(A_1, A_2,...A_n)$ 分别是 E^n 中的某个集合及其覆盖。设存在 X 的覆盖 $H=(B_1,B_2,...B_n)$，满足：1. H 是集合 X 的正规覆盖；2. 覆盖 F 的每个元素都包含在覆盖 H 中对应的元素内，$A_K \subseteq B_K$，k=1,2,...n；3. A_K 与 A_P 的交集非空，当且仅当 B

K P $A_K \cap A_P \neq \varnothing \Leftrightarrow B_K \cap B_P \neq \varnothing$ = 与

1 2

B 的交集也非空，A A B B，к，p，,...n。

显然，覆盖 F 和 H 的交集的神经是同伦的。因此，我们可以像使用正规覆盖一样使用可约覆盖。

侦查

可约覆盖可以与正则覆盖同样使用。

我们来考察可约覆盖和正则覆盖中最简单的例子。

1. 基本砖块空间。

最简单且最自然、接近正则的覆盖，是 E^n 的基本砖块空间，也就是说，是由边长为 l_0 、顶点坐标为 l_0 的整数倍的立方体组成的族。它是可缩的连续集合族，但不是正则的。要使其变为正则，只需将每个立方体“膨胀”，使其每条边在两个方向上各增加 $d < l_0/2$ 的长度（图 180）。边长的增加使基本砖块空间成为正则族，而这一限制意味着交集神经不变。另一方面，立方体尺寸的增加必须足够小，以免增加与给定无奇点曲面相交的立方体数量。这样便可以将基本砖块空间视为与正则空间等价。

2. 空间与分块。

在 E^n 中，另一个正规覆盖的例子是由 n 维长方体构成的覆盖，其边平行于坐标轴。此时，任意两个长方体的交集必须为空，或者也是非退化的 n 维

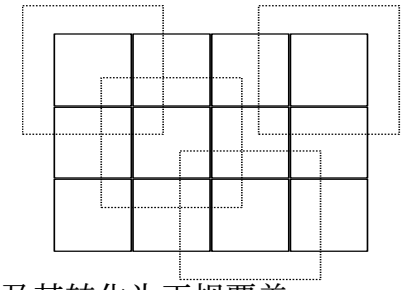


图 180 砖块空间的膨胀及其转化为正规覆盖。

长方体。不过，无论如何，这种覆盖都是可约的。

第14章参考文献目录。

3 Evako A., Kopperman R., Mukhin Y., 图与数字空间的维数性质，《数学成像与视觉期刊》，第6卷，第109–119页，1996年。

4 Evako A., Kopperman R., Mukhin Y.，数字 n 维空间中任意一点的边界都是一个离散的 (n-1) 维球面。视觉几何 III 摘要，SPIE 工业应用光子学国际研讨会，美国马萨诸塞州波士顿，1994年。10 Evako A.V., Melter R.A.，线段的图维数，《第八届一般拓扑学及其应用暑期会议论文集》，1992年，美国纽约。14 Evako A.V.，通过 n 维欧几里得空间 En 中的盒族表示正规数字 n 维空间，第十一届一般拓扑学及其应用暑期会议，美国纽约，1995年。16 Evako A.V.，区间图和圆弧图的欧拉示性数与同调群，预印本 SU-GP 93/7-4，雪城大学物理系，美国。17 Evako A.V.，图的覆盖的拓扑性质。预印本 SU-GP 93/7-5，雪城大学物理系，美国。18 Evako A.V.，n 维曲面覆盖的交图的拓扑性质，《离散数学》，第147卷，第107-120页，1995年。26 Ivashchenko (Evako) A.V.，用图表示光滑曲面。保持图的欧拉示性数不变的图变换，《离散数学》，第122卷，第219-233页，1993年。27 Ivashchenko (Evako) A.V.，图的坐标表示及半径为 1 的 n 通用图，《离散数学》，第114卷，1993年，第120、107页。43 Иваko A.B.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。51 Иващенко A.B.，《分子空间的拓扑性质》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984年。

计算机实验。计算机中的建模与多维对象的运动

本文概述如何利用有限元法进行计算，并进一步开展计算机实验，从而引出分子空间和可缩变换的概念。作为计算机图形学的一项应用，我们通过一个具体示例，描述一种获取连续的n维对象的分子模型、改变其形式和形状，并使其在n维空间中运动的算法。

本章的部分内容可见于文献 [10,14,16,17,18,24,26,43]。

计算机实验与分子空间理论

值得介绍一下分子空间概念得以提出的缘由，并描述那些为该理论奠定一定实验基础的计算机实验。

计算机实验自然建立在一些假设之上，这些假设强化了这样的信念：连续统可以由离散连续统取代，而且计算结果不应过分依赖于连续统的选择。从本质上说，计算机运行时已经使用了离散连续统，因为其内存容量总是有限的。离散连续统取代连续统，

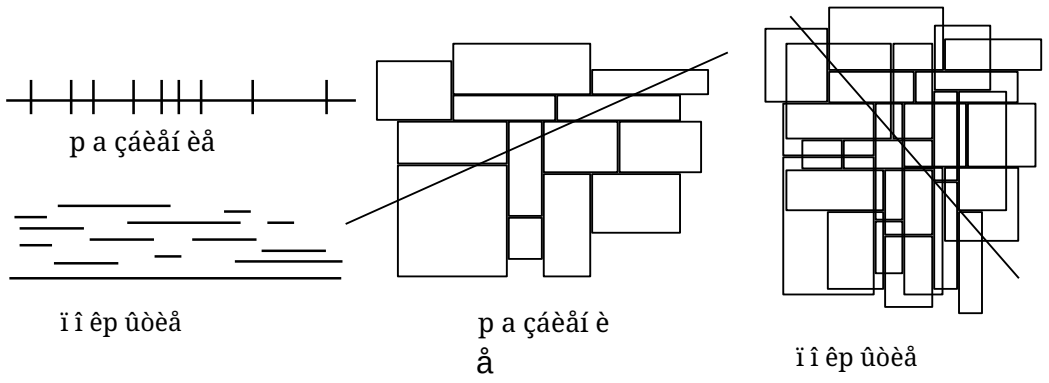


图181 用线段和矩形对直线进行划分和覆盖。

用于数值求解微分方程的网格法。网格无非是一个有限点集，在该点集上定义并求解代数方程组。在数学及相关

学科中，有限元法早已广为人知。它能够将整个给定区域内复杂的计算，转化为把区域划分成若干小区域、分别对每个区域进行简单计算，再对所得结果进行相对简单的后处理。

这一过程的重要阶段之一，是选择区域有限元的尺寸和形状。通常，这一阶段并不简单，需要引入额外的判据，而且每种具体情况都需要选择各自的划分参数。由此便产生了一个问题：元素的形状、尺寸和邻接关系会如何影响计算结果？与此相关、但更为一般的问题是：同一曲面的不同类型划分之间是否存在联系？类似的例子还可以继续列举。为回答这类在很大程度上涉及同类计算的问题，我们采用了计算机计算，并编制了相应的程序。

现在转而描述计算机实验。需要指出的是，原始对象的线性尺寸始终远大于元素的线性尺寸。我们按照同一方案进行了一系列实验。

1. 设定了某个集合，可以是一维、二维或三维的。
рехмерное.
2. 选择了该集合的某种划分或覆盖。

3. 构造了该覆盖或划分的神经（交图）。
4. 获得的神经通过各种方法进行了分析。
我们提醒，集合 $S=(S_1,S_2,...S_n)$ 的元素 $S_1,S_2,...S_n$ 的神经（交集图）是点的集合 $V=(v_1,v_2,...v_n)$，其中每个点 v_k 对应一个元素 S_k；当且仅当 S_k 和 S_p 有非空交集时，点 v_k 和 v_p 之间才有连接 (v_kv_p)，$S_k \cap S$

$_p \neq 0$.
A. 直线段实验（图 181）。1. 取一条直线段，将其分成有限个小线段-元素，并构造元素集合的神经。 2. 取一条直线段，用任意有限个小 线段-元素覆盖它，并构造元素集合的神经。 将平面划分为网格单元，形成边平行于坐标轴的全等正方形-正方形网格；沿任意方向画一条直线段，并考察与该线段至少有一点相交的正方形-元素的集合。随后构造这些正方形集合的神经。

4. 将空间划分为立方体，形成边平行于坐标轴的全等立方体——立方体网格；沿任意方向画一条直线段，并考察与该线段至少有一点相交的立方体元素集合。随后构造元素集合的神经。

B. 圆周实验。 实验 1、2、3 和 4 是针对圆周进行的。

C. 正方形实验 (图 182)。

1. 正方形被划分为网格单元，形成由小正方形元素组成的网格，并构造元素集合的神经。

2. 正方形被划分为网格单元，形成大小不一的小型矩形元素，其边分别平行于正方形的各边。

pата，и ст. p未形成，不是 p成元素集合。

3. 正方形被划分为大小不一的小矩形元素组成的网格，这些元素的边与正方形的边平行，并构造元素集合的神经。

4. 正方形被划分为形状各异的小圆形元素构成的单元，并构造元素集合的神经。5. 空间被划分为形状相同、边与坐标轴平行的立方体网格，放置了

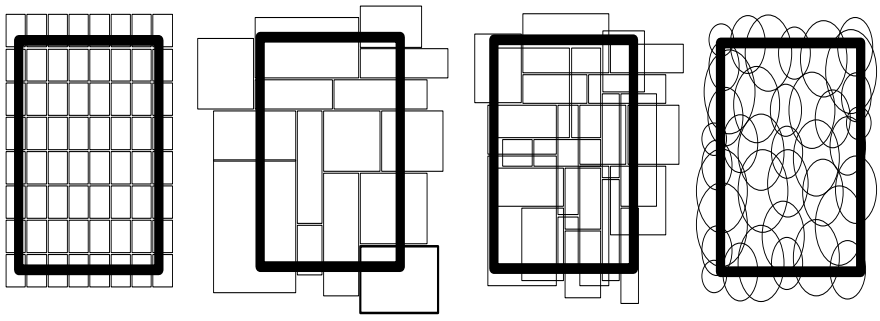


图182 用于构造集合神经的正方形划分与覆盖。

任意方向的正方形，并考虑了至少在一个点与正方形相交的立方体元素集合。之后构造了元素集合的神经。

E. 球面实验。

1. 球面被划分为形状各异的小型凸多边形网格单元，这些网格单元具有不同的几何学元素，并构造元素集合的神经。

2. 球面由大小不一的小圆形元素覆盖，并构造元素集合的神经。

3. 空间被划分为由大小相同、边平行于坐标轴的立方体组成的立方体网格，并

考察与球面至少在一点相交的立方体元素集合。随后构造元素集合的神经。

4. 空间被划分为许多小球，形式为大小相同的球，并考察这些球元素的集合，其中每个球至少在一个点处与初始球相交。之后构造元素集合的神经。

F. 立方体曲面的实验。

在立方体曲面上进行了类似于前述的实验。人们编写了一个计算机程序，用于在足够复杂的曲面上进行实验，并自动选择划分或覆盖。

结果获得了大量神经，其中许多在从计算机内存中打印出来时显得相当复杂。然而，一些特征很快便显现出来。

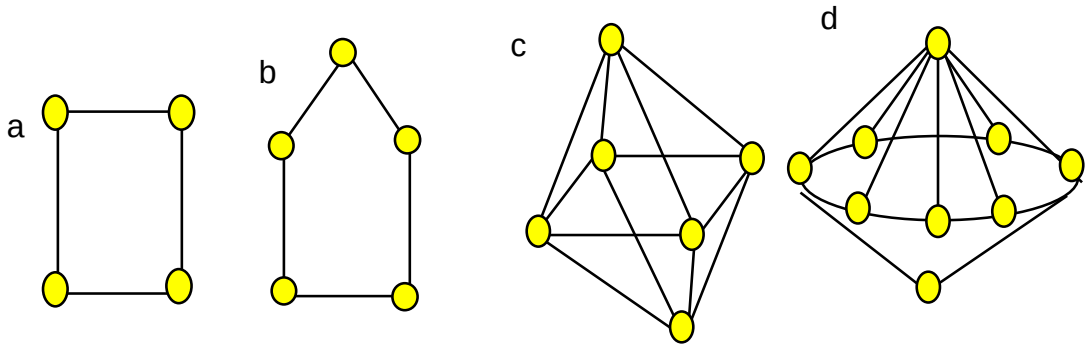


图 183 直线线段覆盖的神经不包含 a 和 b 这两种子空间。平面覆盖的神经不包含 c 和 d 这两种子空间。

O1. 为直线段、曲线段或圆，即为一维曲面构造的任何神经，都不包含图 183a 和 b 所示的子神经。后来发现，这一结果几年前已针对区间图得到证明[20]。之后，在文献[10] 中证明了：在n维欧几里得空间中，由具有整数坐标的单位立方体族构成的足够长线段的神经，是一个一维分子空间。

O2. 为正方形或球面构造的交集神经，不包含与图 183c 和 d 所示相似的子神经。这个结果证明起来并不困难，但由于我们未在文献中见到对此结果的提及，故将其表述为一个定理，证明留给读者。

定理。

> 设平面由凸闭集构成任意覆盖（划分），且这些集合的最小直径 d 和最大直径 D 均位于某个固定的正区间内。则该覆盖的神经不含任何作为闭正规二维分子空间的子神经。

发现另一个特征花费了我们更多的时间，并且需要进行额外的实验来验证。其核心内容如下。我们找到了四种特殊的神经变换类型：粘接点、删除点、粘接连接和删除边，我们将其称为点变换。结果发现：

A1. 线段或曲线段的所有神经都可以通过点变换相互转换。

A2. 圆的所有神经都可以通过这类变换相互转化。

A3. 通过点变换，直线或曲线线段的任何神经都不能转换为圆的神经，反之亦然。

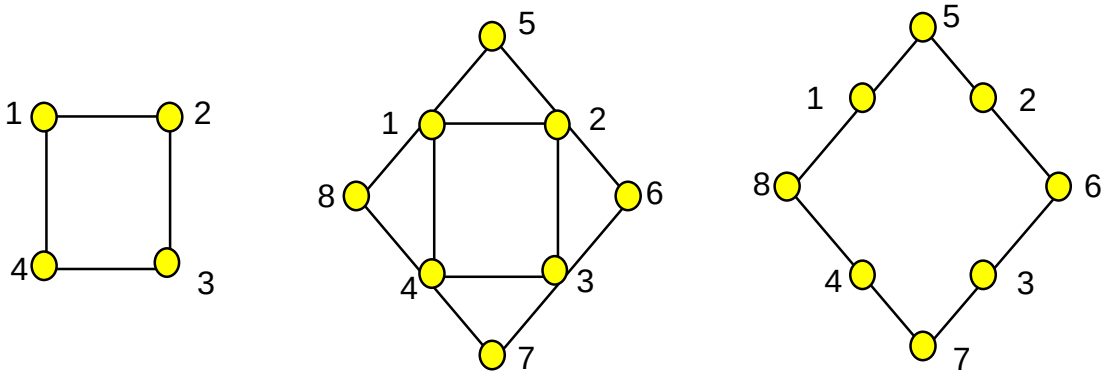


图184 通过点的点状粘附增加分子圆的点数。

B1. 正方形的所有神经都可以通过此类变换彼此转换。

B2. 球面的所有神经都可以通过这类变换相互转换。

B3. 正方形的任何一条神经都不能通过点变换转化为球面的神经，反之亦然。

接下来，我们发现了另一个有趣的性质。

C1. 线段、曲线和正方形的所有神经，都可以通过点变换相互转换，也可以转换为由一个点组成的平凡神经。

C2. 圆的神经可以通过点变换变为最小神经 $C_{4,}$，如图 183a 所示。

C3. 球面的神经可以通过点变换变为图 183c 所示的最小神经。

C4. 圆、球面和简单神经彼此不能通过点变换相互转化。

自然，我们省略了所进行实验的细节。
此后又花了一些时间才理解以下内容：

1. 我们得到的正是一个离散模型，它是连续空间的覆盖或剖分的神经。

2. 直线段、曲线和正方形在拓扑学中被称为空间，它们彼此同伦，并且与点同伦。另一方面，它们不同伦于圆和球面，而圆和球面彼此也不同伦。因此，点变换是保持同伦的映射的组合图像。换句话说，如果一个分子空间可以通过点变换收缩到另一个分子空间，则这两个分子空间同伦。

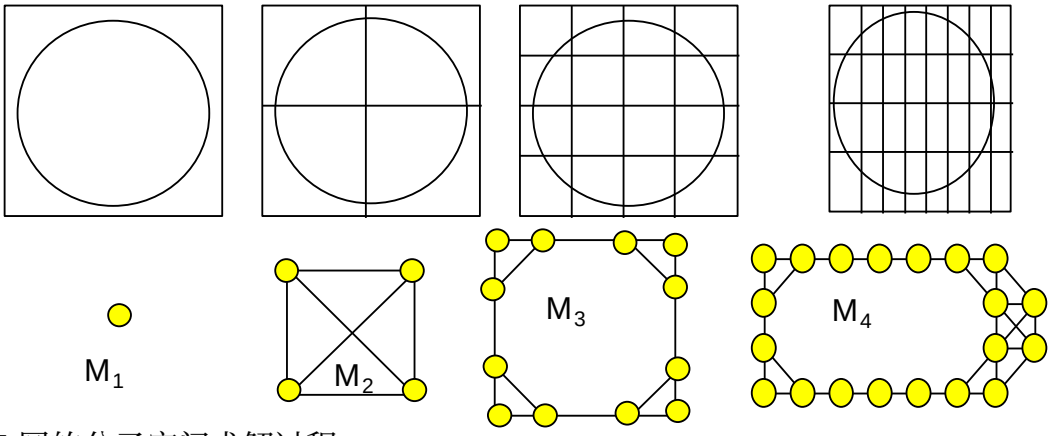


图 185 圆的分子空间求解过程。

下一步是在其他曲面上再次进行验证。在环面、实心立方体和实心球等对象上进行的实验证实了所有结果。

最后需要指出的是，关于根据 [29] 对连续集合进行离散表示的说法，最早见于中世纪阿拉伯哲学家穆台凯里姆的著作。从他们的观点来看，构成一个正方形（或正方形的边界，即圆）需要四个点。

连续表面的分子空间生成算法

设曲面 S 位于区域 ($0 < x_i < d$)，i=1,2,...n，空间 E^n 中。

1. 选择 B 以边长为 d、且有一个点位于坐标原点的立方体 K 为边界。
2. 将其划分为边长为 d/2 的立方体，并为 S 构建基本分子空间 M_1 。

3. 将 K 划分为边长为 d/4 的立方体，并为 S 构造基本分子空间 M_2 。

4. 检查 M_1 和 M_2 是否同伦。
5. 重复步骤 2、3 和 4，每次将立方体的边长缩小一半。我们得到一列分子空间 $M_1,M_2,....M_n...$

6. 当从某个编号 p 开始，所有编号为 n>p 的分子空间 M_n c 彼此同伦时，过程即停止。可任选其中一个作为曲面 S 的模型。

图 185 展示了使用所述算法求圆的分子空间的过程。

由一个点构成的分子空间 M_1，与 M_2, 同伦，但与 M_3 不同伦。空间 M_3 和 M_4 彼此同伦，也与使用更细划分得到的所有后续空间同伦。容易验证，它们是一维闭空间，尽管不具有正规性。显然，它们可通过点变换收缩到最小的正规圆 S^1_{min}，该圆由四个点构成。

多维分子对象运动的若干算法

本节将讨论 n维对象的运动与变换算法，例如线、曲面、立体等。作为具体示例，我们以一维空间——圆为例，其变换很容易用图示说明。推广到二维、三维和多维情形并不困难，只需增加运算次数即可。

1. 圆的膨胀。
设有一个由点 1、2、3 和 4 构成的最小圆，如图184所示。

为了将点的数量增加到八个，我们把点 5 粘合到点 1 和点 2，把点 6 粘合到点 2 和点 3，把点 7 粘合到点 3 和点 4，并把点 8 粘合到点 4 和点 1。所有这些粘合都是分子空间允许的点变换，不会改变其

特征。不过，这样会产生点与点之间的边，我们可以将其删去。

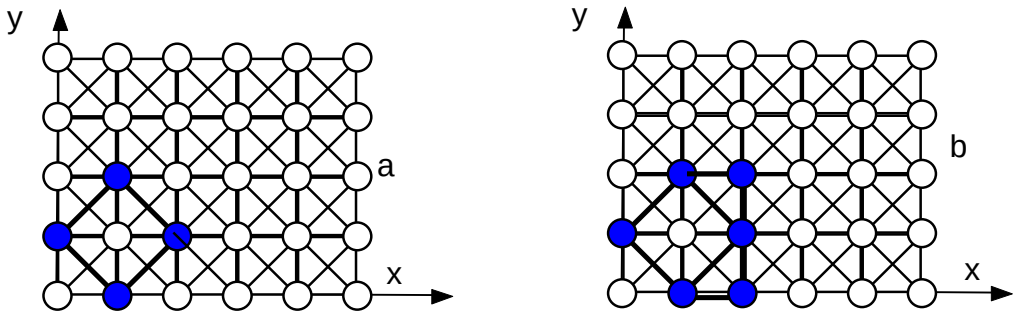


图186 欧几里得分子空间中圆向右平移。

下一步，舍弃边（1,2）、（2,3）、（3,4）和（4,5）。得到的空间是由八个点组成的一维圆周。在这个例子中，我们没有涉及对象作为整体在周围空间中的移动。

2. 圆的运动。为了确定这类运动，我们需要预先引入一个坐标系，运动就是相对于该坐标系发生的。坐标系由分子欧几里得空间确定。此前，我们已经详细描述了获得欧几里得空间的分子模型的方法。这是一个独立的问题，其解决方案取决于每个具体情况下的实际条件。

在本稿中在这种情况下，我们选择二维平面的分子模型， в

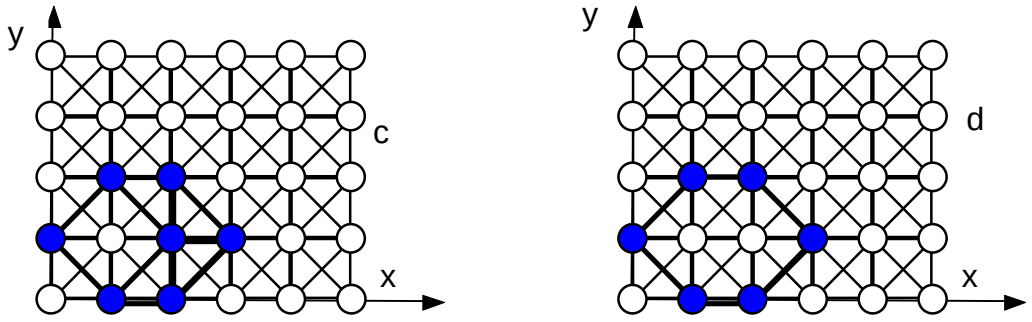


图187 欧几里得分子空间中圆向右平移。

其中连续欧几里得空间中具有整数坐标的点是分子空间中的点，并且每个点都通过连接与最近的邻域相连，如图 186 所示。该二维平面模型是完整的

齐次二维分子空间。圆由四个深色点组成，这些点通过边连接，如图186所示。

若要向右移动，就在圆周上粘合两个点。粘合后的结果如图 186、图187、图 188 所示。接着在空间中再粘合一个点。然后移除与五条边相接的点，得到一个由六个点组成的圆。现在，我们的任务是将圆上的点数减少到四个，同时将圆的左侧向右移动。为此，我们在圆上再粘合一个点，将点数增加到七个。之后，我们可以移除一个点，得到由六个点组成的圆，再移除两个点，最终得到由四个点组成的圆，如图 188 所示；它就是向右移动一步后的原始圆。我们再强调一次，所有

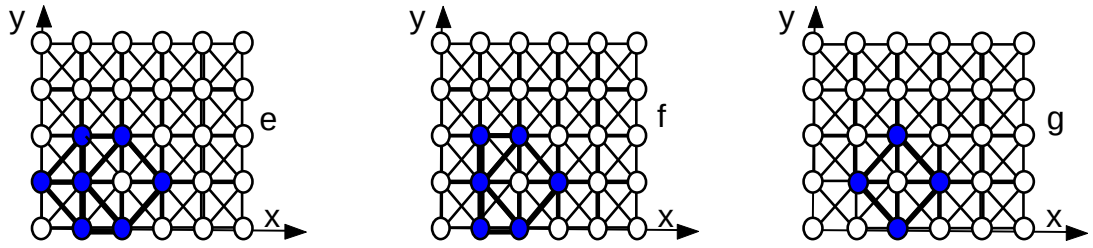


图 188 欧几里得分子空间中分子圆向右移动。

变换是点变换，不改变所移动空间的特征。同样，我们也可以沿其他方向移动圆周，如向左、向上或向下，或者改变它的大小。二维、三维乃至任意多维对象的变换，在原理上与圆周的变换并无不同，因为对粘接和点及连接的删除所施加的必要条件只有一个——它们必须是点变换。众所周知，这一条件与维数无关，而由点或边的最近邻域决定。点变换的优势还在于它们具有局部性，例如，要删除一个点，我们只需了解其最近邻域的结构——它的邻域，而无需考虑空间中的其他点。

第15章的参考文献。

10 Evako A.V.、Melter R.A.，《线段的图维数》，《第八届一般拓扑学及其应用暑期会议论文集》，1992年，美国纽约；14 Evako A.V.，《正规数字 n 维空间在 n 维欧几里得空间欧几里得空间中的盒族表示》，第十一届一般拓扑学及其应用暑期会议，美国纽约，1995年。16 Evako A.V.，《区间图和圆弧图的欧拉示性数与同调群》，预印本 SU-GP 93/7-4，物理系，雪城大学，美国。17 Evako A.V.，《图的覆盖的拓扑性质》，预印本 SU-GP 93/7-5，物理系，雪城大学，美国。18 Evako A.V.，《n 维曲面覆盖的交图的拓扑性质》，《离散数学》，第147卷，第107–120页，1995年。20 Gilmore P.C.、Hoffman A.J.，《可比图和区间图的刻画》，《加拿大数学杂志》，第16卷，第539–548页，1964年。24 Ivashchenko (Evako) A.V.，《球面和环面的图》，《离散数学》，第128卷，第247–255页，1994年。26 Ivashchenko (Evako) A.V.，《用图表示光滑曲面。不改变图的欧拉示性数的图变换》，《离散数学》，第122卷，第219–233页，1993年。29 Jammer M.，《空间概念》，哈佛大学出版社，第60页，1954年。43 Иваĸо A.B.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。

第 3 部分。分子空间理论的应用

分子空间上的微分方程

运用微分方程理论中广为人知的近似方法，在分子空间上定义了一个动力系统。该系统包含抛物型、椭圆型和双曲型等偏微分方程。文中讨论了在分子空间上定义微分方程的一些自然背景，并发现了抛物型方程与双曲型方程之间的基本结构差异。文中推测，分子空间上的微分方程可应用于神经网络和电网、化学与生物结构，以及任何可用分子空间或图描述的对象。作为示例，文中给出了抛物型、椭圆型和双曲型方程在一维、二维及更高维球面、环面、射影平面、欧几里得空间和树上的数值解。文中提出了一种正则方程，它是所给类型微分方程的推广，并研究了这种正则方程的一些性质。

大部分所得结果收录于[5,6,9,43,48]的著作中。

连续空间与离散空间上微分方程的相似性与差异

首先，我们必须在分子空间上定义微分方程。我们将借助一个早已

用于数值求解微分方程的网格法来说明这一点。实际上，选定某个网格后求解微分方程，就相当于在某个充当网格的分子空间上求解该方程。两者的区别在于，采用网格法时，我们会选择一个适合在连续空间中解决具体问题的网格；而对于分子空间，网格则由空间本身的形式决定。然而，这种乍看之下微不足道、无关紧要的差异，最终却使人们发现了不同类型微分方程的基本特征，而这些特征既不取决于网格的选择，也不取决于空间维数或空间的其他数学性质。这些特征反映了方程所描述的自然过程的本质。我们用一个简单的例子来说明这一点。抛物型方程有时也称为热方程或热传播方程。该方程描述热量如何在某个指定区域内传播。除了描述热传播，这个方程还能描述许多种类繁多的物理和自然过程。热量是以局部方式从一点传递到另一点的，从根本上说，这一过程与空间的数学特征毫无关联。因此，抛物型方程及其解应当具有一种不包含依赖于空间数学特征（例如维数）的参数的形式。尽管如此，我们很容易发现，在连续情形下，抛物型方程的表达形式及其解的形式都直接取决于空间维数。将数理物理方程应用于分子空间，恰好可以把这些方程表示为最一般的形式，不包含空间具体的数学特征，并确定抛物型方程与例如双曲型方程之间的根本相似之处和差异。我们稍后将对此展开讨论。

另一方面，在离散空间上应用微分方程工具，可能会带来一些新结果，这些结果或许在连续情形中没有对应物。尤其是对于体积（点的数量）较小的空间，情况更是如此。例如，热量（抛物型方程）或波（双曲型方程）在连续二维球面上的传播，应当类似于具有足够多点的分子模型中的相应过程。然而，在分子空间理论中，存在一个最小的二维球面，其点数为六，我们同样可以在其上研究热传递和波动过程。同时，由于离散空间中的元素数量较少，这里可能会出现一些没有连续对应物的特殊现象，

即不具有连续对应物的特殊现象。另一个重大区别在于，分子空间中存在一个由连接空间中两个相邻点的边长所确定的自然最小长度。应用于波动过程时，这意味着不存在无限短的波和无限高的频率，也就是说，不存在那些常常导致发散出现的因素。使用分子空间的另一个特点是，我们可以在没有连续对应物的空间上求得微分方程的解。例如，考虑齐次树上的椭圆型方程；该树是一维正则空间。我们将展示，解的形式取决于每个点邻域的体积。我们将证明，可以选择这样一棵树（即一个分子空间，而不

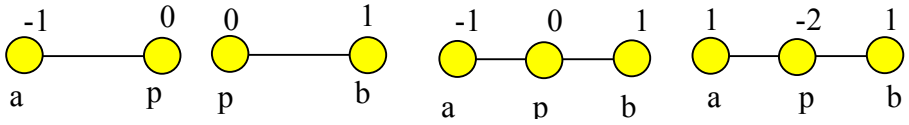


图 189 有限差分格式的模板。

包含环，或者包含非常长的环），在其上解的形式将与三维椭圆方程的解相似。这种相似性引出了一个有趣的问题：微分方程的解是否反映了空间的拓扑？最直观的回答是否定的，不过这仍是一个需要深入研究的问题。

分子空间上数学物理方程的定义

我们考虑用相应阶数的差分算子对一阶和二阶微分算子进行标准近似，使得每个导数都由相应的差商近似。这些差分算子的图示见 [53]。从图示中可以看出，某函数 f 在时刻 t 的点 p 处关于坐标的一阶和二阶偏导数可近似如下：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_p^t - f_a^t}{h} ; \frac{f_b^t - f_p^t}{h} ; \frac{f_b^t - f_a^t}{2h} ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_b^t - 2 f_p^t + f_a^t}{h^2} ,$$

这里 h = Δx。类似地，根据图示，表示时刻 t 点 p 处的一阶和二阶时间导数。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_p^{t+1} - f_p^t}{\Delta t}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{f_p^{t+1} - 2f_p^t + f_p^{t-1}}{\Delta t^2}.$$

考虑微分方程

$$a\frac{\partial f}{\partial t} = b\frac{\partial f}{\partial x}; \quad a\frac{\partial f}{\partial t} = b\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad a\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = b\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

并将它们替换为有限差分形式。经过相应变换后，每个方程都可以化为以下形式:

$$f_p^{t+1} = \sum_k c_{pk} f_k^t + \sum_k d_{pk} f_k^{t-1}, \quad \text{k = a, p, b.} \quad (1)$$

其中 c_{pk} 和 d_{pk} 是某些系数，取决于方程的类型。

由 (1) 可知，函数在时刻 (t+1) 于点 p 处的值由函数在时刻 t 和 (t-1) 于 p 邻近各点处的值决定（图 190）。系数 c_{pk} 和 d_{pk} 的取值决定方程的类型: 它是一次还是二次方程，是双曲型、抛物型还是椭圆型。对于抛物型方程, $c_{pa}=e$, $c_{pp}=(1-2e)$, $c_{pb}=e$, $d_{pk}=0$, k=a, p, b,

$$f_p^{t+1} = ef_a^t + ef_b^t + (1-2e)f_p^t.$$

下文将假设 e 足够小，因此抛物型方程的所有系数均非负。对于椭圆型方程，差分方程可以表示为类似的形式

$$f_p^t = ef_a^t + ef_b^t + (1-2e)f_p^t.$$

对于双曲型方程 $c_{pa}=e$、$c_{pp}=(2-2e)$、$c_{pb}=e$、$d_{pk}=0$、k=a、b、d =-1,

$$f_p^{t+1} = ef_a^t + ef_b^t + (2-2e)f_p^t - f_p^{t-1} = ef_a^t + ef_b^t + (1-2e)f_p^t + f_p^t - f_p^{t-1}.$$

从分子空间应用的角度来分析这个方程。前三项在所有情况下都相同，函数值前的所有系数均为正，且其和等于 1。与抛物型方程和椭圆型方程相比，双曲型差分方程的右端多出两项。推广到二维、三维和多维情形时，很容易直接验证所有方程的结构都不会改变。每个差分方程都可以表示为类似的形式。因此，我们将抛物型方程表示为

$$f_p^{t+1} = \sum_k c_{pk} f_k^t, \quad \forall c_{pk} \geq 0, \sum_p c_{pk} = 1,$$

其中，第一项求和是对模板的所有点进行求和，

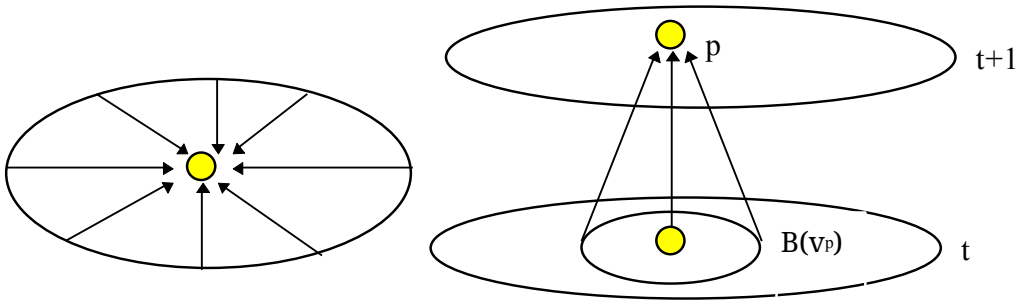


图 190 从点 p传递到相邻点 κ的热量等于 ckpfpt。显然，参与这一过程的热量总量必须保持不变。

与点 p 相邻，而第二个和则按指标 p 求和。差分方程右端只有一层，右端的所有系数均非负，且按第一个指标求和所得的系数和为 1。这个方程可以作如下解释，例如将其视为热传导方程（图 190）。假设 f_p^t 是时刻 t 点 p 的热量。下一时刻 (t+l)，这部分热量会转移到相邻点，其中一部分则留在点 p。由点 p 转移到相邻点 κ 的热量为 $c^{kp}f_p^t$。显然，参与这一过程的热量总量应保持不变。为保持物理类比，我们认为 $c^{kp}=c^{pk}$，但这并非必需。我们也可以不考虑热量，而考虑某一时刻位于某点的粒子数量，以及这些粒子在下一时刻转移到相邻点的数量（扩散方程）。另一种直观的说明是粒子在空间中的随机游走，其中 c_{pk} 是粒子从点 κ 转移到点 p 的概率 [55]。

椭圆型方程可以表示为与抛物型方程相同的形式。

$$f_p^{t+1}=\sum_k c_{pk}f_k^t,\ \forall c_{pk}\ge 0,\ \sum_p c_{pk}=1,$$

其中，第一项求和是对模板中所有与点 p 相邻的点进行的，第二项求和则是对指标 p 进行的。

将双曲型方程表示为

$$f_p^{t+1}=\sum_k c_{pk}f_k^t+f_p^t-f_p^{t-1},\ \forall c_{pk}\ge 0,\ \sum_p c_{pk}=1,$$

其中，第一项求和是对模板中所有与点 p 相邻的点求和，第二项求和则是对指标 p 求和。强调双曲型方程与抛物型方程之间边的基本事实

$$(f_p^{t+1})_{hyper} = (f_p^{t+1})_{parab} + f_p^t - f_p^{t-1}.$$

基于这些结果，我们来定义任意分子空间上的各种数理物理方程。实际上，我们只需将方程（1）推广到分子空间即可。

动态系统的定义。

分子空间 G 上以点（$v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots$）为基础的动态系统 $\{f^t\}$，是由编号 $t=0,1,2,\ldots$ 确定的一系列状态（函数在空间各点上的取值）；函数 f 定义在分子空间 G 的点集上。

函数 f^t 在空间 G 的点 v_k 处的值记作 $f_{tk}=f^t(v_k)$。t 可以解释为例如时间。

二阶（或更低阶）空间坐标线性齐次微分方程，以及时间坐标上的 m+1 阶线性齐次微分方程的定义。

在分子空间 G 中，空间坐标的阶数不超过二阶、时间坐标的阶数为 (m+1) 的线性齐次偏微分方程称为如下形式的方程

$$f_p^{t+1} = \sum_{s=t-m}^{s=t} \Big(\sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^s f_k^s \Big), \Leftrightarrow a \frac{\partial^{m+1} f}{\partial t^{m+1}} = b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots b_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

该方程通过前一时刻的状态确定动态系统在时刻 (t+1) 的状态。求和遍及球 $B(v_p)$ 中的所有点。

换言之，函数 f 在时刻、点 v_p 处的值由该点的球 $B(v_p)$ 中函数在前一时刻的值确定（图 190）。

有必要给出非齐次微分方程的定义，这种方程完全按照传统方式构造，即在方程右端添加一个函数。

非齐次线性微分方程的定义关于空间坐标的二阶（或更低阶）以及时间坐标的+1阶方程。

分子空间 G 中，关于空间坐标的阶数不高于二阶、关于时间坐标的阶数为 (t+1) 的线性非齐次偏微分方程称为如下形式的方程

$$f_p^{t+1} = \sum_{s=t-m}^{s=t} \Big(\sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^s f_k^s \Big) + h_p^{t+1},$$

它通过先前时刻的状态确定动态系统在时刻 (t+1) 的状态。求和遍及球 B(vp) 中的所有点。

作为该定义的推论，我们引入方程的基本类型。

分子空间上的抛物型微分方程定义。分子空间 G。

分子空间 G 上的抛物型微分方程称为如下形式的方程

$$f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^t f_k^t + h_p^{t+1}, \ \forall c_{pk}^t \ge 0, \ \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^t = 1.$$

求和遍及球内的所有点 vp，包括该点本身。如果所有 $h^{t+1}{}_p \equiv 0$，则该方程称为齐次方程，否则称为非齐次方程。

椭圆型方程也以同样的方式定义。

在分子空间 G上的椭圆微分方程的定义。

分子空间 G 上的椭圆型微分方程称为以下形式的方程

$$f_p = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk} f_k + h_p, \ \forall c_{pk} \ge 0, \ \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk} = 1.$$

求和遍及球内的所有点 vp，包括该点本身。如果所有 $h^{t+1}{}_p \equiv 0$，则该方程称为齐次方程，否则称为非齐次方程。

现在，我们来定义双曲型方程。考虑一个描述波动过程的双曲型方程。

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = b_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + b_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots b_n\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2},$$

a,b1 b bn2 $> 0, \ldots .$

在.....上定义双曲微分方程分子空间 G。

分子空间 G 上的双曲型微分方程称为如下形式的方程:

$$f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^t f_k^t + f_p^t - f_p^{t-1} + h_p^{t+1},\ \forall c_{pk}^t \geq 0,\ \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^t = 1$$

求和遍历球 vp 内的所有点，包括该点本身。如果所有 $h^{t+1}_p \equiv 0$，则称该方程为齐次方程，否则称为非齐次方程。

因此，波动方程的右端由抛物部分（以求和表示）加上函数在点 p、时刻 t 的值，再减去函数在点 p、时刻 (t-1) 的值构成。

这正是波动方程与抛物型方程的根本区别。如前所述，方程之间的连接由下式确定。

(fpt + l = + l + − − l (fpt fpt fp

双曲抛物线

考察抛物型解和双曲型解整体上如何逐层变化是很有益的。引入函数 S，它是函数 f 在空间所有点上的取值之和。

微分方程积分和的定义 я.

分子空间 G 上，点为 $(v_1, v_2, \ldots v_n, \ldots)$ 的微分方程的积分和，称为在时刻 t 空间所有点处函数值的和。

$$S(f^t) = \sum_{v_p \in G} f_p^t .$$

容易证明，对于抛物型方程 yp

$$S(f^{t+1}) = S(f^t).$$

而对于双曲型方程 yp

$$S(f^{t+1}) = 2S(f^t) - S(f^{t-1}).$$

在双曲情形下，量 $S(f^t)$ 构成一个等差数列。如果公差不为 0，那么随着 t 增大，$S(f^t)$ 的绝对值将无限增大。最终，这种

增长会导致发散。因此，我们必须排除这种情况。为此，必须正确确定初始条件。对于双曲型方程，初始条件由原函数 f 在 t=0 和 1（或 t=-1 和 0）这两个最初层上的取值确定。初始条件的设定必须始终满足

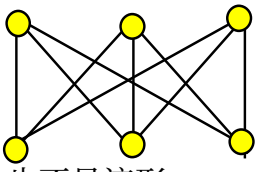


图191 空间没有连续对应物，也不是流形。

关系

$$S(f^0)= S(f^1).$$

满足这一关系时，

$$S(f^t)= S(f^0)= S(f^1).$$

对任意 t 都成立，而且分子空间上的解与其连续原像上的解相对应。违反这一关系会导致发散，这一点已通过在计算机上直接计算得到验证。下面我们将给出一些例子。

3.2 连续空间上的微分方程是分子空间上微分方程的特例吗？

给人的印象是，连续空间上的微分方程可能

у被视为特殊情形 учаи

分子空间上的微分方程。我们通过以下论述加以说明。对于连续空间上的每个微分方程，都可以选取有限差分格式，从而在分子空间上得到其离散对应物。

然而，并非每个分子空间都存在其连续像（或原像）。例如，图191中的空间没有标准的连续原像，因为它不是流形（一维流形中每个点的邻域必须包含两个孤立点，而不是像本例这样包含三个）。这意味着，这种空间上的微分方程在欧几里得空间中没有对应的连续类比。换言之，分子空间上的微分方程将连续空间上的微分方程作为一种特殊情况包含在内。

分子空间上的数学物理方程求解示例

3.2.1二维球面上齐次抛物型方程的解。柯西问题

作为例子，我们来考察图192所示二维球面上的齐次抛物型方程（热传播方程）的解。

$$f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^t f_k^t, \ \forall c_{pk}^t \geq 0, \ \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk}^t = 1.$$

将点从上到下依次标记为 1、2、3、4、5 和 6，并将方程中的系数矩阵 c_{pk} 选为如下形式：$c_{kk}=0.7$，$c_{kp}=0.075$，k，p=1,2,...6。

初始条件（柯西问题）设定为：上方顶点处取 1，其余所有点处取 0：$f^0_1=1$, $f^0_s=0$, s= 2,3,5,5,6。解 f 在点 1 和 6 处随时间的变化如图像所示（图 192 ）。类似地，可以得到 n 维球面上的解。

3.2.2二维球面上的齐次抛物型方程的解。边值问题

到目前为止，我们研究的都是没有边界条件的抛物型方程的解。本节将定义一种边界条件，它对应于在整个过程中将函数 f 在空间中的某些点处的值指定为某些确定值。下面用一个例子来说明。假设在空间中的某些点上

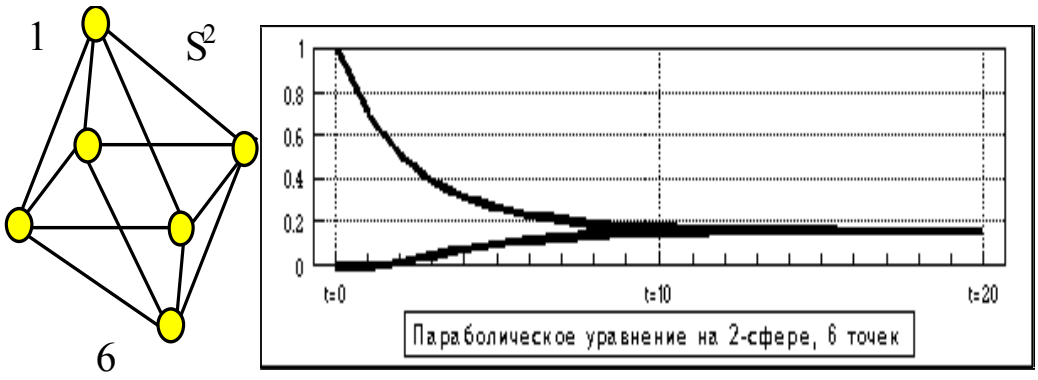


图192 二维球面上抛物型方程的解在相对点 1 和 6 处的图像。

给定 G 温度关系，它由某些外部条件决定，并贯穿整个过程。需要求出任意点处温度与时间的关系。这是一个典型的抛物型方程边值问题。这里我们需要源点和汇的概念。

源点的定义

如果对于任意 r.. B，所有 c_{kp} =0 都不从相邻点流入点 v_k，无论其符号如何，则称点 v_k 为源点。同时，在每一步中，值都可以从源点转移到相邻点，且可以是正值或负值。这意味着，

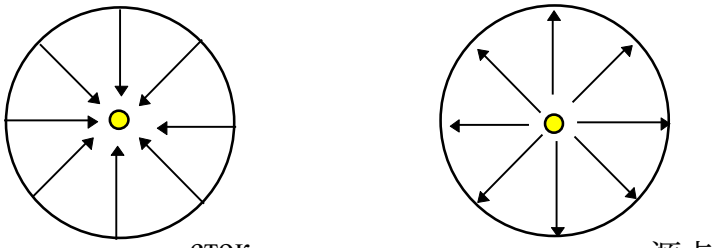


图193 汇中 p 的所有系数均为 $c_{kp}=0$，源点 p 中的所有系数均为 $c_{pk}=0$。

c_{pk} 可以不等于 0。

汇的定义

点 v_k 称为汇，若所有 $c_{pk}=0$ 对于任意 p。汇可以接收来自相邻点的值，不论其符号如何。与此同时，值无论为正还是为负，都不能从汇转移到相邻点。在这种情况下，可以有

.

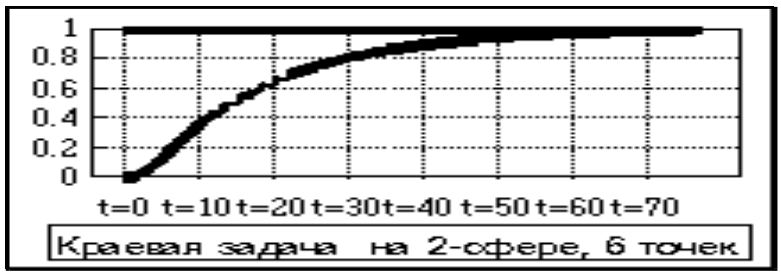


图194 二维球面上源点及其对跖点处边值问题解的图像。

不为 0 的系数 c_{kp}。
汇和源点的示意图见图193。
现在给出边值问题的定义，假设在空间上已设定源点和汇点。

第一类边值问题的定义

空间 G 上的 1 型边值问题定义为：1. 定义在该空间上的抛物型方程；2. 源点、汇和定义在源点处的函数的集合。

我们来看一个二维球面上的热传播边值问题示例，该球面如图 192 所示。从上到下，将顶点标记为 1、2、3、4、5 和 6。球面上的点 1 是源点，在该点处，对任意时刻 t，函数 $f_1^t=1$ （温度）取恒定值。引入与源点及其他点相关的系数如下：

$c_{1p}^t=0$, $c_{p1}^t=0.075$，其中 p=2,3,4,5；$c_{kk}^t=0.7$，$c_{kp}^t=0.075$，k，p=,2,...6。
球面上各点处函数 f 的初始值均取为 0，$f^0_s=0$, s= 2,3,5,5,6。热传导方程的解为 f，其在点 1 和点 6 处随时间的变化如图像所示（图 194）。

在点 1 处，函数为常数 1。在点 6 处，函数值从初始时刻的 0 逐渐增至 1。

3.2.3在 N-维完备欧几里得空间 Ln 和分子树 E^1_r上的抛物型方程的解

在 [43] 中，得到了 n维完备欧几里得空间 L^n 和齐次树上的抛物型方程的精确解。
形为 r 的齐次树 E^1_r 是一种无环的齐次分子空间，其中每个点都有 r 个邻点。图 195 展示了二维齐次正则欧几里得分子空间 L^2 和一个度数为 3 的一维树 E^1_3。这个空间不是流形，也不存在欧几里得空间中一维连续曲线形式的原像。已经证明，在 E^1_r 上，我们可以得到一种解，它与在 n 维欧几里得空间 L^n 上得到的解相似。如果在 L^n 中存在一个作为源点的点，那么解

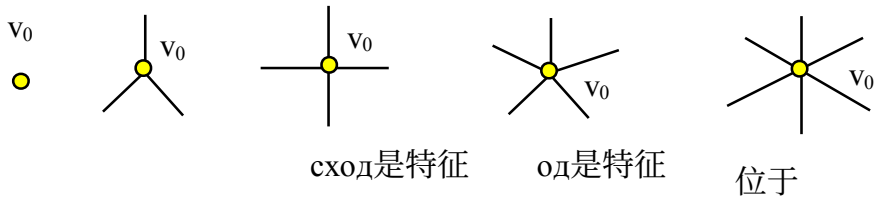


图 195 若每个点有 4 个或更多相邻点，则抛物型方程在源点处没有无穷奇点。

抛物型方程在维数三维及以上时，在该点 t=∞ 不具有发散性。在同样具有唯一源点的空间 E^1_r 中，源点处的发散性为 t=∞

在 r≥3 时不存在。于

在这两种情况下，都可以作如下物理解释：在每个时刻 t = 0,1,2,... n,...，点 v_0 处都会释放出等于 1 的热量，随后热量便在整个空间中传播。如果 n≥3 在 L^n 中，且 r≥4 在 E^1_r (图 19б) 中，那么 v_0 及所有 ... 的热量 ათდეб

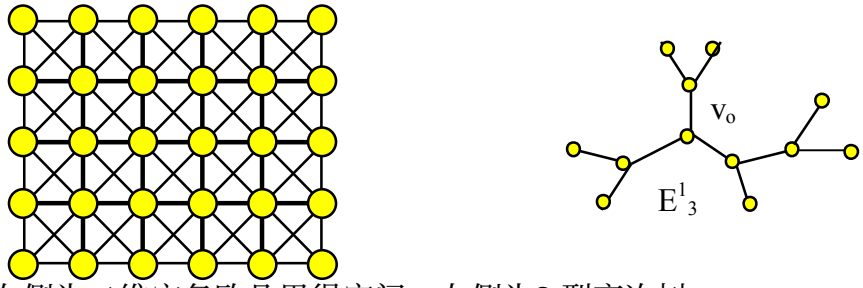


图196 右侧为二维完备欧几里得空间，左侧为3 型齐次树。

其余点在稳定状态下于 t=∞ 时会是有限值。从拓扑上看，E^1_r 在 r≥4 时与 L^n 不同。此外，E^1_r 在 r≥4 时甚至不是流形。然而，就热源收敛而言，E^1_r 在 r≥4 上的解与欧几里得空间 L^n 在 n≥3时的解相似。

由此产生一个问题：能否仅凭解的形式，判断该过程发生在欧几里得空间还是一维树上。解的形式相似，这表明很可能无法根据解的形式区分空间的拓扑。也就是说，拓扑不会显著影响解的形式。微分方程是一般性的构造，不依赖于拓扑。

3.2.4一维球面上的双曲型方程的求解

。作为示例，我们来考察齐次双曲型方程的求解

$$f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk} f_k^t + f_p^t - f_p^{t-1}, \text{ где все } c_{pk} \geq 0, \quad \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk} = 1$$

在一维球面上。设一维正规球面由 25 个点组成（图 197）。在方程中，任意时刻的系数按如下方式选取：c^t_{kk}=0.8，c^t_{kp}=0.1，若 v_k 和 v_p 相邻，k, p=1,2,..25。初始条件设为：在 t=-1.0 时，点 a 处的值为 1，其余各处均为 0：$f^0_a = f^{-1}_a = 1$。从物理上看，这意味着点 a 处的位移为 1，速度为 0。图 197 展示了解 f 在点 a 和点 b（位于第 12 个位置，与 a 相距较远）处随时间的变化关系。从图像可以看出，初始扰动从点 a 沿圆周上的各点传播。函数的第一个非零值在 t=11时出现在点 b。

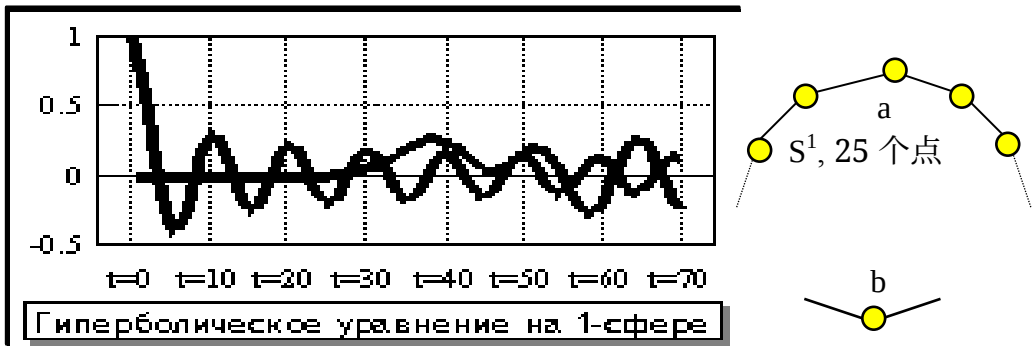


图197 双曲型方程在一维球面上 a 点和 b 点处的解图。

3.2.5二维射影平面 P^2 上双曲型方程的解

在 [43] 中，我们详细描述了双曲型方程在二维球面 S^2，、三维球面 S^3 和二维环面 T^2上的解。这里我们只考察射影平面。若存在这样的 g，使得对于任意层 t，范数 ||f-g||<e 均满足条件，则微分方程

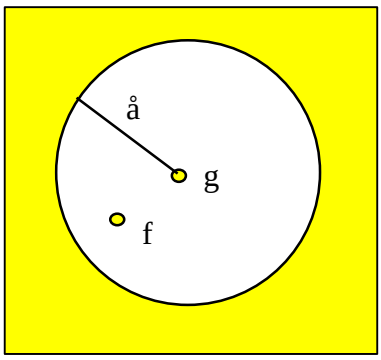


图198 如果存在这样的 g，使得对于任意层 t，范数 ||f-g||<e，则 ди ффер热 ур方程不可 р生。

非退化（图193）

初始条件由以下表达式确定：当 t=-1,0 时，$f^0_a=f^{-1}a=1$我们在方程中选择时刻 v_p 处的系数如下：

$$c^t_{pp} = c^t_{kp}=1/(n+1),$$

其中 n 是与点 v_p 相邻的点数。解由相应的图像表示（图194）。一条曲线表示点 a 处的解，另一条表示点 b 处的解。对于射影平面，绘制了两幅图像。第一幅图像是在初始条件 t=-1,0, $f^0_a= f^{-1}a =1$ 下得到的，第二幅是在初始条件 $f^0_a=1$, $f^{-1}_a=0$ 下得到的。提醒一下，这意味着各层上的积分和等式不成立。很容易看出，第二种情况下数值会单调增加，其上还叠加了振荡过程。

图 199 双曲型方程 P^2. 解的图像。如果我们只关注纯粹的波动过程，就可以通过恰当选择初始条件来排除这类解。

3.3 分子空间上的非退化微分方程

微分方程理论与应用中的一个重要问题是其解的非退化性。关于非退化性有许多

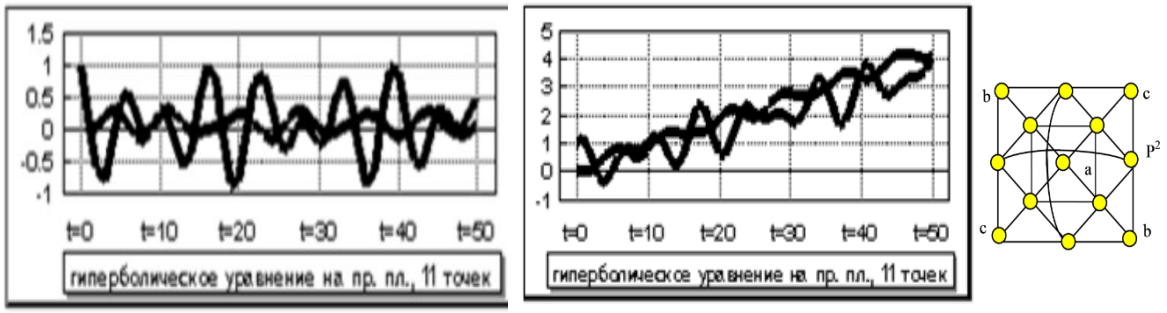


Рис 194. Графическое решение гиперболического уравнения на пр. пл.

定义，其中也包括有限差分格式的非退化性定义。大多数判据都是针对连续基底设计的，因而可以据此选取合适的模板。从这个角度来看，这些判据都不太适用于分子空间，因为模板由空间本身的结构决定。此外，我们还需要一种能在计算机上轻松检验的判据。因此，我们将基于显而易见的前提引入微分方程非退化性的定义，并确定其成立的条件。

分子空间 G 上关于时间的一阶齐次微分方程的定义

在分子空间 G 上的时间一阶齐次微分方程称为以下形式的方程

$$f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c^t{}_{pk} f_k^t, \quad (1)$$

其中 $f^t_p=f^t(v_p)$，c^t_{pk} 为任意系数。正如前面所说，方程 (1) 的解的状态是函数 f 在层 t 上的取值集合，$f^t=(f^t_1,f^t_2,...f^t_k,...)$。

所有状态的集合构成该方程的动力系统 f。

对于给定的方程 (1)，存在多个动力系统。实际上，方程的动力系统完全由初始状态 f^0 确定。本段中，我们只讨论作为方程 (1) 解的动力系统。下面引入动力系统状态的范数这一概念。

动力系统状态范数的定义。

微分方程 (1) 的解在层 t 上的状态范数称为 $\|f^t\|$，它等于给定层 t 上所有点处 f 的取值绝对值之和，并由以下表达式确定：

$$\|f^t\| = \sum_k |f_k^t|,$$

其中求和遍及分子空间的所有顶点。

非退化的齐次微分分子空间 G 上的时间一阶方程

设对于形式为 (1) 的方程 $f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk} f_k^t$，.

存在一个动力系统 g 和一个数 $e>0$，使得对于任意满足条件 $\|f^0 - g^0\| < e$ 的动力系统 f，等式 $\|f_t\| = \|f^0\|$ 对任意 t 都成立。那么方程 (1) 称为非退化的。

从图198可以看出非退化性的含义。如果 f 属于以 g 为中心、半径为 e 的圆内，那么，首先，动力系统的范数始终保持不变；其次，初始状态的微小变化也会引起任一后续状态的微小变化。

让我们看看，当微分方程为抛物型时，范数如何取决于初始条件。

定理172

Параболическое уравнение

$$f_p^{t+1} = \sum_{v_k \in B(v_p)} c_{pk} f_k^t, \text{ где } c_{pk} \geq 0, \sum_{v_p \in B(v_k)} c_{pk} = 1 .$$

есть невырожденное уравнение. Кроме того, с начальными условиями $f^0_p = f^0(v_p) \geq 0$ *для любой точки* v_p *молекулярного*

空间的范数解不依赖于时间（状态）t，$||f^t||=||f^0||$.

证　明。

考虑初始状态 g^0，系统在所有点上的函数值均为 1。考虑族 $\{e_k\}$，其中 $|e_k|<1$ 对任意 k。设 $f^0(v_k)=g^0(v_k)+e_k=1+e_k\geq 0$。则 。

$$f_p^1=\sum_{p\in B(v_k)} c_{pk}f_k^0\geq 0$$

因此，

$$\|f^1\|=\sum_p |f_p^1|=\sum_p f_k^1=\sum_p \sum_{v_k\in B(v_p)} c_{pk}f_k^0=\sum_k f_k^0 \sum_{v_p\in B(v_k)} c_{pk}=\sum_k f_k^0=\|f^0\|.$$

同样可得 $||f^{t+1}||=||f^t||$ 对任意 t 均成立。由此 $||f^t||=||f^0||$。定理得证。□

现在我们将寻找更广泛的一类形如 (1) 的方程，对于这类方程，存在形如 $f^0_p=f^0(v_p)\geq 0$ 的条件，使范数保持不变。这些方程可以称为准抛物型方程，因为就其性质而言，它们类似于抛物型方程。我们来考察微分方程的某些非退化条件。为此，将方程 (1) 表示为矩阵形式。与此同时，我们可以认为，如果空间中的两个点 v_p 和 v_k 不相邻，则 $c_k=c_k=0$。

$$f^{t+1}=Af^t$$

$$f^{t+1}=\begin{bmatrix} f_1^{t+1} \\ f_2^{t+1} \\ f_3^{t+1} \\ * \end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & * \\ c_{21} & c_{21} & c_{23} & * \\ c_{31} & c_{32} & c_{13} & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix};\quad f^t=\begin{bmatrix} f_1^t \\ f_2^t \\ f_n^t \\ * \end{bmatrix};$$

定理 173

假设微分方程满足以下条件：

$1_{ckp}\geq \sum_{v_k\in B(v_p)} |c_{pk}|=1$　对于任意顶点 v_p..2. 通过改变空间顶点的编号，该系统的矩阵 A 可以表示为四个矩阵 $B(1)$、$B(2)$、$C(1)$ 和 $C(2)$ 之和，其中 $B(1)$ 和 $B(2)$ 不含负元素，且没有共同的行或列；矩阵 $C(1)$ 和 $C(2)$ 不含正元素，且没有共同的行或列。

那么方程（1）是非退化的。

$$A = \begin{array}{|cc|} \hline B(1) & C(1) \\ C(2) & B(2) \\ \hline \end{array}$$

此外，如果 $B(1)$ 有 a 行和 b 列，那么在层 $g^0=(g^0_1,g^0_2,..g^0_k,...)$ 中，前 b 个元素为正，其余为负。

证 明

第一层上的函数的任意取值都可以写成

$$g^1_p = \sum_s c_{pk} g^0_s = \sum_{s\le b} c_{pk} g^0_s + \sum_{s>b} c_{pk} g^0_s .$$

考虑 g^1_p，$1\le p\le a$。因此，并且 $g_p \sum_s c_{pk} gs^1 = \sum_{s\le b}^{0} c_{pk} gs + \sum_{s>b}^{0} \ge 0$

所有加项 中的 сумм e polo жительны . P ассмотр им g^1_p, p >a. T огда

$g_p \sum_s c_{pk} gs^1 = \sum_{s\le b}^{0} c_{pk} gs + \sum_{s>b}^{0} \le$ ，而且总和中的所有项为负。现在，我们来定义第一层上的范数。

$$\|g^1\| = \sum_p |g^1_p| = \sum_{p\le a} |g^1_p| + \sum_{p>a} |g^1_p| = \sum_{p\le a}\sum_s |c_{ps} g^0_s| + \sum_{p>a}\sum_s |c_{ps} g^0_s| =$$

$$\sum_p \sum_s |c_{ps} g^0_s| = \sum_s |g^0_s| \sum_p |c_{ps}| = \sum_s |g^0_s| = \|g^0\|.$$

由于第 1 层各点处的符号与第 0 层相同各点处的符号相同，因此 $\|g^2\|=\|g^1\|$，且 $\|g^{t+1}\|=\|g^t\|$。因此，对于任意 t，均有 $\|g^t\|=\|g^0\|$ 。设在层 g^0 中，层 $g^0=(g^0_1, g^0_2,... g^0_k,...)$ 的前 b 个元素均等于 1，其余元素均等于 (-1)。那么，对于任意一组数 e_k, $|e_k|<1$, k=1,2,...，初始层 f^0 在各点 $f^0_k=g^0_k+e_k$处的取值，与 g^0在各点处具有相同的符号。因此，对于任意 t，均有 $\|f^t\|=\|f^0\|$ 。定理得证。□ 如果矩阵 A 可以化为上述形式，则称其为非退化矩阵。需要指出的是，在非退化微分方程中，任意零层都可以表示为两个层 g^0_1 和 g^0_2, 之和：第一个层的前 r 个元素为正，其余元素为负；第二个层 g^0_2 的前 r 个元素则相反，为负，其余元素为正。

$$f^0=g^0_1 + g^0_2$$

对于这些层中的每一层，都很容易看出，д 范数不依赖于 т t.

$$\|g^t_1\|=\|g^0_1\|, \|g^t_2\|=\|g^0_2\|.$$

通过简单验证不难证明，动力系统 f 在任意一层上的范数总是

раничена

$$\|f^t\| \le \|g^0{}_1\| + \|g^0{}_2\| = \|f^0\|.$$

我们将这一性质表述为一个定理。

定理174

对于任意动力系统 *f*，在非退化微分方程中，^{t}=(f t1, f t2,...f tk,...) 在任意层上的范数总是有界的，也就是说 $|f^t| \le |f^0|$。

证 明。

设零层表示为两个层 $g^0{}_1$ 和 $g^0{}_2$, 的和：第一个层的前 r 个元素为正，其余为负；第二个层 $g^0{}_2$ 的前 r 个元素则相反，为负，其余为正，$f^0=g^0{}_1+g^0{}_2$。那么，首先 $\|g^t{}_1\|=\|g^0{}_1\|$, $\|g^t{}_2\|=\|g^0{}_2\|$；其次 $\|f^t\| \le \|g^t{}_1\| + \|g^t{}_2\|$；第三 $\|f^t\| \le \|g^t{}_1\| + \|g^t{}_2\|$。由此 $\|f^t\| \le \|g^t{}_1\| + \|g^t{}_2\| \le \|g^0{}_1\| + \|g^0{}_2\| = \|f^0\|$。定理得证。□

注释。

抛物型方程是非退化的，因为这种情况下矩阵 A 的所有元素均为非负数。

作为示例，我们来考察二维球面上一个非退化微分方程的数值求解。我们选取二维

.

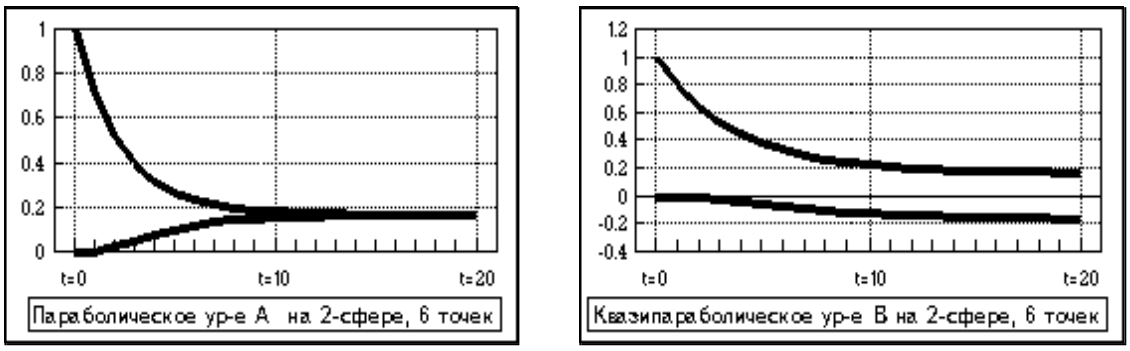


图200 二维球面上相同初始条件下抛物型（左）和拟抛物型（右）方程的解图像。

包含 6 个点的球面（如上图所示），并考察其上的两个方程的解：由矩阵 A 确定的抛物型方程，以及由矩阵 B 确定的非退化、非抛物型方程。这些矩阵如下所示。初始层相同，在

两种情况下，$f^0_1=1$、$f^0_k=0$、k=2、3,...6。两个点的方程解如图200所示，左侧为 A 情况，右侧为 B 情况。

A=

	1	2	3	4	5	6
1	0.8	0.05	0.05	0.05	0.05	
2	0.05	0.8	0.05		0.05	0.05
3	0.05	0.05	0.8	0.05		0.05
4	0.05		0.05	0.8	0.05	0.05
5	0.05	0.05		0.05	0.8	0.05
6		0.05	0.05	0.05	0.05	0.8

B =

	1	2	3	4	5	6
1	0.8	0.05	0.05	0.05	-0.05	
2	0.05	0.8	0.05		-0.05	-0.05
3	0.05	0.05	0.8	0.05		-0.05
4	0.05		0.05	0.8	-0.05	-0.05
5	-0.05	-0.05		-0.05	0.8	0.05
6		-0.05	-0.05	-0.05	0.05	0.8

非退化方程扩展了与抛物型方程性质相似、但并非抛物型的方程类别。这类方程的连续类比似乎可以表示为，例如 .

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f$$

第16章参考文献列表。

5 Evako A.V.，《分子空间上的抛物型微分方程。二维和三维球面及射影平面上的解》，第七届“数理物理问题中的离散奇点方法”国际研讨会，1997年，费奥多西亚，乌克兰。

6 Evako A.V.，分子空间上的抛物型微分方程。微分方程的正则性，1994年，未发表。

9 Evako A.V.，分子空间上的双曲型微分方程。二维和五维球面及射影平面上初值问题的解例。“系统稳定性建模与研究及系统仿真”国际会议，1997年，基辅，乌克兰。

48 伊瓦申科 A. B.，《分子空间上的抛物型微分方程》，1987年，未发表。43 Ивако A.B.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。53 科恩 G.、科恩 T.，《科学工作者和工程师数学手册》，科学出版社，莫斯科，1970年。55 斯皮策 F.，《随机游走原理》，《和平》出版社，莫斯科，1969年。

分子空间的一般变换及其不变量

本章将介绍分子空间的一种线性特征，它是欧拉示性数的推广。我们将研究这一函数的一些性质。与此相关，我们定义分子空间的变换，它是可缩变换的推广。我们证明，对于任意给定的变换，都存在一个分子空间的特征函数，该函数在这些变换下保持不变。最后，我们将讨论这种方法可能的应用。

本章所得结果的部分内容已发表于 [43]。

分子空间上的特征函数

本节将考察分子空间的线性特征，并展示其中一些特征与空间的各种变换之间的联系。我们发现了一个有趣的性质：对于每一种分子空间变换，都存在一类明确确定的特征，它们是不变的。举例来说，分子空间的欧拉特征在点变换下保持不变。这给人的印象是，对于广泛的一类变换，甚至可能是所有变换，都存在这样的特征。对于点变换，我们有经典的拓扑类比。点变换是拓扑空间同伦变换的离散模型。对于其他类型的变换，我们目前还无法在经典数学中找到相应的类比。不过，它们也可能描述计算机科学、物理学或生物学中的某些实际过程，并有望得到应用。发现一种变换不变量后，可以推测还存在其他不变量，例如群。我们先前已表明，分子空间的同调群是点变换的不变量。其他变换也可能存在类似的群，但这有待进一步研究。

下面开始阐述。先回顾几个我们之前引入的定义。

超边 K(n) 的定义

由 n 个点组成的空间 K(n) 称为 n 单形或完全连通空间，如果其中每一对点都相邻。

k 单形集合 $T_k(G)$ 的定义。

设有一个分子空间 G。我们把空间 G 中所有由 k 个点组成的单形构成的集合称为 k 单形集合 $T_k(G)$。用 $n_k=C_k(G)$ 表示 $|T_k(G)|$ 集合 $T_k(G)$ 的基数（不同 k 单形的数量），$n_k=C_k(G)=|T_k(G)|$。

注释。

按定义，令 $n_0=C_0(G)=|T_0(G)|=1$ 。

空间的函数向量的定义。

设 G 和 n_p 是有限空间，其由 p 个点组成的单形数为 K(p)。那么，所有 $(n_1,n_2,....n_s)$ 的集合称为空间的函数向量，$n_k=C_k(G)=|T_k(G)|$，$f(G)=(C_1(G),C_2(G),...C_s(G))=(n_1,n_2,....n_s)$。

定理175。

设 *G* 和 *H* - 为空间，$f(G)=(n_1,n_2,....n_k)$ 和 $f(H)=(m_1,m_2,...m_k)$- 是它们的向量。那么，对于直和 $G\oplus H$，有以下关系式

$$C_p(G\oplus H)=C_p(G)+C_p(H)+\sum_{s=1}^{p-1}C_s(G)C_{p-s}(H)=n_p+m_p+\sum_{s=1}^{p-1}n_s m_{p-s}=$$

$$\sum_{s=0}^{p}C_s(G)C_{p-s}(H)=\sum_{s=0}^{p}n_s m_{p-s},\quad n_0=m_0=C_0(G)=C_0(H)=1.$$

证 明。

G⊕H 中的 p 个单形数等于 G、H 中 p 个单形数之和，再加上同时包含来自 G 和 H 的点的 p 个单形数。由于 G 中的每个点都与 H 中的每个点相连，因此这类单形的数量由公式中出现的求和式确定。定理得证。□

Напо我们再提几条定理，其中一部分此前已经证明过。

定理 176。

设 *G*- 为空间，G_1 - 为其子空间。设$f(G)=(n_1,n_2,....n_k)$ 和 $f(G_1)=(m_1,m_2,...m_k)$ - 为它们的向量。将一点粘接

v 到空间 G 上，沿着子空间 G_1 (将点 v 与子空间 G_1 中的所有点相连)。将得到的空间记作 $G+v$。

那么

$$C_p(G+v)=C_p(G)+C_{p-1}(G_1),\ где\ p=1,2,..\ k+1.$$
$$f(G+v)=(n_1+1,\ n_2+m_1,\ n_3+m_2,...n_k+m_{k-1},\ m_k).$$

证 明。
空间的点数增加1，而每个p点束生成一个(p+1)点束。定理得证。□

定理 177。

设 G 是空间，v_1 и v_2 是它的点，$G_1=O(v_1v_2)$ 是这两个不相邻点的公共边界。设 $f(G)=(n_1,n_2,....n_k)$ 和 $f(G_1)=(m_1,m_2,...m_k)$ 是它们的向量。在点 v_1 和 v_2 之间粘接连接 v_1v_2。将得到的空间记为 $G+v_1v_2$。
那么

$$C_p(G+v_1v_2)=C_p(G)+C_{p-2}(G_1),\ где\ p=1,2,..\ k+2.$$
$$f(G+v_1v_2)=(n_1,n_2+1,n_3+m_1,...n_k+m_{k-2},m_{k-1},m_k).$$

证 明
连接数增加 1。此外，G_1 中的每个 p 点束都会生成一个新的 (p+2) 点束。定理得证。□

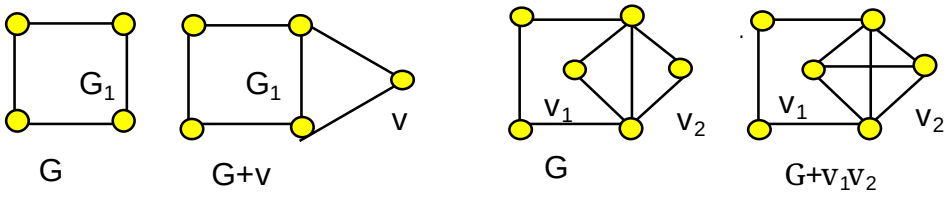


图 201 将点和边粘接到空间上，会相应地改变其向量函数。

在图 201 左侧画出了一个空间 G，在其上通过 G_1粘接了点 v。容易看出，f(G)=(4,4)、$f(G_1)$=(2,1)，以及 f(G+v)=(5,6,1)。同一图的右侧，在点 v_1 和 v_2 处粘接了一条连接。根据公式，f(G)=(6,8,2)、$f(G_1)$=(2,1)，以及 $f(G+v_1v_2)$=(6,9,4,1)。

我们引入空间 G 的特征函数定义。

空间的特征函数定义。

设 G 是一个空间，$f(G)=(n_1,n_2,.....n_k)$ 是它的向量。在分子空间集合上定义的特征函数 F(G)，称为分子空间集合上的特征函数。它由无限序列系数 $F=(a_1,a_2,...a_k,...)$ 确定，其在空间 G 上的值由下列表达式给出

$$F(G)=\sum_{p=1}^{k} a_p n_p$$

其中 a_p、p=1、2、...、κ 为系数。

容易看出，特征函数实质上由系数序列 $F=(a_1,a_2,...a_k,...)$ 确定，该序列称为系数向量。它在空间 G 上的值可以看作向量 f(G) 与 F 的标量积。

$$F(G)=<f(G)F>^{p}$$

特征函数的 n 次幂的定义。

设有一个由系数向量 $F=(a_1,a_2,...a_k,...)$ 定义的特征函数。该函数的 n 次幂称为由系数 F^n 定义的特征函数

$$F^n=(a_1, a_2,... a_k,...)^n=(a_n,a_{n+1},... a_k,...).$$

换言之，若空间 G 的向量为 $f(G)=(n_1,n_2,...n_k,...)$，则 $F(G)=F^1(G)=(a_1n_1+a_2n_2+... a_kn_k...)$, $F^2(G)=(a_2n_1+a_3n_2+...a_{k+1}n_k...)$,

$F^p(G)=(a_pn_1+a_{p+1}n_2+... a_{k+p-1}n_k...)$。例如，对于由一个点 v 构成的空间 G，$f(v)=(1,0,0,...0,...)$，得到：$F(v)=F^1(v)=a_1$, $F^2(v)=a_2$,...$F^p(v)=a_p$。现在考察在对空间进行各种操作时，空间特征函数如何变化，例如粘接和点及连接的删除。

分子空间特征函数的性质

分子空间特征函数的性质

分子空间

我们来考察空间特征函数的一些简单性质，这些性质将在后文中用到。

定理178。

设 G 和 H 是空间，$f(G)=(n_1,n_2,....n_s)$ 和$f(H)=(m_1,m_2,...m_s)$ 是它们的向量，且 $F=(a_1,a_2,...a_k,...)$ 是某个特征函数。

那么，直和 $G\oplus H$ 上的特征函数由下式定义。

$$F(G\oplus H)=\sum_{k=1}^{s} a_k n_k+\sum_{k=1}^{s} a_k m_k+\sum_{p=1}^{s} a_p \sum_{k=1}^{p-1} n_k m_{p-k}=F(G)+F(H)+\sum_{k=1}^{s} F^{k+1}(H)n_k.$$

证 明。

设空间 G 的函数向量定义为 $f(G)=(n_1,n_2,n_3,...n_s)$，空间 H 的函数向量定义为 $f(H)=(m_1,m_2,m_3,...m_s)$。如上所示，空间 G⊕H 的函数向量为:

$f(G\oplus H)=((n_1+m_1),(n_2+n_1m_1+m_2),(n_3+n_1m_2+n_2m_1+m_3),(n_4+n_1m_3+n_2m_2+n_3m_1+m_4),...(n_s+n_1m_{s-1},+...+n_{s-1}m_{s-1}+m_s),...(n_sm_s))$. 由此得到，$F(G\oplus H)=(a_1(n_1+m_1)+a_2(n_2+n_1m_1+m^{2}))+a_3(n_3+n_1m_2+n_2m_1+m_3)+a_4(n_4+n_1m_3+n_2m_2+n_3m_1+m_4)+...+a_s(n_s+n_1m_{s-1},+...+n_{s-1}m_{s-1}+m_s)+...+a_{2s}(n_sm_s))=$

$(a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3+...a_sn_s)+(a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3+...a_sm_s)+n_1(a_2m_1+a_3m_2+...a_{s+1}m_s)+n_2(a_3m_1+a_4m_2+..a_{s+2}m_s)+...n_s((a_{s+1}m_1+a_{s+2}m_2+...a_{2s}m_s)=F(G)+F(H)+F^{2}(H)n_1+F^{3}(H)n_2+...+F^{s+1}(H)n_s$. 定理得证。□

推论。

由定理的证明可知，对于任意两个空间 G 和 H，关系式

$$\sum_{k=1}^{s} F^{k+1}(H)n_k=\sum_{k=1}^{s} F^{k+1}(G)m_k.$$

定理179。

对于任意特征函数，以下关系式成立：*1.* $F^{n+1}(G)=F^{1}(F^{n}(G))$*.2.* $(F_1+F_2)^{n}=(F_1)^{n}+(F_2)^{n}$，或 $(F_1(G)+F_2(H))^{n}=(F_1(G))^{n}+(F_2(H))^{n}$，其中空间 G 和 H 可以不同。

证 明

证明在于验证。□

定理180。

设 G 和 H 分别为空间及其子空间。设 $G+v$ 是通过 H 将点 v 粘接到 G 上得到的空间。（点 v 与 H 中的所有点相连接。于是)

$$F(G+v)=F(G)+F^2(H)+F(v)=F(G)+F^2(H)+a_1.$$

证 明

将空间 G+v 中的向量 $f(G+v)=(n_1+1, n_2+m_1, n_3+m_2,...n_k+m_{k-1}, m_k)$ 代入 F(G+v) 中。经过变换后，我们得到所求表达式。定理得证。□

定理181。

设 G-空间，v_1 和 v_2 - 是其中两个不相邻点，H- 是点 v_1 和 v_2的公共邻域子空间。设$G+(v_1v_2)$ - 是通过将边 v_1v_2 粘接到 G 而得到的空间。那么

$$F(G+(v_1v_2))=F(G)+F^3(H)+F^2(v)=F(G)+F^3(H)+a_2.$$

证 明。

定理的证明与前一个定理类似。将向量 $f(G+v_1v_2)=(n_1,n_2+1,n_3+m_1,...n_k+m_{k-2},m_{k-1},m_k)$ 代入 $F(G+(v_1v_2))$。经过简单的变换后，便得到原式。□

空间的基变换

现在引入空间变换的定义。这类变换是点变换的推广，我们将为其找到一个特征函数，该函数是不变量。下面两个定义应结合起来理解。

B 型基空间族的定义。

空间族 T(B) 中的空间 $B,G_1,G_2,G_3,....G_n,....$, $T(B)=(B,G_1,G_2,G_3,....G_n,....)$ 称为 B 型基空间族，如果：1. 称为基的空间 B 属于 T(B)。2. T(B) 中的任意空间都可以通过 B 型基变换由空间 B 得到。空间族 T(B) 中的所有空间都称为基空间。

B 型基本变换的定义。以下变换称为 B 型基本变换：1. 删除点 v。

如果空间 G 中的点 v 的邻域 O(v) 是 B 型基本空间，即 O(v) 属于 T(B)，则可以删除该点。2. 粘接点 v。如果 G_1，是 B 型基本空间，即 G_1 属于 T(B)，则可以将点 v 粘接到空间 G 上，使其与空间 G_1，中的所有点通过边相连。3. 删除连接 (v_1v_2)。如果连接两相邻点 v_1 和 v_2 的边 (v_1v_2) 的公共边界 $O(v_1v_2)$ 是 B 型基本空间，即 $O(v_1v_2)$ 属于 T(B)，则可以删除该边。4. 粘接连接 (v_1v_2)。如果两不相邻点 v_1 和 v_2 的公共边界 $O(v_1v_2)$ 是 B 型基本空间，即 $O(v_1v_2)$ 属于 T(B)，则可以用连接 (v_1v_2) 将它们相连。所有基本空间组成的族 T 可以由

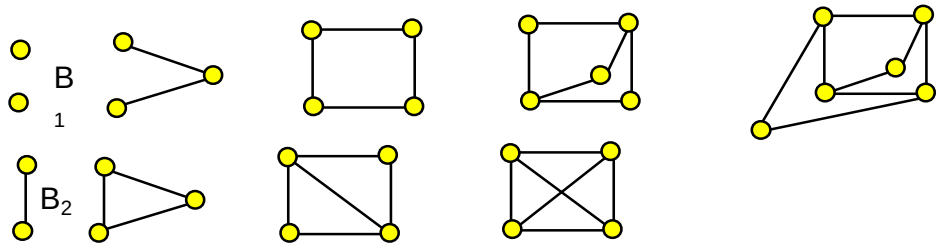


图 202 两族基空间，其基分别为 B 和 B2。

π空间 B 通过依次应用变换 1-4 .

注释

如果选取孤立点作为基 B，那么显然，基变换就是普通的点变换。

图 202 展示了两族基空间，分别对应由两个不相邻点和两个相邻点组成的基空间。现在我们将证明本节的主要定理，说明任意基变换与在基变换下取值不变的特征函数之间的联系。

B 型基变换的特征函数定义。

设基 B 有向量 $f(B)=(n_1,n_2,...n_k)$。

$a_1+a_2n_1+a_3n_2+...+a_{k+1}n_k=0$, 或 $F^2(B)=-a_1$.
$a_2+a_3n_1+a_4n_2+...+a_{k+2}n_k=0$ 或 $F^3(B)=-a_2$.
$a_3+a_4n_1+a_5n_2+...+a_{k+3}n_k=0$ 或 $F^4(B)=-a_3$.
.....
$a_{s-1}+a_sn_1+a_{s+1}n_2+...+a_{k+s-1}n_k=0$ 或 $F^s(B)=-a_{s-1}$.
.....

定理182。

设 $F=(a_1,a_2,...a_k,....)$ 是基 B 的特征函数。那么对任意基空间 G $F(G)=F(B),F^{p+1}(G)=F^{p+1}(B)=-a^p$.

证 明
利用归纳法，假设对于点数为 $|G|\le s$、连接数为 $P(G)\le t$ 的所有基分子空间 G，定理均成立。考虑一个有 s 个点的基空间 G。设 H 是它的基子空间，其中 $|H|<s$。沿 H 将点 v 粘接到 G 上，即使得 O(v)=H。于是，根据前面的定理，$F(G+v)=F(G)+F^2(H)+F(v)$。由于 $F(v)=a_1$，且根据归纳假设，$F^2(H)=-a_1$, ，所以 $F(G+v)=F(G)$。此外，$F^p(G+v)=F^p(G)+F^{p+1}(H)+F^p(v)$。由于 $F^p(v)=a_p$，且根据归纳假设，$F^{p+1}(H)=-a^p$，所以 $F^p(G+v)=F^p(G)$。因此，粘接点时定理成立。考虑在 G 中粘接边。设 v_1 和 v_2 是 G 中不相邻的点，$H=O(v_1v_2)$ 是这两点的公共边界，且它是一个基空间。将边 v_1v_2 粘接在点 v_1 和 v_2 之间。将所得空间记为 $G+v_1v_2$。由前述结果，$F(G+(v_1v_2))=F(G)+F^3(H)+F^2(v)$。由于 $F^2(v)=a_2$, $F^3(H)=-a_2$,, 所以 $F(G+(v_1v_2))=F(G)$。考虑 $F^p(G+(v_1v_2))$。我们先前已得到，$F^p(G+(v_1v_2))=F^p(G)+F^{p+2}(H)+F^{p+1}(v)$。由于 $F^{p+1}(v)=a^{p+1}$，$F^{p+2}(H)=-a^{p+1}$，所以 $F^p(G+(v_1v_2))=F^p(G)$。因此，粘接边时定理成立。类似地可证明，舍弃点和边时定理仍然成立。定理得证。 □

现在证明，在对任意空间应用基变换时，特征函数保持不变。

定理183。

设 $F=(a_1,a_2,...a_k,....)$ 是基 B 的特征函数。那么，将类型 B 的基变换 应用于任意空间 G 时，不会改变该空间上的特征函数值。

证 明
证明过程与前一个完全类似。□ 换言之，基 B 的特征函数是关于类型 B 的基变换的不变量。下面考察几个例子。

1. 设基空间 B 由唯一的点 v 构成，并由向量 f(B)=(1,0,...0,...) 确定。公式给出如下结果：
$a_1+a_2=0 a_2+a_3=0 a_3+a_4=0$ ..... $a_{s-1}+a_s=0$由此系统很容易得到，$a_k=(-1)^{k+1}a_1$。取 $a_1=1$ 时，得到分子空间的欧拉示性数。此时，以基 B=v 进行的基变换是点变换。因此，对于由向量 $f(G)=(n_1,n_2,...n_k)$确定的空间 G，这类变换的特征函数为：1. 设基空间 B_1 (图 202)由两个孤立点组成，并由向量 f(B)=(2,0,...0,...)确定。公式给出如下结果：$a_1+a_2 2=0 a_2+a_3 2=0 a_3+a_4 2=0$ ..... $a_{s-1}+a_s 2=0$ 由此系统很容易得到，$a_k=(-1)^{k-1}a_1/2^k$。因此，对于由向量 f(G)=$(n_1,n_2,...n_k)$确定的空间 G，这类变换的特征函数为：

FakGannnknk= 1 1−11−11 −1 ᵀ¹ = 1 1− 2+ 3− +−1 ᵀ¹ (,,,,...()...)()(...()...).
F

$$F=(a_1,-\frac{a_1}{2},\frac{a_1}{4},-\frac{a_1}{8},...\frac{(-1)^{k-1}a_1}{2^k},...) \quad F(G)=a_1(n_1-\frac{n_2}{2}+\frac{n_3}{8}-....+\frac{(-1)^{k-1}n_k}{2^k}+....)$$

容易验证，当 $a_1=1$ 时，由 B_1 得到且绘于图 202 上半部分的所有空间，其特征函数均等于 2。

2. 设基空间 B_2 （图 202）由两个相邻点组成，并由向量 $f(B_2)=(2,1,...0,...)$ 确定。公式给出如下结果：

$a_1+ a_22+a_3=0$

$a_2+a_32+a_4=0$

$a_3+a_42+a_5=0$

$\dot{a}_{s-1}+a_s2+a_{s+1}=0$

由该方程组容易得到，$a_k=(-1)^k((k-2)a_1+(k-1)a_2)$。因此，对于这类变换，由向量 $f(G)=(n_1,n_2,...n_k)$ 所确定的空间 G 上的特征函数具有如下形式：

$$F=(a_1,\ a_2,\ -(a_1+2a_2),\ 2a_1+3a_2,...(-1)^k((k-2)a_1+(k-1)a_2),,...)$$

F G an a n a a n a a n k k a k a n
( ) (( ) ( ) 1 .. 1 ( ) ((2) 2)) ... 1 = 2 2 + 3 − 1 + 3 2 4 + + 1 − 2 + − 1 − 1 2 + k −

设 $a_1=a_2=1$。那么

$$F(G)=n_1+n_2-3n_3+5n_4-7n_5+...+(-1)^k(2k-3)n_k+...$$

通过检验很容易确认，由 B_2 и 构成且绘制在图 202 下半部分的所有空间，其特征函数均等于 3。取 $a_1=1$，$a_2=-2$。于是，特征函数将呈现如下形式：

$$F(G)=n_1-2n_2+3n_3-4n_4+5n_5-...+(-1)^{k+1}kn_k+...$$

由 B_2 и 得到并绘于图 202 下半部分的所有空间，其特征函数均为 0。

现在设 $a_1=1$，$a_2=-1$。在这种情况下，特征函数与欧拉特征相同：

$$F(G)=n_1-n_2+n_3-n_4+n_5-...+(-1)^{k+1}n_k+...$$

由 B_2 и 得到并绘于图 202 下半部分的所有空间，其特征函数均为 1。

从所得结果得出的一些结论。

我们考察了几种空间变换，并找到了在这些变换下取值不变的函数。如果以点变换及其不变量为基础，把它们看作基变换这一类中的特殊情况，那么似乎可以为

任意基变换引入同调群，使其成为该变换的不变量（类似于此前在空间上引入的同调群）。为此，需要合理地定义“单形”、它的边界、边界算子以及其他标准数学工具，正如我们在空间上引入同调群时所做的那样。此外，一些对变换类别的推广也已初现端倪。例如，在保留所有其他运算的同时，可以使用多个基空间，而不是单个基空间。另一种可能的研究途径是使用空间代替点，将点粘接运算替换为空间的乘积。

第17章参考文献列表。

43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。

物理学中的分子空间

我的世界狭小，已闭合成环。永恒只偶尔闪现如电光。时间骤然迎面吹来。岁月如巨鸟般疾驰而过。

雾的片片——近处……远处……轮廓飞快地流动。我手中提着普赛克的灯——认知的蓝色火焰。

深渊中隐藏着新的底。形态与思想都已移位。我们大家早已在某处死去……我们大家尚未出生。

M. 沃洛申。

我们讨论在物理学中以离散背景取代连续背景。给定离散正规三维空间，我们证明 (3+1) 时空是一个正则四维分子空间（而非正规空间）。从离散的观点来看，构成封闭宇宙的最少点数等于八。我们分析埃伦费斯特关于物理空间为三维的结论；该结论主要基于抛物型方程的解，并说明仅凭此不足以确定地断言物理空间是三维的。我们还讨论具有外部（作为整体）和内部（点）拓扑结构的分子空间。最后，我们讨论分子空间在物理学中的若干可能应用。

本文中的一些结果可见于文献 [7,42,43]。

在物理学中引入离散空间

在物理学中

将离散空间引入为事件发展的场所，并以此构建物理理论，这一想法自量子力学出现以来便开始吸引物理学家的关注 [29,41]。起初，人们尝试在连续的欧几里得空间 E^n 中使用具有整数坐标的点集，将其作为 n 维离散空间。但这些尝试没有考虑不同维数空间之间在拓扑和内在性质上的差异。总体而言，这类

模型并未取得成功，尽管在某些情况下，例如统计物理学中，这类模型运行得令人满意。与此同时，与普朗克长度上的泛函积分有关的难以解决的问题，不仅表明经典场方程遭遇了失败，也说明微分流形应当由某种有限系统取代。只需引用阿尔伯特·爱因斯坦的话便足以说明这一点，他写道[56]：“量子现象似乎表明，一个具有有限能量的有限系统可以用有限个数完全描述。这似乎无法与连续统理论相容.....”在另一篇回应 K. 门格尔文章的作品中，爱因斯坦针对门格尔对将物理空间视为连续统这一观点是否成立所表达的疑虑，作了如下回应：“我坚持连续统的观点，并非因为我基于某种成见，而是因为我想不出任何能够有机地取代这一观点的东西。如果放弃这一观点，应该如何保留四维性的最本质特征？” [56]关于黎曼几何概念在空间小区域中的适用性，他写道：“这里提出的几何学的物理解释，不能直接应用于亚分子尺度的空间区域。只有成功才能证明这样一种尝试是合理的，即在黎曼几何基本概念的物理定义范围之外，赋予它们物理实在性。然而，这种外推也许并不比将温度概念推广到分子尺度的立体部分更有根据” [56]。

在当代物理学家中，有一些学者和爱因斯坦一样，认为有必要引入某种有限结构来取代微分流形。彭罗斯曾沿着这一方向开展研究，并发明了自旋离散网络 [36]。芬克尔斯坦 [19] 研究了时空的量子微观结构；艾舍姆 [23] 提出了定义在给定集合上所有拓扑构成的集合上的量子理论，并详细考察了有限集合的情形。索金 [38] 提出了从空间的局部有限覆盖转向有限偏序集的一种途径。在其著名的 [37] 论文中，Regge提出用单纯复形取代广义相对论中的时空，这也可以视为一种离散化。其基本变量是边长的集合和关联矩阵，用以表示它们之间的连接。一种方法允许边长变化，而关联矩阵保持不变。另一种方法则相反：边长保持不变，然而边

长可以变化。不过，Regge方法假设作用量是在连续时空上展开的，这与爱因斯坦的设想不符。此外，也不清楚最小（普朗克）长度如何从Regge方法中推导出来。

分子空间没有这些缺点，它们可以作为一种基，供物理学家用作构建物理理论的离散基础。

指出分子空间的以下特点，这些特点使其适用于物理学:

1. 存在自然度量和内蕴几何
2. 存在自然的最小长度 l_0 （普朗克长度），它是分子空间中两个相邻点之间的距离。

3. 空间中的点数局部有限。
4. 随着尺度增大向连续情形的自然过渡。

四维空间-时空正则性定理

将物理空间视为分子三维范数空间，我们已经证明，时空失去范数性，并成为正则四维空间。

定理184

四维空间-时空始终是正则空间。

证 明。
假设空间是正则且三维的（图203）。在时刻 t，光信号源位于点 a。如果发出光信号，那么在下一时刻 t+1 ，光信号可能位于距离 a 最近的点之一。随着从层 t+1 过渡到层 t+2，这一过程不断重复。显然，我们必须在点 a 与最近的点之间建立边，既包括空间中的点，也包括时间上的点。图203以一维空间和二维时空为例进行了说明。很容易看出，点 a 在层 t+1 的邻域是一个正则圆 S^1_2，而法向圆则是 S^1_1。因此，二维时空是正则的，因为它不具备正则性。证明完毕。□

闭合宇宙诞生时有八个点

分子空间理论直接得出的一个结果是，三维球面（图203）至少有 8 个点。众所周知，膨胀的三维球面是膨胀宇宙的物理模型。因此，在宇宙形成的初始时刻，空间中不同点的数量为 8，随后开始增加。

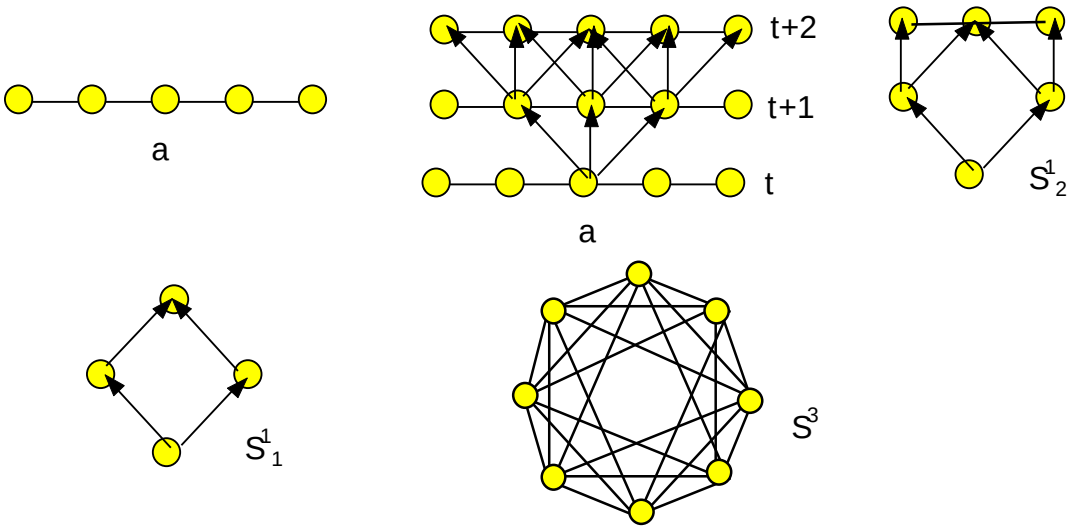


图203 上图。光信号在 t 时刻从点 a 发出。在下一个时刻（t+1），光信号可能位于距离 a 最近的点之一。随着从层 t+1 过渡到 t+2，这一过程不断重复。很容易看出，在层 t+1 上，点 a 的邻域是正则圆 S^1_2，而法向圆是 S^1_1。下图。作为早期宇宙模型的最小三维球面包含 8 个点。

这或许与基本粒子理论有某种联系，因为数字 8 在该理论中经常出现。

是否存在能够证明　真实物理空间是三维的物理实验?

物理空间具有三维性这一事实被认为已得到可靠论证，至少在宏观现象领域是如此。与此同时，在许多情况下，对物理观测和

涉及空间基本性质的实验，其理论分析都建立在微分方程的解之上。将分子空间用作物理作用展开的场，可以拓宽方程解的范围，从而拓宽基于这些解可能作出的物理后果解释。事实证明，在不同类别的空间中，微分方程可能给出相似的解。此前，我们已经考察了抛物型方程在一维树（它不是流形）以及分子 n 维欧几里得空间上的解，并发现这些解具有相似性。这意味着，仅凭解的形式，我们无法对空间的拓扑性质作出可靠命题，例如其维数，或它是否为流形；如果真实物理空间是离散的，那么就必须重新分析证明其具有三维性的实验依据。或许，我们所处的物理空间并非人们通常认为的三维空间，而是例如一维空间。

我们已经表明，[43] 在离散模型中，描述物理过程的抛物型微分方程在一维树上得到的解，与三维空间中的解相似。在这种情况下，我们没有能够确定物理空间真实维数和拓扑的实际物理工具。下面对此作进一步讨论。埃伦费斯特在 [2] 本世纪初提出了一个论据，支持物理空间是三维的。埃伦费斯特把牛顿引力理论中行星轨道的稳定性视为物理空间具有三维性的实验性证据。在连续n维空间中，牛顿势被定义为n维拉普拉斯方程的解

$$\Delta\varphi = 0$$

并由下式给出

$$\varphi = \frac{c}{r^{n-2}},$$

其中 n 是空间的维数。行星轨道只有在 n=3 时才稳定。由此得出结论：物理空间是三维的。

在离散情形下，正如先前所示，同一方程的解

$$\Delta\varphi = 0$$

在欧几里得分子空间 E^n 上，当 $n \geq 3$时收敛；在（一维）树 E^1_r 上，当 $r \geq 4$ 时也收敛。不同维数的空间中，解具有如此相似的形式，这意味着解的形式不依赖于维数，或者几乎不依赖于维数，而是由

空间中各点之间的连接结构决定。将这一结论用于考察 Ehrenfest 问题，我们可以断言，势与到中心的距离成反比，并不能预先确定物理空间是三维的。在离散物理空间中，这既可能意味着空间是三维的，也可能意味着它是一维的。因此，我们有必要进行能够明确体现物理空间拓扑依赖性的实验，或者检验这类结果。只有这样，我们才能有把握地谈论其维数。

物理学中分子空间的若干可能应用方向

采用空间的离散模型，大大拓展了物理学的理论构建和实验前景。由此可以创建具有不同拓扑分子结构的真空模型，并在实验中对其进行检验。下面举几个这类空间的例子。

在前几章中，我们描述了欧几里得 n 维空间的几种分子模型。在大多数情况下，正是这种连续空间构成了建立物理理论的场。利用分子构造，可以自然地为欧几里得空间引入内部结构，以某些空间取代点。与此同时，平坦空间的拓扑得以保留，可视为外部结构；而每个点也具有一种拓扑结构，可称为内部结构。这类空间类似于纤维丛空间构造，数学家和物理学家都广泛使用这种构造。构造这类空间的方法相当简单。首先，我们构造一个具有某些性质的常规分子空间，并将这些性质归为该空间的外部性质。然后，将每个点替换为某个具有特定性质的空间，并将这些性质称为内部性质。此前详细研究过的两个空间的直积，就是这种构造的一个标准示例。再来看另一个例子。取一个由 4 个点组成的一维圆，然后将每个点替换为一个二维球面 S^2 （图 204）。此时，替代原圆上相邻点的球面构成空间直和，也就是说，一个球面上的每个点都与另一个球面上的所有点相连。所得空间具有一维流形圆的外部拓扑，其中球面起到点的作用。

二维球面每个点的内部拓扑由其邻域决定，该邻域不是流形，且具有空间的形式

$$O(v) = S^2{}_1 \oplus S^1{}_1 \cup^{p} S^2{}_2 \oplus S^1{}_1 .$$

每个这样的点的维数均为 4。

因此，内部维数与外部维数不同。

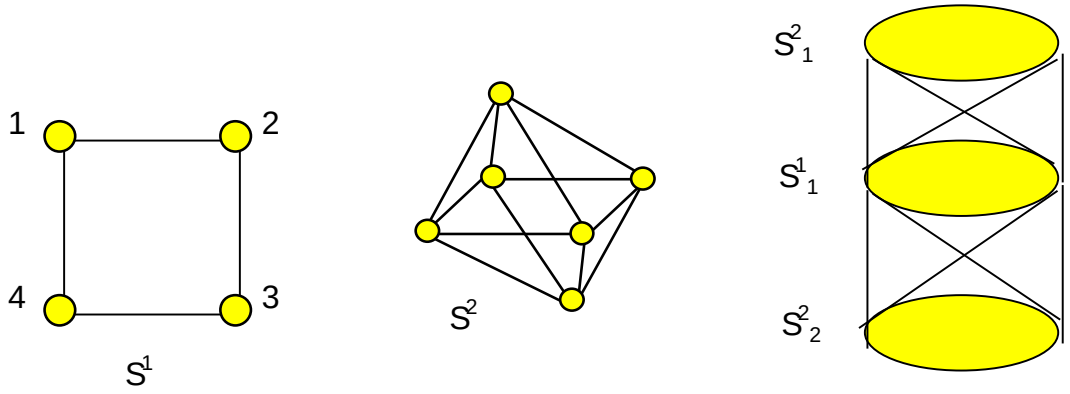


图 204 一维圆上的每个点都被替换为二维球面 S^2。替代原始圆上相邻点的球面构成空间直和。所得空间的外部维数为 1，是一个一维流形圆，其中球面起点的作用。每个点的内部维数为二维

球面的维数为 4。dim(v)int=4，dim(v)ext=1。

$$\dim(v)_{int} = 4,\ \dim(v)_{ext} = 1.$$

我们来给出此类空间的精确定义。

空间 G 和 H 的连接定义。

设有两个空间：G，其点集为 $(v_1, v_2, v_3, \ldots v_m, \ldots)$，连接集为 W；H，其点集为 $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$，连接集为 S。那么，空间 G 和 H 的耦合称为空间 G•H=G(H)，它由点 $v_k \bullet u_p$ 组成，其中点 $v_k \bullet u_p$ 的邻域由以下条件确定：如果 u_s 属于 $O(u_p)$，则 $v_k \bullet u_p$ 与 $v_k \bullet u_s$ 相邻，$s \neq p$。如果 v_k 属于 $O(v_t)$，则 $v_k \bullet u_p$ 与 $v_t \bullet u_s$ 相邻，$t \neq k$。

拼接是一种兼具空间直和与直积性质的运算。其重要特征是，该运算既不满足交换律，也不满足结合律，G•H≠H•G，

(G•H)•F≠H•G•(H•F)。此外，G•H 中的第二个空间 H 必须始终具有有限体积。点 $v_k \bullet u_p$ 的邻域显然是.....

可见，空间是两个空间的直和 $O(v_k \bullet u_p)=(O(v_k)\bullet H)\oplus O(u_p)$。除了上文提到的空间具有内部和外部拓扑的方法之外，还可以引入蜂窝型空间，其中空间不同区域的拓扑各不相同。这种空间的一个例子是三维

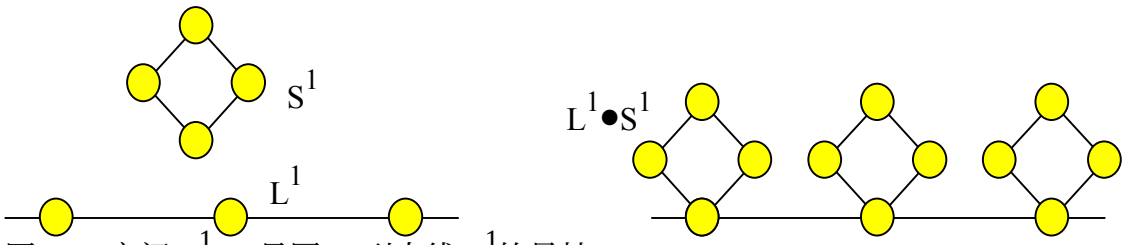


图 205 空间 $L^1 \bullet S^1$是圆 S^1到直线 L^1的悬挂。

完备的分子欧几里得空间，其中每个点 v_k都替换为其空间 H_k，点与点之间的边则按照两个空间的连接方式建立。

我们将介绍另一种构建物理空间模型的方法，这种方法可以有条件地称为将空间 H 悬挂于空间 G。

H 到 G 的悬挂定义。

设有两个空间：G，其点集为 $(v_1, v_2, v_3,.... v_m,...)$；H，其点集为 $(u_1, u_2, u_3,.... u_n...)$。在 H 中选取一个固定点 u_1 ，并将空间 H 的一个副本沿点 u_1，粘合到空间 G 的每一个点上，也就是说，将空间 G 的每一个点与空间 H 的每个副本中的点 u_1 等同。在得到的空间 $W=G\bullet H$ 中，点可以表示为 $w^{kp}=v_k\bullet u_p$。点 $v_k\bullet u_p$的邻域由以下条件确定：

$v_k\bullet u_1$ 与 $v_p\bullet u_1, k\neq p$ 相邻，当且仅当 v_p 属于 $O(v_k)$；与点 $v_k\bullet u_s$相邻，当且仅当 u_s 属于 $O(u_1)$。

$v_k\bullet u_p$ 与 $v_k\bullet u_s, p\neq s$ 相邻，当且仅当 u_s 属于 $O(u_p)$。

在 W 中，点 $w_{k1}=v_k\bullet u_1$ 构成一个与 G 同构的子空间，点 $w^{1p}=v_1\bullet u_p$、$w^{2p}=v_2\bullet u_p$、$w^{3p}=v_3\bullet u_p$.....则是与 H 同构的子空间。点 $w_{k1}=v_k\bullet u_1$ 的邻域则是空间 $O(v_k)\bullet O(u_1)$。点 $w^{kp}=v_k\bullet u_p$、$p\neq 1$的邻域则是空间 $O(u_p)$。图 205 描绘了圆周到直线的悬挂。另一种可用于在分子空间中构造外部拓扑和内部拓扑的方法如下。

将空间 H 嵌入空间 G 的定义。

设有两个空间：G，其点集为 (v_1, v_2, v_3,.... v_m,...)，连接集为 W；以及 H，其点集为 (u_1, u_2, u_3,.... u_n)，连接集为 S。那么，将 H 嵌入 G 所得空间 W=G•H=G(H)，由点 v_k•u_p组成，其中点 v_k•u_p的邻域由以下条件定义：

v_k•u_p 与 v_k•u_s相邻，s≠p，当 u_s 属于 O(u_p) 时。

v_k•u_p 与 v_t•u_p相邻，t≠k，当 v_k 属于 O(v_t) 时。

图 206 展示了将一维圆 S^1 嵌入一维直线 L^1。

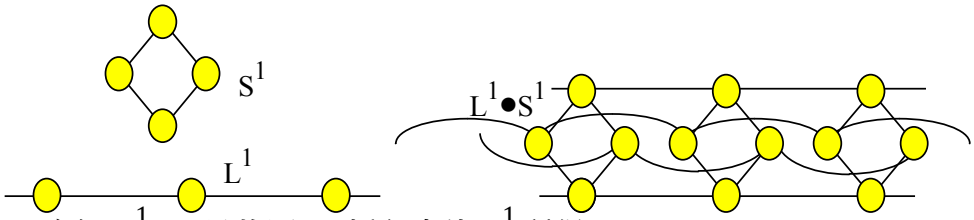


图 206 空间 L^1•S1 是将圆 S1 插入直线 L^1 所得。

可以提出数量相当多的类似模型，但最终的选择应由物理学家作出，并通过实验检验。

分子空间理论可能有助于分析原子核的几何结构。在某种近似下，可以认为原子核由相同粒子构成，这些粒子的结构形成一个分子空间。如果已知这个空间，那么求出它作为分子空间的特征并不特别困难。这方面的研究对物理学而言是新的，可能带来新的实际成果。在物理学中，凡是可以用点及其相互连接以图形方式描述物理结构的领域，都能找到分子空间的应用，也就是说，在原子核理论、基本粒子理论、晶体学（例如参见 [39]）以及许多其他领域中。

第 18 章参考文献。

2 Ehrenfest P.，《空间具有三个维度这一事实如何体现在物理学的基本定律中》，《阿姆斯特丹科学院院刊》，第20卷，第200—216页，1911年。7 Evako A.V.，《离散空间上的维数》，《国际理论物理学杂志》，第33卷，第1553—1568页，1994年。19 Finkelstein D.，《第一次闪现与第二真空》，《国际理论物理学杂志》，第28卷，第1081—1098页，1989年。

23 Isham C.J.、Kubyshin Y.、Renteln P.，《量子范数理论与度量拓扑量子化》，《经典与量子引力》，第7卷，第1053—1074页，1990年。29 Jammer M.，《空间概念》，哈佛大学出版社，第60页，1954年。36 Penrose R.，《角动量：一种组合时空研究方法》，载于《量子理论及其后续》，T. Bastin 编（剑桥大学出版社），剑桥，1971年。37 Regge T.，《无坐标的广义相对论》，《新物理学》，第19卷，第923—947页，1961年。38 Sorkin R.，《连续拓扑的有限替代》，《国际理论物理学杂志》，第30卷，第923—947页，1991年。39 Taylor J.E.，《论晶体表面的整体结构》，《离散与计算几何》，第6卷，第225—262页，1991年。41 Горелик Т.Е.，《空间为何是三维的》，科学出版社，莫斯科，1973年。43 Ивако А.В.，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。50 Ивако А.В.，《分子空间作为现实物理空间的离散基础》，《意识与物理实在》，第3卷，第5期，第25—32页，1998年。56 爱因斯坦，《科学论文集》，第2卷，第873页，“科学出版社”，莫斯科，1965年。

附录。 分子空间：真实物理空间的离散基础

（发表于《意识与物理实在》杂志，第3卷，第5期，第25-32页，1998年。）

分子空间理论产生的前提条件

没有人知道我们所生活的真实空间究竟具有怎样的本质，尤其不知道它是连续的还是离散的。更重要的是，直到不久以前，现代科学中根本不存在关于空间微观结构的概念，只有标准的连续欧几里得模型。关于空间离散存在形式的观点，只是一些笼统的论述，没有任何具体成果，并且属于科学哲学的范畴。尤其是，拓扑学和几何学——研究各种空间的数学分支——中并不存在适用于描述建立在有限或可数点集之上的空间的工具。

许多现代物理理论宣称空间具有离散性，但实际上却以连续的空间和时间基础作为后续构建的根基。与此同时，空间离散性的思想自古以来就吸引着杰出思想家和普通人的关注。

最简单形式的离散性意味着，空间由某些不可分割的元素构成，这些元素称为空间原子，它们之间什么也没有，包括空间本身。这种模型使人联想到固体的原子晶体结构，所不同的是，空间原子之间并不存在空间。对于想象力正常的人来说，空间的缺失至少显得有些奇怪。

因此，即使是杰出的科学家，在阐释空间的离散性时也会犯下低级错误，这一点只需随手翻开数千篇探讨离散性主题的论文中的任意一篇，便可得到印证。为作说明，引用杰出的德国数学家 G. 韦尔的话，他对离散性假说表示不解 [1]。

“根据这一思想，应如何理解空间中现存的长度度量关系？如果用“石子”拼成一个正方形，那么对角线上会有与其中相同数量的“石子”，即有♀♀♀♀♀♀

沿着边的方向，因此，对角线应该和边具有相同的长度。”外尔天真地将连续测度应用于离散空间，这是不可以的。离散距离需要用离散测度来衡量，也就是用石子的数量。从这个角度来看，对角线确实和边具有相同的长度。

应当承认，直到最近，所有少数几次试图构建离散空间、将其作为研究者工作工具的努力，都未能取得期望的结果。与此同时，离散空间模型相较于连续模型具有一系列显而易见的优势。

从数学角度看，与不可公度性、无穷小量和无穷大量等相关的诸多特性与悖论都将消失。例如，拓扑学中的怪物空间将不复存在，也不再需要无理数。

从审美角度看，连续空间模型缺乏个性且空洞乏味。你缩小尺度，使距离变得越来越小，但仍然处在由三个相互垂直的平面构成的同一个角中，而周围的一切都没有改变。很难想象还有什么比这更令人沮丧。

从实践角度来看，空间的离散模型比连续模型更符合我们的经验。量子现象证明，随着作用范围尺度缩小，物质的行为和相互作用会发生变化。直觉和常识告诉我们，空间也应当发生类似的变化。连续模型无法实现这一点，而在离散模型中，空间的变化则会自然发生。

然而，应用离散空间模型所带来的前景要有趣得多。离散模型将揭示微观尺度下空间的结构，也就是说，展示空间原子如何彼此连接，从而形成二维、三维乃至一般意义上的多维空间。了解这种结构及改变连接的方式，将使我们能够改变空间维数，在三维空间中创造四维或五维区域，还能在平行的三维空间之间实现转换。

尽管科学家大约在一百年前就开始关注现代意义上的离散空间，但解决这一全球性且在一定程度上具有世界观意义的问题，真正的途径直到最近才逐渐显现，这与计算机的广泛应用以及由此产生的需求有关：需要在计算机存储器中存储多维空间对象，并对其进行转换。这类任务出现在医学领域的计算机分析中，用于处理断层扫描研究结果；也出现在计算机图形学（computer

graphics）、物体计算机建模（computer object modeling）、图案分析（pattern analysis）、以视觉图像形式进行物体科学可视化（scie ntific visualization）以及许多其他领域。

研究这些问题的新科学方向被称为“数字拓扑”（digital topology） [2]。可以说，实践需求催生了一门新的科学。

在我们看来，“数字拓扑”这个名称过于狭窄，从数学角度看也不完全准确。首先，拓扑这一术语并未体现所述问题的几何方面。其次，严格来说，离散空间并非拓扑空间，因此也不是拓扑学这一数学学科的研究对象 [3]。从这个意义上说，“数字几何”这个名称更为合适。

在数字拓扑中存在几种不同的方法。
本文所介绍的一种研究方法，也是本文面向读者重点阐述的内容，称为分子空间理论（TMП）。在分子空间理论的框架下，构建离散的多维欧几里得空间和曲线空间[4,5], ，研究其形变，以及保持或改变空间不变量的形变过程。例如，由此可以清楚地了解，为了从三维空间过渡到四维空间，需要如何改变点与点之间的边；如何根据连续空间构建离散空间，以及如何反向实现这一过程。

分子　空间上确定维数的几何与直观基础

我们的任务是构建一个由有限个或可数个点组成的空间，并使其具备这样的性质，从而能够将其视为连续 n维空间的组合图像。为此，我们将在初等几何中选取那些以最根本的层面描述邻近性、连续性和维数概念的特征，并使我们今后能够轻松过渡到连续空间的分子模型。我们将在此向读者提出的图景，可以从直观层面理解在分子空间理论中什么是维数。

现在来考察三维欧几里得空间 E^3 [6], ，在其中选取一点 p。设 D^3 是一个半径为 R、中心位于点 p 的实心球。这个球的边界自然是二维球面 S^2。众所周知，所有具有任意中心和半径的这类球构成了 E^3的拓扑基。现在假设该空间是分子空间。由于分子空间中的任何有限体积都包含有限个元素，因此球 D^3 由有限个点组成。这里对我们来说

重要的是：分子球的曲面是一个分子球面，可以像剥洋葱外层一样剥去它，从而得到一个更小的分子球。继续剥去外层，我们将得到最小分子球，它由最后一个仍可剥去的层以及该层内部一个不可分割的元素组成，后者起着中心点的作用。因此，我们可以定义最小分子球

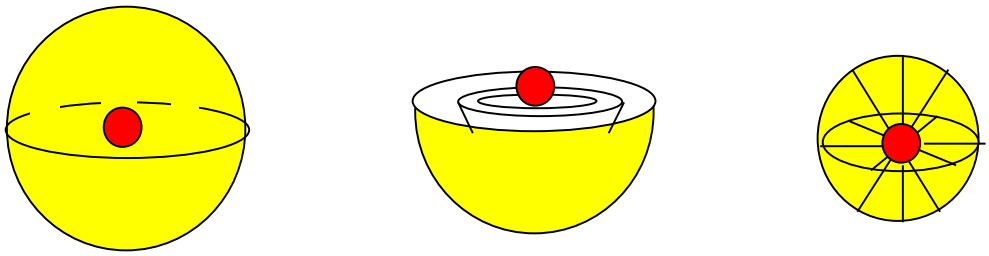


图 207 在离散球中，剥离层会得到最小的球

球作为中心点，周围环绕着一个分子球面。球面上的点是距离中心点最近的点（图 207）。为了突出这种邻近性，我们规定中心点通过一条边与最近的分子球面上的每个点相连。俄罗斯套娃是这一情形的直观示例：在一个木制玩偶内部，还有一个尺寸更小的第二个玩偶，第二个玩偶内部又有第三个玩偶，以此类推，直到最后一个实心玩偶，其内部不再包含任何东西。我们也可以借助植物形象来理解，例如，将分子球视为卷心菜或洋葱。现在，我们几乎已经得到了定义：分子最小三维球是一个被分子二维球面包围的点；或者，一般而言，分子最小n维球是一个被分子(n-1)维球面包围的点。

正规分子空间的维数。定义与例子

现在我们利用上述几何示例来定义分子空间的[5,6] 维数。

一般而言，分子空间由点集构成，这些点相当于空间的原子，类似于原子构成分子。两个最近点之间的最小距离为常数 L。两个不同点之间的距离始终是 L 的整数倍，即等于 nL，n = 1，2，3，…。从空间中的某一点只能移动到最近的点。如果两点互为最近点，则它们由一条边连接。我们将与给定点最近的所有点的集合称为邻域。

该点。这种由点组成、其中一些点通过线（不一定是直线）连接起来的结构，在数学中称为图。

根据经典定义，零维球面由两个孤立点组成。遵循这一定义，我们将由两个孤立点（空间原子）组成的分子空间称为正常零维球面 S^0 （图 208）。那么，一维球由与中心点相连的



图 208 一维点的构造路径

S^0, 中的两个点；此时中心点称为一维点。我们把所有点都是 n 维点的分子空间称为闭 n 维空间。例如，在一维情形中，由四个或更多点组成的圆周就是闭空间。反过来，如果一个点的邻域是闭 (n-1) 维空间，我们就称该点为 n 维点。图 209。

很容易看出，图 209 展示的是闭的一维圆空间，而图 210 展示的是由中心点与圆连接而成的二维球。

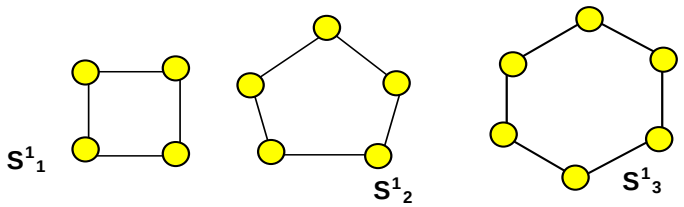


图 209 一维球面（圆）。球面 S11 是可能的最小球面。

图 211 展示了两个二维分子球面和一个射影平面。在连续情形下，射影平面可以通过将纸张的相对两边交叉粘合而得到。需要强调的是，在连续情形下，射影平面无法实现在三维空间中，为此至少需要四维空间。这些二维空间中的每一个点，都是图 210 所示类型之一的二维点。

图213中显示了一个三维点，它是三维最小球的中心；还有一个由八个

形如 v_1 的三维点组成的三维球面。这是构成三维球面所需的极小点数。众所周知，在连续情况下，三维球面只能构造于

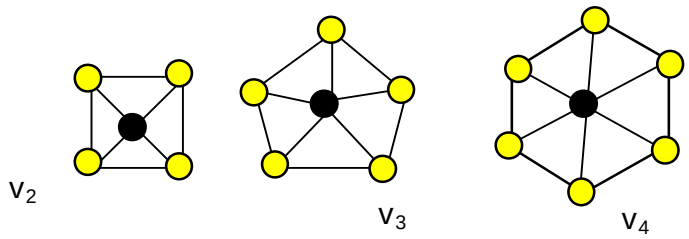


图 210 每个二维点都被一个圆周包围。

在四维空间中。虽然图中边长各不相同，但这只是为了便于观察，实际上所有边的长度都相同，均为 L。构造任意维数的闭合分子空间并不困难 [5,6,7]。

图 212 展示了几种二维分子欧几里得空间。

分子空间理论提出了多种方法，用连续空间建模分子空间，反之亦然，即用分子空间建模连续空间 [7,8]。为了与连续空间进行比较，人们定义并研究了分子空间的一些几何和拓扑特征及不变量，它们与相应的

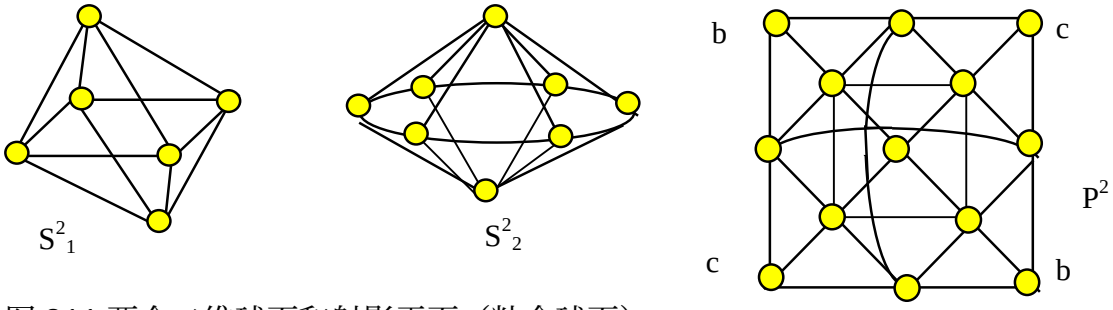


图 211 两个二维球面和射影平面（粘合球面）。

连续空间上的不变量。分子空间的优势在于，欧拉示性数和同调群等不变量在连续空间及其分子图像上是相同的。研究某些闭空间和开空间上的偏微分方程结构，取得了有趣的成果。阅读所引文献，可以更全面地了解 TMΠ 的主要研究方向。

平面有多厚？

表示分子空间的代数方法和几何方法有多种。代数上，任意分子空间都可以用方形关联矩阵或矩形坐标矩阵来描述。几何上，最方便的方式是将分子空间建模为砖块集合。砖块 (kirpich) 是无穷维欧几里得空间 [9] 中顶点坐标均为单位值的无穷维单位立方体。如果分子空间中与两个砖块相对应的两个点由一条边连接，则这两个砖块有一个公共面。图214 展示了由砖块构成的分子二维欧几里得空间 E^2_2（图 212）。

读者中，尤其是数学家，可能会提出这样一个问题：为什么需要引入某种无限维砖块，

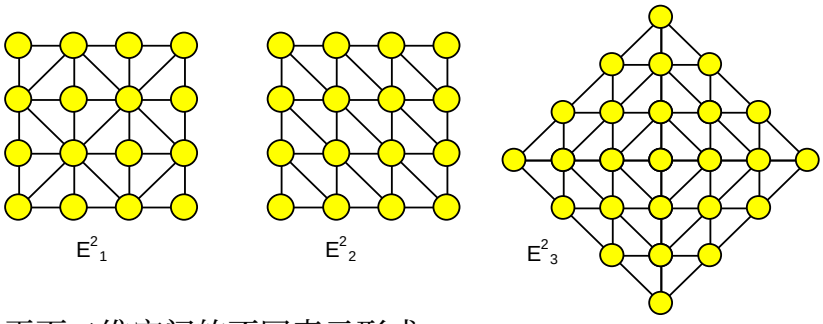


图 212 平面二维空间的不同表示形式。

原则上，这些砖块不过是分子空间顶点的一种表示。

首先，使用砖块是将连续空间转化为分子空间的一种便捷方式；反过来，也可以由此获得分子空间的连续模型。

其次，使用砖块可以将经典几何学的概念引入 TMП，并将分子空间视为嵌入连续欧几里得空间中的对象，且具有明确的外部特征。一般来说，连续性更符合我们对周围世界的日常感知；而将砖块用作把物理空间划分为小元素的基本单元，则消除了连续性感受与离散性现实之间的心理矛盾。

我们将在此阐述我们的概念，这一概念可以称为物理性的或实验性的（关于计算机实验的内容见 [7]），其本质不过是对离散空间研究方法的一种解释。

首先，让我们来看看描述二维曲面的经典数学方法。数学家们采用的是一种折中的方式。

称为二维

曲面，例如球面，其厚度和体积均为零。平面片也是二维曲面，平面厚度为零，平面片的体积也为零。换句话说，在数学中，二维曲面的厚度（和体积）为零。

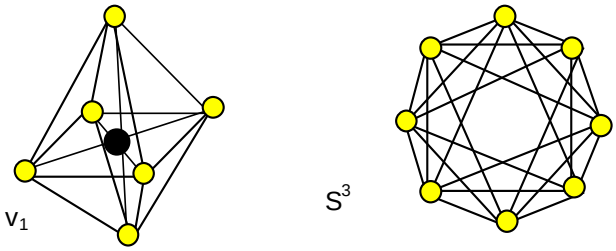


图213 三维点与三维球面。

不过，也可以有另一种看法。

从上学时起，我们就知道所有立体都是由分子构成的。任何实体球的表面都是分子外层。

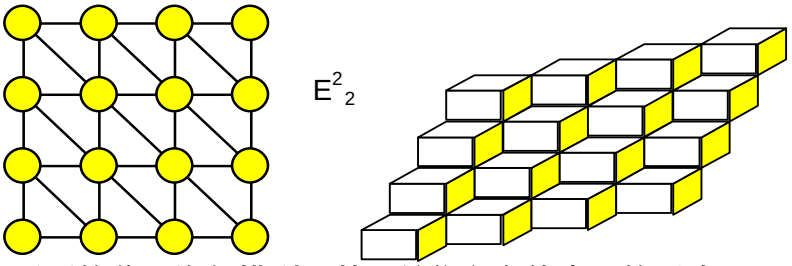


图214 平面的分子均匀模型及其以单位立方体表示的形式。

因此，这个曲面具有非零厚度。这个曲面的物理厚度等于一个分子。在一道中学物理题中，要求求出水面上油膜的最大面积。这里假定油膜的最小厚度也等于一个分子，但不等于零。换言之，自然界中不存在零厚度的二维曲面。我们的方法恰恰反映了这一规律，并将其引入数学和应用领域。我们可以认为，忽略一个非零常数比例系数后，二维曲面的最小厚度等于一。另一方面，曲面的厚度最大可以达到多少，而它仍然是二维的呢？在这种方法的框架下，这个问题的答案也相当简单明了。要形成三维空间，至少需要其中某些点是三维点。我们取几层由砖块组成的二维平面，并像图215所示那样，依次将它们叠放在一起。我们来确定需要叠放多少层才能得到三维点。

不难看出，两层空间仍然是二维的，因为每个点的邻域中都有一维圆周，却没有二维球面。然而，图215所示的三层已经构成三维空间，因为中间层的每个点的邻域都包含一个二维球面。因此，二维曲面的厚度可以为一或二，并由一层或两层组成。三层则构成三维空间。我们可以认为，忽略一个非零常数比例系数后，二维曲面的厚度等于一或二。三维（以及任意n-

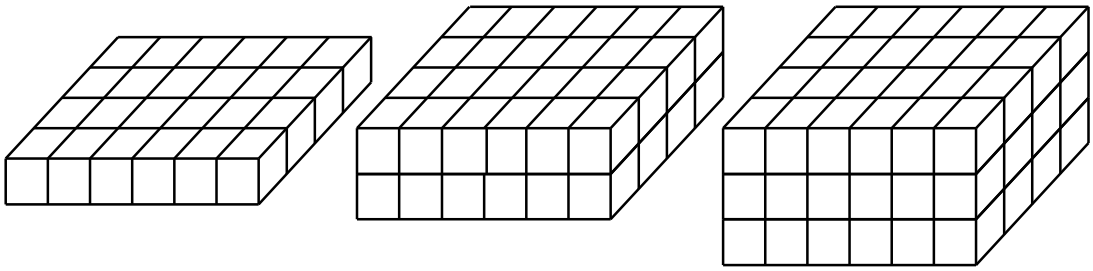


图215 一层或两层砖块构成二维空间。三层砖块则已形成三维空间。

层的维数为三，并且中间层由三维（n维）点组成，而两个外层包含二维（（n-1）维）点。因此，可以将n维层构造成三个（n-1）维空间的层，并按照之前的方式将它们粘合起来。

同样，线的宽度可以为1或2，但如果线的宽度为3，那么它就已经成为平面的一部分。

维数变化下的空间重构

分子空间理论的一种可能应用，是重构空间原子之间的连接，以改变其维数。事实上，正如前文所示，空间的维数取决于作为该空间原子邻域的对象，而原子本身没有维数。同样的原子可以以不同方式排列，从而形成任意维数的空间。从一维空间过渡到三维或四维空间，原则上并不存在困难。

作为一个例子，我们来考察二维球向三维球的重构。二维球可以表示为一个点 v_4，，其周围是由六个点组成的圆周（图216左侧）。要转变为三维球，就按图216所示，依次在二维球中建立边。右侧的分子空间，

如图右侧所示，是一个三维球。问题是，如果真实物理空间是离散的，那么如何通过类似的重构，从三维球构造出四维球？这个问题的答案以及此类过程的实际实现，首先是物理学等科学领域的课题。此外，至少在目前，其结果及其后果都无法预测。核能及其引发的军事和生态灾难表明，即使能够预见后果，利用科学发现也存在危险。而其后果则

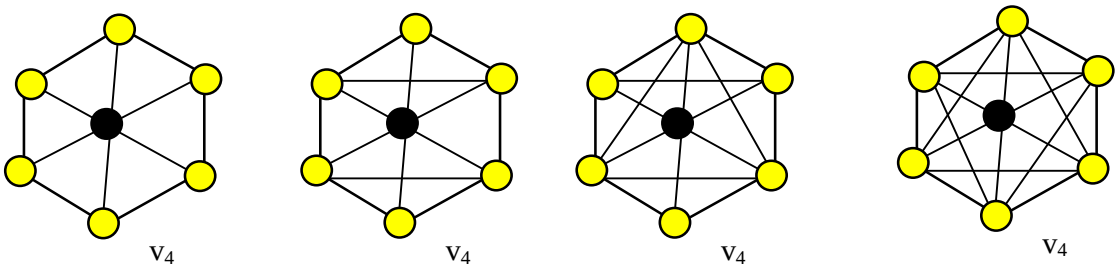


图216 空间维数增加时的空间重构。左侧描绘的是一个二维点，右侧是一个三维点。

目前无法预见与空间进行实验会带来什么后果。另一方面，科学不能停止发展。因此，在开展空间实验之前，有必要通过理论和观察来了解这可能给我们带来什么风险。

分子空间中的运动

考察分子空间中的运动是如何建模的，颇有意义。

应事先强调，在真实空间中的任何移动，都是从空间的一个层移动到另一个与之平行的层。下面考察在二维空间中，从一个一维空间转移到另一个与之平行的一维空间是如何实现的。正如图 217 所示，这一转移过程相当简单。假设图中黑色的一维杆位于二维空间的第 1 层。要将它移至与之平行的第 2 层，必须依次移动它的所有点。比如，可以从它的左端开始。图的右侧显示了这样一个时刻：杆左侧的两个点已经位于第 2 层，而右侧的三个点仍留在第 1 层。此时，杆仿佛凭空出现在第 2 层，又仿佛无影无踪地从第 1 层消失。

当然，这只是对跃迁的理论描述。然而，要实现真正的跃迁，只需掌握一件事：

将杆件上的点从空间中的一个点移动到另一个点。这样的

在真实三维空间中，物体的任何运动都会持续进行这一过程。假设真实物理世界是四维空间中的三维层，那么要进入平行层，只需稍微改变物体的运动方向。

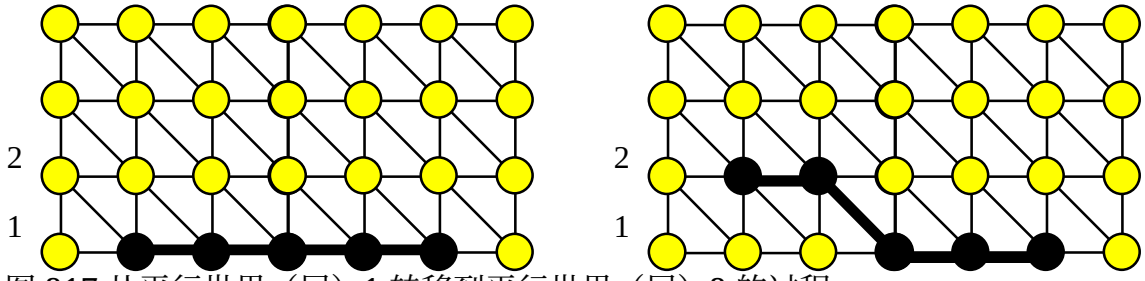


图 217 从平行世界（层）1 转移到平行世界（层）2 的过程。

这并不是一项特别复杂的任务，尤其是与空间重构相比。解决这一问题首先是实验科学的职责，尽管其他科学也可能对空间层之间转换的问题作出意想不到的贡献。也不能排除，在已经进行的数量庞大的观察和实验中，存在一些现象，对它们最自然的解释就是接受这样一种假设：可以转入平行空间。

4. TMΠ 的一些应用

在计算机科学领域的应用中，TMΠ为计算机计算中多维对象的构建原理及其操作提供了基础性的数学框架。

尽管 TMΠ 作为一个科学方向仍处于形成阶段，但目前已经取得的成果不仅可以应用于计算机科学，还可以应用于更为传统的科学与实践领域。具体而言，在物理学领域，研究人员已经对离散时空的拓扑结构进行了分析。结果表明，离散时空是正则的，也就是说，在三维空间中两个时间上相邻的层之间存在过量的连接[6]。

关于封闭膨胀宇宙模型的初始阶段，还得出了另一个有趣的结论。研究发现，宇宙诞生之时由至少八个空间原子构成。[8]。这可能意味着，我们周围世界的丰富多样性，包括基本粒子、星系乃至人类本身，都是由八种元素组合而成的。如果确实如此，那么这一结论不仅对物理学很重要，对我们的整体世界观也同样重要。

对于理论物理学而言，TMП提供了丰富多样的物理真空模型，尤其是考虑到空间原子本身也可以由分子空间构成。

从事科学交叉领域研究的学者，或许可以在工作中运用一些过程，例如重构空间的个别区域并增加其维数，以及位移到三维空间的平行层。

希望不同知识领域的代表在了解TMП并认为其中至少有一些成果对自己有用之后，能够取得新的、有趣的发现。

参考文献。

1 G. Weyl，《数学哲学》，第70页，莫斯科-列宁格勒，1934年。2 T. Kong、A. Rosenfeld，《数字拓扑：导论与综述》，《计算机视觉图形图像处理》，第48卷，第393页，1989年。3 第357页。— A. Evako、R. Kopperman、Y. Mukhin，《图与数字空间的维数性质》，数学成像与视觉期刊，第6卷，第119页，1996年，第109页。4 A. B. 伊瓦先科，《分子空间的拓扑性质》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984年。5 A. B. 伊瓦先科，《分子空间的维数》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6422-84 号，1984年。6 A. Evako，《离散空间上的维数》，《国际理论物理学杂志》，第33卷，第1553-1568页，1994年。7 A. Evako，《n维曲面的覆盖交图的拓扑性质》，《离散数学》，第147卷，第107-120页，1995年。8 A. B. 伊瓦科，《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》，莫斯科，1997年。9 Ivashchenko (Evako) A.V.，《用图表示光滑曲面。保持图的欧拉示性数不变的图变换》，《离散数学》，第122卷，第219-233页，1993年。

参考文献列表

1. Croom F.H.，《代数拓扑基本概念》，Springer，纽约，1978年。2. Ehrenfest P.，《物理学基本定律如何体现空间具有三个维度》，阿姆斯特丹科学院院刊，第20卷，第200-216页，1911年。3. Evako A.、Kopperman R.、Mukhin Y.，《图与数字空间的维数性质》，数学成像与视觉期刊，第6卷，第109-119页，1996年。4. Evako A.、Kopperman R.、Mukhin Y.，《数字 n 维空间中任意点的边界是一个离散的 (n-1) 维球面》，《视觉几何 III》摘要集，SPIE工业应用光子学国际研讨会，美国马萨诸塞州波士顿，1994年。5. Evako A.V.，《分子空间上的抛物型微分方程：二维和三维球面及射影平面上的解》，第七届“数理物理问题中的离散奇点方法”国际研讨会，1997年，乌克兰费奥多西亚。6. Evako A.V.，《分子空间上的抛物型微分方程。微分方程的正则性》，1994年，未发表。7. Evako A.V.，《离散空间上的维数》，《国际理论物理学杂志》，第33卷，第1553-1568页，1994年。8. Evako A.V.，《图上的同调群》，第八届一般拓扑学及其应用暑期会议，纽约，1992年。9. Evako A.V.，《分子空间上的双曲型微分方程：二维和五维球面及射影平面上的初值问题的解例》，“系统稳定性建模与研究及系统仿真”国际会议，1997年，乌克兰基辅。10. Evako A.V.、Melter R.A.，《线段的图维数》，第八届一般拓扑学与应用暑期会议论文集，1992年，美国纽约。11. Evako A.V.、Mukhin Y.V.，《齐次数字 n 维空间》，预印本 SU-GP 94/10-1，物理系，雪城大学，

美国。12. Evako A.V., Mukhin Y.V.，数字 n 维空间中任意一点边界的结构。预印本 SU-GP 93/7-7，物理系，雪城大学，美国。13. Evako A.V., Mukhin Y.V.，连通有序拓扑空间的维数性质，预印本 SU-GP 93/7-3，物理系，雪城大学，1993年，美国。14. Evako A.V.，正规数字 n 维空间在 n 维欧几里得空间欧几里得空间中的盒族表示，第十一届一般拓扑学及其应用暑期会议，纽约，1995年。15. Evako A.V.，图上可缩变换的一些性质，1993年，未发表。16. Evako A.V.，区间图和圆弧图的欧拉示性数与同调群，预印本 SU-GP 93/7-4，物理系，雪城大学，美国。17. Evako A.V.，图的覆盖的拓扑性质。预印本 SU-GP 93/7-5，物理系，雪城大学，美国。18. Evako A.V.，n 维曲面覆盖的交图的拓扑性质，《离散数学》，第147卷，第107-120页，1995年。19. Finkelstein D.，第一次闪现与第二真空，《国际理论物理学杂志》，第28卷，第1081-1098页，1989年。20. Gilmore P.C., Hoffman A.J.，可比图与区间图的刻画，《加拿大数学杂志》，第16卷，第539-548页，1964年。21. Golumbic M.C.，《算法图论与完美图》，Academic Press，纽约，1965年。22. Harary F.，《图论》，Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1969年。23. Isham C.J., Kubyshin Y., Renteln P.，量子范数理论与度量拓扑量子化，《经典与量子引力》，第7卷，第1053-1074页，1990年。24. Ivashchenko (Evako) A.V.，球面与环面的图，《离散数学》，第128卷，第247-255页，1994年。25. Ivashchenko (Evako) A.V.，图上的同调群；不改变图的同调群的图变换，《离散数学》，第126卷，第159-170页，1994年。26. Ivashchenko (Evako) A.V.，用图表示光滑曲面；不改变图的欧拉示性数的图变换，《离散数学》，第122卷，第219-233页，1993年。27. Ivashchenko (Evako) A.V.，图的坐标表示与半径 1 的 n 通用图，114，1993，120，107《离散数学》，第-卷，第-页。

28. Ivashchenko (Evako) A.V., Yeong-Nan Yeh, 《环面、射影平面和球面的极小图》, 《离散数学》, 第126卷, 第178页, 1994年, 共171页。-。29. Jammer M., 《空间概念》, 哈佛大学出版社, 第 60 页, 1954 年。30. Khalimsky E.、Kopperman R.、Meyer P., 《计算机图形学与有限有序集上的连通拓扑》, 《拓扑学及其应用》, 第36卷, 第1—17页, 1990年。31. Khalimsky E., 《计算机科学中的拓扑结构》, 《应用数学模拟杂志》, 第1卷, 第40页, 1987年, 共32—25页。- 。Kong T.、Kopperman R.、Meyer P., 《数字拓扑的拓扑学方法》, 《美国数学月刊》, 第98卷, 第901—917页, 1991年。32. Kong T.、Rosenfeld A., 《数字拓扑：导论与综述》, 《计算机视觉、图形与图像处理》, 第48卷, 第357—393页, 1989年。33. Kopperman R.、Meyer P.、Wilson R., 《三维数字空间中的一个 Jordan 曲面》, 《离散与计算几何》, 第6卷, 第155—161页, 1991年。34. Kovalevsky V.A., 《应用于图像分析的有限拓扑》, 《计算机视觉、图形与图像处理》, 第46卷, 第141—161页, 1989年。35. Penrose R., 《角动量：一种组合时空方法》, 载于《量子理论及其后续》, T. Bastin 编（剑桥大学出版社）, 剑桥, 1971年。36. Regge T., 《无坐标的广义相对论》, 《新物理学》, 第19卷, 第923—947页, 1961年。37. Sorkin R., 《连续拓扑的有限替代》, 《国际理论物理学杂志》, 第30卷, 第923—947页, 1991年。38. Taylor J.E., 《论晶体表面的整体结构》, 《离散与计算几何》, 第6卷, 第225—262页, 1991年。39. Александров П.С.、Пасынков Б.А., 《维数理论导论》, 科学出版社, 莫斯科, 1973年。40. Горелик Т.Е., 《空间为何是三维的》, 科学出版社, 莫斯科, 1973年。41. Ивако А.В., 《分子空间作为真实物理空间的离散基础》, 《意识与物理实在》, 第3卷, 第5期, 第25—32页, 1998年。42. Ивако А.В., 《分子空间理论及其在计算机、物理学和其他领域的应用》, 莫斯科, 1997年。43. Ивако А.В., 《四维计算机。现实还是虚拟现实》, 《俄罗斯的科学与技术》, 第4期（第27期）, 第2—6页, 1998年。44. Иващенко А.В., 《分子空间嵌入》, ВИНИТИ, 莫斯科, 第6421-84号, 1984年。45. Иващенко А.В., 《图的几何映射》, 《控制论》, 第5期, 第120121页, 1987—。46.（苏联）。

47. Иващенко А.В.，《分子空间的同调群》，ВИНИТИ，莫斯科，第 2346-85 号，1985年。48. Иващенко А.В.，《抛物型微分方程在分子空间上》，1987年，未发表。49. Иващенко А.В.，《分子空间变换》，ВИНИТИ，莫斯科，第 2345-85 号，1985年。50. Иващенко А.В.，《分子空间的维数》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6422-84 号，1984年。51. Иващенко А.В.，《分子空间的拓扑性质》，ВИНИТИ，莫斯科，第 6420-84 号，1984 年。52. Иващенко А.В.，《点分子空间》，ВИНИТИ，莫斯科，第 2344-85 号，1984年。53. Корн Г.，Корн Т.，《科学工作者和工程师数学手册》，科学出版社，莫斯科，1970年。54. Понтрягин Л.С.，《组合拓扑学基础》，科学出版社，莫斯科，1973年。55. Спицер Ф.，《随机游走原理》，《世界出版社》，莫斯科，1969年。

字母索引

—А—算法，254；
275

—Б—

塔 над 分子空间，38
块空间，163 结构块，
230 块点，163

—В—

函数向量，168；300 分子空间的权，
8；185 宇宙，312

—Г—

边界，195；196 同调群
Hn(G)，197 链群，196—
Д—对角线，230

—И—

动力系统的积分和，286 源点，
289

—К—

砖块，209 砖块空间 n维，
211261 210；泛的，砖块性，
214 等价类，194 团，11 紧致性，
219 锥，11 坐标，112；237

—М—

坐标矩阵，211 度量，16 流形，94 点
集，262 分子空间，7 16 8 9；；；n维，
140 q齐次，178 基，304 基底n维，
211 261；嵌入同伦，31 同伦的，24
同构，8 拟正规，158 161；极小的，
186 最小的，185 非齐次的，237 48 正
规n维，；50 齐次的，18 齐次的，
233 可定向的，195 完备的，226 标记
的，194 r部的，12 正则，155 80带边
界，；88 连通的，9 可缩的，22 泛的，
210

—Н—

覆盖，251 动力系统的范数，294

—О—

МП的像，134 МП的并
集，10 МП 的体积，8

一般邻域，13 子空间，13 15
完整，；16 13 点，骨架，
166 MП 的体积，185 定向，
195

—П—

MП 的交，10；MП 的重构，38；砖块
曲面，211 262 211；分子曲面，；262
覆盖，246；同伦覆盖，257；连续覆盖，
258；正则覆盖，251；可约覆盖，267；**—T—**
正则，249 248；可缩的覆盖；基变换，
304；将边替换为点，67；将点替换为边，
68；诱导变换，36 11；MП 的直和，；
102 17；MП 的直积，；111；点变换，
23；148；时空，311；无限维空间，
208 154155；正则空间，；

—P—
膨胀，249；251 嵌入维数，
212 距离，209**—C—**

边，7

点束，11 定向的，194 族，264 连续的，247 249 正则的，；265
248 正则的，；265 247 264 可缩的，；动力系统，284 MП 的粘合，
42；83 点度，264 函数的次数，
302 汇，289 n 维球面，163 最小的，90 0n维的，46 92 正则 n 维的，

n 维点，140 159；内点，80 边界点，80 准正规，159 0正规 n 维，
45 48 正规 n 维，相邻点，7 混合，
239 239纯，**—У—**万能立方体，
218 双曲型方程，286 微分方程，
284 有限差分方程，282 非退化，
295 抛物型，285 285 椭圆型，

—Ф—特征函数，302；
306**—Ц—**链，9；196 圈，
196；197

—Ш—
一般球，13 骨架，140 子空间，
13 15完整，；16 13点，**—**
Э—欧拉示性数，169 —Я—
MP核，80

科学出版物

亚历山大·瓦季莫维奇·伊瓦科

分子空间理论导论

本书由作者自行编辑出版

出版许可证编号 065042，签发于 1997年06.03.1997。1999年12.10.1999付印。开本 60×84 1/16。胶印。出版用纸 21,88 印张。印张 21,88。印数 300 册。订单编号

PAIMS 出版社，莫斯科，奥尔忠尼启则街 3 号

MEPhI 印刷厂，115409 莫斯科，卡希尔公路 31 号