arXiv:2305.02088v1 [math.OC] 3 May 2023

割线判据的推广

Richard Pates*

2023年5月4日

摘要

由n 个子系统构成的循环反馈互联是控制理论的基本构件。针对这种互联，人们已经开发出许多鲁棒稳定性工具。其中两个著名例子是小增益定理和割线判据。如果满足一个涉及一组子系统指标几何平均值的不等式，这两个条件都能保证稳定性。在这两种情况下，指标的设计都旨在刻画不同的核心性质：小增益定理中的增益，以及割线判据中的输出严格耗散程度。本文基于单位圆盘的映射，确定了适用指标的完整系列。这将小增益定理、割线判据以及一系列其他稳定性判据统一为一个条件。

记号

$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域和复数域，$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$表示扩展复平面。$I_n$ 表示 $n \times n$ 单位矩阵。$\mathbb{R}[s]$ 表示实系数不定元 s 的多项式集合，$\mathscr{H}_\infty$ 表示稳定线性时不变系统的传递函数集合，$\mathscr{A}_0$ 表示 $\mathscr{H}_\infty$ 中在扩展虚轴上连续的函数集合。$G \in \mathscr{H}_\infty$ 的 H-无穷范数记为 $\|G\|_\infty$。若存在 X、$Y \in \mathscr{H}_\infty$满足 $NX + MY = I_n$，则称一对 N、$M \in \mathscr{H}_\infty$ 为 G 的左互质因子表示，其中 $G = M^{-1}N$。以 $x_1, \ldots\ldots$、x_n 为对角线元素的对角矩阵记为 $\mathrm{diag}(x_1, \ldots\ldots, x_n)$。

1 引言

割线判据是图中循环反馈互联的稳定性条件图 1 [1]。它最初是针对生物学应用提出的 [1, 2],，但此后已经出现了许多适用于其他应用领域（如大规模系统）的推广和扩展 [3, 4]。正如

*作者是隆德大学 ELLIIT 战略研究领域的成员。本研究得到 ELLIIT 战略研究领域的支持。本项目获得了 ERC 第 834142 号资助协议的资助。

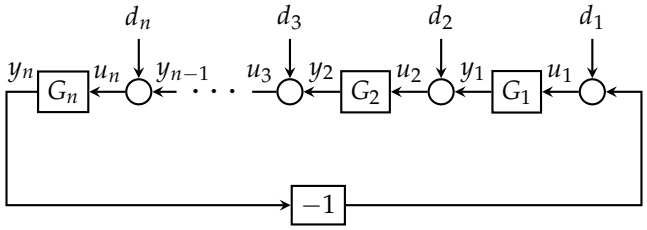

图1：n 个子系统的循环反馈互联。

小增益定理，割线判据保证了反馈互联系统的稳定性，前提是n个独立子系统的“指标” γ_1，……， γ_n 的几何平均值这里只精品

$$\bar{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}$$

满足一个不等式。然而，两者存在几个显著差异。

1. 不等式不同。小增益定理要求

$$\bar{\gamma} < 1. \tag{1}$$

然而，割线判据要求

$$\bar{\gamma} < \sec\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2}$$

2. “指标”的含义不同。在小增益定理中， γ_k 通常是k号子系统的诱导范数。然而，在割线判据中，γ_k 量化了输出严格耗散性[5]的程度。

这两种判据在所捕捉的子系统动力学特性方面各有优缺点。例如，割线判据利用相位信息，使得子系统的 H无穷范数可以更大，同时仍满足（2），而小增益定理则不允许这种情况，因此有可能得到更精确的稳定性分析。然而，如果哪怕只有一个子系统包含纯时延，（2）就总是无法成立，而（1）则不会如此。近年来，人们还发现了其他密切相关的判据。这些结果与割线判据非常相似，但改为基于输入前馈耗散性指标 [6], 以及所谓的大增益定理 [7]。这些条件也具有（1）和（2）的基本特征，不过指标和不等式的形式又有所不同。

本文统一并推广了这些结果。我们的主要贡献是推导出一种类似割线的判据，该判据适用于以单位圆盘经由 M¨obius 变换后的映射为中心的一般指标族。我们证明，在线性时不变情形下，前述所有判据都是这一结果的特例。所提出的判据还允许构造更一般的指标，并可针对子系统不同的动力学特征进行调整。我们通过一个简单示例对此加以说明，其中子系统的动力学包含高增益和纯时延的混合。最后，我们简要讨论逆定理结果和非线性扩展。

2 结果

本节提出割线判据的一种推广，适用于分析 n 个线性时不变单输入单输出系统的循环反馈互联。我们的核心结果见定理1，在第2.1节中给出，涉及一个以扩展复平面子集定义的特定矩阵的可逆性。随后，我们说明如何在第2.2节中，分别在行为框架和输入输出框架下由这一结果导出稳定性判据。接着，我们在第2.3节和第2.4节中介绍并演示用于检验稳定性判据的频域方法和状态空间方法。最后，我们在第2.5节中讨论这些结果与现有结果之间的联系，以及定义更一般稳定性指标的方法。全文还穿插讨论了这些结果与现有文献的关联，并指出了非线性扩展的潜在方向。

2.1 矩阵可逆性结果

考虑以下结构化矩阵

$$R = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n) & \operatorname{diag}(y_1, \ldots, y_n) \\ I_n & S \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ I_{n-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

本小节讨论 R 对由 x_k、$y_k \in \mathbb{C}$ 构成的集合的可逆性。更具体地说，我们考虑这样一些集合：它们由扩展复平面的子集刻画，而这些子集首先通过 M¨obius 变换将单位圆盘映射得到

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

然后再将所得的圆或半平面按 γ 进行缩放。下述定理表明，给定任意一组缩放常数 γ_1、...、γ_n（每个 $(x_k$、$y_k)$ 对对应一个），当且仅当满足类似割线的判据时，R 才是可逆的。

定理1。设

$$\mathbf{\Delta}_{\text{mob}}(\gamma) = \left\{ \frac{\gamma(az + b)}{cz + d} \in \mathbb{C}_\infty : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \right\},$$

其中 a、b、c 和 d 为实数，且满足 $ad - bc \neq 0$。对于任意正数γ_1，.....，γ_n，以下条件等价。

(i) 对所有 x_k、$y_k \in \mathbb{C}$，满足 $x_k/y_k \in \mathbf{\Delta}_{\text{mob}}(\gamma_k)$时，(3) 中的矩阵 R 可逆。

(ii) 对于 $\bar{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}$，不等式

$$\left(b^2 - a^2\right)\bar{\gamma}^2 + 2\beta(ac - bd)\bar{\gamma} + d^2 - c^2 > 0$$

成立，其中 $\beta = \cos(\pi/n)$ 以及 $\beta = \cos\left(\pi\left(2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\right)/n\right)$。

证明。令 $\Gamma = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$，并令 $\mathbf{\Delta}$ 表示由元素属于闭单位圆盘的对角矩阵组成的集合

$$\mathbf{\Delta} = \{\mathrm{diag}\,(z_1, \ldots, z_n) : z_k \in \mathbb{C}, |z_k| \leq 1\}.$$

回顾一下，矩阵的结构奇异值（针对对角复数不确定性）定义如下：

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(Z) = \frac{1}{\min\{|\gamma| : \det(I_n - \gamma \Delta Z) = 0, \Delta \in \mathbf{\Delta}\}},$$

除非不存在使 $\det(I_n - \gamma\Delta Z) = 0$成立的 γ，在这种情况下，$\mu_{\mathbf{\Delta}}(Z) = 0$。考虑以下命题。

(i)* $\det(-b\Gamma S + dI_n) \neq 0$ 和 $\mu_{\mathbf{\Delta}}(g(\Gamma S)) < 1$，其中

$$g(Z) = (-aZ + cI_n)(-bZ + dI_n)^{-1}.$$

我们首先证明 (i) 等价于 (i)*。这将 (i) 与 μ-分析联系起来，从而解锁一些有助于证明 (i)* 等价于 (ii) 的技巧（我们所需的 μ-分析结果相当标准，均可在 [8] 中找到）。

(i) $\Longleftrightarrow$ (i)*：令 $X = \mathrm{diag}(x_1 \ldots x_n)$ 和 $Y = \mathrm{diag}(y_1, \ldots y_n)$，并注意到

$$R \begin{bmatrix} -S & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y - XS & Y \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

由于S 可逆（事实上$SS\intercal = I_n$），上述结果意味着R 可逆当且仅当

$$\det(Y - XS) = \det\left(\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S \\ I_n \end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

根据 $\mathbf{\Delta}_{\mathrm{mob}}(\gamma_k)$ 的定义，$x_k/y_k \in \mathbf{\Delta}_{\mathrm{mob}}(\gamma_k)$ 当且仅当存在一个 $\delta_k \in \mathbb{C}$ 和一个 $\lambda_k \in \mathbb{C}$，使得

$$|\delta_k| \leq 1,\ \lambda_k \neq 0, \text{ and } \lambda_k \begin{bmatrix} x_k & y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

取 $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ 和 $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 可知

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \Delta & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

由上文可知，(i) 成立当且仅当

$$\det\left(\begin{bmatrix} \Delta & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a\Gamma S + cI_n \\ -b\Gamma S + dI_n \end{bmatrix}\right) \neq 0 \tag{5}$$

对所有 $\Delta \in \mathbf{\Delta}$。由于 $0 \in \mathbf{\Delta}$，由上文可知，(i) 蕴含 $\det(-b\Gamma S + dI_n) \neq 0$。将 (5) 从右侧乘以 $\det((-b\Gamma S + dI_n)^{-1})$ 即可得出 (i) 蕴含

$$\det\left(I + \Delta g\left(\Gamma S\right)\right) \neq 0$$

对所有 $\Delta \in \mathbf{\Delta}$。由于对所有 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\Delta \in \mathbf{\Delta} \Longleftrightarrow \exp\left(i\theta\right)\Delta \in \mathbf{\Delta},$$

上述内容意味着

$$\det\left(I - \gamma\Delta g\left(\Gamma S\right)\right) \neq 0$$

对所有 $|\gamma| \leq 1$ 且 $\Delta \in \mathbf{\Delta}$，因此 (i) $\Longrightarrow$ (i)*。反向推导这些最后的步骤可知，在假设 (i)* 下，(5) 成立，因此 (i)* $\Longrightarrow$ (i)，从而证明了所需的等价关系。

(i)* $\Longrightarrow$ (ii)：我们将证明 $\mu_{\mathbf{\Delta}}\left(g(\Gamma S)\right)$ 可以用解析方法根据a、b、c、d 和 $\bar{\gamma}$ 确定。随后，只需用这一描述改写 (i)* 中的不等式，即可得到 (ii) 中的陈述。首先引入迹为 1 的对角半正定矩阵集合

$$\mathcal{D} = \left\{D : D = \operatorname{diag}\left(d_1, \ldots, d_n\right), d_k \geq 0, \operatorname{tr}\left(D\right) = 1\right\}.$$

我们将根据以下界确定 $\mu_{\mathbf{\Delta}}\left(g(\Gamma S)\right)$

$$\rho\left(g\left(\Gamma S\right)\right) \leq \mu_{\mathbf{\Delta}}\left(g\left(\Gamma S\right)\right) \leq \inf_{D \in \operatorname{int}\mathcal{D}} \left\| D^{\frac{1}{2}} g\left(\Gamma S\right) D^{-\frac{1}{2}} \right\|,$$

其中 $\rho(\cdot)$ 表示谱半径，$\|\cdot\|$ 表示矩阵二范数。现在考虑

$$h\left(D\right) = \Gamma S D S^{\mathsf{T}} \Gamma / \operatorname{tr}\left(\Gamma S D S^{\mathsf{T}} \Gamma\right).$$

由于

$$S \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} S^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} d_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

我们看到 $h:\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}$。由于 $\mathcal{D}$ 是紧致凸集，布劳威尔不动点定理保证存在一个 $\bar{D} \in \mathcal{D}$，使得 $h(\bar{D}) = \bar{D}$。进一步由 (6) 可知，$\bar{D}$ 的对角元素均非零（否则由 (6) 可知它们必全为零，这意味着 $\bar{D} \not\in \mathcal{D}$），因此 $\bar{D}$ 可逆。因此

$$\bar{D}^{-\frac{1}{2}} \Gamma S \bar{D}^{\frac{1}{2}} \left(\bar{D}^{-\frac{1}{2}} \Gamma S \bar{D}^{\frac{1}{2}}\right)^{\mathsf{T}} = \operatorname{tr}\left(\Gamma S \bar{D} S^{\mathsf{T}} \Gamma\right) I_n,$$

这意味着 $\bar{D}^{-\frac{1}{2}} \Gamma S \bar{D}^{\frac{1}{2}}$是一个正规矩阵。因此

$$\bar{D}^{\frac{1}{2}} g\left(\Gamma S\right) \bar{D}^{-\frac{1}{2}} = g\left(\bar{D}^{-\frac{1}{2}} \Gamma S \bar{D}^{\frac{1}{2}}\right)$$

也同样是正规的，这意味着

$$\left\|\bar{D}^{\frac{1}{2}} g\left(\Gamma S\right) \bar{D}^{-\frac{1}{2}}\right\| = \rho\left(g\left(\Gamma S\right)\right) = \mu_{\Delta}\left(g\left(\Gamma S\right)\right). \tag{7}$$

现在我们将得到 $\rho\left(g\left(\Gamma S\right)\right)$ 关于 a、b、c、d和 $\bar{\gamma}$ 的解析表达式。首先注意到，

$$\det\left(\lambda I_n - \Gamma S\right) = \lambda^n + \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n,$$

这意味着 ΓS 的谱为

$$\sigma\left(\Gamma S\right) = \left\{\bar{\gamma}\exp\left(i\pi\left(2k-1\right)/n\right) : k = 1,\ldots,n\right\}. \tag{8}$$

由于 $\sigma\left(g(\Gamma S)\right) = g(\sigma\left(\Gamma S\right))$,

$$\rho\left(g\left(\Gamma S\right)\right) = \max\left\{\left|g\left(\lambda\right)\right| : \lambda \in \sigma\left(\Gamma S\right)\right\}. \tag{9}$$

直接代入可知，对于任意 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|g\left(\bar{\gamma}\exp\left(i\theta\right)\right)\right| < 1$$

当且仅当

$$\left(b^2 - a^2\right)\bar{\gamma}^2 + 2\left(ac - bd\right)\cos\left(\theta\right)\bar{\gamma} + d^2 - c^2 > 0. \tag{10}$$

因此，由（8）和（9），（10）对

$$\theta \in \left\{\pi\left(2k-1\right)/n : k = 1,\ldots,n\right\},$$

且（ii）可通过令$k = 1$和$k = \lceil\frac{n}{2}\rceil$得到。

（ii） $\Longrightarrow$ （i）*：首先注意，对于任意整数k</style},

$$\cos\left(\pi\left(2\lceil\tfrac{n}{2}\rceil - 1\right)/n\right) \leq \cos\left(\pi\left(2k-1\right)/n\right) \leq \cos\left(\pi/n\right).$$

因此，给定任意 $\theta \in \left\{\pi\left(2k-1\right)/n : k = 1,\ldots,n\right\}$，(ii) 蕴含(10)成立，因此

$$\max\left\{\left|g\left(\lambda\right)\right| : \lambda \in \sigma\left(\Gamma S\right)\right\} < 1.$$

这意味着$d/b \notin \sigma(\Gamma S)$（注意，$g\left(d/b\right) = \left\{\infty\right\}$），这意味着 $\det(-b\Gamma S + dI_n) \neq 0$。因此，$g\left(\Gamma S\right)$ 存在，从而由(7)和(9),

$$\mu_{\Delta}\left(g\left(\Gamma S\right)\right) < 1,$$

这意味着 (i)*，如所要求。 □

基于定理1的稳定性判据

在本小节中，我们将说明如何利用定理1 为图1所示的循环反馈互联推导稳定性判据。我们首先考虑自治情形（即不存在外部扰动），并在行为框架下推导适用于子系统动态由常微分方程描述的条件。随后，我们将引入外部扰动的影响，并针对具有互质因子分解表示的子系统动态，在输入输出框架下进行分析。为简单起见，我们将始终把讨论限制在线性时不变情形。第2.3节中的注2 对非线性扩展进行了简要讨论。

2.2.1 自治情形

假设有一个由如下形式的一组微分方程描述的系统

$$R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) w = 0, \tag{11}$$

其中 $R \in \mathbb{R}^{n\times n}[s]$。[9, 定理7.22] 证明了，(11)中的动力学是渐近稳定的，也就是说，(11)的每个（弱）解都满足 $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$，当且仅当对于闭右半平面中的所有$s$，$\det(R(s)) \neq 0$。

现在考虑循环反馈互联，其中每个子系统的动力学由如下形式的一组微分方程描述

$$M_k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) y_k = N_k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) u_k,\ k = 1,\ldots,n, \tag{12}$$

其中 $M_k, N_k \in \mathbb{R}[s]$。在不存在扰动的情况下（即自治情形），循环反馈对应于方程

$$u = Sy,$$

其中 S 如式（4）所示。将这些方程合并并写成式（11）的形式，得到

$$\begin{bmatrix} N\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) & M\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \\ I_n & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ -y \end{bmatrix} = 0, \tag{13}$$

其中

$$N = \operatorname{diag}(N_1,\ldots,N_n) \quad \text{and}$$
$$M = \operatorname{diag}(M_1,\ldots,M_n).$$

注意到，式（13）中的矩阵恰好具有第3式中的结构化矩阵形式（见第2.1节）。因此，根据定理1 可立即得出，对于任意正数 γ_1、.....、γ_n，若定理1（ii）中的不等式成立，则对于所有满足下述条件的13）中的动力系统均渐近稳定：M_k，$N_k \in \mathbb{R}[s]$ 满足

$$N_k(s)/M_k(s) \in \mathbf{\Delta}_{\mathrm{mob}}(\gamma_k)$$

对于闭右半平面中的所有s均成立。正如预期的那样，反过来结论也成立，以下引理将对此加以证明。

引理1。 设 a、b、c、$d \in \mathbb{R}$ 满足 $ad - bc \neq 0$。给定任意正数 γ_1，...，γ_k，其几何平均值为 $\bar{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}$，若不等式

$$\left(b^2 - a^2\right)\bar{\gamma}^2 + 2\beta\left(ac - bd\right)\bar{\gamma} + d^2 - c^2 \leq 0$$

对 $\beta = \cos\left(\pi/n\right)$ 或 $\beta = \cos\left(\pi\left(2\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1\right)/n\right)$成立，则存在 M_k、$N_k \in \mathbb{R}[s]$ 使得

$$N_k(s)/M_k(s) \in \left\{\frac{\gamma(az+b)}{cz+d} \in \mathbb{C}_\infty : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\right\} \tag{14}$$

对闭右半平面内的所有 s 均成立，且(13) 不是渐近稳定的。

证明。 由定理1，存在x_k,$y_k \in \mathbb{C}$，使得$x_k/y_k \in \mathbf{\Delta}_{\text{mob}}(\gamma_k)$，且

$$\det\left(\begin{bmatrix}\text{diag}\left(x_1,\ldots,x_n\right) & \text{diag}\left(y_1,\ldots,y_n\right) \\ I_n & S\end{bmatrix}\right) = 0.$$

因此，只要能找到M_k、$N_k \in \mathbb{R}[s]$，使得（14）成立，且$N_k(s)/M_k(s) = x_k/y_k$对闭右半平面内某个s成立，便可得出结论。以下构造适用于$s = i$。

根据$\mathbf{\Delta}_{\text{mob}}$（$\gamma$）的定义，存在正常数 $\alpha_k \leq 1$和$\theta_k \in [-2\pi, 0)$，使得

$$x_k/y_k = \frac{\gamma_k\left(a\alpha_k \exp\left(i\theta_k\right) + b\right)}{c\alpha_k \exp\left(i\theta_k\right) + d}.$$

现在考虑

$$z_k(s) = \alpha_k\left(\frac{1-\phi_k s}{1+\phi_k s}\right)^3,$$

其中 $\phi_k = \tan$（$-\theta_k/6$）。容易证明

$$z_k(i) = \alpha_k \exp\left(i\theta_k\right),$$

并且还可得到 $\phi_k > 0$ 这意味着，对于闭右半平面中的所有s，都有 $|z_k$（s）$| \leq 1$。令

$$\begin{bmatrix}N_k(s) & M_k(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_k\left(1-\phi_k s\right)^3 & \left(1+\phi_k s\right)^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_k a & c \\ \gamma_k b & d\end{bmatrix}$$

证明至此完成。 □

2.2.2 输入—输出情形

现在我们稍微转移一下焦点，研究由以下方程描述的反馈互联系统的稳定性：

$$\begin{aligned} \hat{y}_k(s) &= G_k(s)\,\hat{u}_k(s),\ k=1,\ldots,n, \\ \hat{u}(s) &= S\hat{y}(s)+\hat{d}(s). \end{aligned} \tag{15}$$

在上述公式中，G_k 是描述循环反馈互联中第k个子系统动态特性的传递函数，$\hat{}$ u、$\hat{}$ y和$\hat{}$ d 分别是这些子系统的输入向量、输出向量以及一组外部扰动的拉普拉斯变换。

我们对循环反馈互联系统进行输入-输出分析的基础，是下面这个关于（15）稳定性的简单引理。

引理 2. 设 $G=\mathrm{diag}(G_1,\ldots,G_n)$ 是一个具有左互素因子表示 $G=M^{-1}N$，其中 $M,\ N\in\mathscr{H}_{n\times n\infty}$。那么，式 (15) 中从 d 到 y 的传递函数稳定，当且仅当

$$\begin{bmatrix} N & M \\ I_n & S \end{bmatrix}^{-1} \in \mathscr{H}_\infty^{n\times n}. \tag{16}$$

证明。 首先注意，从d 到y 的传递函数稳定，当且仅当

$$(I-GS)^{-1}G\in\mathscr{H}_\infty^{n\times n}. \tag{17}$$

此外

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N & M \\ I_n & S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N & M \\ I_n & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -S & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -S^{\mathsf{T}} & 0 \\ S^{\mathsf{T}} & I_n \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} M-NS & M \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -S^{\mathsf{T}} & 0 \\ S^{\mathsf{T}} & I_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这意味着

$$(16)\iff (M-NS)^{-1}\in\mathscr{H}_\infty^{n\times n}. \tag{18}$$

由于 $N\in\mathscr{H}_{n\times n\infty}$ 且 $(M-NS)^{-1}N=(I_n-GS)^{-1}G$，(18) $\Longrightarrow$ (17成立。为证明逆向蕴含，首先注意到

$$(I_n-GS)^{-1}GS=I_n-(I_n-GS)^{-1}.$$

因此，(17) 意味着

$$(I_n-GS)^{-1}(GX+Y)=(M-NS)^{-1}(NX+MY)$$

属于 $\mathscr{H}_{n\times n\infty}$ 对于任意 $X,\ Y\in\mathscr{H}_{n\times n\infty}$。由于 N 和 M 是左互质因子，X 和 Y 可以选择为满足 $NX+MY=I_n$，因此（17） $\Longrightarrow$ （18）符合要求。 □

引理2 表明，在输入输出框架中，循环反馈互连的稳定性问题再次归结为判断一个形如第3式的矩阵是否可逆，该矩阵见第2.1节。在满足若干轻微技术限制的条件下，我们可以将其转化为一个必须对每个s都成立的条件。例如，给定任意正数 γ_1、……、 γ_n，如果定理1 的条件(ii)中的不等式成立，那么对于所有$G_k = M^{-1}{}_k N_k$，式（15）中的动力学都是渐近稳定的，其中M_k、$N_k \in \mathscr{A}_0$ 满足

$$N_k(s) / M_k(s) \in \mathbf{\Delta}_{\text{mob}}(\gamma_k) \tag{19}$$

对所有 s 属于扩展闭右半平面（即包括 $s = \{\infty\}$）。通过构造一个类似于引理1 证明中基于有理函数的构造，也可以证明该条件的逆命题。这可以利用有理函数的标准插值结果来实现（例如参见 [10, 引理 1。14],该方法还可以满足其他要求，例如使G_k 严格真有理）。

注 1。 G_k 具有在扩展虚轴上连续的互素因子表示，这等价于要求 G_k 可以用有理函数以任意精度（在图拓扑下）逼近，参见 *[10, 定理 7.1]*。

2.3 频域与状态空间测试

上一节中，我们证明了定理 1（ii）中的不等式保证了循环反馈互联的稳定性，其中所有子系统的动态特性均满足以下形式的条件

$$N_k(s) / M_k(s) \in \mathbf{\Delta}_{\text{mob}}(\gamma_k), \tag{20}$$

对于所有 s 属于（扩展的）闭右半平面。在自治情形下，N_k和 M_k 是多项式；在输入输出情形下，它们是 $\mathscr{A}_0$ 中的互质函数。本节将反向进行分析，并说明如何检查给定的一对函数 N_k 和 M_k 是否满足（20）。

首先注意，对于所考虑的函数类，$N_k(s)/M_k(s)$ 是 $\mathbf{C}_\infty$ 中定义良好的点，当且仅当

$$N_k(s) \neq 0 \quad \text{or} \quad M_k(s) \neq 0. \tag{21}$$

如前所述，这在输入输出情形中不构成限制，因为 N_k、$M_k \in \mathscr{A}_0$ 被假设为互质，这保证上述条件对扩展闭右半平面中的所有 s 都成立。然而，在自治情形中并未作出这样的假设。在此情形下，我们必须假设（21）对闭右半平面中的所有 s 都成立，这等价于要求（12）中的子系统动态在行为意义上可稳定化 [9, 定理 5.2。30]。

假设（21），接下来注意，对于 $ad - bc \neq 0$ 以及 $\gamma > 0$,

$$w = \frac{\gamma(az+b)}{cz+d} \iff z = \frac{dw/\gamma - b}{-cw/\gamma + a}.$$

如果我们设

$$H_k = \left(-cG_k/\gamma_k + a\right)^{-1}\left(dG_k/\gamma_k - b\right),$$

其中 $G_k = M^{-1}{}_k\, N_k$，由此可知，(20) 对所有 s 属于（扩展）闭右半平面的情形成立，当且仅当

$$\|H_k\|_\infty \leq 1. \tag{22}$$

对于所考虑的函数类，可以用频域技术检验 (22)。更具体地说，(22) 成立，当且仅当 H_k 稳定，且 H_k 的奈奎斯特图位于闭单位圆盘内。该条件可以转化为关于 G_k 的要求，如下所示。

1. 绘制 G_k的奈奎斯特图。2. 将单位圆盘经 M obius 变换 $\frac{az+b}{cz+d}$映射。这将得到一个广义圆盘（圆的内部或外部，或一个半平面）。3. 缩放所得的广义圆盘，使其包含奈奎斯特图。4. 检查 $\frac{dG^k/\gamma - b}{a - cGk/\gamma}$ 是否稳定，其中 $\gamma > 0$ 是步骤 (3) 中的缩放因子。如果稳定，则 (20) 在 $\gamma_k = \gamma$. 条件下成立

此外，如果 H_k 是实有理函数，则可利用卡尔曼-雅库博维奇-波波夫引理，通过状态空间技术检验 (22)。更具体地说，如果

$$C\left(sI_m - A\right)^{-1} B + D,$$

是 H_k的最小实现，那么根据 [11, 定理 3 和 4], (22) 成立，当且仅当存在一个半正定 P，使得矩阵

$$\begin{bmatrix} A^{\mathsf{T}}P + PA + C^{\mathsf{T}}C & C^{\mathsf{T}}D + PB \\ D^{\mathsf{T}}C + B^{\mathsf{T}}P & D^{\mathsf{T}}D - 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

为负半定。给定任意A、B、C 和D，上述条件可通过凸规划检验。然后可以利用线搜索找到合适的 γ_k。

注2. 尽管本文只讨论了线性时不变情形，(22) 仍表明，如何将所得条件推广到非线性情形。在输入输出情形下，(22) 表明，如果用算子替换传递函数，那么当算子 H_k 是非扩张时，系统将是稳定的。此外，对于由非线性常微分方程描述的子系统的循环互联，与(23) 相关的耗散不等式或可用于在 的耗散性框架内推导判据。

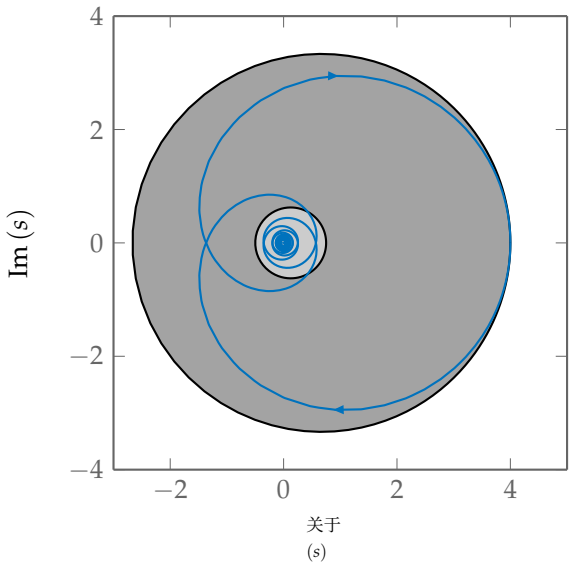

图2：用于确定 γ_1 的第2.4节。

2.4 数值示例

以下示例说明如何应用上一小节中的频域检验。设 $n = 2$、$a = 2$、$b = 1$、$c = 1$、$d = 3$,

$$G_1(s) = \frac{4e^{-0.7s}}{s+1}, \text{ and } G_2(s) = K,$$

其中$K > 0$。在这种情况下，定理1中的不等式变为

$$-3\bar{\gamma}^2 + 8 > 0,$$

因此，我们感兴趣的是找到满足（ γ_1 和 γ_2 的最小值，使19）成立。图2展示了如何确定 γ_1。蓝色曲线是G_1, 的奈奎斯特图，浅灰色圆盘是将单位圆盘经过 M¨obius 变换映射后得到的结果。将浅灰色圆盘放大 16/3 倍即可得到深灰色圆盘。这是完全包含奈奎斯特图所需的最小缩放因子。由于奈奎斯特图没有环绕点 $16a/3c$，因此稳定性检查通过，所以 $\gamma_1 = 16/3$。类似地可以证明 $\gamma_2 = 4K/3$，这意味着

$$\bar{\gamma} = 8/3\sqrt{K}.$$

由此可根据（19）得出：当 $K < 3/8$ 时，循环反馈互联是输入输出稳定的。这不仅说明了如何应用频域检验，也展示了这种更灵活判据的优势。例如，小增益定理要求 $K < 1/4$，而割线判据则完全无法应用，因为 G_1 并非输出严格被动。

2.5 与现有方法的联系

如引言所述，循环反馈互联的若干现有稳定性判据都可以由 定理1得到。将其与上述频域或状态空间技术结合后，可选择以下 ¨莫比乌斯变换

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

对应于一些著名定理的线性时不变情形：

1. 小增益定理对应于 $f(z) = z$ 的情形。若是这种情况，(ii) 中的不等式可简化为：

$$\bar{\gamma} < 1.$$

2. 大增益定理对应于 $f(z) = \frac{1}{z}$ 的情形。若是这种情况，(ii) 中的不等式可简化为：

$$\bar{\gamma} > 1.$$

3. 割线判据对应于 $f(z) = \frac{1}{2}(z+1)$ 的情形。若是这种情况，(ii) 中的不等式可简化为：

$$\bar{\gamma} < \sec\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

4. 基于输入前馈无源性的类割线判据 [6] 对应于 $f(z) = \frac{2}{z+1}$ 的情形。若是这种情况，(ii) 中的不等式可简化为：

$$\bar{\gamma} > \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

注释 3。在上述所有示例（以及第 *2.4* 节中的示例）中，显然需要的是较大的 $\bar{\gamma}$ 还是较小的 $\bar{\gamma}$。在这类情况下，根据指标 γ_k，为子系统动态关联一种大小概念是合理的。例如，在小增益定理中，需要较小的 γ_k。因此，在确定频域测试中 *(3)* 的广义圆盘的缩放，或寻找一个 γ_k 使(23) 中的凸规划可行的 γ_k时，寻找最小的此类 γ_k是合理的。这样便得到一种大小概念，它针对特定 M¨*öbius* 变换的特性量身定制（在这种情况下，它与传递函数的 H 无穷范数一致）。

虽然定理*1* 中的不等式给出了许多具有这一性质的判据，但并非对 a、b、c 和 d 的每一种取值都成立。例如，如果

$$a = 1, b = 16, c = 1, \text{ and } d = 9/8,$$

当 $n = 3$ 不等式在以下任一条件下成立：$0 < \bar{\gamma} < 1/40$，或 $\bar{\gamma} > 1/24$。在这种情况下（只有当 $b^2 - a^2 > 0$ 且 $d^2 - c^2 > 0$时才会出现），γ_k 的最大值和最小值都值得关注，因此需要采用某种兼顾大增益与小增益的分析方法。

3 结论

本文提出了基于类似正割判据的稳定性判据。这些结果统一并推广了许多现有条件，可用于评估线性时不变单输入单输出系统的循环反馈互联的稳定性，其中包括正割判据和小增益定理。本文给出了一个小例子来说明这些更一般判据的用途，并简要讨论了非线性扩展的方向。

参考文献

[1] C. Thron，《生化反馈控制中不稳定性的割线条件——第一部分和第二部分》，数学生物学通报，第 53 卷，第 3 期，第 383–401 页，1991 年。[2] J. J. Tyson 和 H. G. Othmer，《生化通路中反馈控制电路的动力学》，理论生物学进展，第 5 卷，第 1–62 页，1978 年。[3] M. Arcak 和 E. D. Sontag，《一类循环系统的对角稳定性及其与割线判据的联系》，自动化，第 42 卷，第 9 期，第 1531–1537 页，2006 年。[4] M. Arcak，《仙人掌图上的对角稳定性及其在网络稳定性分析中的应用》，*IEEE* 自动控制汇刊，第 56 卷，第 12 期，第 2766–2777 页，2011 年。[5] E. D. Sontag，《无源性增益与稳定性的“割线条件”》，系统与控制快报，第 55 卷，第 3 期，第 177–183 页，2006 年。[6] H. Yu 和 P. J. Antsaklis，《基于无源性指标的串联系统无源性度量》，载于第 *49* 届 *IEEE* 决策与控制会议（*CDC*），2010 年，第 2186–2191 页。[7] V. Zahedzadeh、H. J. Marquez 和 T. Chen，《非线性系统的输入输出稳定性：大增益定理》，载于*2008* 年美国控制会议，2008 年，第 3440–3445 页。[8] A. Packard 和 J. Doyle，《复结构奇异值》，自动化，第 29 卷，第 1 期，第 71–109 页，1993 年。[9] J. W. Polderman 和 J. C. Willems，《数学系统理论导论：行为方法》。Springer Science & Business Media，1998 年，第 26 号。[10] G. Vinnicombe，《不确定性与反馈、H 无穷回路整形与*-Gap* 度量*ν*》。Imperial College Press，2000 年 11 月。

[11] J. C. Willems, 《最小二乘定常最优控制与代数黎卡提方程》, *IEEE* 自动控制汇刊, 第 16 卷, 第 6 期, 第 621–634 页, 1971 年。

[12] ——, “耗散动力系统, 第一至第二部分: 具有二次供给率的线性系统”, 《理性力学与分析档案》, 第45卷, 第5期, 第321–393页, 1972年。