arXiv:2305.02102v1 [math.SG] 3 May 2023

Fano簇中拉格朗日子流形的开放GW公式

MOHAMED EL ALAMI

Abstract. 给定一个 Fano簇 Y 及一个反典范的简单正规交叉除子 $D \subseteq Y$，我们在关于 L的适当 *positivity* 假设下，证明了一个将边界位于拉格朗日子流形 $L \subseteq Y \backslash D$ 上的圆盘计数与 Y中的有理曲线计数联系起来的公式。该公式在许多实例中对 L 的拓扑结构施加了严格限制。我们的主要应用是关于 Y的 Fano循环覆盖 X 的超势公式。作为推论，我们证明了 Fano超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ 的 Fukaya范畴的所有小分支均由单调拉格朗日环面分裂生成。

Contents

1. 引言 2. 具有全局相切的圆盘 2 e 36
2.1. 预备知识 2.2. 横截性 2.3. 相切 5
点的展开 2.4. 紧性 2.5. 计数 2.6. 初 5
步应用 3. 循环覆盖中的拉格朗日环 6
面 3.1. 预备知识 3.2. 超势 3.3. 弱朗 9
兰兹-吉茨堡模型 3.4. $\mathbb{P}^{n+1}$3 中的 11
Fano 超曲面 3.5. 四次 del Pezzo 15
曲面 3.6. 第二 Hirzebruch 曲面 21
23
23
26
29
30
34
4. 附录 4.1. 记号 37
4.2. 生成 参考文 37
献 38
40

1. Introduction

在 [EA21], 中，我们在 $X_{n+1} \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ 指标为 1 的 Fano 超曲面 L中构造了一个单调拉格朗日环面，并证明它分裂生成单调 Fukaya 范畴 Fuk(X_{n+1}) 的小分量。环面 L 是通过循环覆盖映射 $\phi: X_{n+1} \to \mathbb{P}^n$，作为克利福德环面 $L_{\mathrm{cl}} \subseteq \mathbb{P}^n$ 的原像构造的。为了证明分裂生成，需要计算边界位于 L上的马斯洛夫指标 2 圆盘。该计数是通过退化论证完成的。事实上， X_{n+1} 可以变形为奇异环面超曲面

$$X^0_{n+1} = V(t^{n+1} - x_0 \cdots x_n) \subseteq \mathbb{P}^{n+1},$$

其中计数问题更加明确。

在本文中，我们考虑一般的 r 重循环覆盖映射ϕ : $X \to Y$ Fano 簇的循环覆盖映射，其分支沿着一个光滑丰沛除子 $D_Y \subseteq Y$。给定一个拉格朗日环面 $L_Y \subseteq Y \backslash D_Y$，其原像$L_X := \phi^{-1}(L_Y) \subseteq X$ 在适当选择 K¨ahler 形式后将是拉格朗日的。在所有我们感兴趣的情形中， L_X 也将是一个连通环面。我们的目标是联系 L_X 与 L_Y 的超势。

回顾一下，与 L_X 相关联的超势是形式和

$$W_{L_X} = \sum_{\mu_{L_X}(\beta)=2} m_{0,\beta}(L_X) q^{\partial\beta},$$

其中，$m_{0,\ \beta}(L_X)$ 表示属于同调类 β 且经过一点 pt $\in L_X$ 的圆盘的计数。如果这样的圆盘与分歧轨迹 D_X 不相交，那么它就是一个与分支轨迹 D_Y 不相交的马斯洛夫指标为 2 的圆盘的提升。然而，如果一个圆盘 $u: (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (X, L_X)$ 以马斯洛夫指标 2 在 D_X 处与 $z = 0$ 相交一次，那么其像 $v := \phi \circ u: (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Y, L_Y)$ 是一个马斯洛夫指标为 $2r$ 的圆盘，在 $z = 0$ 处与 D_Y 相切，且相切点的阶数为 r。我们证明，这个相切点会变形为 $t\zeta$ 处的 r 个横截交点，....., $t\zeta^r \in \mathbb{D}$，其中 ζ 是一个本原 r^{th} 次单位根，而 t 很小。接下来，我们将这一变形一直延拓到 $t = 1$，在那里 v 分裂成更小的马斯洛夫指标为 2 的圆盘（见图 1）。这一论证的一个有趣特征是，当 t 趋近于 0 时会出现球泡。这些球泡在 ∞ 处具有点约束，并在 r^{th} 次单位根处具有除子约束。它们的计数为 $r!\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle^Y_r$；即次数为 r 的（正则化）点 Gromov-Witten 后代不变量。

为确保相关伪全纯曲线模空间的紧性，我们需要假设 $L_Y \subseteq Y \backslash D_Y$ 是 Maslov 正的，其定义为

$$\frac{1}{2}\mu_{L_Y}(v) \geq \max\{v \cdot D_Y, 1\}$$

对于所有非常值的 I_Y-全纯圆盘 $v: (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Y, L_Y)$。此条件在保持 D_Y 的 I_Y 小扰动下保持稳定，这足以满足横截性的需要。

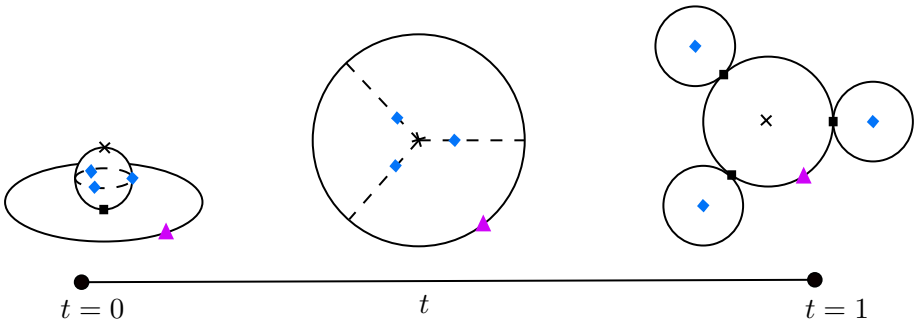


FIGURE 1

定理 1.1. 假设拉格朗日环面 $L_Y \subseteq Y \backslash D_Y$ 的马斯洛夫指数为正。则 $L_X \subseteq X \backslash D_X$ 也如此，且其超势为

$$\phi_* W_{L_X} = W_{L_Y}^{Y \backslash D_Y} + \left(W_{L_Y}^{D_Y}\right)^r - r! \langle \psi_{r-2} \mathrm{pt} \rangle_r^Y , \tag{1.1}$$

其中 ϕ_*: $\mathbb{C}[H_1(L_X)] \to \mathbb{C}[H_1(L_Y)]$ 表示同调上的推前，而 $W_{L_Y}^{D_Y}$（分别地，$W_{L_Y}^{Y \backslash D_Y}$）表示与 D_Y 相交（分别地，不相交）的圆盘对 W_{L_Y} 的贡献。

该定理阐明了如何在许多实例中，将与拉格朗日环面相关的超势恢复为镜像于 Fano 簇的 Hori-Vafa Landau-Ginzburg 模型。其中一个具体例子是射影空间中的 Fano 超曲面，N. Sheridan 已在 [She16] 中对其进行了研究。

定理 1.2. 次数为 d 的 Fano 超曲面 $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$，满足 $d \leq n$，包含一个单调拉格朗日环面 L_d。对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，都存在一个 $\mathbb{C}^*$-局部系统 ξ_λ，使得 (L_d, ξ_λ) 分裂生成 Fukaya 范畴的分支 $\mathrm{Fuk}(X)_\lambda$。

拉格朗日环面 L_d 只能看到 Fukaya范畴的小分支。在临界情形 $d = n + 1$下，我们的构造仍然适用：单调拉格朗日环面 L_{n+1} 分裂生成小分支。它也能看到大分支，但无法生成大分支（它在镜像中表现得像一个点）；有关更详细的讨论，请参见 [EA21] 。另请参见 [She16]，其中介绍了一种构造能够生成大分支的拉格朗日球面的方法。

当 D_Y 为反典范时，超势公式 (1.1) 尤为有趣。回顾一下，Y 的弱 LG 模型是劳朗多项式f_Y，满足对所有 $k \geq 2$，常数项 $c_0(f_Y^k)$ 等于 Y的 k^{th}-正则化量子周期（见 [KP14]）。在 [Ton18], Tonkonog 证明，单调拉格朗日环面的超势是弱 LG 模型。鉴于这一结果，当 D_Y 为反典范时，公式 (1.1) 说明了如何在已知 Y的弱 LG 模型的情况下，为 X 得到一个弱 LG 模型。这是一个纯粹的代数几何陈述。

猜想 1.3. 设 Y 是一个指标为 r 的光滑 Fano 簇，且 $D_Y \subseteq Y$ 是一个光滑反典范除子。设 X 是 Y 沿 D_Y 分支的 r 重循环覆盖。若 f_Y 是 Y 的弱 LG 模型，则 $f_Y^r - c_0(f_Y^r)$ 是 X 的弱 LG 模型。

例如，我们的方法表明，如果 $Y\backslash D_Y$ 含有一个分次精确拉格朗日环面，那么该猜想成立；另见注记 3.17 及其前文的讨论。

上述变形论证（见图 1）只要求 L_Y 是 Maslov 正、定向且自旋的，但不一定是环面。不出所料，我们可以利用对 $\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r^Y$ 有贡献的球面，在 L_Y 中构造出足够多的圆周，使其能在 Y 中界定全纯圆盘，从而限制 L_Y 的拓扑。

定理 1.4. 假设 Y 是指标为 $r \geq 2$ 的 Fano簇，且 $\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r^Y \neq 0$。设 $H_1, \ldots, H_r$ 是一组处于一般位置的同调除子，其并集 $D_Y = \cup_{i=1}^r H_i$ 为反典范。若 $L_Y \subseteq Y\backslash D_Y$ 是定向、自旋、分次且精确的拉格朗日子流形，并具有非正截面曲率，则 L_Y 有一个有限覆盖同胚于乘积 $(S^1)^{r-1} \times K$。

相关工作。在 [Ton19], Tonkonog 使用 SFT 颈拉伸技术，得到了一个与（1.1）类似的公式，其中涉及辛上同调 $SH^*(Y\backslash D_Y)$ 的某些结构常数，见 [Ton19，定理 1.3]。我们采用的方法则使用相当初等的 J-全纯曲线理论技术；它允许除子不是反典范除子（我们只要求 $c_1(Y) \geq D_Y$），也允许拉格朗日子流形不一定是单调的。这些推广对于我们预期的应用至关重要。我们还注意到，我们采用的变形论证表明，Tonkonog 的常数 $c_{i,\ k}$ 可以解释为相对 Gromov-Witten 不变量（见图 1）。然而，要严谨地建立这一联系，似乎需要大量超出本文范围的技术工作。

在 [GP21], Ganatra 和 Pomerleano 使用他们的 LogPSS 映射，解释了某些带有 D_Y 上约束的 Y Gromov-Witten 不变量非零，如何在 $SH^*(Y\backslash D_Y)$ 上导出一个准膨胀，进而（通过 Viterbo 限制）在任意分次精确拉格朗日子流形 brane $L_Y \subseteq Y\backslash D_Y$ 的自由循环空间同调上导出一个准膨胀。当 L_Y 的实维数为 3 时，这些准膨胀会施加严格的拓扑限制。我们对定理 1.4 的处理思路相似，但或许更接近 Fukaya 在 [Fuk07] 中的工作。

致谢。我要感谢 Mark McLean 和 Nick Sheridan，感谢他们就这个项目进行了多次讨论，并由此带来了重大改进。我要感谢 Paul Seidel 提出了图 1 所示的变形论证，感谢 Aleksey Zinger 教我相对古尔茨堡–威滕理论中的 SFT 曲线，感谢 Yankı Lekili 提供文献 [RS17], ，也感谢 Kenji Fukaya 为我讲解了 [FOOO10a] 的部分内容。本项目部分由 ERC 资助项目 850713 – HMS 提供资金支持。

2. Discs with a global tangency

2.1. 预备知识。设 (Z, I) 是一个复维数为 $n \geq 2$ 的光滑 Fano簇，且 ω 是 Z 上的一个 K¨ahler 形式。我们有时将 (Z, I, ω) 称为 Fano K¨ahler 三元组。若除子 $D \subseteq Z$ 可表示为若干光滑除子 $D = \cup_{i=1}^{N} D_i$ 的并，且对任意子集 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$，交集 $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$ 都是横截的，则称其为简单正规交叉。这意味着在每个点 $p \in D_I$ 附近，都存在一个带有坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$ 的全纯坐标图，使得

$$D_i = \{z_i = 0\} \quad \text{for all} \quad i \in I.$$

设 $D \subseteq Z$ 是一个反典范简单正规交叉除子，且 Ω 是 Z 上沿 D 具有极点的全纯体积形式。

对于每个闭定向拉格朗日子流形 $L \subseteq Z \backslash D$，都可以关联两个马斯洛夫同调类 $\mu_L \in H^2(Z, L)$ 和 $\eta_L \in H^1(L)$，下面我们将回顾它们。

- 同调类 μ_L：给定映射 $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L)$，选取复线丛 $\bigwedge^n_{\mathbb{C}} u^* TZ \to \mathbb{D}$ 的一般截面 s，使其限制 $s_{|\partial\mathbb{D}}$ 与 $\bigwedge^n_{\mathbb{R}} TL$ 的定向一致。于是，

$$\mu_L(u) := 2\#s^{-1}(0).$$

- 同调类 η_L：对于每个 $p \in L$，存在唯一的复数$\gamma(p) \in \mathbb{C}^*$，使得 $\gamma(p)^{-1}\Omega_p \in \bigwedge^n_{\mathbb{C}} T_p Z$ 与 $\bigwedge^n_{\mathbb{R}} T_p L$ 上的定向形式一致。同调类 η_L 是映射 $\gamma : L \to \mathbb{C}^*$ 对生成元 $[d\theta] \in H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$ 的拉回的两倍，

$$\eta_L = 2\gamma^*[d\theta].$$

这两个马斯洛夫类满足如下恒等式

$$\mu_L(u) = 2u \cdot D + \eta_L(\partial u), \tag{2.1}$$

该恒等式对所有圆盘映射 $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L)$ 均成立。

定义 2.1。若拉格朗日流形 $L \subseteq Z \backslash D$ 满足

$$\langle \omega, \pi_2(Z \backslash D, L) \rangle = 0 \quad and \quad \eta_L = 0. \tag{2.2}$$

从现在起，除非另有说明，我们将 μ_L 称为马斯洛夫同调类。容许性的概念足够灵活，可以包括以下示例：

- 设 Z 是环面 Fano 簇，$M : Z \to \Delta$ 是其矩映射。对于所有 $\delta \in \text{int}(\Delta)$，$M^{-1}(\delta)$ 都是容许拉格朗日环面。- 相对 Fukaya 范畴 $\text{Fuk}(Z, D)$ 的对象是容许的。

容许性的目的是确保我们稍后将构造的某些全纯曲线模空间具有紧性。

设 N 是一个与 L 不相交的 D 的开邻域。出于横截性的考虑，我们需要扰动复结构 I，使其位于

Z 上的几乎复结构 J 的空间 $\mathscr{J}_N(Z,\omega)$ 中；这些结构与 ω 相容，并且满足 $J_{|N} = I_{|N}$。我们固定 N，此后不再改变，并且常常简称为

$$J = I \qquad \text{near } D.$$

对于每个马斯洛夫指标为 2 的类 $\beta \in H_2(Z,L)$，我们可以如下定义数值不变量 $m_{0,\beta}(L) \in \mathbb{Z}$。考虑模空间

$$\mathscr{M}(L,\beta) = \{v : (\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (Z,L) |\ \overline{\partial}_J v = 0, [v] = \beta\}. \tag{2.3}$$

该模空间中的伪全纯圆盘先验上均为某处单射的 `（见 [Laz11, Theorem A]），因此对于 $J \in \mathscr{J}_N(Z,\omega)$ 的一般选择，它们都是正则的。注意，当 L 为容许的时，对于任意 $J \in \mathscr{J}_N(Z,\omega)$，它都不以指标为 0 的非恒定 J-全纯圆盘为边界。考虑到这一点，整数 $m_{0,\beta}(L)$ 是（伪循环）求值映射的次数。

$$ev : \mathscr{M}_{0,1}(L,\beta) := \mathscr{M}(L,\beta) \times \partial\mathbb{D}/\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \to L.$$

这些数值不变量通常可以方便地封装在一个多项式中。 1

$$W_L \in \mathbb{C}[H_2(Z,L)] := \left\{ a_1 q^{\beta_1} + \cdots + a_m q^{\beta_m} | a_i \in \mathbb{C},\ \beta_i \in H_2(Z,L) \right\},$$

其中 q 是一个形式参数。

定义 2.2. 与 L 相关联的超势是多项式

$$W_L = \sum_{\mu_L(\beta)=2} m_{0,\beta}(L) q^{\beta},$$

其中，q 是环 $\mathbb{C}[H_2(Z,L)]$ 的形式参数。

如果 $P \in \mathbb{C}[H_2(Z,L)]$ 是一个多项式，而 $\alpha \in H_2(Z,L)$ 是一个同调类，我们用 $P[\alpha]$ 表示 P 中次数为 α 的系数。

2.2. 横截性。为了实现高马斯洛夫指数圆盘的横截性，我们需要利用定义域依赖的几乎复结构 $K = (J_z) \in \mathscr{K}_J$ 扰动 J-全纯方程，

$$\mathscr{K}_J = \{J_z \in \mathscr{J}_N(Z,\omega), z \in \mathbb{D} \mid J_z = J \text{ for all } z \in \{0\} \cup \partial\mathbb{D}\}. \tag{2.4}$$

圆盘映射 $u : (\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (Z,L)$ 的扰动后 $\overline{\partial}$-方程为

$$\partial_s u + J_{s,t}(u)\partial_t u = 0, \tag{2.5}$$

其中 (s,t) 是全纯坐标 $z \in \mathbb{D}$ 的实部和虚部。注意，在除子 D 附近，上述方程化为一个真正的 I-全纯方程。对偶组 (J,K) 的选择（其中 $K = (J_z) \in \mathscr{K}_J$）称为一个扰动数据。对于每个这样的数据，方程 (2.5) 的非恒定解的能量为

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |du|^2_{J_{s,t}} ds \wedge dt = \int_{\mathbb{D}} u^*\omega > 0.$$

定义 2.3。设 $l \geq 0$ 为一个整数。若圆盘映射 $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L)$ 在 $0 \in \mathbb{D}$ 处与 D 相切至 l 阶，则称其为在 $0 \in \mathbb{D}$ 处与 D 相切至 l 阶；也就是说，在 $u(0) \in Z$ 附近，除子 D 是全纯函数 f 的（约化）零点集 $(f = 0)$，并满足

$$f(u(z)) = O(z^l).$$

当这一条件成立时，我们采用记号

$$j^D_{0,l-1}(u) = 0.$$

对每个 $l \geq 0$，定义相切模空间

$$\mathscr{T}_l^D = \{u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L) \mid \partial_s u + J_{s,t}(u)\partial_t u = 0,\ j^D_{0,l-1}(u) = 0\}. \tag{2.6}$$

例如，$\mathscr{T}_0^D$是边界落在 L上的无约束伪全纯圆盘空间。稍后我们将限制在固定的同调类 $\alpha \in H_2(Z, L)$上，并研究其子空间

$$\mathscr{T}_l^D(\alpha) = \{u \in \mathscr{T}_l^D \mid [u] = \alpha\}.$$

注2.4. 如果我们将上面的空间 (2.6) 记为 $\mathscr{T}_l(Z, L, J, (J_z))$，则会更加准确。为清晰起见，在混淆风险较小时，我们避免使用这种记法。

暂且假设 D 光滑。那么，喷映射 $j^D_{0,l}$ 有一个简单的几何解释，下面我们来说明。设 σ 是线丛 $\mathscr{O}_Z(D)$ 的一个截面，其零点集为 D。喷映射 $j^D_{0,0}$ 应当视为线丛的一个截面。

$$ev_0^*\mathscr{O}_Z(D) \to \mathscr{T}_0^D : \quad j^D_{0,0} = ev_0^*\sigma, \tag{2.7}$$

其中，$ev_0 : \mathscr{T}_0^D \to Z$ 是在 $0 \in \mathbb{D}$处的求值映射。该截面的零点集是$\mathscr{T}_1^D$，如上所定义。线丛 $ev_0^*\mathscr{O}_Z(D)$限制到 $\mathscr{T}_1^D$后即为法线丛 $N_{D/Z}$，即

$$(ev_0^*\mathscr{O}_Z(D))_u = T_{u(0)}Z/T_{u(0)}D, \tag{2.8}$$

对所有 $u \in \mathscr{T}_1^D$ 均成立。喷射映射 $j^D_{0,1}$ 是（2.8）中线丛的一个截面。事实上，在 $u(0) \in Z$的一个邻域 U 内，截面 σ 给出了除子 D的一个局部定义方程 $f : U \to \mathbb{C}$。函数 $f \circ u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 在 $0 \in \mathbb{D}$附近具有解析展开，

$$f(u(z)) = \lambda z + o(z).$$

u 处的一阶射流映射可解释为法向量

$$j^D_{0,1}(u) = (df)^{-1}_{u(0)}(\lambda) \in N_{D/Z,u(0)}. \tag{2.9}$$

后者与光滑除子 D 的全纯（局部）定义方程的选择无关。高阶射流可解释为截面

$$j^D_{0,l} : \mathscr{T}_l^D \to N_{D/Z}$$

完全以相同的方式。

沿用 [Sei08, (9k)], 中概述的一般策略，可以通过一般的定义域依赖扰动数据 $(J_z) \in \mathscr{K}_J$，实现空间 $\mathscr{T}_l^D$的横截性。相切约束带来的复杂性已由 Cieleback 和 Mohnke 在 [CM07, §6], 中的工作解决；他们通过归纳证明，对每个 l，都存在一个扰动数据 (J_z) 的余稠集，使得 $\mathscr{T}_l^D$光滑。此外，对每个 $u \in \mathscr{T}_l^D$，垂直导数

$$d_u j_{0,l}^D : T_u \mathscr{T}_l^D \to \mathbb{C}$$

是满射的，特别参见 [CM07，命题 6.9]。我们的设定中的主要区别在于，我们允许依赖于定义域的扰动，因此出于横截性的考虑，无需将对象限制为某处单射圆盘。

当 D 是由分支 D_i构成的简单正规交叉时，相切阶数 l 对每个除子 D_i 都有一项贡献 $l_i \geq 0$ ，这些贡献都可以整理为相切向量 $\mathbf{v} = (l_1, \ldots, l_N)$，使得 $\sigma(\mathbf{v}) := l_1 + \cdots + l_n = l$。对于每个相切向量 $\mathbf{v}$，令

$$\mathscr{T}_{\mathbf{v}} = \left\{ u \in \mathscr{T}_l^D \;\middle|\; j_{0,l_i-1}^{D_i}(u) = 0 \text{ for } 0 \leq i \leq N \right\} = \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{T}_{l_i}^{D_i}.$$

注意，只要 $\mathbf{v} \leq \mathbf{v}'$，就有包含关系 $\mathscr{T}_{\mathbf{v}} \to \mathscr{T}_{\mathbf{v}'}$。这些模空间的横截性通过对重数向量 $\mathbf{v}$ 进行归纳，并采用 [CM07，§6], 中的相同方法来实现；另见 [GP21，引理 4.15]。

引理 2.5。对于每个 $J \in \mathscr{J}_N(Z, \omega)$，存在一个依赖于定义域的扰动 (J_z) 的稠密剩余集 $\in \mathscr{K}_J$，使得所有空间 $\mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha)$ 都是光滑流形。相应的维数由黎曼–罗赫公式给出

$$\dim \mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha) = n + \mu_L(\alpha) - 2\sigma(\mathbf{v}).$$

之前的横截性结果可以具体理解如下。设 $\mathbf{v} = (l_1, \ldots, l_N)$ 是一个相切向量，且 $\mathbf{v}' = (l_1+1, l_2, \ldots, l_N)$。对于每个 $u_0 \in \mathscr{T}_{\mathbf{v}'} \subseteq \mathscr{T}_{\mathbf{v}}$，除子 D_i 由方程 $\{f_i = 0\}$ 在 $u_0(0) \in Z$ 附近局部定义（某些 f_i在此局部坐标图中可能是可逆的）。假设$\mathscr{T}_{\mathbf{v}}$ 是光滑的，则在$u_0 \in \mathscr{T}_{\mathbf{v}}$ 的一个邻域内存在一个定义良好的光滑映射，由下式给出。

$$d^{l_1} : \mathscr{T}_{\mathbf{v}} \dashrightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto \left. \frac{d^{l_1} f_1(u)}{dz^{l_1}} \right|_{z=0}.$$

前一个横截性引理的内容是，$0 \in \mathbb{C}$ 是映射d^{l_1}的正则值。因此，零点集 $(d^{l_1})^{-1}(0)$ 为 $\mathscr{T}_{\mathbf{v}'}$ 在 u_0附近提供了一个局部坐标图。通过归纳，事实上可以看出，$0 \in \mathbb{C}^{\sigma(\mathbf{v})}$ 是映射$j_{0,\mathbf{v}} : \mathscr{T}_0 \dashrightarrow \mathbb{C}^{\sigma(\mathbf{v})}$ 的正则值，该映射由以下方式给出。

$$j_{0,\mathbf{v}}(u) = \left(j_{0,l_1-1}(f_1(u)), \ldots, j_{0,l_N-1}(f_N(u)) \right), \tag{2.10}$$

其中我们采用了以下记号

$$j_{0,d-1}(h) = (h(0), h'(0), \ldots, h^{(d-1)}(0)) \in \mathbb{C}^d$$

对于在 0 附近全纯的函数 $h\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

2.3. 展开相切点。现在说明如何将一个与 D 达到最高阶 r 相切的圆盘变形为一个邻近的圆盘，使其与 D 有 r 个横截交点。设 $\alpha \in H_2(Z, L)$ 是一个满足下述条件的积分同调类：

$$r := \frac{1}{2}\mu_L(\alpha) = \alpha \cdot D \geq 2. \tag{2.11}$$

我们将相切向量与 α关联起来

$$\mathbf{v} = (\alpha \cdot D_1, \ldots, \alpha \cdot D_N).$$

设 $s_i \in H^0(Z, \mathscr{O}_Z(D_i))$ 是一个全纯截面，其零点集为 D_i。对于每个 $u \in \mathscr{T}_0(\alpha)$，我们可以拉回对 $(\mathscr{O}_Z(D_i)\ s_i)$，从而在 $\mathbb{D}$ 上得到一个全纯线丛 $u^*\mathscr{O}_Z(D_i)$，以及一个光滑截面 $s_{i,\ u} = u^* s_i$它满足以下性质：

- 截面 $s_{i,\ u}$ 在边界 $\partial\mathbb{D}$上处处不为零。- 在其零点附近，$s_{i,\ u}$ 是全纯的。- 零点的计数（含重数）$\#s_{i\,u,}^{-1}(0)$ 为 $r_i := \alpha \cdot D_i$。

因此，对于每个 $i = 1, \ldots, N$，我们都有一个全局定义的映射

$$\Phi_{i,\alpha} : \mathscr{T}_0(\alpha) \to \mathrm{Sym}^{r_i}(\mathbb{D}), \quad u \mapsto s_{i,u}^{-1}(0). \tag{2.12}$$

根据辐角原理，这些映射是光滑的，见下方公式 (2.14)。这些映射也是.....的分量

$$\Phi_\alpha : \mathscr{T}_0(\alpha) \to \mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D}), \tag{2.13}$$

其中我们使用了记号 \(v_{\{v1\}}(\{v2\},\ldots,\{v3\})\)，并且

$$\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D}) := \mathrm{Sym}^{r_1}(\mathbb{D}) \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{r_N}(\mathbb{D}).$$

引理 2.6。映射 Φ_α 在 $0 \in \mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 上是正则的。

证明。回忆一下，在每个 $u_0 \in \Phi_\alpha^{-1}(0) = \mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha) \subseteq \mathscr{T}_0(\alpha)$ 附近，都存在一个局部定义的光滑函数 $j_{0,\ \mathbf{v}} : \mathscr{T}_0(\alpha) \dashrightarrow \mathbb{C}^{\sigma(\mathbf{v})}$，其零点集为 $\Phi_\alpha^{-1}(0)$ 提供了一个光滑的局部坐标图，参见 (2.10)。此外，在 0 附近还存在一个局部微分同胚 $j_{\mathbf{v}} : \mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}^{\sigma(\mathbf{v})}$。它由以下分支$j_{r_i} : \mathrm{Sym}^{r_i}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}^{r_i}$ 给出，这些分支定义为

$$j_{r_i}([(a_1, \ldots, a_{r_i})]) = j_{0,r_i-1}\left(\prod_{j=1}^{r_i} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a}_j z}\right),$$

证明见 [EA21] 的引理 3.9。我们将证明，导数$d_{u_0} j_{0,\ \mathbf{v}}$ 和 $d_{u_0}(j_{\mathbf{v}} \circ \Phi_\alpha)$ 之间存在一个可逆矩阵关系。由于前者是满射，因此后者也是满射。

设 $u_t \in \mathscr{T}_0(\alpha)$ 是一条经过u_0的伪全纯圆盘光滑路径。设 f_i 是 D_i 在 u_0附近的局部定义方程。那么对于每个 t，都存在唯一的乘积表示

$$f_i(u_t(z)) = m_t^i(z) \times g_i(t, z),$$

其中 $g_i(t,z)$ 处处不为零，并且

$$m_t^i(z)=\prod_{j=1}^{r_i}\frac{z-a_j(t)}{1-\overline{a}_j(t)z}$$

是 M¨obius 变换的乘积。根据辐角原理，

$$\sum_{j=1}^{r_i}a_j(t)^k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma z^k\frac{(f\circ u_t)'(z)}{f(u_t(z))}dz, \tag{2.14}$$

其中 γ 是每个 $a_j(t)$ 周围小圆盘边界的和。由此可知，路径 $m_t^i(z)$ 在 t 中光滑。最后，由于 $m_0^i(z)=z^{r_i}$，

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} j_{0,r_i-1}\left(f(u_t(z))\right)&=j_{0,r_i-1}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} m_t^i(z)g_i(0,z)\right)\\&=j_{0,r_i-1}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} m_t^i(z)\right)M(g_i),\end{aligned}$$

其中 $M(g_i)$ 是一个上三角矩阵，其对角元素均等于 $g_i(0,0)\neq 0$。将这一计算应用于所有 $i=1$、.....、N，我们看到 $d_{u_0}j_{0,\mathbf{v}}$ 和 $d_{u_0}(j_{\mathbf{v}}\circ\Phi_\alpha)$ 由一个对角线上非零元素的上三角矩阵联系起来，因此该矩阵可逆。□

与前一个引理不同，当 u 与 D 横截相交时，可以通过经典横截方法检验其正则性，即检验适当求值映射的正则性。

引理 2.7. 设 $\mathbf{z}=(z_i)\in\mathbb{D}^r$ 是一个由两两不同的内部点组成的有序集合。那么，对于 Φ_α ， $[\mathbf{z}]\in \mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}\mathbb{D}$ 正则，当且仅当求值映射

$$ev_{\mathbf{z}}:\mathscr{T}_0(\alpha)\to Z^r$$

与 $D^r\subseteq Z^r$ 横截。

证明。注意，任何 $u_0\in\Phi_\alpha^{-1}([\mathbf{z}])\subseteq\mathscr{T}_0(\alpha)$ 都与除子 D 在其光滑部分相交，因此引理的陈述是有意义的。我们为除子 D 选择一个局部（在每个 $u_0(z_i)$ 附近的）定义方程 f。我们可以再次比较这两个导数。

$$d_{u_0}\Phi_\alpha:T_{u_0}\mathscr{T}_0(\alpha)\to T_{[\mathbf{z}]}\mathrm{Sym}^r\mathbb{D}=\bigoplus_{i=1}^r T_{z_i}\mathbb{D}, \tag{2.15}$$

$$d_{u_0}ev_{\mathbf{z}}:T_{u_0}\mathscr{T}_0(\alpha)\to\bigoplus_{i=1}^r T_{u_0(z_i)}Z/T_{u_0(z_i)}D\xrightarrow{df}\mathbb{C}^r. \tag{2.16}$$

设 u_s 是 u_0 的一个小变形。沿用引理 2.6 的相同思路，存在分解

$$f(u_t(z))=g_t(z)\prod_{i=1}^r(z-z_i(t))$$

其在 t中是光滑的，并且每个 g_t 都处处不为零。通过直接计算，

$$df\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u_t(z_i)\right) = (-1)^r z_i'(0)\prod_{j\neq i}(z_j - z_i)g_0(z_i).$$

因此，两个导数 (2.15) 和 (2.16) 之间相差一个可逆对角矩阵。□

2.4. 紧性。为简化对紧性的研究（另见下文注 2.14），我们固定一个角度 $\chi \in \partial\mathbb{D}$，它不同于所有单位根。我们强调，我们所有的圆盘都由赋予 $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ 的参数化稳定。另一种等价的理解方式是，将它们视为由对 $(0,\chi) \in (\mathbb{D},\partial\mathbb{D})$ 的选取稳定。

设 $z_1 = (\zeta,\zeta^2,\ldots,\zeta^r) \in \mathbb{D}^{\sigma(\mathbf{v})}$ 为 r^{th} 次单位根的有序集合，并用 $[z_1]$ 表示 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 中相应的元素。我们将 z_1 视为 N 个向量的乘积 $\boldsymbol{\zeta}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{\zeta}_N$，其中 $\boldsymbol{\zeta}_i \in \mathbb{D}^{r_i}$。

我们固定一个几乎复扰动 $J \in \mathscr{J}_N(Z,\omega)$，使得以下模空间

$$\mathscr{T}_r^s(Z,D,p) = \{\text{simple } u:\mathbb{P}^1 \to Z |\ \overline{\partial}_J u = 0,\ u(\infty) = p,\ j^D_{0,r-1}u = 0\},$$
$$\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}(Z,D,p) = \{\text{simple } u:\mathbb{P}^1 \to Z |\ \overline{\partial}_J u = 0,\ u(\infty) = p,\ u(\boldsymbol{\zeta_i}) \subseteq D_i\},$$
$$\mathscr{M}^{\mathrm{s,i}} = \{u:(\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (Z,L) \mid \overline{\partial}_J u = 0,\ u \text{ is somewhere-injective}\}$$

全部都是弗雷德霍姆正则的。关于此类 J 存在的证明，请参见 [Wen10, §4.4] 和 [CM07, 引理 6.7]。接下来，我们选择一个依赖于定义域的 $(J_z) \in \mathscr{K}_J$，使得模空间 $\mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha)$ 也都是弗雷德霍姆正则的。我们还固定一个点 $p \in L$，使其与圆盘在边界点 χ或单位根处的所有（可数多个）求值映射横截。特别地，对于空间

$$\mathscr{T}^{\chi}_{\mathbf{v}}(\alpha) = \{u \in \mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha) \mid u(\chi) = p\} \tag{2.17}$$

对所有相切向量 $\mathbf{v}$ 都成立正则性。

对紧性的研究相当棘手。主要问题在于出现（`先验地）不正则的圆盘泡，或者出现下沉到除子 D中的球泡。尽管文献中已有处理这两个问题的技术，我们选择完全绕过它们，因为在我们预期的应用中不会出现这些问题。从现在起，我们假设 $L \subseteq Z\backslash D$ 是容许的。

定义 2.8. Fano簇 (Z,I) 的伪指标 j_Z 是 I-全纯映射 $u:\mathbb{P}^1 \to Z$ 的最小陈数。或者，

$$j_Z = \min\{-C\cdot K_Z \mid C \subseteq Z \quad an\ algebraic\ curve\}.$$

引理 2.9. 设 $u_k \in \mathscr{T}_0^{\chi}(\alpha)$ 是一列圆盘，使得 $\Phi_\alpha(u_k)$ 在 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 的内部收敛（见 (2.13)）。那么，序列 (u_k) 不会出现圆盘泡。

证明。我们遵循 [MS12, §4.6], 中出现的相同论证，尤其是引理 4.6.5 的证明。我们固定一个识别 $\mathbb{D} \simeq \mathbb{H}$ ，以保持我们的记号与该参考文献一致。

如果出现圆盘泡，则存在序列 $\xi_k \in$int($\mathbb{H}$) 收敛于$\xi \in \partial\mathbb{H}$ ，使得 $c_k := |du_k(\xi_k)| \to \infty$。序列 ($\xi_k$) 根据 Hofer 引理（ [MS12] 中的 4.6.4）构造，该引理还提供了序列 $\epsilon_k \to 0$，使得 $\epsilon_k c_k \to \infty$。随后，圆盘泡 v_∞ 作为重新缩放的伪全纯映射的均匀 C^∞-极限而出现。

$$v_k(z) = u_k\left(\xi_k + \frac{z}{c_k}\right) \quad \text{defined for } z \in B_{\epsilon_k c_k}(\xi_k) \cap \mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}.$$

由于 $L \cap D = \emptyset$，圆盘泡 v_∞ 不可能完全位于 D 内。由于 $\Phi_\alpha(u_k)$ 在 Sym$^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 的内部收敛，当 k 充分大时，映射 v_k 与 D 没有交点。因此，极限 v_∞ 也与 D 没有交点（这是将辐角原理应用于 $f \circ v_k$ 的结果，其中 f 是 D 的局部定义方程）。我们推得，

$$v_\infty \cdot D = 0, \tag{2.18}$$

这与 L 上的容许性假设 (2.2) 相矛盾。 □

引理 2.10. 假设 $r \leq j_Z$。设 $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^r$ 为一个各分量两两不同的向量。那么，映射的纤维Φ_α^{-1}([z{v5)

$$\Phi_\alpha : \mathscr{T}_0^\chi(\alpha) \to Sym^{\mathbf{v}}(\mathbb{D}) \tag{2.19}$$

是紧的。

证明。引理 2.9 排除了圆盘泡。若序列 (u_k) $\in\Phi_\alpha^{-1}$([z]) 不满足 C^1-有界，则会出现球泡；而由于假设 $r \leq j_Z$，它必定是 Gromov 极限中唯一的非常值分量。但 Φ_α^{-1}([z]) 的元素有 $r \geq 2$ 个点受约束于D。特别地，基本分量不可能是常值的，这就产生了矛盾。□

引理 2.11。设 $r \leq j_Z$。那么，模空间 $\mathscr{T}^\chi_{\mathbf{v}}(\alpha)$ 是紧的。

证明。我们采用与引理 2.10 的证明类似的论证。如果一个序列 (u_k) $\in \mathscr{T}^\chi_{\mathbf{v}}(\alpha)$ 不是 C^1-有界的，那么它的 Gromov 极限就是一个在 $0 \in \mathbb{D}$ 处附着于球泡的常值圆盘 $\mathscr{M}_\chi$。

$$u_\infty \in \{u \in \mathscr{T}_r^s(Z, D, p) \mid [u] = \alpha\}.$$

这样的有理曲线自动是简单的（它具有最小陈数），因此是正则的。然而，它属于一个带有非平凡 $\mathbb{C}^*$-作用的正则零维模空间，因此不可能存在。□

定义 2.12。切触数 $\tau_\alpha^D(L)$ 是模空间 $\mathscr{T}^\chi_{\mathbf{v}}(\alpha)$ 中元素的带符号计数。

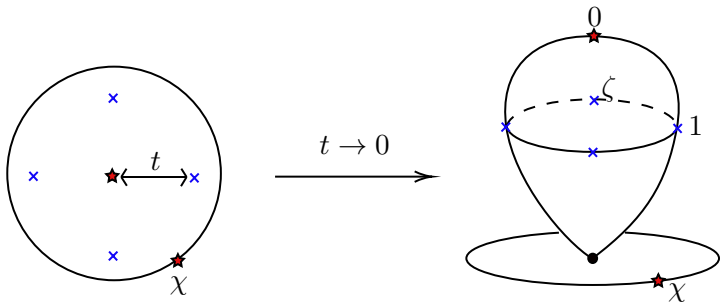


FIGURE 2. 极限中的定义域稳定分支， $r = 4$。

与不变量 $m_{0,\beta}(L)$ 一样，切触数 $\tau_\alpha^D(L)$ 不依赖于一般 $J \in \mathscr{J}_N(Z,\omega)$ 的选择，也不依赖于扰动数据 $(J_z) \in \mathscr{K}_J$。这是因为 L 上所有非恒定伪全纯圆盘的 Maslov 数均为正数。

例 2.13. 在 [EA21], 中，我们计算克利福德环面 $L_{cl} \subseteq \mathbb{P}^2$ 相对于托里克边界 $\Delta = \{x_0x_1x_2 = 0\}$的切触数 $\tau_\alpha^D(L)$，以及其相对于椭圆曲线 E 的切触数；该椭圆曲线由平滑化Δ的角点得到。例如，存在唯一的同调类 $\alpha \in H_2(Z,L)$，其交数为

$$\alpha \cdot \{x_0 = 0\} = 0,\ \alpha \cdot \{x_1 = 0\} = 1,\ and\ \alpha \cdot \{x_2 = 0\} = 2.$$

此同调类具有以下切触数：

$$\tau_\alpha^\Delta(L_{cl}) = 1,\ and\ \tau_\alpha^E(L_{cl}) = 3.$$

注 2.14. 尽管空间 $\mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha)$（不带约束 $u(\chi) = p$）可能不是紧的，但可以像引理 2.11 的证明中那样，用一个由附着在常值圆盘上的球构成的余维 2 集将其紧化。用 [Zin08], ev_χ 的语言来说： $\mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha) \to L$ 是一个伪循环，而 $\tau_\alpha^D(L)$ 是其次数。

尽管映射 Φ_α （见式 (2.19)）在 $0 \in \mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 上方是适当的，但在 0 附近未必适当。

引理 2.15. 设 $r \le j_Z$。令 $(u_k) \in \mathscr{T}_0^\chi(\alpha)$ 为一个序列，满足

$$\Phi_\alpha(u_k) = t_k[\mathbf{z}_1] = (t_k\zeta, \dots, t_k\zeta^r) \in Sym^{\mathbf{v}}(\mathbb{D}), \quad t_k \to 0.$$

若序列 (u_k) 不满足 C^1-有界，则它收敛（取子列后）到常值圆盘 $\mathscr{M}_\chi$，该圆盘在 $0 \in \mathbb{D}$ 处附着于一个来自模空间的球泡u_∞

$$\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}(Z,D,p,\alpha) = \{u \in \mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}(Z,D,p) \mid [u] = \alpha\}. \tag{2.20}$$

证明。上述收敛是在 Gromov 拓扑下进行的。与 (u_k) 相关联的标记定义域 $(\mathbb{D}, 0, \chi, t_k\zeta, \dots, t_k\zeta^r)$（在具有一个边界标记点和 $r+1$ 个内部标记点的圆盘的 Deligne-Mumford 空间中）收敛到一个具有一个边界标记点 $\chi \in \partial\mathbb{D}$ 的圆盘 $\mathbb{D}$，该圆盘

附着于一个球体（$\mathbb{P}^1$，0，ζ，.....，ζ^r）。该附着将 $0 \in \mathbb{D}$ 与 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 识别，见图 2。根据引理 2.9，该序列不出现圆盘泡。此外，假设 $r \leq j_Z$ 确保如果出现球泡，它将是唯一的非恒定分量。特别地，极限的基本分量是常数。这意味着起泡发生在 $z = 0 \in \mathbb{D}$，因为 $u_k(t_k\zeta^i) \in D$，D 与 L 不相交，而 t_k 收敛到 0。□

现在我们研究模空间 $\{(u,t) \mid \Phi_\alpha(u) = t[z_1]\}$ as$t \to 1$的紧性。设 D_i 是简单正规交叉除子D的一个光滑分支。对于每个单位根 $\zeta^k \in \partial\mathbb{D}$ 以及相对同调类 $\beta \in H_2(Z,L)$，考虑伪全纯圆盘的模空间。

$$\mathscr{M}_{\zeta^k}^{D_i}(L,\beta) = \{v : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}, 0) \to (Z, L, D_i) | \ \overline{\partial}_J v = 0, v(-\zeta^k) = p, [v] = \beta\}.$$

这个模空间本质上与 (2.17) 中定义的 $\mathscr{T}_1^\chi(\beta)$ 相同，只是 $\overline{\partial}$-方程使用了一个常数 J，如 (2.3) 所示。

引理 2.16. 假设

$$\mu_L(\beta) = 2 \quad and \quad \beta \cdot D_i = 1. \tag{2.21}$$

那么，$\mathscr{M}_{\zeta^k}^{D_i}(L,\beta)$ 是一个维数为 0 的闭定向流形。$\mathscr{M}_{\zeta^k}^{D_i}(L,\beta)$ 中元素的个数为 $m_{0,\beta}(L)$。

证明。我们使用模空间在这两个计数之间进行插值

$$\mathscr{M}_{D_i}(L,\beta) = \{v : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L) | \ \overline{\partial}_J v = 0, v(0) \in D_i, [v] = \beta\}.$$

再次，根据 Lazzarini 的结构定理（参见 [Laz11, Theorem A]），此模空间中的所有圆盘先验而言都是处处单射的。因此，对于 J 的一般选择，两个模空间都必定是正则的。点 $p \in L$（按假设）与映射横截

$$ev_{-\zeta^k} : \mathscr{M}_{D_i}(L,\beta) \to L; \quad \mathscr{M}_{\zeta^i}^{D_i}(L,\beta) = ev_{-\zeta^k}^{-1}(p).$$

利用引理 2.11 及其后的注记，$ev_{-\zeta^i k}$ 是一个伪循环，其次数为

$$\deg(ev_{-\zeta^k}) = \#\mathscr{M}_{\zeta^k}^{D_i}(L,\beta).$$

回想一下，$m_{0,\beta}(L)$ 是伪循环的次数

$$ev : \mathscr{M}_{0,1}(L,\beta) := \mathscr{M}(L,\beta) \times \partial\mathbb{D}/\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \to L.$$

但由于 $\beta \cdot D_i = 1$，典范映射

$$\iota : \mathscr{M}_{D_j}(L,\beta) \to \mathscr{M}_{0,1}(L,\beta), \quad v \mapsto [v, -\zeta^k]$$

是一个微分同胚。引理现由恒等式 $ev_{-\zeta^k} = ev \circ \iota$ 得证。□

引理 2.17。设 $(u_k) \in \mathscr{T}_0^{\chi}(\alpha)$ 是一个满足以下条件的序列：

$$\Phi_\alpha(u_k) = t_k[\mathbf{z}_1] = (t_k\zeta, \dots, t_k\zeta^r), \quad t_k \to 1.$$

然后，(u_k)（在取子列后）收敛到一个节点评估圆盘 2.22

$$u_\infty \in \mathscr{M}_\chi \bigtimes_{i=1}^{N} \bigtimes_{j=1}^{r_i} \mathscr{M}^{D_i}_{(\zeta_i)_j}(L, \beta_j^i), \quad \alpha = \sum_{i,j} \beta_j^i, \quad \mu_L(\beta_j^i) = 2, \quad \beta_i^j \cdot D_i = 1$$

其中，$(\zeta_i)^j$ 是 ζ_i的 j^{th} 分量。极限 u_∞ 的基本分量是一个常值圆盘 $\mathscr{M}_\chi$。它在单位根处附着于一组圆盘$v_j^i \in \mathscr{M}^{D_i}_{\zeta_i()^j}(L, \beta_j^i)(\zeta_i)_j \in \partial\mathbb{D}$。

证明。与引理 2.15 相同，另见图 3。 □

为简化记号，我们可以不再考虑将D 分解为其不可约分支 D_i。于是，前一个引理中的极限元素 u_∞ 可视为

$$u_\infty \in \mathscr{M}_\chi \bigtimes_{k=1}^{r} \mathscr{M}^{D}_{\zeta^k}(L, \beta_k), \tag{2.23}$$

其中，同调类 β_k 满足以下条件

$$\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_r, \quad \mu_L(\beta_k) = 2, \quad \beta_k \cdot D = 1. \tag{2.24}$$

模空间 (2.23) 的元素本质上与 (2.22) 中的元素相同，但多计了一个因子

$$\frac{r!}{r_1! \cdots r_N!}.$$

2.5. 计数。我们需要的最后几个要素是粘合与定向。下面说明文献中出现的一些理论如何应用于我们的设定。

2.5.1. 粘合。我们依托 Fukaya-Oh-Ohta-Ono 在 [FOOO16]中的工作进行粘合分析，尤其是定理 3.13 和 8.16。设 $\beta_1, \dots, \beta_r \in H_2(Z, L)$ 是一个有序的相对同调类集合，满足 (2.24) 中的约束。令

$$\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_r.$$

接下来，有一个开嵌入

$$\Psi = (G, t) : (R, \infty) \times \mathscr{M}_\chi \bigtimes_{k=1}^{r} \mathscr{M}^{D}_{\zeta^k}(L, \beta_k) \to \mathscr{T}_0^{\chi}(\alpha) \times (0, 1) \tag{2.25}$$

每当粘合长度 R 足够大时。该映射的第一个分量 G 是将一组圆盘 $v_i \in \mathscr{M}^{D}_{\zeta^k}(L, \beta_k)$ 粘合到常值圆盘 $\mathscr{M}_\chi$ 上，位置为 $\mathscr{M}_\chi$ 的定义域中的单位根 ζ^i，并使用粘合长度 $\rho \in (R, \infty)$ 所得到的结果；这就是[FOOO16] 中定理 3.13 所描述的映射。

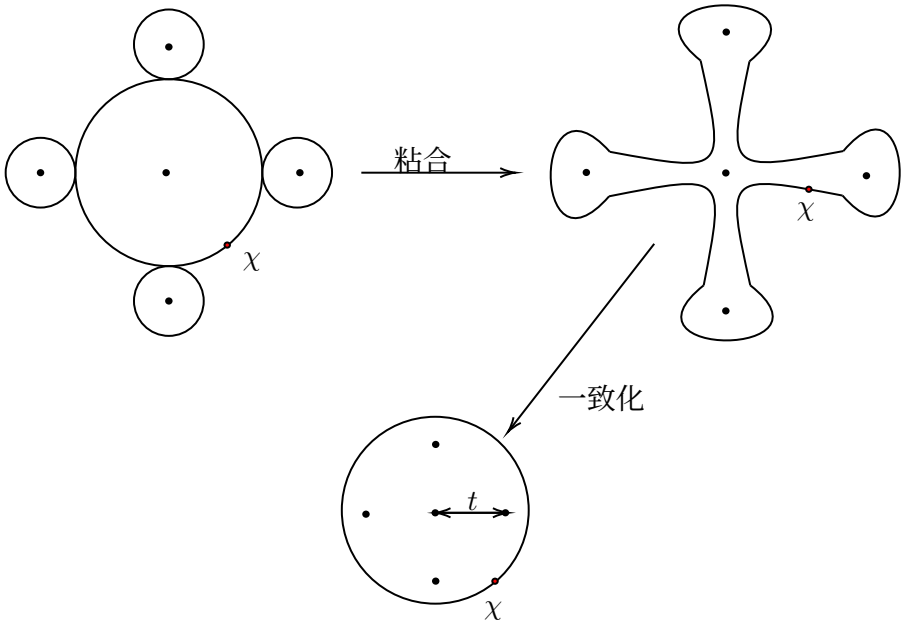


FIGURE 3. $r = 4$的粘合映射； t 的长度表示（2.25）的第二个分量。

将 $r+1$ 定义域圆盘粘合后，所得的黎曼曲面与一个圆盘双全纯。双全纯映射的选择由内部标记点 0 和边界标记点 χ 确定。我们称这一选择为一致化。映射 (2.25) 的第二个分量追踪新添标记点在粘合后的（定义域）圆盘的一致化中距 0 有多远，见图 3。

考虑求值映射

$$\begin{aligned} ev : \mathscr{T}_0^{\chi} \times (0,1) &\to Z^r \\ (u,t) &\mapsto (u(t\zeta), \dots, u(t\zeta^r)). \end{aligned}$$

引理 2.18。当粘合长度 $\rho_+ \in (R, \infty)$ 足够大时，复合映射 $ev \circ \Psi_{|\rho=\rho_+}$ 与 $D^r \subseteq Z^r$ 横截。

证明。根据格罗莫夫紧性，序列 $(\rho_l, (v_k)_l) \in (ev \circ \Psi)^{-1}(D^r)$，其中 $\rho_k \to \infty$ 必须具有 $(v_k)_l$的收敛子序列。此外，在$\rho = \infty$处，复合 $ev \circ \Psi$ 是乘积映射

$$\begin{aligned} \bigtimes_{k=1}^{r} \mathscr{M}_{\zeta^k}^{D}(L, \beta_k) &\to Z^r \\ (v_k) &\mapsto (v_1(0), \dots, v_r(0)), \end{aligned}$$

其与 D^r 横截。 □

注 2.19. 部分文献使用粘合参数 $\delta = e^{-\rho} \in (0, \epsilon)$，而非粘合长度 $\rho \in (R, \infty)$。其一项优点是，模空间边界处的节点曲线对应于 $\delta = 0$，而非 $\rho = \infty$。

2.5.2. 定向。我们现在简要说明我们一直在研究的各种模空间是如何定向的。对于有限维向量空间 V，我们用记号 $\lambda^{\mathrm{top}}(V)$ 表示其最高次外幂；对于 Banach 空间之间的 Fredholm 算子 D，用 $\det(D)$ 表示其行列式线。

$$\det(D) := \lambda^{\mathrm{top}}(\mathrm{coker}(D))^{\vee} \otimes \lambda^{\mathrm{top}}(\ker(D)).$$

模空间 $\mathscr{T}_0(\alpha)$ 的定向问题，归结为选择行列式线 $\det(D_u)$ 的平凡化，使其关于 $u \in \mathscr{T}_0(\alpha)$ 连续变化，其中 D_u 是方程 (2.5) 线性化后得到的柯西–黎曼算子。我们将由各条线 $\det(D_u)$ 构成的线丛记为 $\det_\alpha \to \mathscr{T}_0(\alpha)$。设 $u_\theta : S^1 \to \mathscr{T}_0(\alpha)$ 是一条伪全纯圆盘的环路。那么，[Sei08 的引理 11.7（11e）] 表明，由于 L 可定向，我们有

$$\langle w_1(\underline{\det}_\alpha), [u_\theta] \rangle = \langle w_2(L), [T] \rangle,$$

其中 $T\colon S^1 \times S^1 \to L$，由 $(\theta_1, \theta_2) \mapsto u_{\theta_1}(\theta_2)$ 给出，是由伪全纯圆盘 u_θ 的边界扫掠而成的环面。

此外，在 L 上选择一个自旋结构，可以规范地确定所有同调类 α 上的 $\det_\alpha$ 的平凡~~化，~~ 并且这些平凡化与粘合相容。这本质上是 [Sei08, (11h)] 中引理 11.12 以及 [Sei08, (11c)] 中粘合公式 (11.11) 和 (11.12) 的内容。关于这一定向过程的更详细描述，可以参见 [FOOO10b, 定理 8.1.1], ，而与粘合的相容性则在 [FOOO10b, 引理 8.3.5] 中得到了证明。从现在起，我们假设 L 配备了一个自旋结构，并且在行列式线上的行列式 $\det(D_u) \cong \mathbb{R}$ 中使用由此诱导的平凡化。

利用引理 2.5 以及 $\mathbb{C}$ 的通常定向，我们归纳地得到定向

$$\lambda^{\mathrm{top}} T_u \mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha) \cong \mathbb{R} \tag{2.26}$$

对于各种相切向量 $\mathbf{v}$ 所对应的模空间 $\mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha)$。最后，利用短正合序列对模空间 $\mathscr{T}^{\chi}_{\mathbf{v}}(\alpha)$ 进行定向

$$0 \to T_u \mathscr{T}^{\chi}_{\mathbf{v}}(\alpha) \to T_u \mathscr{T}_{\mathbf{v}}(\alpha) \xrightarrow{d_u ev_\chi} T_{u(\chi)} L \to 0,$$

并结合赋予 L 的定向。

前面的讨论涵盖了引理 2.16 中模空间 $\mathscr{M}(L, \beta)$ $\mathscr{M}_D(L, \beta)$ 和 $\mathscr{M}^D_{\zeta^i}(L, \beta)$ 的定向问题。模空间

$$\mathscr{M}_{0,1}(L, \beta) := \mathscr{M}(L, \beta) \times \partial\mathbb{D} / \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

使用同构进行定向

$$T_{[(u,\xi)]} \mathscr{M}_{0,1}(L, \beta) \oplus T_{\mathrm{id}} \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cong T_u \mathscr{M}(L, \beta) \oplus T_\xi \partial\mathbb{D}.$$

这种定向不依赖于提升 (u,ξ) 的选择。事实上，两个这样的提升通过 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 在 $\mathscr{M}(L,\beta)\times\partial\mathbb{D}$ 上的作用彼此关联，而该作用保持了 (2.26) 中所述的定向。

2.5.3. 同伦。令 $\mathbf{z}_1=(\zeta,\dots\zeta^r)$ 为 r^{th}-单位根的集合。根据引理 2.18、2.7 和 2.6，这些点

$$[\mathbf{z}_t]=t\times[\mathbf{z}_1] \tag{2.27}$$

是来自（2.13）的映射 $\Phi_\alpha:\ \mathscr{T}_0^\chi(\alpha)\to\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 的正则值，当 t 接近 0 或 1 时。令 $\gamma:\ [0,1)\to\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 为一条嵌入路径，该路径与 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})$ 的大对角线不相交（$t=0$ 处除外），并且

$$\gamma(t)=[\mathbf{z}_t]\ \text{ for } t\in[0,\epsilon)\cup(1-\epsilon,1).$$

然后，假设 γ 是一般的，则原像 $\Phi_\alpha^{-1}(\gamma)$ 是一个带边界的光滑定向一维流形。其定向由同构确定。

$$\mathbb{R}\langle\partial_t\rangle\otimes\lambda^{\mathrm{top}}T_{(u,t)}\Phi_\alpha^{-1}(\gamma)\cong\det(D_u) \tag{2.28}$$

而这又是由短正合列得到的。

$$0\to T_{(u,t)}\Phi_\alpha^{-1}(\gamma)\hookrightarrow T_u\mathscr{T}_0^\chi(\alpha)\to T_{\gamma(t)}\mathrm{Sym}^{\mathbf{v}}(\mathbb{D})/(\partial_t\gamma)\to 0.$$

此外，投影 $\Phi_\alpha^{-1}(\gamma)\to[0,1)$ 具有紧纤维，参见引理 2.10。利用引理 2.15 和引理 2.17 中的紧性结果，我们推导出投影 $\Phi_\alpha^{-1}(\gamma)\to[0,1)$ 可以延拓为一个带边界的紧致定向一维流形 $\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}\to[0,1]$，使得

$$\partial_0\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}=\mathscr{T}_{\mathbf{v}}^\chi(\alpha)\sqcup(\mathscr{M}_\chi\times\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}(Z,D,p,\alpha)),\quad\text{and}$$
$$\partial_1\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}=\cup\Big\{\bigtimes_{i=1}^N\bigtimes_{j=1}^{r_i}\mathscr{M}^{D_i}_{(\boldsymbol{\zeta}_i)_j}(L,\beta_j^i)\mid\alpha=\sum_{i,j}\beta_j^i\Big\}.$$

注意，$\partial_0\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}$上的（向内）边界定向与上文 §1.5.2 中描述的 Fredholm 理论定向一致，而 $\partial_1\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}$ 上的边界定向则与其 Fredholm 理论定向相反。这是因为：(i) 我们使用 (2.28) 中的 ∂_t 来定向 $\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}$；(ii) 自旋结构所诱导的 $\det(D_u)$ 平凡化与粘合相容（见 [FOOO10b，引理 8.3.5]）；以及 (iii) 在 $t=0$ 附近，∂_t 指向较大的粘合参数，而在 $t=1$ 附近，它指向较小的粘合参数。

接下来，我们给出模空间 $\partial_0\mathscr{M}_\alpha^{[0,1]}$ 中出现的有理曲线计数的 Gromov-Witten 理论解释。

引理 2.20。0 维模空间 $\mathscr{M}^s{}_{\mathbf{z}_1}(Z,D,p,\alpha)$（见 (2.20)）中元素的带符号计数为 $r_1!\cdots r_N!\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha$，其中

$$\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha:=\int_{\overline{\mathscr{M}}_{0,1}(Z,\alpha)}c_1(\mathcal{L})^{r-2}\wedge ev^*([p])$$

是同调类 α 中的点 Gromov-Witten 后代不变量。回顾一下，在此公式中，$\mathcal{L} \to \overline{\mathscr{M}}_{0,1}(Z,\alpha)$ 是属零稳定映射模空间上的普适余切线丛，其映射取值于同调类 α，且带有 1 个标记点。

证明。将模空间 $\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}(Z,D,p,\alpha)$ 与

$$\widehat{\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}}(Z,D,p,\alpha)=\{u:\mathbb{P}^1\to Z|\ \overline{\partial}_J u=0,\ u(\infty)=p,\ u(\zeta^k)\in D,\ [u]=\alpha\}.$$

这两个模空间描述的有理曲线本质上相同，只是后者的计数多了 $r!/(r_1!\dots r_N!)$ 倍。计数 $\widehat{\#\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}}(Z,D,p,\alpha)$ 与 $(J,p,\mathbf{z}_1)$ 的选择无关，只要满足横截性。考虑空间

$$\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,D,p,\alpha)=\{(u,w,(z_k)_{k=1}^r)\in\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,\alpha)\mid u(w)=p,\ u(z_k)\in D\},$$

其中 $\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,\alpha)$ 是具有 $1+r$ 个标记点、同调类为 α 的属零稳定映射空间。于是，

$$\#\widehat{\mathscr{M}^s_{\mathbf{z}_1}}(Z,D,p,\alpha)=\deg(\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,D,p,\alpha)\xrightarrow{\mathfrak{st}}\overline{\mathscr{M}}_{1+r}). \tag{2.29}$$

Deligne-Mumford 空间 $\overline{\mathscr{M}}_{1+r}$ 带有普适线丛 $\mathcal{L}_0$，它记录第一个标记点 w 处的余切线。回顾$c_1(\mathcal{L}_0)^{r-2}$ =PD(pt)，我们推得

$$\deg(\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,D,p,\alpha)\xrightarrow{\mathfrak{st}}\overline{\mathscr{M}}_{1+r})=\int_{\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,D,p,\alpha)}c_1(\mathfrak{st}^*\mathcal{L}_0)^{r-2}. \tag{2.30}$$

同时，还存在一个次数为 $r!$ 的遗忘映射，

$$\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,D,p,\alpha)\xrightarrow{\mathfrak{f}}\overline{\mathscr{M}}_{0,1}(Z,p,\alpha),$$

它会遗忘额外的标记点 $z_1,\dots,z_r$。注意到

$$\overline{\mathscr{M}}_{0,1}(Z,p,\alpha)=\mathscr{M}_{0,1}(Z,p,\alpha),$$

这是由于约束 $r=c_1(\alpha)\le j_Z$。此外，在节点曲线 $C\in\overline{\mathscr{M}}_{1+r}(Z,D,p,\alpha)$ 中，包含映到 p 的标记点的分支绝不会是常值的。由此可得

$$\mathfrak{f}^*\mathcal{L}=\mathfrak{st}^*\mathcal{L}_0. \tag{2.31}$$

结合 (2.29)、(2.30) 和 (2.31)，即可得出该引理。 □

注 2.21。这里有几点说明：

- 只要 α 是满足 $c_1(\alpha)=\alpha\cdot D$ 的球类，引理 2.20 可能就成立，而无需假设 $c_1(\alpha)\le j_Z$。此时，关键恒等式 (2.31) 在一个余维 4 子集之外成立，这应该已经足够。
- 在 [Ton18]，中，D.Tonkonog 给出了引力后裔类 $\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha$ 的一种解释：利用某个球面模空间，其中的球面在 pt 附近与局部超曲面相切。该解释似乎不同于本文所给出的解释。

现在，我们已经为主要技术结果汇集了所有必要的要素。

定理 2.22. 设 $L \subseteq (Z, I, \omega)$ 是一个定向且自旋的可容许拉格朗日子流形，满足 $L \cap D = \emptyset$。设 $\alpha \in H_2(Z, L)$ 是一个相对类，使得

$$r := \frac{1}{2}\mu_L(\alpha) = \alpha \cdot D \leq j_Z.$$

那么，

$$\frac{r!}{r_1! \cdots r_N!}\tau_\alpha^D(L) + r!\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha = W_L^r[\alpha]. \tag{2.32}$$

现在我们简要讨论 D 光滑且 $c_1(Z) - D$ 数值有效、但不一定有效的情形。在这种设定下，只要 $L \subseteq Z\backslash D$ 满足适当的正性假设，我们也有一个类似于计数公式 (2.32) 的结果。

定义 2.23. 设 $D \subseteq (Z, I)$ 是一个光滑除子。若拉格朗日嵌入 $L \subseteq Z\backslash D$ 满足

$$\frac{1}{2}\mu_L(u) \geq \max\{u \cdot D, 1\}, \tag{2.33}$$

对所有 I-全纯圆盘 $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L)$，

例如，若存在一个光滑除子 D_1，使得 $D \cup D_1$ 是反典范的，且 $L \subseteq Z\backslash(D \cup D_1)$ 是容许的，那么 $L \subseteq Z\backslash D$ 就是 Maslov 正的。更重要的是，我们可以直接从格罗莫夫紧性得到以下推论。

引理 2.24. 若 $L \subseteq Z\backslash D$ 是 Maslov 正的，并且 J_z 是对 I 的充分小的依赖于定义域的扰动，则

$$\frac{1}{2}\mu_L(u) \geq \max\{u \cdot D, 1\}$$

对所有 J_z-伪全纯圆盘 $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Z, L)$。

只要在选取一般的 I 时将范围限制为小扰动，通往定理 2.22 的方法便可逐字照搬，其中包括选取一般的$J \in \mathscr{J}_N(Z, \omega)$ 和一般的 $(J_z) \in \mathscr{K}_J$。从某种意义上说，这意味着计数不变量 $m_{0,\ \beta}(L)$ 和 $\tau_\alpha^D(L)$ 可能依赖于复结构 I。

在此设定下，计数公式为

$$\tau_\alpha^D(L) + r!\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha = (W_L^D)^r[\alpha], \tag{2.34}$$

其中，$\alpha \in H_2(Z, L)$是一个相对类，而 W_L^D是超势中用于计入与 D相交的圆盘的部分，

$$W_L^D = \sum_{\mu_L(\beta)=2, \beta\cdot D=1} m_{0,\beta}(L)q^\beta.$$

当然，在计数公式(2.32)或(2.34)中，量 $r!\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha$仅在 α 为球类，即 $\partial\alpha = 0$ 属于 $H_1(L)$时才有贡献。对所有此类类 α 求和记为

$$r!\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r := \sum_{c_1(\alpha)=r,\alpha\in H_2(Z)} r!\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_\alpha.$$

这是 Z 的正则化量子周期中第一个可能非零的系数；我们回顾其形式为

$$\widehat{G}_Z(t) = 1 + \sum_{k\geq j_Z} k!\langle\psi_{k-2}\mathrm{pt}\rangle_k t^k.$$

由于量子周期与镜像对称的相关性，它们已在文献中得到广泛研究。例如，[CCGK16a] 计算了所有 Fano三维簇的正则化量子周期。镜像对称 Z预言，存在一个关于 n 个变量的劳朗多项式 f，使得该多项式 f^k的常数项是 $\widehat{G}_Z$ 的 k^{th} 阶系数。在 [Ton18], 中，D. Tonkonog 证明，单调拉格朗日环面 L 的超势 W_L 满足这一性质。镜像对称进一步预言， Z 可以退化为一个托里克簇，其扇多面体是 f 的牛顿多面体。二元组（X， f）被称为 Z 的环面兰道-金兹堡模型；关于这一镜像对应的更多文献，参见[KP14、CCG $^+$12a] 。

2.6. 首批应用。现在我们简要提及公式 (2.32) 的几个（相当直接的）推论。回顾一下，对于任意拉格朗日嵌入$L \hookrightarrow Z$，最小马斯洛夫数定义为

$$N_L = \inf\{\mu_L(\beta) \mid \beta \in H_2(Z, L)\}.$$

Audin 猜想， $\mathbb{P}^n$ 中的单调拉格朗日环面具有最小 Maslov 数 2。Cieleback-Mohnke 使用 SFT颈拉伸论证证明了这一猜想，见[CM18] 。Tonkonog 的量子周期定理（见 [Ton18]）将这一结果推广到了其他 Fano 簇中的单调拉格朗日环面。

推论2.25. 设 Z 为一个Fano簇，使得 $\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r \neq 0$，其中$r$ 是 Z的伪指标。设 $D \subseteq Z$ 为一个简单正规交叉的反典范除子。若 $L \subseteq Z\backslash D$ 是一个截面曲率非正的可容许拉格朗日子流形，则 $N_L = 2$。

我们注意到，约束 $\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r \neq 0$ 会自动排除含有直线的 Fano 簇（即满足 $r = j_Z = 1$的 Fano 簇）。然而，对于这类 Fano 流形，该推论对任意拉格朗日嵌入 $L \hookrightarrow Z$都显然成立。在满足 $j_Z \geq 2$的 Fano 簇中，约束 $\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r \neq 0$ 并非总是成立，但同时它似乎也并不十分苛刻。例如，推论2.25适用于所有 Fano 曲面和三维 Fano 簇。

证明概要。要求 L 具有非正曲率度量，可确保当 $\partial\alpha = 0$ 属于 $\pi_1(L)$ 且 $c_1(\alpha) = r$ 时， $\tau_\alpha(L) = 0$ 。事实上，如果

$\tau_\alpha(L) \neq 0$，那么对于任意选择的几乎复结构 $J \in \mathscr{J}_N(Z,\omega)$，相切模空间都不可能为空。特别地，对于在 [CM18] 中构造的每个颈部拉伸几乎复结构 J_k，都能得到一个圆盘 u_k，它完全相切于 D （即 $j_0^D,\ r-1(u_k) = 0$）。序列 (u_k) 的 SFT极限是一个全纯建筑，如 [CM18，推论 2.9] 中所述。考察该建筑的顶部，$Z\backslash L$，只有与 D 相切的分量可能是非常数的。因此，该建筑的底部是在 T^*L 中的一个半圆柱，其边界位于 L 上，并且渐近于一个 Reeb轨道。但 T^*L 中的 Reeb轨道是来自 L 的闭测地线的提升，而其中没有一条是零同伦的。

一旦我们知道 $\tau_\alpha(L) = 0$，且 $\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r \neq 0$，便可立即由计数公式 (2.32) 得出命题。□

我们的下一个应用涉及拉格朗日拓扑，思路与 Fukaya 在 [Fuk07] 中的工作相同。回顾一下，Fano 流形的指标是满足以下条件的最大整数 i_Z

$$c_1(Z) = i_Z H$$

对于某个本原类 $H \in H^2(Z,\mathbb{Z})$。例如，$i_{\mathbb{P}^n} = n+1$。

推论 2.26. 设 Z 是指标为 $r \geq 2$ 的 Fano簇，且满足 $\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r \neq 0$。设 $H_1,\dots,H_r$ 是一组处于一般位置的同调除子，其并集 $D = \cup_{i=1}^r H_i$ 为反典范除子。若 $L \subseteq Z\backslash D$ 是一个截面曲率非正的可容许拉格朗日子流形，则 L 可被有限覆盖为乘积 $(S^1)^{r-1} \times K$。

证明概要。设 $\alpha \in H_2(Z)$ 是一个对 Gromov-Witten 后代不变量 $\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r$ 有非零贡献的曲线类。与推论2.25的证明一样，我们首先利用非正曲率假设来确保 $\tau_\alpha(L) = 0$。根据计数公式 (2.32)，同调类 α 分解为圆盘类 $\beta_1,\dots,\beta_r \in H_2(Z,L)$，使得 $\mu_L(\beta_i) = 2$, $\beta_i \cdot H_j = \delta_{ij}$，并且 $m_{0,\beta_i}(L) \neq 0$。现在我们研究环路 $\gamma_i := \partial\beta_i \in \pi_1(L)$ 的性质。

命题：在 $H_1(L)$ 中，环路 γ_i 生成一个秩为 $r-1$ 的自由阿贝尔群。

命题的证明。事实上，若存在一个关系 $a_1\gamma_1 + \cdots + a_r\gamma_r = 0$，则存在一个曲线类 $C \in H_2(Z)$，使得

$$C = a_1\beta_1 + \cdots + a_r\beta_r \quad \text{in } H_2(Z,L).$$

由此可得，对于所有的 $j = 1$，都有 $C\cdot H_j = a_j$，....., r。但请回想，所有除子 H_j 彼此同调。因此，类 (γ_i) 在 $H_1(L)$ 中只满足一个非平凡关系，即 $\gamma_1 + \cdots + \gamma_r = 0$。

回到引理 2.16 的（证明），整数 $m_{0,\ \beta_i}$ 是一个求值映射的次数

$$ev : \mathscr{M}_{H_i}(L,\beta_i) \to L,$$

其经过 L 的自由循环空间的分支 $\mathcal{L}_{\gamma_i}(L)$。特别是，$H_n(\mathcal{L}_{\gamma_i}(L)) \neq 0$。由于 L 具有非正截面曲率，

这意味着中心化子

$$C_{\gamma_i} = \{g \in \pi_1(L) \mid g^{-1}\gamma_i g = \gamma_i\}$$

在 $\pi_1(L)$ 中具有有限指标，见 [Fuk07，引理 2.4]。因此，它们的交 $C = \cap_{i=1}^r C_{\gamma_i}$ 也是 $\pi_1(L)$ 的有限指标子群。令 d 为其指标，并令 G 为由集合 γ_i^d 生成的 $\pi_1(L)$ 的子群。于是， G 是一个秩为 $r-1$ 的自由阿贝尔子群（见上文命题），其中心化子 $C_G \subseteq \pi_1(L)$ 具有有限指标（注意 $C_{\gamma_i} \subseteq C_{\gamma_i^d}$）。令 L^+ 为 L 的一个有限覆盖，其基本群为 C_G。那么 L^+ 也相应地支持一个非正截面曲率度量。此外， G 是中心 $\mathcal{Z}(\pi_1(L^+))$ 的一个自由阿贝尔子群。利用 Lawson-Yau 的中心定理（见 [LJY72]），我们推得 L^+ （因此 L 也如此）被一个乘积 $(S^1)^{r-1} \times K$ 覆盖，其中 K 是某个光滑紧流形。□

3. Lagrangian tori in cyclic covers

3.1. 预备知识。设 (Y, I_Y, ω_Y) 是一个维数为$n \geq 2$ 的光滑 Fano簇，配备 K¨ ahler 形式 ω_Y。

定义 3.1。循环覆盖数据是三元组（r、$\mathscr{L}$、σ），其中 $r \geq 2$ 是一个整数， $\mathscr{L} \to Y$ 是一个充足线丛，且 σ ： $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{L}^r$ 是一个全纯截面，其零点集 $D_Y = \sigma^{-1}(0) \subseteq Y$ 是横截切出的。

顾名思义，循环覆盖数据 $(r, \mathscr{L}, \sigma)$ 确定了一个射影簇 X 和一个循环覆盖映射 ϕ : $X \to Y$，其中

$$X = \left\{p \in \mathscr{L} \mid p^{\otimes r} = \sigma\right\} \subseteq \mathrm{Tot}(\mathscr{L}).$$

更准确地说，

$$X = \mathrm{Spec}_{\mathscr{O}_Y}\left(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L}^{-1} \oplus \cdots \oplus (\mathscr{L}^{-1})^{\otimes(r-1)}\right). \tag{3.1}$$

在局部仿射图 $\mathrm{Spec}(A) \subseteq Y$ 中，截面 σ 可视为局部函数 $f \in A$。此时，覆盖映射可建模为

$$\mathrm{Spec}\left(A[t]/(t^r - f)\right) \to \mathrm{Spec}(A). \tag{3.2}$$

特别地， X 是一个光滑射影簇。ϕ 的分歧除子满足以下线性等价关系（见 (3.2)）

$$rR = (r-1)\phi^{-1}(D_Y), \tag{3.3}$$

其中， $\phi^{-1}(D_Y)$ 是分支轨迹的（非约化）原像。我们用 D_X 表示分歧轨迹的约化形式。它在局部模型 (3.2) 中对应于 $(t = 0)$。由黎曼-赫尔维茨公式可得，

$$\begin{aligned} c_1(X) &= \phi^* c_1(Y) - R \\ &= \phi^*\left(c_1(Y) - (r-1)\mathscr{L}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

特别注意，如果 D_Y 是反典范的，那么 D_X也是。

推论 3.2. 如果 $c_1(Y) - D_Y$是数值有效的，那么 X 是 Fano。

证明。按照 (3.4) 中的做法使用黎曼-赫尔维茨公式，

$$rK_X^{-1} = \phi^* \left(K_Y^{-1} + (r-1)(K_Y^{-1} - D_Y)\right).$$

根据 Nakai-Moishezon 判据，除子 $K_Y^{-1} + (r-1)(K_Y^{-1} - D_Y)$ 是丰性除子。因此，它在有限映射 ϕ 下的拉回也是丰性除子。□

设 $L_Y \subseteq Y \backslash D_Y$ 为一个拉格朗日环面。记 $\subseteq X$其原像为 $L_X = \phi^{-1}(L_Y)$。

命题 3.3. 对于每个 D_X 的邻域 $U \subseteq X \backslash L_X$，存在一个函数 $\rho : X \to \mathbb{R}$，其在 U 中具有紧支撑，使得 2-形式

$$\omega_X = \phi^* \omega_Y + dd^c \rho \tag{3.5}$$

是 K ¨ahler 的。特别地，$L_X \subseteq (X, \omega_X)$ 是拉格朗日子流形。

证明。如果 $[\omega_Y] \in H^2(Y, \mathbb{R})$ 是有理的，即它是 Y 上某个 ample 线丛的曲率（相差一个 $i/2\pi$ 的因子），那么这正是 [EA21] 中的引理 2.15：利用 ample 线丛的有限拉回仍为 ample 这一事实即可。

更一般地，由于 Y 是 Fano，$H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$，因此任意 K¨ahler 形式都是有理 K¨ahler 形式的凸组合。□

拉格朗日 L_X 是环面 L_Y 的覆盖，因此它是不相交环面的并。在我们考虑的例子中，L_X 始终是连通的。这归因于以下结果。

命题 3.4。设 L_Y 围成一个（拓扑）圆盘 v，使得 $v \cdot D_Y = 1$。则 $L_X \subseteq X$ 是连通的。

◦证明。考虑 $n > 2$ 的情形，并令 $N_\epsilon = B_\epsilon(D_Y) \backslash D_Y$ 为 D_Y 的一个穿孔邻域。由于 Y 是 Fano，它必然是单连通的。因此，映射

$$\pi_1(\overset{\circ}{N}_\epsilon) \to \pi_1(Y \backslash D_Y)$$

是满射。由 Lefschetz 超平面定理，D_Y 是单连通的。因此，存在一个满射映射

$$\pi_1(S^1) \to \pi_1(\overset{\circ}{N}_\epsilon)$$

◦来自纤维丛 $N_\epsilon \to D_Y$的同伦长正合序列。由此可得，$\pi_1(Y \backslash D_Y)$是阿贝尔群。

若 $n = 2$，则 $\pi_1(Y \backslash D_Y)$仍是阿贝尔群（得益于 Zariski [Zar29]的工作），尽管这要复杂得多。关于明确的表述，参见 [Nor83，定理 II] 。

由于它是阿贝尔的，基本群 $\pi_1(Y \backslash D_Y)$ 可以利用庞加莱对偶计算：

$$\begin{aligned} \pi_1(Y \backslash D_Y) &= H_1(Y \backslash D_Y, \mathbb{Z}) = H^{2n-1}(Y, D_Y, \mathbb{Z}) \\ &= \operatorname{coker}(H^{2n-2}(Y, \mathbb{Z}) \to H^{2n-2}(D_Y, \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

设 $q = \inf\{|\beta \cdot D_Y| \mid \beta \in H_2(Y,\mathbb{Z})\}$。因此我们得到一个同构

$$\mathrm{lk} : \pi_1(Y\backslash D_Y) \to \mathbb{Z}_q, \quad \gamma \mapsto v_\gamma \cdot D_Y,$$

其中，v_γ 是任意一个边界为 γ 的圆盘映射。由于 L_Y 围成一个圆盘 v，满足 $\mathrm{lk}(v) = 1$，因此群同态

$$\pi_1(L_Y) \to \pi_1(Y\backslash D_Y)$$

是满射。因此， L_Y在 $Y\backslash D_Y$的任意非分支覆盖中都有一个连通的原像。□

我们的目标是联系与配对（X， L_X）和（Y， L_Y）相关的马斯洛夫指标 2 圆盘的计数。回顾黎曼-赫尔维茨公式的如下开放类比。

引理 3.5。设 $u\colon (\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (X,L_X)$ 是一个圆盘映射， $v\colon = \phi \circ u\colon (\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (Y,L_Y)$ 是其推前。那么，

$$\frac{1}{2}\mu_{L_X}(u) = \frac{1}{2}\mu_{L_Y}(v) - \frac{r-1}{r} v \cdot D_Y.$$

证明。令 s 为线丛 $\wedge^n_{\mathbb{C}} u^*TX$ 的一般截面，其在边界上的限制 $s_{|\partial\mathbb{D}}$ 是子丛 $\wedge^n_{\mathbb{R}} u^*_{|\partial\mathbb{D}} TL_X$ 的处处非零截面。则 $1/2\mu_{L_X}(u)$ 是 s 的零点的带符号计数。类似地， $1/2\mu_{L_X}(v)$ 是丛对 $(\wedge^n_{\mathbb{C}} v^*TY, \wedge^n_{\mathbb{R}} v^*TL_Y)$ 的截面 $\phi_*(s) \coloneqq u^*(\wedge^n d\phi) \circ s$ 的零点的带符号计数。根据定义， $\wedge^n d\phi$ 是线丛 $(\wedge^n TX)^{-1} \otimes \wedge^n \phi^*TY$ 的一个截面，其零点集（含重数）即为分歧轨迹 R。由此可得

$$\frac{1}{2}\mu_{L_X}(u) = \frac{1}{2}\mu_{L_Y}(v) - u \cdot R.$$

引理现在由 (3.3) 中 R 的计算直接得出。 □

注意前述构造的以下特殊情形。

推论 3.6. 假设 $D_Y \subseteq Y$ 是反典范的，且 $L_Y \subseteq Y\backslash D_Y$ 的 Maslov 同调类是平凡的。则 $D_X \subseteq X$ 也是反典范的，且 $L_X \subseteq X\backslash D_X$ 的 Maslov 同调类同样是平凡的。如果 $L_Y \subseteq (Y,\omega_Y)$ 也是单调的，那么 $L_X \subseteq (X,\omega_X)$ 也是单调的。

证明。回顾（见（2.1））， $L_Y \subseteq Y\backslash D_Y$具有平凡的 Maslov 类当且仅当

$$\frac{1}{2}\mu_{L_Y}(v) = v \cdot D_Y, \quad \text{for all } v : (\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (Y,L_Y).$$

利用引理 3.5、(3.3) 中的恒等式，以及 $R = (r-1)D_X$ 这一事实，我们推得、】【

$$\frac{1}{2}\mu_{L_X}(u) = \frac{1}{r} v \cdot D_Y = u \cdot D_X.$$

因此， $L_X \subseteq X\backslash D_X$ 具有平凡的马斯洛夫同调类。

如果 $L_Y \subseteq (Y, D_Y)$ 是单调的，那么存在一个常数 λ 使得

$$\frac{\lambda}{2}\mu_{L_Y}(v) = \int_{\mathbb{D}} v^*\omega_Y \quad \text{for all } v : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Y, L_Y).$$

由此可得（利用命题 3.3），对于任意圆盘映射 $u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (X, L_X)$，

$$\int_{\mathbb{D}} u^*\omega_X = \frac{\lambda r}{2}\mu_{L_X}(u).$$

□

3.2. 超势。从现在起，我们假设拉格朗日子流形 $L_Y \subset Y \setminus D_Y$ 是 Maslov 正的。回顾一下，这种正性意味着。

$$\frac{1}{2}\mu_L(v) \geq \max\{1, v \cdot D_Y\} \tag{3.6}$$

对于所有 I_Y-全纯圆盘 $v : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (Y, L_Y)$。这确保了对于 I_Y 的充分小的扰动 $J \in \mathscr{J}_N(Y, \omega_Y)$，不存在马斯洛夫指标为 0 的非恒定 J-全纯圆盘。因此，可以定义这些数值不变量

$$m_{0,\beta}(L_Y) = \deg\left(\mathscr{M}^J_{0,1}(L_Y, \beta) \xrightarrow{ev} L_Y\right) \tag{3.7}$$

与之前一样，其中 $\mathscr{M}^J_{0,1}(L_Y, \beta)$ 是具有 1 个边界标记点、同调类为 $\beta \in H_2(Y, L_Y)$ 的（未参数化） J-全纯圆盘的模空间。关于该模空间的正则性与紧性，请参见引理 2.16 的证明。

注 3.7。注意，先验地说， 整数 $m_{0,\beta}(L_Y)$ 取决于 I_Y：如果扰动 $(J_t)_{0\leq t\leq 1}$ 较大，那么 J_1 可能允许存在马斯洛夫指标为 0 的伪全纯圆盘。我们研究的例子中不会出现这个问题：我们选择的 L_Y 将相对于形如 $D_Y \cup D$ 的反典范除子容许。

回顾一下，与 L_Y 相关的超势为

$$W_{L_Y} = \sum_{\mu_{L_Y}(\beta)=2} m_{0,\beta}(L_Y) q^{\partial\beta},$$

我们将其视为一个函数 $W_{L_Y} : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[H_1(L_Y, \mathbb{Z})]) \to \mathbb{C}$。当 L_Y 是环面时，W_{L_Y} 是劳朗多项式。我们的目标是将与 L_Y 及其在循环覆盖映射 $\phi : X \to Y$ 下的原像 L_X 相关联的超势联系起来。

马斯洛夫正性可通过循环覆盖继承。事实上，引理 3.5 中的黎曼-赫尔维茨公式可改写为

$$\frac{1}{2}\mu_{L_X}(u) - u \cdot D_X = \frac{1}{2}\mu_{L_Y}(v) - v \cdot D_Y. \tag{3.8}$$

因此，下面的结论可直接得到。

推论 3.8. $L_Y \subseteq Y \setminus D_Y$ 是 Maslov 正的，当且仅当 $L_X \subseteq X \setminus D_X$ 是 Maslov 正的。

证明。假设 $L_X \subseteq X\backslash D_X$ 是 Maslov-正的（另一个方向是直接的）。令 v 为一个 I_Y-全纯圆盘。那么，映射

$$(\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (Y, L_Y): \quad z \mapsto v(z^r)$$

有一个 I_X-全纯提升 $u\colon (\mathbb{D},\partial\mathbb{D}) \to (X, L_X)$。利用 (3.8)，

$$r\left(\frac{1}{2}\mu_{L_Y}(v) - v\cdot D_Y\right) = \frac{1}{2}\mu_{L_X}(u) - u\cdot D_X \geq 0.$$

若 $v\cdot D_Y = 0$，则 v 本身有一个提升 u，因此 $\mu_{L_Y}(v) = \mu_{L_X}(u) \geq 2$。 □

设 $\beta \in H_2(X, L_X)$ 是一个马斯洛夫指标为 2 的同调类，且模空间 $\mathscr{M}_{0,\ 1}^{I_X}(L_X,\beta)$ 非空。令

$$\alpha = \phi_*(\beta) \in H_2(Y, L_Y, \mathbb{Z}).$$

由不等式 (3.6)，$\beta\cdot D_X \in \{0,1\}$。

引理 3.9. 假设 $\beta\cdot D_X = 0$。那么，

$$m_{0,\beta}(L_X) = m_{0,\alpha}(L_Y).$$

证明。由于 $\mu_{L_Y}(\alpha) = 2$，存在一个定义在 Y 上的几乎复结构 J_Y，使得 $\mathscr{M}_{0\,1}^{J_Y}(L_Y,\alpha)$ 是弗雷德霍姆正则的，并且

$$J_Y = I_Y \quad \text{near } D_Y. \tag{3.9}$$

条件 (3.9) 保证 $J_X = \phi^{-1}J_Y$ 能够延拓通过分歧轨迹。由于 $\beta\cdot D_X = 0$，映射

$$\mathscr{M}_{0,1}^{J_X}(L_X,\beta) \to \mathscr{M}_{0,1}^{J_Y}(L_Y,\alpha): \quad u \mapsto \phi\circ u \tag{3.10}$$

是一个保定向的真局部微分同胚。因此，它是一个次数为 r 的覆盖映射。引理由下列交换图立即得出

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{0,1}^{J_X}(L_X,\beta) & \xrightarrow{ev} & L_X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathscr{M}_{0,1}^{J_Y}(L_Y,\alpha) & \xrightarrow{ev} & L_Y. \end{array}$$

□

若 $\beta\cdot D_X = 1$，其推前满足方程

$$\mu_{L_Y}(\alpha) = 2r \quad \text{and} \quad \alpha\cdot D_Y = r.$$

映射 (3.10) 的像落在 $\mathscr{M}_{0\,1}^{J_Y}(L_Y,\alpha)$ 的子空间中，该子空间由与除子 D_Y 相切且相切阶数为 r 的圆盘组成。

引理 3.10. 假设 $\beta\cdot D_X = 1$。那么，

$$m_{0,\beta}(L_X) = \tau_\alpha(L_Y).$$

证明。设 $(J_Y, J_{Y,\ z})$ 是 I_Y 的一个小扰动，使模空间 $\mathscr{T}_r(Y, L_Y, J_Y, J_{Y,\ z}, \alpha)$（记号见注2.4）为弗雷德霍姆正则，并令 $(J_X, J_{X,\ z}) = (\phi^{-1}J_Y, \phi^{-1}J_{Y,\ z})$。那么，模空间 $\mathscr{T}_0(X, L_X, J_X, J_{X,\ z}, \beta)$ 是弗雷德霍姆正则的（[EA21，命题 3.14]），且映射

$$\mathscr{T}_1(X, L_X, J_Y, J_{Y,z}, \beta) \to \mathscr{T}_r(Y, L_Y, J_X, J_{X,z}, \alpha): \quad u \mapsto \phi \circ u$$

是一个 r 重覆盖映射（[EA21，引理 3.11]）。由此可得

$$\tau_\alpha(L_Y) = \deg(\mathscr{T}_1(X, L_X, J_X, J_{X,z}, \beta) \xrightarrow{ev_\chi} L_X). \tag{3.11}$$

令 J 为 I_X 的一个小扰动，使得马斯洛夫指标为 2 的圆盘均为弗雷德霍姆正则。从 $J_{X,\ z}$ 到 J 的一条一般路径，在（3.11）中的伪循环与该伪循环之间建立了等价关系。

$$\mathscr{T}_1(X, L_X, J, J, \beta) \xrightarrow{ev_\chi} L_X.$$

由于 $\beta \cdot D_X = 1$，典范映射

$$\iota_\chi : \mathscr{T}_1(X, L_X, J, J, \beta) \to \mathscr{M}^J_{0,1}(L, \beta)$$

是一个微分同胚。因此，由于 $ev_\chi = ev \circ \iota_\chi$，引理得证。 □

受引理 3.9 和 3.10 的二分性启发，我们定义

$$W_L^{Z\setminus D} = \sum_{\mu(\beta)=2, \beta\cdot D=0} m_{0,\beta}(L) q^{\partial\beta} \quad \text{and} \quad W_L^D = W_L - W_L^{Z\setminus D}.$$

注意，映射 $\beta \mapsto \alpha$ 可延拓为代数同态

$$\phi_* : \mathbb{C}[H_1(L_X, \mathbb{Z})] \to \mathbb{C}[H_1(L_Y, \mathbb{Z})].$$

该代数同态描述了一个次数为 r 的无分支循环覆盖，

$$\phi^\vee : \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[H_1(L_Y, \mathbb{Z})]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[H_1(L_X, \mathbb{Z})]).$$

定理 3.11. 设 (Y, I_Y, ω_Y) 是一个 Fano K¨ahler 三元组，$\phi\colon X \to Y$一个次数为 r、沿光滑丰沛除子 $D_Y \subseteq Y$ 分支的循环覆盖映射。设 $L_Y \subseteq Y$ 是补集中的一个马斯洛夫正拉格朗日环面，满足 $W_{L_Y}^{D_Y} \neq 0$。则，原像 $L_X = \phi^{-1}(L_Y)$ 是一个连通环面。此外，上同调类 $[\phi^*\omega_Y] \in H^2(X, L_X)$ 支持 ω_X 上的一个 K¨ahler 形式 ω_X，使得 $L_X \subseteq (X, \omega_X)$ 是拉格朗日的。其相关的超势由以下公式给出

$$(\phi^\vee)^* W_{L_X} = W_{L_Y}^{Y\setminus D_Y} + (W_{L_Y}^{D_Y})^r - r!\langle \psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r. \tag{3.12}$$

证明。由于命题 3.4 以及 $W_{L_Y}^{D_Y} \neq 0$这一假设，原像 L_X 是连通的。K¨ahler形式 ω_X 在命题 3.3 中有所描述。最后，超势公式由引理3.9–3.10和定理 2.22推出。注意，要求 $r \leq j_Y$是自动满足的。事实上，若 C是一条陈数为 j_Y 的曲线，则

$$j_Y = K_Y^{-1} \cdot C \geq D_Y \cdot C \geq r,$$

因为 D_Y是丰沛的，并且可被 r整除。 □

注 3.12。记住将 $r!\langle\psi_{r-2}\mathrm{pt}\rangle_r$ 解释为如下有理曲线的计数是很有用的： $\mathbb{P}^1 \to Y$次数为 $r \le j_Y$且满足 $u(\infty) = p$以及 $u(\zeta^i) \in D_Y$的有理曲线 u。特别地，如果 $r < j_Y$，则该项不作贡献。

备注 3.13。定理 3.11 的类似结论也适用于更复杂的阿贝尔覆盖，这些覆盖沿着 Y 中的简单正规交叉除子分支，例如 N. Sheridan 研究的 a 重分支覆盖，参见[She15]中的定义 3.5.16。这类覆盖可以通过对反典范简单正规交叉除子的各分支依次取循环覆盖来构造。参见下文德尔佩佐曲面 $\mathrm{Bl}_5(\mathbb{P}^2)$ 的例子。

3.3. 弱朗兰兹-吉茨堡模型。在 [CCG+12b], 中，作者概述了一项受闭弦镜像对称启发、旨在寻找新的 Fano 四维簇的计划。其思路是建立一个数据库，收录已知的 Fano 四维簇、它们的量子周期（这项工作已在 [CGKS20]中完成）以及相应的弱 LG 模型；关于该计划最终应用于 Fano 三维簇时的成果形式，参见[CCGK16b] 。

定义 3.14. 设 X 是维数为 n 的 Fano 流形，且 f 是一个含 n 个变量的劳朗多项式。若 f 是X 的弱 LG 模型，则称之为。

$$c_0(f^k) = k!\langle\psi_{k-2}\mathrm{pt}\rangle_k \quad for\ all\ k \ge 1,$$

其中， $c_0(f^k)$ 是劳朗多项式 f^k 的常数项。

有了这样一个数据库，就可以将任何新构造的 Fano 流形与该数据库进行比较，并判断它是否确实是新的。其基本思想是，如果 X_1 和 X_2 是变形等价的 Fano 流形，那么它们的$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$量子周期相等 $G_{X_1}(t) = G_{X_2}(t)$。这一原则已在 [CKP15] 中成功应用，用于构造新的 Fano四维簇。值得注意的是，$\backsim G_X$ 似乎是 X的一个强不变量：在 $n \le 3$ 等我们已经拥有分类的维数中，它是 Fano 流形变形类的完备不变量。

连接这一研究计划与我们工作的桥梁，是 Tonkonog 的量子周期定理。

定理 3.15。（参见 [Ton18]）设 Y 为 Fano 流形，且 $L \subseteq Y$为单调拉格朗日环面。那么，超势 W_L 是 Y的弱 LG 模型。

上述 Fano 流形 Y 配备了反典范 K¨ahler 形式 ω_Y。回想一下，任何这样的 K¨ahler 形式都可由线丛 K_Y^{-1} 上的某个（正）度量 h 的曲率给出，

$$\omega_Y = -\frac{1}{4\pi} dd^c \log|s|_h,$$

其中 s 是 K_Y^{-1} 的全纯截面。特别地，在反典范除子 $D = s^{-1}(0)$的补集中，K¨ahler形式 ω_Y 具有一个首选原始形式

$$\theta = -\frac{1}{4\pi} d^c \log|s|_h.$$

除非另有说明，这始终是赋予 $Y\backslash D$的精确结构。

推论 3.16. 设 Y 是指标为 r的 Fano 流形， $D \subseteq Y$ 是光滑反典范除子，且 $Y\backslash D$ 包含一个分次精确拉格朗日环面。设 X 是 Y 沿 D分支的 r重循环覆盖。若 f_Y是 Y的弱 LG 模型，则 $f_Y^r - c_0(f_Y^r)$是X的弱 LG 模型。

证明. 只需注意，精确分次拉格朗日环面 $L \subseteq Y\backslash D$ 既是容许的，因此定理 3.11 适用；又是单调的，因此定理 3.15 适用。为说明 L 是单调的，需要用到积分公式

$$\int_{\mathbb{D}} u^*\omega - \int_{\partial\mathbb{D}} u^*\theta = u \cdot D,$$

该公式对任意满足 $u(\partial\mathbb{D}) \subseteq Y\backslash D$的圆盘映射 $u : \mathbb{D} \to Y$均成立。 □

我们注意到， $f_X^{\mathrm{nv}} := f_Y^r - c_0(f_Y^r)$实际上并不是 X的正确镜像。假设 $f_Y : (\mathbb{C}^*)^n_Y \to \mathbb{C}$ 是一个真正的超势（即与分次精确拉格朗日环面 L_Y相关联），其中$(\mathbb{C}^*)^n_Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[H_1(L_Y,\mathbb{Z})])$只是$(\mathbb{C}^*)^n$的一个副本。那么，定理 3.11 表明，与 X 相关联的超势f_X 作用于$(\mathbb{C}^*)^n_Y$的一个商上。这意味着 $\mathbb{Z}_r$ 在$(\mathbb{C}^*)^n_Y$上有一个固定 f_X^{nv}的自由作用。正确的镜像是商

$$f_X : (\mathbb{C}^*)^n_Y/\mathbb{Z}_r \xrightarrow{[f_X^{\mathrm{nv}}]} \mathbb{C}. \tag{3.13}$$

注记 3.17。推论 3.16 纯粹是一个代数几何结果，但我们的方法要求存在一个分次精确拉格朗日环面。进一步注意，只要 m 能整除指标 r，该结论同样适用于沿 D 分支的 Y m 重循环覆盖。

猜想 3.18。推论 3.16 成立，无需假设 $Y\backslash D$ 包含一个分次精确拉格朗日环面。

3.4. $\mathbb{P}^{n+1}$中的 Fano 超曲面。现在，我们将介绍超势公式 (3.12) 在次数为 $d < n+1$ 的 Fano 超曲面 $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ 的 Fukaya范畴中的一个应用。指标为 1 的 Fano 情形对应于 $d = n+1$，这是 [EA21] 研究的主题。我们在此使用的方法同样适用于指标为 1 的 Fano 情形，但为使论述更加清晰，我们不予讨论。对于射影空间 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中的齐次坐标，我们采用如下记号： $[t : x_0 : \cdots : x_n]$ 。Fano 超曲面 X_d 可以由如下形式的方程定义：

$$X_d = V(t^d - x_0 \dots x_{d-1} + \epsilon f(x_0,\dots,x_n)), \quad |\epsilon| \text{ small, } f \text{ generic.}$$

它配有一个 d 对 1 的循环覆盖映射

$$\phi : X_d \to \mathbb{P}^n, \qquad [t : x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [x_0 : \cdots : x_n].$$

它沿着光滑超曲面分支

$$H_\epsilon = V(x_0 \dots x_{d-1} - \epsilon f(x_0,\dots,x_n)) \subseteq \mathbb{P}^n.$$

设 ω_{FS} 为 $\mathbb{P}^n$上的 Fubini-Study K¨ahler 形式，并将其缩放，使得

$$c_1(\mathbb{P}^n) = (n+1)[\omega_{\mathrm{FS}}].$$

辛流形 $(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ 具有由 $(S^1)^n$ 给出的哈密顿作用，该作用在若干个 $n+1$ 超平面的并集的补集中是自由的，

$$P = \bigcup_{i=0}^{n} \{x_i = 0\}.$$

这个哈密顿作用的矩映射是

$$M : \mathbb{P}^n \to \Delta \tag{3.14}$$

$$[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{|x_0|^2}{|x|^2}, \ldots, \frac{|x_n|^2}{|x|^2} \right),$$

其中 $|x|^2 = |x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2$ 和 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 是 n 维单纯形，

$$\Delta = \left\{ (r_0, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} r_i = 1 \right\}.$$

单纯形内部的矩映射的纤维是拉格朗日环面，由 $\mathbf{r} \in \mathrm{int}(\Delta)$ 参数化：

$$L_{\mathbf{r}} = \{ [x_0 : \cdots : x_n] \mid r_0^{-1}|x_0| = \cdots = r_n^{-1}|x_n| \}.$$

同调群 $H_2(\mathbb{P}^n, L_{\mathbf{r}}, \mathbb{Z})$ 有一个方便的生成集。它由全纯圆盘 $v_0, \ldots, v_n$ 给出，其中

$$v_k(\mathbf{r}) : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (\mathbb{P}^n, L_{\mathbf{r}}), \quad z \mapsto [r_0 : \cdots : r_k z : \cdots : r_n]. \tag{3.15}$$

这些类加起来构成生成 $H_2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ 的球类。此外，对于每个 $k = 0, \ldots, n$,

$$\mu_{L_{\mathbf{r}}}(v_k) = 2 \quad \text{and} \quad \mathrm{Area}_{\omega_{\mathrm{FS}}}(v_k) = r_k.$$

与 $\mathbf{r} = (1/(n+1) \ldots, 1/(n+1))$ 对应的环面 L_{cl} 通常称为克利福德环面。在这些环面中，它是唯一一个相对于 Fubini-Study K¨ahler 形式为单调的环面。现在考虑与之对应的拉格朗日环面 $L_{\mathbf{r}} \subseteq \mathbb{P}^n$ 。

$$r_0 = \cdots = r_{d-1} = \frac{1}{d(n+2-d)} \quad \text{and} \quad r_d = \cdots = r_n = \frac{1}{n+2-d}.$$

当 ϵ足够小时， $L_{\mathbf{r}}$ 与 H_ϵ 不相交，因此其原像 $L \subseteq X_d$ 是一个连通的拉格朗日环面，参见命题 3.4。令 ω为 X_d 上的K¨ahler形式，该形式是在命题 3.3 中构造的。

引理 3.19。拉格朗日环面 $L \subseteq (X_d, \omega)$ 是单调的。

证明。考虑以下线性映射。

$$\ell : H_2(\mathbb{P}^n, L_{\mathbf{r}}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}, \quad v \mapsto \frac{1}{2}\mu_{L_{\mathbf{r}}}(v) - \frac{d-1}{d} v.H_\epsilon.$$

由于 H_ϵ 是 $\{x_0\cdots x_{d-1}=0\}$的一个小变形，我们有 $\ell(v_k)=1/d$处于范围 $0\le k\le d-1$ 内，且 $\ell(v_k)=1$ 处于范围 $d\le k\le n$内。因此，对于所有 $v\in H_2(\mathbb{P}^n,L_{\mathbf{r}})$，

$$\mathrm{Area}_{\omega_{\mathrm{FS}}}(v)=\frac{\ell(v)}{n+2-d}.$$

设 $u\in H_2(X_d,L,\mathbb{Z})$ 是一个圆盘同调类，$v=\phi_*(u)$ 是其推前。由黎曼-赫尔维茨公式 (3.5)，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu_L(u)=\ell(v)&=(n+2-d)\mathrm{Area}_{\omega_{\mathrm{FS}}}(v)\\&=(n+2-d)\mathrm{Area}_{\omega}(u).\end{aligned}$$

由此可得，$L\subseteq(X_d,\omega)$ 是单调的。 □

根据定理 3.11，与单调拉格朗日环面 $L\subseteq X_d$ 相关的超势为

$$W_L=(z_0+\cdots+z_{d-1})^d+z_d+\cdots+z_n. \tag{3.16}$$

应将其视为簇上的一个函数

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[H_1(L,\mathbb{Z})])=\{(z_0,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\mid z_0\cdots z_n=1\}/\mathbb{Z}_d, \tag{3.17}$$

其中 $\mathbb{Z}_d$ 的作用是乘以 d 次单位根

$$\zeta\cdot(z_0,\dots,z_n)=(\zeta z_0,\dots,\zeta z_{d-1},z_d,\cdots,z_n).$$

由于此作用是无不动点的，我们实际上可以在取商之前计算 W_L 的临界点和临界值。

注 3.20。来自 (3.16) 的超势 W_L 与可追溯至 Batyrev、Hori-Vafa 和 Givental 的闭弦镜像对称预言一致。事实上，镜像空间 (3.17) 具有由下式给出的整体坐标：

$$\begin{aligned}y_k=z_k/z_0 \quad &\text{if } 1\le k\le d-1,\\ x_{k-d}=z_k \quad &\text{if } d\le k\le n.\end{aligned}$$

在这些坐标下（与 [Prz13，第 3.2] 节比较），

$$W_L=x_0+\cdots+x_{n-d}+\frac{(1+y_1+\cdots+y_{d-1})^d}{x_0\cdots x_{n-d}y_1\cdots y_{d-1}},\quad \text{for } d\le n.$$

在指标为 1 的 Fano 情形下，对应于 $d=n+1$，此公式必须加上 $-(n+1)!$，这正是超势公式 (3.12) 中出现的正则化引力后裔。

引理 3.21. 超势的临界值为 $(n+2-d)\lambda$，其中 λ 遍历方程 $\lambda^{n+2-d}=d^d$ 的解。每个临界值都是非退化的。

证明. 设 $f = z_0 \cdots z_n - 1$。点 $\mathbf{z} = (z_0, \ldots, z_n)$ 对于 W_L 是临界点，当且仅当

$$\nabla_{\mathbf{z}} W_L = \lambda \nabla_{\mathbf{z}} f \quad \text{for some } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.18}$$

令 $z = (z_0 + \cdots + z_{d-1})/d$。那么，方程 (3.18) 意味着

$$\begin{aligned} d^d z^{d-1} &= \lambda / z_k \quad \text{if } 0 \le k \le d-1, \\ z_k &= \lambda \qquad\quad \text{if } d \le k \le n. \end{aligned}$$

特别地，$z_0 = z_1 = \cdots = z_{d-1} = z$，以及 $\lambda = d^d z^d$。由于 $z_0 \cdots z_n = 1$，我们可以看出 $z^d \times \lambda^{n-d+1} = 1$，因此 $\lambda^{n-d+2} = d^d$。相应的临界值为 $d^d z^d + (n-d+1)\lambda = (n+2-d)\lambda$。

设 $\mathbf{z}$ 是对应于一对 (λ, z) 的临界点，使得

$$\lambda^{n-d+2} = d^d \quad \text{and} \quad z^d = \lambda / d^d.$$

为了证明它是非退化的，我们通过变换改用更方便的坐标。

$$\begin{aligned} z_k &\mapsto z \cdot z_k \quad \text{if } 0 \le k \le d-1, \\ z_k &\mapsto \lambda \cdot z_k \quad \text{if } d \le k \le n. \end{aligned}$$

临界点于是变为 $\mathbf{z} = (1, \ldots, 1)$，并且

$$\frac{1}{\lambda} W = \frac{1}{d^d} (z_0 + \cdots + z_{d-1})^d + z_d + \cdots + z_{n-1} + \frac{1}{z_0 \cdots z_{n-1}}.$$

Hessian矩阵被计算为分块矩阵

$$\mathrm{Hess}_{\mathbf{z}}(W/\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} c\mathbf{1}_d + I & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1}_{n-d} + I \end{array} \right),$$

其中，$c = 2 - 1/d$ 和 $\mathbf{1}_d$ 是系数均为 1 的 $d \times d$ 矩阵。该矩阵的行列式为 $(-1)^n d(n-d+2)$，因此它可逆。□

注 3.22. 上述临界值也是该映射的小特征值。

$$QH(X_d) \to QH(X_d): \quad \alpha \mapsto c_1(X_d) \star \alpha. \tag{3.19}$$

还有一个特征值，即大特征值，其值为 0。当 $d < n+1$ 时，拉格朗日环面 $L \subseteq X_d$ 无法检测到它。

推论 3.23. 对于 (3.19) 的每个小特征值 λ，在 L 上存在一个 $\mathbb{C}^*$-局部系统 ξ_λ，使得 (L, ξ_λ) 分裂生成 Fukaya 范畴的分量 $\mathrm{Fuk}(X_d)_\lambda$。

证明。见附录中的命题4.2。 □

3.5. 次数为 4 的德尔佩佐曲面。现在我们研究一个非循环四重覆盖的例子。考虑德尔佩佐曲面 $X = \mathrm{Bl}_5(\mathbb{P}^2)$。它存在一个到 $\mathbb{P}^2$ 的四重覆盖映射；后者的伪指标为 $j_{\mathbb{P}^2} = 3$。这种映射可以看作是二重循环覆盖的复合。

$$\phi : \mathrm{Bl}_5(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\phi_1} Q_2 \xrightarrow{\phi_0} \mathbb{P}^2,$$

其中 $\phi_0 : Q_2 \to \mathbb{P}^2$ 是沿圆锥曲线 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 分支的二维二次曲面。二重覆盖 $\mathrm{Bl}_5(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\phi_1} Q_2$ 转而沿椭圆曲线 $E \subseteq Q_2$ 分支，具体解释见下文。

令 ω_{FS} 为 $\mathbb{P}^2$ 上的 Fubini-Study度量，将其缩放为

$$c_1(\mathbb{P}^2) = 3[\omega_{\mathrm{FS}}] \quad \text{in } H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{P}^2, \mathbb{R}).$$

于是，

$$L = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid |x_0| = 2|x_1| = 2|x_2|\} \subseteq (\mathbb{P}^2, \omega_{\mathrm{FS}}) \tag{3.20}$$

是一个 Maslov 正拉格朗日环面。在自同构意义下，它恰好界定三个圆盘 $u_k : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (\mathbb{P}^2, L)$，它们均通过点 $[2$，具有马斯洛夫指标 $2 : 1 : 1],$，且每个圆盘都是弗雷德霍姆正则的：

$$u_0(z) = [2z : 1 : 1]; \quad u_1(z) = [2 : z : 1]; \quad u_2(z) = [2 : 1 : z] \tag{3.21}$$

$$\mathrm{Area}_{\omega_{\mathrm{FS}}}(u_0) = 1/2; \quad \mathrm{Area}_{\omega_{\mathrm{FS}}}(u_1) = 1/4; \quad \mathrm{Area}_{\omega_{\mathrm{FS}}}(u_2) = 1/4.$$

这组圆盘生成 $H_2(\mathbb{P}^2, L, \mathbb{Z})$。超势为

$$W_L = z_0 + z_1 + z_2, \quad \text{where } z_k = z_{\partial u_k} \in [H_1(L, \mathbb{Z})].$$

注意，$z_0 z_1 z_2 = 1$。我们选取一个形式为 $C \subseteq \mathbb{P}^2$ 的圆锥曲线。

$$C_\epsilon = \{x_1 x_2 - \epsilon x_0^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2, \quad |\epsilon| < 1.$$

沿 C_ϵ 分支的二次曲面由以下方程给出

$$Q_2 = \{t^2 = x_1 x_2 - \epsilon x_0^2\} \subseteq \mathbb{P}^3.$$

根据定理 3.11，存在一个 K¨ahler 形式 $\widehat{\omega}$，定义在 Q_2 上，使得原像 $\widehat{L} := \phi_0^{-1}(L) \subseteq (Q_2, \widehat{\omega})$ 是一个拉格朗日环面，并且

$$(\phi_0)_* W_{\widehat{L}} = z_0 + (z_1 + z_2)^2. \tag{3.22}$$

^在（Q_2, L）中提升为马斯洛夫指标为 2 的全纯圆盘的同调类是

$$[u_0],\ 2[u_1],\ 2[u_2],\ \text{and } [u_1 + u_2] \quad \text{in } H_2(\mathbb{P}^2, L). \tag{3.23}$$

^它们的提升实际上生成了 $H_2(Q_2, L, \mathbb{Q})$。利用^(3.21)中的面积计算，可以验证 $L \subseteq (Q_2, \widehat{\omega})$ 是单调的。

在嵌入 $Q_2 \subseteq \mathbb{P}^3$中，我们有 $c_1(Q_2) = \mathscr{O}_{Q_2}(2)$。因此，一个光滑的反典范除子是一条椭圆曲线 E，它由第二个二次曲面 Q_2' 与 Q_2的交集给出。考虑以下选择

$$Q_2' = \{tx_0 = \epsilon f(x_0, x_1, x_2)\}, \quad |\epsilon| \text{ small},\ f \text{ generic}.$$

然后，令 $E = Q_2 \cap Q_2'$，我们可以看到，

$$\phi_0(E) = \{x_1 x_2 x_0^2 - \epsilon x_0^4 - \epsilon^2 f(x_0, x_1, x_2)^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2,$$

它是直线并集 $\Delta_0 = \{x_1x_2x_0^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ 的一个小变形。这个奇异四次曲线与环面 $L \subseteq \mathbb{P}^2$ 不相交，并且它与每一个提升的同调类（见 (3.23)）的交数均为 2。因此$\widehat{\ }$，当 $|\epsilon|$ 足够小时，单调拉格朗日环面 L 与椭圆曲线 E 不相交，并且其在补集中的马斯洛夫同调类为零。

沿 E 分支的 Q_2 二重覆盖仍然是一个 Fano 曲面 S。它的欧拉示性数为

$$\chi(S) = 2\chi(Q_2\backslash E) + \chi(E) = 2\chi(Q_2) - \chi(E) = 8.$$

因此 $S \cong$Bl$_5(\mathbb{P}^2)$。由定理 3.11 和推论 3.6，存在 S 上的反典范 K¨ahler 形式 ω_S，以及单调拉格朗日环面 $L^+ \subset(S,\omega_S)$，其超势由下式给出。

$$W_{L^+} = \phi_* W_{L^+} = (z_0 + (z_1 + z_2)^2)^2 - 4. \tag{3.24}$$

为了将我们的公式与文献（参见 [GU10] 和 [PT20，表 1]）进行比较，将超势 (3.22) 和 (3.24) 写成劳朗多项式是很有启发性的。该包含映射

$$\mathbb{C}[H_1(\widehat{L},\mathbb{Z})] \hookrightarrow \mathbb{C}[H_1(L,\mathbb{Z})]$$

由单项式 $x = z_0$ 和 $y = z_1z_2^{-1}$ 生成。在这些坐标中，

$$W_{\widehat{L}} = x + \frac{1}{xy}(1+y)^2.$$

二次曲面 Q_2 同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，其环面超势为（见 [GU10]）

$$W_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \tag{3.25}$$

我们的公式通过以下关于 $(\mathbb{C}^*)^2$, 的双有理变换与上面的公式相关

$$(x,y) \mapsto (x/(1+y), xy/(1+y)).$$

这种双有理变换称为突变，相关文献见 [KP14] 和 [ACG$^+$12]。类似地，包含

$$\mathbb{C}[H_1(L^+,\mathbb{Z})] \hookrightarrow \mathbb{C}[H_1(L,\mathbb{Z})]$$

由 $x = z_0^2$ 和 $y = z_0z_1^2$ 生成。在这些坐标中，

$$W_{L^+} = \frac{\left(x + \frac{1}{y}(1+y)^2\right)^2}{x}.$$

[GU10] 中计算得到的德尔佩佐曲面 S = Bl$_5(\mathbb{P}^2)$ 的超势为

$$W_S = \frac{(1+x)^2(1+y)^2}{xy} - 4. \tag{3.26}$$

再次，这与我们通过突变对 W_{L^+} 的计算有关

$$(x,y) \mapsto (xy/(1+y)^2, y).$$

注 3.24。构造单调拉格朗日环面 $L^- \subseteq \mathrm{Bl}_5(\mathbb{P}^2)$ 有一种更直接的方法。事实上，托里克簇 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 包含一个单调拉格朗日环面 $\overline{L}$，它是其矩映射的中心纤维。$\overline{L}$ 的超势为 (3.25)。我们可以通过沿托里克边界的平滑化分支，构造 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的二重覆盖。这个二重覆盖仍然是 $\mathrm{Bl}_5(\mathbb{P}^2)$。$\overline{L}$ 的原像 L^- 是一个单调拉格朗日环面，其超势为 (3.26)。

3.6. 第二 Hirzebruch 曲面。现在我们给出一个非 Fano 流形的例子，其中定理 2.22 仍然适用。第二 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$ 是一个托里克曲面，其托里克超势为

$$W = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 y}. \tag{3.27}$$

曲面 $\mathbb{F}_2$ 也可以通过对 $\mathbb{P}^2$ 沿除子 $C = \{x_0 x_1 = 0\}$ 取二重覆盖，并进行爆破以消解由此产生的A_1 奇点而得到。令 $\phi\colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{P}^2$ 为所得映射。注意，$\phi^{-1}([0:0:1]) = E$ 是 $\mathbb{F}_2$中的 -2 曲线。令 $\Delta = \{x_0 x_1 x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ 为托里克边界。约化原像 $D = \phi^{-1}(\Delta)^{\mathrm{red}}$ 是一个具有 4 个分支的 snc 反典范除子，其中一个分支是 -2曲线 E。克利福德环面 $L_{\mathrm{cl}} \subseteq \mathbb{P}^2 \backslash \Delta$ 提升为可容许环面 $L = \phi^{-1}(L_{\mathrm{cl}}) \subseteq \mathbb{F}_2 \backslash D$。尽管 $\mathbb{F}_2$ 不是 Fano（$c_1(E) = 0$），仍然可以像之前一样定义超势W_L （即定义 2.2），方法是对远离 D处的复结构作变形。唯一的区别是，我们需要明确排除从马斯洛夫指标为 2 的圆盘模空间边界出现的陈数为零的球泡。

引理 3.25. 假设 $\alpha \in H_2(\mathbb{F}_2, L)$ 是一个马斯洛夫指标为 2 的类，它分解为 $\alpha = A + \tilde{\alpha}$，其中 A 是某个球类，使得 $c_1(A) = 0$。设 J 是一个保持 D 的几乎复结构。若 A 支持一个 J-全纯球面，且 α 和 $\tilde{\alpha}$ 支持 J-全纯圆盘，则 $A = 0$。

证明。令 $(D_i)_{i=1}^4$ 为 snc 除子 $D \subseteq \mathbb{F}_2$ 的分支。由于 L 是容许的，我们有 $\alpha \cdot D = \tilde{\alpha} \cdot D = 1$。因此，存在互不相同的 i、$j \in \{1,2,3,4\}$，使得 $\alpha \cdot D_i = \tilde{\alpha} \cdot D_i = 0$ 和 $\alpha \cdot D_j = \tilde{\alpha} \cdot D_j = 0$。由相交正性可知，支撑于 A 中的球泡位于交集 $D_i \cap D_j$ 处，因此它必为常值。□

回顾一下，与 $L_{\mathrm{cl}} \subseteq \mathbb{P}^2$ 相关联的超势为

$$W_{L_{\mathrm{cl}}} = x + y + \frac{1}{xy},$$

并且 $W^C_{L_{\mathrm{cl}}} = x + y$。利用定理 3.11，我们推得

$$W_L = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{xy} \quad \text{on } (\mathbb{C}^*)^2/\mathbb{Z}_2.$$

利用商上的坐标 $u=(xy)^{-1}$ 和 $v=x^2$，可见W_L 恰好是 $\mathbb{F}_2$ 的环面超势 (3.27)。

我们提醒读者，上文的讨论仅考虑了光滑圆盘对超势的贡献。$\mathbb{F}_2$ 的完整镜像还包含一个额外项，该项来自结点圆盘的贡献，而我们完全忽略了这些贡献。关于这些贡献及其与镜像对称的相关性，将在 [Aur08, §32]中进一步讨论。

4. Appendix

本附录旨在汇集文献中的结果，为证明命题4.2中陈述的分裂生成结果做准备。

4.1. 记号。设 (X,ω) 是一个闭辛流形，使得

$$[\omega]=c_1(X).$$

定义 4.1. 拉格朗日支 $\mathbf{L}=(L,P,\xi)$ 是一个闭的、定向的单调拉格朗日子流形 $L\subseteq X$，并配备自旋结构 P 和一个 $\mathbb{C}^*$-局部系统 ξ。

我们已经遇到过一个关于拉格朗日支的不变量，

$$m_0(\mathbf{L})=\sum_{\mu_L(\beta)=2} m_{0,\beta}(L,P)\mathrm{hol}_\xi(\partial\beta).$$

在记号中，我们通常省略自旋结构 P。给定 $\lambda\in\mathbb{C}$，满足方程 $m_0(\mathbf{L})=\lambda$ 的拉格朗日支构成 Fukaya 的 A_∞-范畴 $\mathrm{Fuk}(X)_\lambda$的 λ-分量的对象；通常将其限制为有限或可数个对象 $(\mathbf{L}_i)$。对于每一对 (i,j)，我们选取一个哈密顿量 $H^{ij}\colon X\to\mathbb{R}$ 和一个随时间变化的几乎复结构 J_t^{ij}。对 $(H,J_t)=(H^{ij},J_t^{ij})$称为 Floer 数据。对于这对 (L_i,L_j)，Floer 轨迹是一个映射 $u\colon \mathbb{R}\times[0,1]\to X$，满足 $u(-,0)\in L_i$，$u(-,1)\in L_j$，

$$\partial_s u+J_t(\partial_t u-X_H(u))=0,\ \text{and}\ \int_Z|du|^2<+\infty. \tag{4.1}$$

我们遵循 [Sei08], 中的约定，其中哈密顿向量场 X_H满足方程 $\iota_{X_H}\omega=-dH$。构造 Fukaya 的A_∞-范畴的第一步，是为每一对 (i,j) 选取扰动数据 (H^{ij},J_t^{ij})，使得 $\varphi_1^{H^{ij}}(L_i)\cap L_j$ 横截，且方程 (4.1) 的解是弗雷德霍姆正则。

给定两个对象 $\mathbf{L}_0,\mathbf{L}_1\in\mathrm{Fuk}(X)_\lambda$，同态空间 $(CF^*(\mathbf{L}_0,\mathbf{L}_1),\mu^1)$ 是一个取值于复数域的 $\mathbb{Z}_2$-分次链复形。令 $\mathscr{C}(H)$ 表示 $H=H^{01}$ 的哈密顿弦集合。也就是说，路径 $\gamma\colon[0,1]\to X$ 满足 $\gamma(0)\in L_0$, $\gamma(1)\in L_1$，并且

$$\partial_t\gamma(t)=X_H(\gamma(t)).$$

Floer复形是向量空间

$$CF^*(\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1) = \bigoplus_{y \in \mathscr{C}(H)} \mathbb{C}\langle y \rangle,$$

其中微分由以下公式给出。

$$\mu^1(y_1) = \sum_{\mathrm{ind}(u)=1} \mathrm{sgn}(u)\mathrm{hol}(\partial u) y_0.$$

上述求和遍历未参数化Floer轨迹 (4.1) 空间 $\mathcal{M}_Z(y_0, y_1)$ 中的孤立点，使得

$$u(-\infty, -) = y_0 \quad \text{and} \quad u(+\infty, -) = y_1.$$

整数 $\mathrm{sgn}(u) \in \{-1, 1\}$ 是利用拉格朗日支上的自旋结构计算得到的符号，而 $\mathrm{hol}(\partial u)$ 是利用其相关局部系统计算得到的全纯因子。高阶运算 $(\mu^d)_{d \geq 2}$ 的构造方式类似，完整构造请参见 [Sei08、RS17、She16] 。给定 $\mathbf{L} \in \mathrm{Fuk}(X)_\lambda$，我们将 $HF^*(\mathbf{L})$ 定义为对偶对 $(\mathbf{L}, \mathbf{L})$ 的 μ^1 的上同调。这是一个带有单位元的 $\mathbb{Z}_2$分次结合代数，其系数域为 $\mathbb{C}$ 。

4.2. 生成。设 L 是一个配备了自旋结构的定向单调拉格朗日环面。元素 $b \in H^1(L, \mathbb{C})$ 确定一个局部系统。

$$\xi_b : \pi_1(L) \to \mathbb{C}^*, \quad [\gamma] \mapsto \exp(\gamma \cdot b).$$

它还确定了一个求值映射。

$$ev_b : \mathbb{C}[H_1(L, \mathbb{Z})] \to \mathbb{C}, \quad z_\beta \mapsto \langle \partial\beta, b \rangle.$$

其核是一个极大理想 $\mathfrak{m}_b \trianglelefteq \mathbb{C}[H_1(L, \mathbb{Z})]$, , 事实上,

$$m_0(L, \xi_b) = W(\mathbf{m}_b).$$

所有 $\mathbb{C}[H_1(L, \mathbb{Z})]$ 的极大理想均以这种方式产生。本附录的其余部分将致力于证明以下结果。

命题4.2. 如果 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 W 的临界值： $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$，那么它是量子乘法映射的特征值

$$QH(X) \to QH(X) : \quad A \mapsto c_1(X) \star A.$$

进一步假设广义特征空间 $QH(X)_\lambda$ 是 1 维的。设 $b \in H^1(L, \mathbb{C})$ 是一个元素，使得 $\mathfrak{m}_b \in W^{-1}(\lambda)$ 是一个临界点。那么，对象 $\mathbf{L}_b = (L, \xi_b)$ 分裂生成单调 Fukaya 范畴中 $\mathrm{Fuk}(X)_\lambda$ 这一分量。

根据 [RS17 中的生成结果，定理 12.19], , 只需证明 $HF(\mathbf{L}_b) \neq 0$。事实上，我们将证明存在一个向量空间同构。

$$HF(\mathbf{L}_b) \cong H^*(L, \mathbb{C}).$$

在 Fukaya-Oh-Ohta-Ono 的工作 [FOOO10a], 中，作者在奇异链的向量空间 $C_*(L, \mathbb{C})$ 上构造了一个 A_∞-代数（$\mathfrak{m}_k$）$_{k \geq 1}$ 的结构

链的单调性假设确保我们可以在 $\mathbb{C}$ 上进行研究，参见 [FOOO10a，定理 3.1.5]。

给定两个拉格朗日支 $\mathbf{L}_0$ 和 $\mathbf{L_1}$ ，其底层拉格朗日子流形彼此横截，作者还将上文概述的针对 $CF^*(\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1)$ 的构造推广为一个 A_∞-双模 $C(\mathbf{L_0}, \mathbf{L_1})$，其运算为 $\mathfrak{n}_{k_0,\ k_1}$，定义在 A_∞-代数 $(C_*(L_0, \mathbb{C})\ \mathfrak{m}_k^{\mathbf{L}_0})$ 和 $(C_*(L_1, \mathbb{C})\ \mathfrak{m}_k^{\mathbf{L}_1})$ 上，参见 [FOOO10a, 定理 3.7.21]。我们强调，当 L_0 和 L_1 横截时，复形之间有如下恒等关系

$$(C(\mathbf{L_0}, \mathbf{L_1}), \mathfrak{n}_{0,0}) = (CF^*(\mathbf{L_0}, \mathbf{L_1}), \mu^1), \tag{4.2}$$

前提是使用相同的几乎复结构 (J_l) 以及平凡的 Floer 数据 $H = 0$：这足以实现 (4.1) 的横截性。

更一般地， A_∞-双模 $(C(\mathbf{L_0},\mathbf{L_1})\mathfrak{n}_{k_0,\ k_1})$ 的构造以 L_0 和 L_1 相交干净为前提，参见 [FOOO10a，定义 3.7.48]。在 $\mathbf{L_0}$ =$\mathbf{L_1}$ =L 的情形下（这是一个干净交），可以作出适当选择（参见 [FOOO10a，命题 3.7.73]），使得

$$\mathfrak{n}_{k_1,k_0} = \mathfrak{m}^{\mathbf{L}}_{k_1+1+k_0}. \tag{4.3}$$

最后， [FOOO10a，定理 5.3.14] 证明，若 H 是一个哈密顿量，且 $L_0 \cap L_1$ 与 $\varphi_1^H(L_0) \cap L_1$ 均为干净相交，则存在一个 A_∞-双模的同伦等价

$$\mathfrak{h} : (C(\mathbf{L_0}, \mathbf{L_1}), \mathfrak{n}_{k_1,k_2}) \to (C(\varphi_1^H(\mathbf{L_0}), \mathbf{L_1}), \mathfrak{n}'_{k_1,k_2}). \tag{4.4}$$

以下结论可由 (4.2)、(4.3) 和 (4.4) 直接推出。

引理 4.3。设 L 是一个拉格朗日 brane。那么，作为 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，

$$H((C_*(L, \mathbb{C}), \mathfrak{m}_1^{\mathbf{L}})) \cong HF^*(\mathbf{L}).$$

A_∞-代数 $(C_*(L, \mathbb{C})\ \mathfrak{m}_k^{\mathbf{L}})$ 更易于计算，因为它满足除子公理。相比之下，$HF^*(\mathbf{L})$ 可定义在 $\mathbb{Z}$ 上，因此不满足除子公理。

引理 4.4。（[Fuk10，引理 13.1]） A_∞-代数 $(C_*(L, \mathbb{C})\ \mathfrak{m}_k^{\mathbf{L}})$ 有一个典范模型 $(H^*(L, \mathbb{C})\ \mathfrak{m}_k)$。每一项 $\mathfrak{m}_k$ 都有一个分解

$$\mathfrak{m}_k = \sum_{\beta \in H_2(X,L)} \mathfrak{m}_{k,\beta}^L \mathrm{hol}_\xi(\partial\beta).$$

此外，对于所有的 $s \geq 0$、 $k \geq 0$，以及 b、x_1，.....，$x_k \in H^1$（L、$\mathbb{C}$），

$$\sum_{s_0+\cdots+s_k=s} \mathfrak{m}_{k+s,\beta}^L(b^{\otimes s_0}, x_1, b^{\otimes s_1}, \ldots, x_k, b^{\otimes s_k}) = \frac{(\partial\beta \cap b)^s}{s!} \mathfrak{m}_{k,\beta}^L(x_1, \ldots, x_k).$$

我们注意到，在前一个引理中，运算 $\mathfrak{m}_{k,\ \beta}^L$ 不依赖于相关的局部系统。

命题4.2的证明。对于每个 $b \in H^1(L, \mathbb{C})$，我们将与拉格朗日边界条件（L, P, ξ_b）相关联的引理4.4中的 A_∞-运算记为 $\mathfrak{m}_k^b$，

并考虑其 q-变形

$$\widehat{\mathfrak{m}}_k^b = \sum_{\beta \in H_2(X,L)} q^{\omega(\beta)} \mathfrak{m}_{k,\beta}^b.$$

这些运算在 $H^*(L, \mathbb{C}[[q]])$ 上定义了一个 A_∞-结构，其中 $\mathbb{C}[[q]]$ 是 q 上的形式幂级数环。商运算

$$(H^*(L, \mathbb{C}[[q]]) \otimes \mathbb{C}[[q]]/(q), \widehat{\mathfrak{m}}_1^b, \widehat{\mathfrak{m}}_2^b)$$

通过令 $q = 0$ 得到，它们恢复了 L 的奇异上同调及其杯积（差一个符号）。由于 L 是一个环面，这就是 $H^1(L, \mathbb{C})$ 上的外代数。由于 (q) 是 $\mathbb{C}[[q]]$ 的唯一极大理想，我们由 Nakayama 引理得到，迭代乘法映射

$$\widehat{\mathfrak{m}}_2^b : \bigoplus_{l \geq 2} H^1(L, \mathbb{C}[[q]])^{\otimes l} \to H^*(L, \mathbb{C}[[q]]) \tag{4.5}$$

是满射。利用除子公理，可以直接计算得到

$$\widehat{\mathfrak{m}}_0^b = q\mathbf{m}_0(L, \xi_b) = qW(\mathbf{m}_b).$$
$$\widehat{\mathfrak{m}}_1^b(x) = d_b(\widehat{\mathfrak{m}}_0^b)(x), \quad x \in H^1(L, \mathbb{C}).$$

因此，如果 ξ_b 是 W 的一个临界点，我们推得 $\widehat{\mathfrak{m}}_1^b = 0$ 在 $H^1(L, \mathbb{C})$ 上成立，并且由于 (4.5) 是满射，随后在 $H^*(L, \mathbb{C}[[q]])$ 的全部范围内成立。特别地（令 $q = 1$，并回顾 L 是单调的），我们得到 $\mathfrak{m}_1^b = 0$，因此利用引理 4.3，可得到复向量空间的一个同构，

$$HF^*(\mathbf{L}) = H^*(L, \mathbb{C}) \neq 0.$$

生成结果现在由 [RS17, 定理 12.19] 得出。 □

References

[ACG+12] Mohammad Akhtar、Tom Coates、Sergey Galkin、Alexander M Kasprzyk 等。Minkowski 多项式与突变。 *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* 8 094, 2012 : 。[Aur08]

Denis Auroux。特殊拉格朗日纤维化、壁穿越与镜像对称。 *Surveys in Differential Geometry*, 13(1):1–48，2008。[CCG+12a] Tom Coates、Alessio Corti、Sergey Galkin、Vasily Golyshev 和 Alexander Kasprzyk。镜像对称与 Fano 流形。 *arXiv preprint arXiv:1212.1722* 2012 ，。[CCG+12b]

Tom Coates、Alessio Corti、Sergey Galkin、Vasily Golyshev 和 Alexander Kasprzyk。镜像对称与 Fano 流形。 *arXiv preprint arXiv:1212.1722* 2012 ，。[CCGK16a]

Tom Coates、Alessio Corti、Sergey Galkin 和 Alexander Kasprzyk。三维 Fano 流形的量子周期。 *Geometry & Topology*，20 1 103 256，2016（）：–。[CCGK16b] Tom Coates、Alessio Corti、Sergey Galkin 和 Alexander Kasprzyk。三维 Fano 流形的量子周期。 *Geometry & Topology*，20 1 103 256，2016（）：–。[CGKS20] Tom Coates、Sergey Galkin、Alexander Kasprzyk 和 Andrew Strangeway。某些四维 Fano 流形的量子周期。 *Experimental mathematics* 29 2 183 221, 2020 ，（）：–。

[CKP15] Tom Coates、Alexander Kasprzyk 和 Thomas Prince。四维Fano环面完全交。 *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 471 2175 20140704, 2015 , , ( ): . [CM07] Kai Cieliebak 和 Klaus Mohnke。Gromov-Witten理论中的辛超曲面与横截性。 *Journal of Symplectic Geometry* 5 3 281 356, , ( ): – . [CM18] 2007 Kai Cieliebak 和 Klaus Mohnke。带 puncture 的全纯曲线与拉格朗日嵌入。 *Inventiones mathematicae*, 212(1):213–295, 2018. [EA21] Mohamed El Alami。射影空间中指标为 1 的 Fano 超曲面的 SYZ。*arXiv preprint arXiv:2110.10728*, 2021. [FOOO10a] Kenji Fukaya、Yong-Geun Oh、Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono。 *Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction Part I* 1 , , volume . 美国数学会，2010。[FOOO10b] Kenji Fukaya、Yong-Geun Oh、Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono。 *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction Part II* 2 , , volume . 美国数学会，2010。[FOOO16] Kenji Fukaya、Yong-Geun Oh、Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono。伪全纯曲线模空间的指数衰减估计与光滑性。 *arXiv preprint arXiv:1603.07026*, 2016. [Fuk07] Kenji Fukaya。环空间与全纯圆盘——摘要。载于 *ICCM 2007*, *Vol II* 2007 。Citeseer, 。[Fuk10] Kenji Fukaya。拉格朗日 Floer 理论中的循环对称性与 adic 收敛。 *Kyoto Journal of Mathematics*, 50(3):521–590, 2010. [GP21] Sheel Ganatra 和 Daniel Pomerleano。具有拉格朗日嵌入应用的对数 PSS 态射。 *Journal of Topology*, 14(1):291–368, 2021. [GU10] Sergey Galkin 和 Alexandr Usnich。势函数突变。 *preprint IPMU*, (10-0100), 2010. [KP14] Ludmil Katzarkov 和 Victor Przyjalkowski。Landau-Ginzburg模型——新旧进展。 *arXiv preprint arXiv:1405.2953*, 2014. [Laz11] Laurent Lazzarini。J全纯曲线上的相对标架。*Point Theory and Applications* 9 2 213 256, 2011 *Journal of Fixed* , ( ): – . [LJY72] H Blaine Lawson Jr 和 Shing Tung Yau。非正曲率紧流形。 *Journal of Differential Geometry*, 7(1-2):211–228, 1972. [MS12] Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon。*topology* 52 2012 *Holomorphic Curves and Symplectic* , volume . 美国数学会，。[Nor83] Madhav V Nori。Zariski 猜想及相关问题。载于 *Annales sci-entifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 16, pages 305–344, 1983. [Prz13] Victor Vladimirovich Przyjalkowski。光滑Fano三维簇的弱 Landau-Ginzburg模型。 *Izvestiya: Mathematics*, 77(4):772, 2013. [PT20] James Pascaleff 和 Dmitry Tonkonog。壁穿越公式与拉格朗日突变。 *Advances in Mathematics*, 361:106850, 2020. [RS17] Alexander F Ritter 和 Ivan Smith。单调包裹 Fukaya 范畴与开闭弦映射。 *Selecta Mathematica*, 23(1):533–642, 2017. [Sei08] Paul Seidel。 *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, volume 10. 欧洲数学会，2008. [She15] Nick Sheridan。射影空间中 Calabi–Yau 超曲面的同调镜像对称。 *Inventiones mathematicae*, 199(1):1–186, 2015. [She16] Nick Sheridan。关于射影空间中 Fano 超曲面的 Fukaya 范畴。 *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 124(1):165–317, 2016. [Ton18] Dmitry Tonkonog。带引力后裔的弦拓扑与 Landau-Ginzburg 势函数的周期。 *arXiv preprint arXiv:1801.06921*, 2018. [Ton19] Dmitry Tonkonog。从辛上同调到拉格朗日枚举几何。 *Advances in Mathematics*, 352:717–776, 2019.

[Wen10] Chris Wendl。《辛几何与接触几何中的全纯曲线讲义》。 *arXiv preprint arXiv:1011.1690*，2010 年。[Zar29] Oscar Zariski。关于具有给定分支曲线的二元代数函数存在性问题。 *American Journal of Mathematics*，51 2 305 328，1929（）：–。[Zin08] Aleksey Zinger。伪循环与整系数同调。*Transactions of the American Mathematical Society* 360 5 2741 2765, 2008 ，（）：–。