利用硬币量子随机游走在四顶点环上实验实现任意单量子比特态的量子态传输

Gayatri Singh（加亚特里·辛格），[1, *] Kavita Dorai（卡维塔·多赖），[1, †] 和 Arvind[1, 2, ‡]

[1] *Department of Physical Sciences, Indian Institute of Science Education & Research Mohali, Sector 81 SAS Nagar, Manauli PO 140306 Punjab India.* [2] *Vice Chancellor, Punjabi University Patiala, 147002, Punjab, India*

我们在一台四量子比特核磁共振量子处理器上，通过四顶点环上的两步离散时间量子随机游走，实验演示了将一个未知的单量子比特态从 Alice 传输到 Bob。Alice 和 Bob 所持有的量子比特用作硬币量子比特，而游走则在一个由两个量子比特构成的“游戏竞技场”中进行。在该方案中，所需的纠缠态在量子游走过程中通过条件移位算符自然生成，而非预先制备。我们在 Bob 一端实现受控算符，由 Alice 的硬币量子比特和竞技场量子比特进行控制，以便在 Bob 一端重构 Alice 随机生成的状态。为表征态转移过程，我们针对一组输入态 $\{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$重复实验，进行量子过程层析。通过使用纠缠见证，我们验证了量子游走生成了由全部四个量子比特构成的真正四方纠缠态。为评估该传输方案的效果，我们通过计算实验重构的四量子比特密度矩阵在三量子比特基态上的投影，利用量子态层析重构传输态。结果表明，该量子电路能够通过两步量子随机游走，以高保真度实现量子态传输。

arXiv:2305.02106v1 [quant-ph] 3 May 2023

I. 引言

经典随机游走的量子类比是一种用途广泛的工具，可用于执行通用量子计算 [1]，量子搜索 [2]和量子模拟 [3]，等量子信息处理任务，并已在多篇文章中得到全面综述 [4–6]。量子游走已在多种物理平台上得到实验实现，例如核磁共振 [7–9]，、囚禁离子 [10, 11]，、光学晶格中的原子 [12] 以及光子学平台 [13, 14]。量子隐形传态是指利用经典信息和量子关联，在两个参与方 Alice 和 Bob 之间传送未知量子态 [15–17]。量子隐形传态最初通过一对纠缠光子进行了实验演示 [18]，，后续实验则采用了其他物理平台，例如囚禁离子 [19]，、光子量子比特 [20]，、液态核磁共振（NMR） [21]，、超导量子比特 [22]，以及氮空位中心 [23]。

标准量子隐形传态方案要求双方事先共享一个纠缠态；而由于在硬币量子随机游走中，条件移位算符能够在硬币空间和位置空间之间引入纠缠，因此人们开始探讨能否利用量子随机游走实现量子隐形传态。为了解决这一问题，研究者设计了一种利用两步量子游走实现未知量子态隐形传态的新方案，游走发生在线上和四顶点环上 [24]。研究者利用不同量子结构上的两个量子游走者（例如线、环和带自环的二顶点完全图），对任意两量子比特态进行隐形传态，并将方案推广至 N 个游走者和 N 量子比特态 [25–27]。研究者还提出了一种基于三枚硬币量子随机游走的受控量子隐形传态方案，其中利用条件移位算符在位置空间和硬币空间之间生成纠缠 [28]。

在 IBM 云量子计算平台 [29, 30] 上，演示了使用四量子位簇态对任意两量子位状态进行量子隐形传态，以及使用带硬币的量子游走实现量子隐形传态的实验。研究人员还在 IBM 量子计算机 [31] 上实现了一种任意两量子位量子受控隐形传态方案：发送方进行两次贝尔态测量，接收方则执行酉操作以重构该状态。在 IBM 量子体验平台 [32] 上，研究人员演示了通过带两个硬币的量子游走实现纠缠态的完美态转移。

在这项工作中，我们在一个四量子比特核磁共振量子处理器上，通过四顶点环上的量子随机游走，实验演示了两个参与方（Alice 和 Bob）之间未知单量子比特量子态的传输。尽管以往的量子随机游走方案已被用于实现量子隐形传态，但我们选择用该方案实现量子态传输。这是因为我们选用的量子处理器基于液态核磁共振，其中量子比特在物理上位于同一个分子上，因此，将该协议视为态转移而非量子隐形传态更为自然。我们将量子随机游走方案重新构建为 Alice 和 Bob 在一个双量子比特……

* ph20015@iisermohali.ac.in
† kavita@iisermohali.ac.in
‡ arvind@iisermohali.ac.in

“游戏竞技场”中，Alice 和 Bob 各有一个硬币量子比特，他们通过翻转硬币来玩游戏。通过两步量子随机游走传输未知量子态的标准协议包括：在游走过程中生成共享纠缠态；Alice 执行投影测量，并通过经典信道将测量结果告知 Bob；最后，Bob 根据 Alice 的测量结果执行一组测量。由于核磁共振量子处理器无法执行投影测量，而所有相关量子比特之间的受控操作均可实现，因此我们在 Bob 端使用由 Alice 的量子比特和竞技场量子比特控制的幺正操作，以实现态转移。我们的方案在“游戏竞技场”中的“竞技场量子比特”上使用条件移位算符，执行量子游走的一步。Alice 和 Bob 各自使用其硬币量子比特执行一步量子随机游走后，在 Bob 的硬币量子比特上施加受控操作，使其转变为 Alice 的硬币量子比特随机生成的初始态。至此，量子态传输协议完成。需要指出的是，只有因为全部四个量子比特（两个硬币量子比特和两个“竞技场”量子比特）都位于同一个分子内，这种将 Alice 的硬币量子比特随机生成的态传输到 Bob 端的方案才得以实现。我们通过对一组四种不同输入态 $\{|0\rangle$、$|1\rangle$、$|+\rangle$ 和 $|-\rangle\}$重复实验，利用量子过程层析表征量子隐形传态方案。层析重构得到的四量子比特态包含量子游走过程中生成的四量子比特纠缠信息。我们使用纠缠见证验证生成的四量子比特态确实具有真正的四体纠缠 [33]。为了验证该态确实以高保真度完成传输，我们根据 Alice 的测量结果确定三量子比特基态，并将其投影到实验得到的四量子比特密度矩阵上，以重构该态。我们实现了对未知量子态近乎完整的高保真度传输。我们的结果还证明，四量子比特核磁共振系统能够作为稳健且多用途的量子处理器，其退相干特性良好，量子控制能力强。

本文结构如下：第II节简要回顾基本理论框架，其中第IIA 节和IIB节分别回顾带硬币的离散时间量子随机游走，并介绍如何利用四顶点环上的量子随机游走传输未知单量子比特态。第IIIA节介绍在核磁共振量子处理器上实现量子隐形传态协议的实验细节。第IIIB 节介绍实验设置和核磁共振脉冲序列的细节，第IIIC 节则详细分析实验结果。第IV 节给出若干总结性意见。

II. 基本理论框架

本节将讨论使用多个硬币对四个顶点上的离散时间量子随机游走进行建模的基础，以及利用量子随机游走传输未知单量子比特态的协议。

A. 闭合环上的带硬币量子游走

带硬币的离散时间量子随机游走发生在位置量子比特（“游走者”在其中行走）与硬币量子比特（或多个硬币量子比特）的联合空间中。总希尔伯特空间可写为 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P \otimes \mathcal{H}_C$，其中 $\mathcal{H}_P$ 是游走者的希尔伯特空间，而 $\mathcal{H}_C$ 是硬币的希尔伯特空间。在量子游走的每一步中，硬币都会翻转，然后游走者根据硬币的状态沿顺时针方向或逆时针方向移动。如果硬币处于状态$|0\rangle$，游走者沿逆时针方向移动；如果硬币处于状态 $|1\rangle$，游走者沿顺时针方向移动。由于量子游走发生在环的闭合拓扑上，游走者沿顺时针（逆时针）方向移动，而不是通常意义上的左（右）方向。对于由图 $G(V, E)$ 表示的闭合环上的带硬币量子游走，该图具有 E 条边和 E 个顶点，希尔伯特空间 H_v 由顶点态 $|v\rangle$ 张成，其中 $v \in V$；硬币希尔伯特空间 H_c 由量子比特态 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 张成，总希尔伯特空间为 $H = H_v \otimes H_c$。量子游走的一步由酉算符 $U = S(I \otimes C)$ 控制，其中 C 是硬币翻转算符，S 是作用于 $H_v \otimes H_c$ 的条件移位算符，其定义为 [24]:

$$
\begin{aligned}
S_{\pm} &= |i \pm 1 \bmod n\rangle\langle i| \\
S &= \sum_{i=0}^{n-1} (S_+ \otimes |0\rangle_{c\,c}\langle 0| + S_- \otimes |1\rangle_{c\,c}\langle 1|)
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中，n 指环上的顶点数。我们使用一个有四个顶点的闭合环来实现两步量子随机游走，其中每个顶点表示一个可能的位置。位置量子比特的位置会根据硬币量子比特翻转后的结果而变化。在不失一般性的前提下，硬币算符 C 可以任意设为任意单量子比特酉算符，而不影响量子游走的结果 [24]。

B. 在四环上转移单量子比特态

标准隐形传态方案首先需要预先制备一个由双方共享的纠缠态。另一方面，使用量子随机游走实现量子隐形传态时，纠缠态

在游走的各个步骤中，由两个条件移位算符生成。此前通过核磁共振实验协议实现量子隐形传态时，能够将核自旋的状态从一个原子“局部地”传输到另一个原子，而这两个原子在物理上位于同一个分子内。由于在核磁共振情形下，状态被传输到同一分子内的另一个位置，因此，这种过程可以被理解为并非严格意义上的量子隐形传态，而更类似于态转移。因此，我们将参考文献 [24] 中描述的整个理论方案重新表述为量子态传输，而非量子隐形传态。考虑一个具有四个顶点的闭合环上的量子随机游走，其中涉及两个硬币，一个属于 Alice，另一个属于 Bob。该协议旨在将 Alice 的硬币态传输到 Bob 的硬币态，其基本思想与量子隐形传态协议相似。该协议可以形象地描述为 Alice 和 Bob 参与的一场双人游戏，其中量子游走发生在两个“竞技场量子比特”的空间中。双人游戏的示意图如图 1所示。“竞技场”空间由顶点张成，而硬币空间由环的边张成。图 1中的每个顶点都有两条有向边。因此，“竞技场”空间的维数为四，而 Alice 和 Bob 各自的硬币空间的维数均为二。初始时，Alice 的硬币被制备为一个未知的随机单量子比特态，记为 $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$，其中 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 如图 1所示。这相当于将整个系统制备为初始态 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |00\rangle \otimes |\phi\rangle \otimes |0\rangle$。随后，Alice 使用她的硬币量子比特 A_c，通过移位算符（图 1中标记为 W_1 的方框）在随机游走中移动一步。Bob 首先将自己的硬币制备为一个状态：对其处于 $|0\rangle$ 态的量子比特施加哈达玛门，从而使其处于 $|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态的等幅叠加态。随后，Bob 使用自己的硬币执行量子随机游走的下一步，并对游戏竞技场中的“竞技场量子比特”施加条件移位算符（图 1中标记为 W_2 的方框）。之后，对 Bob 的硬币量子比特施加受控操作。由此，Bob 的硬币被推入 Alice 未知的随机初始态。至此，协议的实现完成。条件移位算符（式（1））变为

$$S = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 0|) \otimes |1\rangle_{c\,c}\langle 1| + (|0\rangle\langle 3| + |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2|) \otimes |0\rangle_{c\,c}\langle 0| \quad (2)$$

不失一般性，Alice 的硬币算符选为恒等操作，Bob 的硬币算符选为哈达玛门。

量子游走的第二步之后，状态演化为：

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0001\rangle + b|1000\rangle + a|0110\rangle + b|1111\rangle) \quad (3)$$

Alice 现在对她的量子比特进行测量：位置量子比特采用 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基，硬币量子比特采用$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ 基。

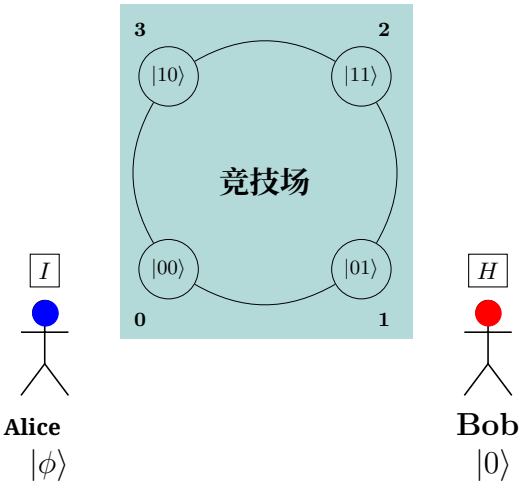


图 1. 双人“游戏竞技场”由一个包含四个顶点的闭合环构成（**0**, **1**, **2**, **3**），分别表示状态 $|00\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ 和 $|10\rangle$。Alice 和 Bob 使用各自的硬币量子比特进行游戏，并在闭合环上从一个顶点移动到另一个顶点。若硬币量子比特处于 $|0\rangle$ 态，则沿闭合环逆时针移动；若处于 $|1\rangle$ 态，则沿顺时针方向移动。Alice 的硬币算符是恒等 I 门，而 Bob 的硬币算符是 Hadamard H 门。Alice 开始游戏时，她的硬币处于随机生成的 $|\phi\rangle$ 态；Bob 开始游戏时，他的硬币处于 $|0\rangle$ 态。

Alice的测量结果和Bob相应的受控操作列于表I中。量子游走两步后，在Alice的硬币空间上施加哈达玛门，使Alice在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基下进行所有测量。因此，量子游走两步后的状态为：

$$|\psi\rangle_f = \frac{1}{2}\{|000\rangle \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle) + |100\rangle \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle) + |011\rangle \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) + |111\rangle \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)\} \quad (4)$$

从态 $|\psi\rangle_f$（式（4））可以看出，若 Alice 的位置量子比特处于 $|00\rangle$ 态，且 Alice 的硬币量子比特处于 $|0\rangle$ 态，则 Bob 需要施加一个 σ_x（X）门来恢复传输态，依此类推。实施表 I中列出的受控操作后，所得状态为：

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\{|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle\} \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) \quad (5)$$

最后，通过测量 Bob 的量子比特，可以验证状态 $|\phi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$ 确实已从 Alice 传输给 Bob。

图中展示了使用四顶点环上的两步量子随机游走，实验实现未知单量子比特态传输的量子电路2。A_c 和 B_c 分别表示 Alice 和 Bob 的硬币量子比特，而另外两个量子比特称为“竞技场量子比特”。Alice 的硬币态

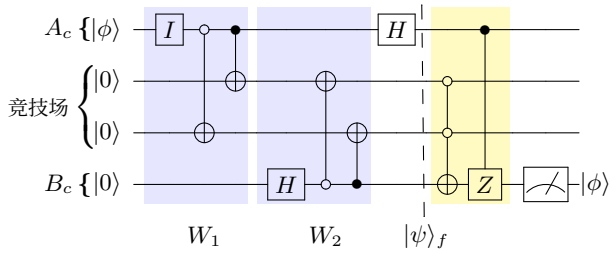


图2. 利用四顶点环上的两步量子随机游走传输未知单量子比特态 $|\phi\rangle$ 的量子电路。 A_c 和 B_c 分别表示 Alice 和 Bob 的硬币量子比特，而中间的两个量子比特标记为“竞技场”量子比特。W_1 和 W_2 分别表示量子游走的第一步和第二步。黄色阴影框表示实现与受控操作相对应的酉算符。

是随机生成的单量子比特态 $|\phi\rangle$，在电路结束时，该态被传输到 Bob 的硬币态。标记为 W_1 和 W_2 的方框中包含实现量子游走第一步和第二步所需的量子门； I 和 H 以及 Z 分别表示恒等算子、哈达玛门和泡利 Z 算子。图2 中最后一个黄色阴影方框包含实现表I中所列受控操作所需的量子门。

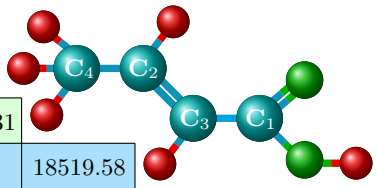
测量结果		受控操作
A_c	竞技场量子比特	M
0	11	I
1	11	Z
0	00	X
1	00	ZX

表I. Alice 的硬币量子比特 (A_c) 的测量结果，以及 M 在 Bob 的硬币量子比特 (B_c) 上执行的相应受控操作； Z 和 X 分别表示泡利矩阵 σ_z 和 σ_x，而 I 表示恒等（“不做任何操作”）算符。

III. 通过两步量子随机游走实现量子隐形传态的实验

A. 核磁共振实验详情

我们使用了四个 ^{13}C 核，来自溶解在氘代丙酮中的 ^{13}C 标记反式巴豆酸分子，以物理方式实现四个量子比特。分子结构和系统参数，包括化学位移 ν_i、T_1和 T_2 弛豫时间以及标量 J 耦合常数如图3所示。所有实验均在环境温度下（≈ 300K）进行，使用配备标准 5 mm QXI 探头的布鲁克 DRX Avance III 600 MHz 核磁共振波谱仪。甲基



C_1	25185.31			
C_2	72.35	18519.58		
C_3	1.02	69.69	21815.48	
C_4	7.05	1.46	40.64	2561.66
T1	20.02	7.31	8.39	7.26
T2	2.34	1.32	1.12	1.22
	C_1	C_2	C_3	C_4

图3. ^{13}C标记的反式巴豆酸的分子结构和系统参数，四个碳原子分别标记为 C_1,C_2,C_3,C_4。表格中的对角元素表示化学位移（单位：Hz），非对角元素表示两个自旋之间的 J耦合（单位：Hz）。表格最后两行给出了 T_1 和 T_2 弛豫时间（单位：秒）。绿色和红色球分别表示氧原子和氢原子。

在整个实验过程中，通过基于复合脉冲的宽带去耦序列（WALTZ-16），使其他质子自旋保持去耦状态。

在弱耦合近似下，旋转坐标系中四个自旋1/2系统的核磁共振哈密顿量表示为：

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{4}(\omega_i - \omega_{\rm rf})I_{iz} + \sum_{i<j,j=1}^{4} 2\pi J_{ij} I_{iz} I_{jz} \qquad (6)$$

其中， i 表示自旋， $\omega_{\rm rf}$ 是旋转坐标系频率， $\omega_i = 2\pi\nu_i$ 和 I_{iz} 分别表示拉莫尔频率和第 i个自旋的自旋角动量的 z 分量，而 J_{ij} 表示第 i个和第 j个自旋之间标量耦合的强度。

系统使用空间平均法初始化为赝纯态（PPS），其密度算符为 [34, 35]:

$$\rho_{0000} = \frac{1-\alpha}{2^4}\mathbb{I}_{16} + \alpha|0000\rangle\langle 0000| \qquad (7)$$

其中 $\mathbb{I}_{16}$是 16×16 单位矩阵，而 $\alpha \sim 10^{-5}$ 是热自旋极化。用于制备 z的核磁共振脉冲序列采用射频脉冲、ρ_{0000} 梯度脉冲和时间演化时段，从热平衡态出发制备4中的PPS（截至第一条虚线）。所有射频脉冲均使用GRAPE优化技术构造，该技术 [36, 37], 通过组合大量独立控制的短片段来构成一个整形脉冲。所有单量子比特GRAPE脉冲的设计都能抵抗射频不均匀性，持续时间约为 340 μs - 360 μs，平均保真度 ≥ 0.997。在可能的情况下，将两个或更多

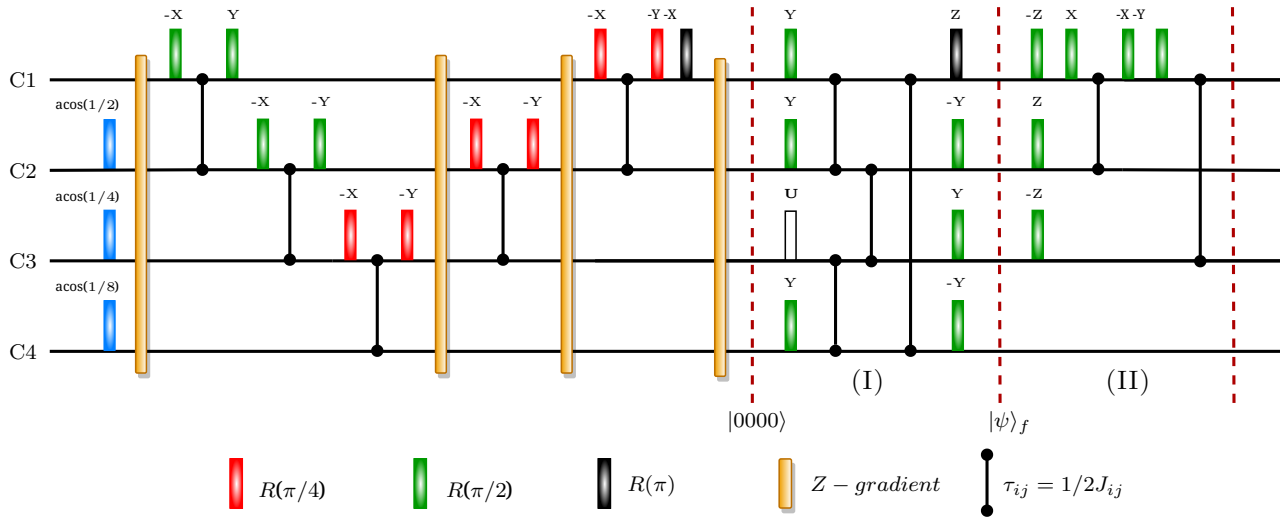


图 4. 用于实现两步量子随机游走电路，以实现任意单量子比特态 $|\phi\rangle$ 的量子隐形传态的核磁共振脉冲序列。从热平衡态出发，虚线前的射频脉冲、 z-梯度和时间演化阶段序列将系统制备为 ρ_{0000} PPS。标记为 I 的方框内给出的序列实现两步量子游走，而标记为 II 的方框则实现与受控操作相对应的酉算符。每个射频脉冲的相位标注在对应的脉冲条上方； $\tau_{ij} = \frac{1}{2J_{ij}}$ 对应自由演化时间，酉算符 U 用于制备态 $|\phi\rangle$；图中未显示重聚焦方案。

自旋选择性射频脉冲合并后，通过单个GRAPE脉冲实现。

基于受约束凸优化的约化态层析 [38, 39]用于通过一组层析操作重构有效的实验密度矩阵 [40–42]:

$$\{IIII, IIIX, XIIX, XIIY, YYII, IXYY, IYXY, IYYY, XXXI, XYYI, YIXX, YYYI, XXXX, YXXX, YXYY\}$$

其中， I 是单位（“不执行任何操作”）算符， $X(Y)$ 是沿 x（y）轴施加的量子比特选择性 $\pi/2$ 旋转。

采用 Uhlmann-Jozsa保真度度量 [43, 44]，计算了实验重构态与理论预期态之间的保真度:

$$\mathcal{F}(\rho_{\text{expt}}, \rho_{\text{th}}) = \frac{|\text{Tr}[\rho_{\text{expt}}\rho_{\text{th}}^{\dagger}]|}{\sqrt{\text{Tr}[\rho_{\text{expt}}\rho_{expt}^{\dagger}]\text{Tr}[\rho_{\text{th}}\rho_{\text{th}}^{\dagger}]}} \quad (8)$$

其中， ρ_{expt} 和 ρ_{th} 分别为实验重构得到的密度矩阵和理论预期的密度矩阵。 $|0000\rangle$ PPS 的制备总脉冲序列时长为 ≈ 41 ms，实验保真度为 0.9812 ± 0.0020。

B. 使用修订测量进行实验量子态转移

为了实现量子传输电路，我们按照以下方式标记分子中的四个碳原子。记号：C_1 是 Bob 的硬币，C_3 是 Alice 的硬币，C_2, C_4是竞技场量子比特（量子比特标签见图3 ）。

状态 $|\psi\rangle_f$ (方程 4）经过两步随机游走后表示为:

$$|\psi\rangle_f = \frac{1}{2}\{(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |101\rangle + (a|0\rangle - b|1\rangle) \otimes |111\rangle + (a|1\rangle + b|0\rangle) \otimes |000\rangle + (a|1\rangle - b|0\rangle) \otimes |010\rangle\} \quad (9)$$

以及该状态 $|\Psi\rangle$ （方程 5）表示为:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\{|000\rangle + |010\rangle + |101\rangle + |111\rangle\} \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) \quad (10)$$

我们将图2所示的量子电路分解为一组单量子比特旋转和 J耦合门，其中使用了受控非门（图中未示出）。相应的核磁共振脉冲序列如图 I 和 II 中的虚线区域所示4。由于自旋角动量对易规则使这些酉算符的核磁共振脉冲分解中的某些项相互抵消，因此这一特定序列效率较高。我们采用参考文献 J中介绍的重聚焦方法，在所有 [35], 耦合同时演化的条件下设计门的实现方案。该方法利用 MATLAB 程序及其内置的 $linprog$ 函数，为所需相互作用寻找最优解。在我们的案例中，我们为所需标量 J耦合 J_{12}、 J_{23}、 J_{34} 和 J_{14}的同时演化找到了一个最优解，包含 9 个时间段和 10 个重聚焦脉冲，总实现时间为 82。19 毫秒，比未经优化的实现时间 97。12 毫秒缩短了 18.2%。

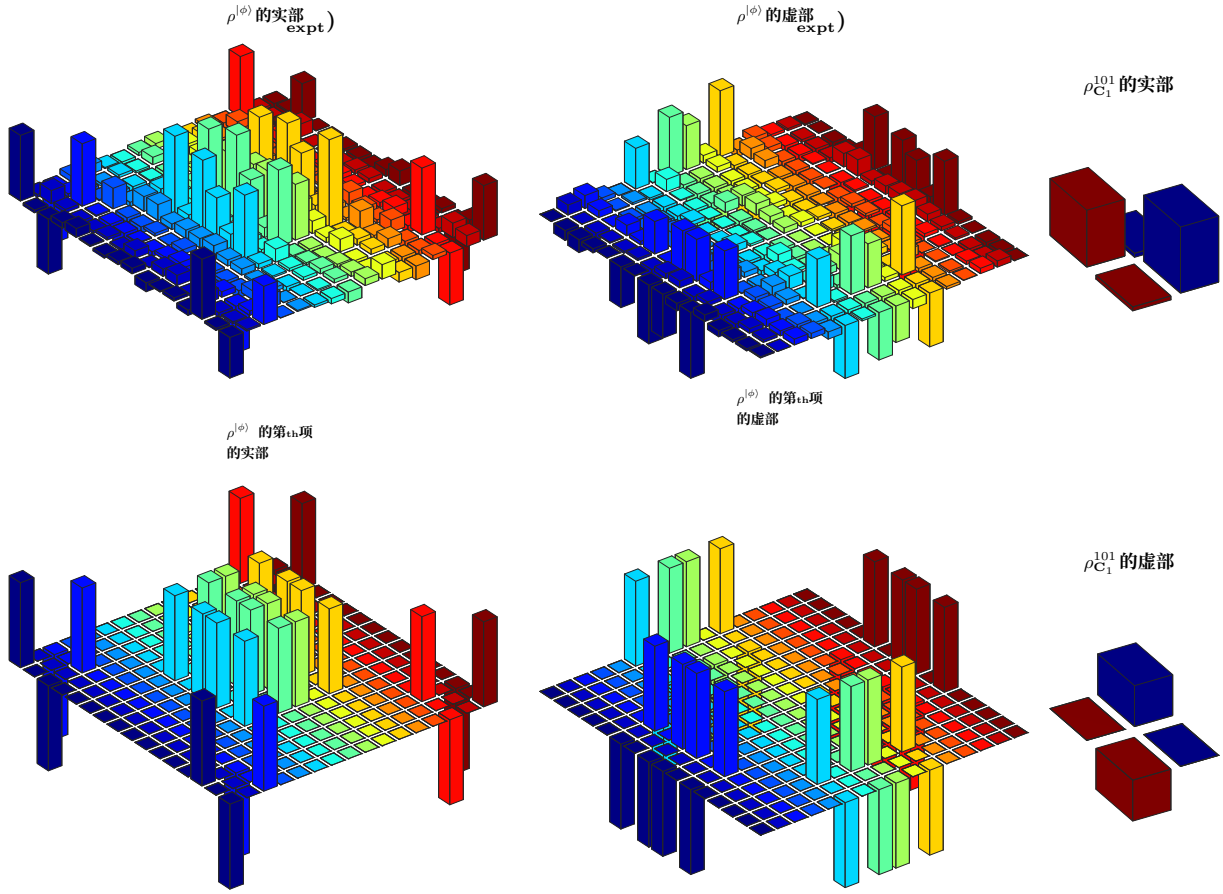


图 5。实验层析重构的和理论预期的四量子比特态 $\rho^{|\phi\rangle}{}_{\text{实验}} = |\psi\rangle_f\langle\psi|$ 对应输入态 $|\phi\rangle = |-\rangle$的实部（左）和虚部（右），保真度为 0.9183 ± 0.0028。最右列的层析图显示了在 Bob 的量子比特 $\rho_{C_1}^{101}$处重构的隐形传态态的实部和虚部，保真度为 0.9785 ± 0.002。

此外，采用这种重聚焦方法和 GRAPE 优化后，耦合J_{13} 的演化时间从 $\sim$ 490 毫秒大幅缩短至 $\sim$ 25 毫秒。经过数值优化的脉冲序列不仅缩短了整体脉冲序列的持续时间，还减少了用于重聚焦的脉冲数量，从而减轻了退相干的不良影响。包括重聚焦脉冲在内的所有脉冲均采用 GRAPE 优化算法设计，保真度为 ≥ 0.998，且能抵抗射频不均匀性 [45]。所有对应于单量子比特旋转的脉冲持续时间均为 $\approx 340 - 360\mu$秒。

图中所示的完整核磁共振脉冲序列4已被实施，总持续时间为 $\sim$ 156毫秒。这里需要指出的是，竞技场量子比特的测量结果为 00 或 11（表I）。当竞技场量子比特处于 $|11\rangle$ 态时，无需进一步操作。然而，当其处于 $|00\rangle$ 态时，相应的受控幺正操作会变为 Bob 量子比特上的非门，这等价于实施一个零控制的托 Toffoli 门。由于两个量子比特都处于 $|0\rangle$ 态，我们仅考虑由其中一个量子比特进行控制。因此，为简化实验方案，我们没有实施零控制 Toffoli 门，而是实施了一个等效的“零控制 CNOT”门。

完成整个脉冲序列的实施后，仅对 Bob 的量子比特（C_1）进行量子态层析，以重构传输态。就实验次数而言，该实验方案具有较高的效率，因为重构该状态仅需要两个层析脉冲 IIII and XIII 。为了评估该方案的效率，我们针对一组四种不同的输入态 $|\phi\rangle = \{|0\rangle,\ |1\rangle,\ |+\rangle,\ |-\rangle\}$进行了实验。

输入态 $|\phi\rangle = |-\rangle$ 对应的实验重构传输态如图 6所示。输入态 $|0\rangle$、$|1\rangle$、$|+\rangle$和 $|-\rangle$ 的平均实验保真度分别为 0.9918 ± 0.0006、 0.9924 ± 0.0012、 0.96 ± 0.0027和 0.9896 ± 0.0007。这些较高的状态保真度证明，该实验方案能够很好地传输所需的单量子比特态。

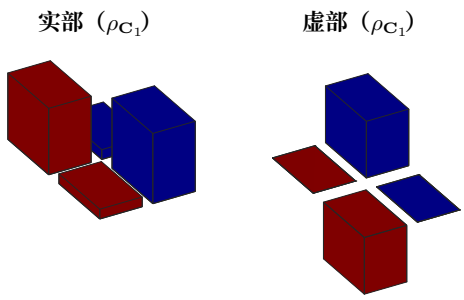


图 6. Bob 的量子比特 ρ_{C_1} 上经实验层析重建的传输态的实部（左）和虚部（右）；输入态为 $|\phi\rangle = |-\rangle$，保真度为 0.9896 ± 0.0007。

C. 验证传输态的保真度

我们还希望通过重建传输到 Bob 的状态并计算其保真度，独立验证传输协议的有效性。因此，我们针对一组不同的输入态 $|\phi\rangle = \{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$，其中 $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{2}$ 且 $|-\rangle = \frac{|0\rangle+\iota|1\rangle}{2}$。完成 PPS 制备后，应用 NMR 脉冲序列，并包含方框 I(图4)，总门实现时间为 $\sim$ 124 毫秒。通过量子态层析重建四量子比特纠缠态 ρ_{expt} 的密度矩阵。实部和虚部输入态为$|\phi\rangle = |-\rangle$ 时，理论预期和实验重建的四量子比特密度矩阵如图 5所示。

我们分析了实验重建的四量子比特密度矩阵，以获得传输态。需要指出的是，Alice 的量子比特的测量结果不包含有关输入态 $|\phi\rangle$的任何信息。然而，可以根据 Alice 的测量结果在 Bob 的量子比特上恢复输入态。为此，我们计算了 ρ_{expt} 在基态 $|\,C_2C_3C_4\rangle = |ijk\rangle = \{|000\rangle, |010\rangle, |101\rangle$和$|111\rangle\}$ [22]上的投影。随后对量子比特 C_2, C_3 和 C_4进行偏迹，并通过对约化密度矩阵重新归一化，再应用表 $\rho^{ijk}{}_{C_1}$ 中列出的适当受控操作，重建 Bob 的量子比特 M 的状态：I:

$$\sigma^{ijk}_{C_1} = \frac{\text{Tr}_{C_2C_3C_4}[P_{ijk}\rho_{\text{expt}}P^\dagger_{ijk}]}{\text{Tr}[P_{ijk}\rho_{\text{expt}}]}$$
$$\rho^{ijk}_{C_1} = M.\sigma^{ijk}_{C_1}.M^\dagger \qquad (11)$$

其中 $P_{ijk} = I \otimes |ijk\rangle\langle ijk|$ 为投影算符。图 5 描绘了实验重构态 $\rho^{101}_{C_1}$与理论预期态的实部和虚部；对于这两种状态，受控操作 M为恒等操作。四量子比特态 ρ_{expt} 的保真度，以及对应于不同输入态的 Bob 量子比特重构态的保真度 $|\phi\rangle = |0\rangle$、$|1\rangle$、$|+\rangle$ 和 $|-\rangle$，列于表 II中。

输入态 $\|\phi\rangle$	四量子比特态的保真度 状态（ρ_{expt}）	Bob 重构态的保真度 $\rho^{101}_{C_1}$	$\rho^{111}_{C_1}$	$\rho^{000}_{C_1}$	$\rho^{010}_{C_1}$
$\|0\rangle$	0.9162 ± 0.0025	0.9632 ± 0.0022	0.9863 ± 0.0008	0.9906 ± 0.006	0.9651 ± 0.0036
$\|1\rangle$	0.9180 ± 0.0068	0.9809 ± 0.0049	0.9550 ± 00057	0.9943 ± 0.0013	0.9384 ± 0.0013
$\|+\rangle$	0.9357 ± 0.0018	0.9880 ± 0.0014	0.9928 ± 0.0011	0.9891 ± 0.0025	0.9775 ± 0.0015
$\|-\rangle$	0.9183 ± 0.0028	0.9785 ± 0.002	0.9527 ± 0.0082	0.9712 ± 0.0081	0.9666 ± 0.003

表 II. 以下状态的保真度　实验制备的四量子比特态 ρ_{expt} 以及 Bob 的量子比特重构态 it $\rho^{ijk}_{C_1}$ $(ijk = 101,\ 111,\ 000$ 和 $01\ \ 0)$，对应不同的输入态 $|\phi\rangle$。

显然，对于输入态 $|\pm\rangle$，四量子比特纠缠态 $|\psi\rangle_f$在局域幺正操作下是一个簇态 [46, 47] ；而对于输入态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，它仍然是双可分的。我们使用见证算符 $\mathcal{W}_{|\psi\rangle} = \frac{1}{2}I - |\psi\rangle\langle\psi|$ [33], 来验证 ρ_{expt}中真正的四体纠缠。见证算符 $\mathcal{W}_{|\psi\rangle}$ 表达式中的$_{1\ 2}$ 是任意双可分态与 $|\psi\rangle$之间可能达到的最大保真度。这意味着，如果 Tr $[\mathcal{W}_{|\psi\rangle}\rho] < 0$，给定态 ρ 就具有真正的四量子比特纠缠；而如果 $\text{Tr}[\mathcal{W}_{|\psi\rangle}\rho] \geq 0$，它则是双可分的。对于输入态 $|+\rangle$、$\text{Tr}[\mathcal{W}_{|\psi\rangle_f}\rho_{\text{expt}}] = -0.4358 \pm 0.0018$ 以及对于输入态 $|-\rangle$，$\text{Tr}[\mathcal{W}_{|\psi\rangle_f}\rho_{\text{expt}}] = -0.4183 \pm 0.0028$，这清楚地表明存在真正的四体纠缠。

我们通过基于约束凸优化的量子过程层析 [38] 对态传输协议进行了全面表征。可以用待传输的量子态ϕ表示一个完全正映射 $\rho_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$。在算符和表示中，

传输过程定义为 [48]:

$$\mathcal{E}(\rho_\phi) = \rho_{C_1}^{ijk} = \sum_{m,n=1}^{d^2} \chi_{mn}^{ijk} E_m \rho_\phi E_n^\dagger \qquad (12)$$

其中， d是希尔伯特空间的维数， E_m 表示泡利算子基 $\{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$， $\chi_{mn}^{ijk} = \sum_\alpha a_{\alpha m} a_{\alpha n}^*$ 是过程矩阵，它是一个正定厄米矩阵，并满足保迹约束 $\sum_{mn} \chi_{mn}^{ijk} E_n^\dagger E_m = I$。图 7 展示了层析重建得到的过程矩阵 χ^{ijk} ，验证了表 I中列出的预期幺正受控操作。使用度量 [49]计算实验重建的过程矩阵$\chi^{ijk}{}_{\text{expt}}$ 相对于理论预期过程矩阵 $\chi^{ijk}{}_{\text{th}}$ 的保真度:

$$\mathcal{F}^{ijk} = \frac{|\mathrm{Tr}[\chi_{\text{expt}}^{ijk} \chi_{\text{th}}^{ijk\dagger}]|}{\sqrt{\mathrm{Tr}[\chi_{\text{expt}}^{ijk} \chi_{\text{expt}}^{ijk\dagger}] \mathrm{Tr}[\chi_{\text{th}}^{ijk} \chi_{\text{th}}^{ijk\dagger}]}} \qquad (13)$$

不同投影对应的过程保真度分别为 $\mathcal{F}^{101} = 0.9682 \pm 0.0021$， $\mathcal{F}^{111} = 0.9658 \pm 0.0015$， $\mathcal{F}^{000} = 0.9842 \pm 0.0023$，以及 $\mathcal{F}^{010} = 0.9450 \pm 0.0015$。

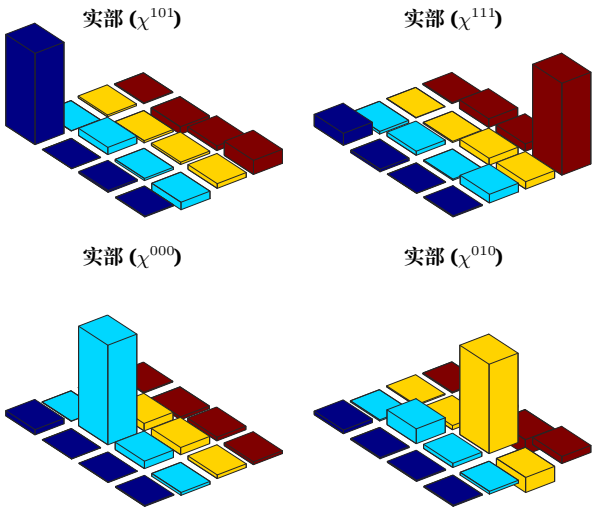


图 7. 对 ρ_{expt} 投影到基态$|000\rangle$、$|010\rangle$、$|101\rangle$ 和 $|111\rangle$时，实验层析得到的过程矩阵 χ的实部。

我们的结果表明，该实验方案能够以高保真度实现任意单量子比特态的近乎完美转移。需要指出的是，对于图2所示的态转移方案的核磁共振实现，我们用基于 Alice 测量结果的受控幺正操作，取代了态转移所需的单次读出 [50] 和实时反馈 [51] 。这些受控酉算符带来了巨大的实验挑战，因为某些 J 实验所选分子中量子比特之间的耦合非常弱。这意味着相应的门操作时间较长，量子退相干影响计算的可能性随之增加，进而降低传输态的保真度。例如，直接实现弱耦合量子比特 C1 和 C3（$J_{13} \approx 1.02$ Hz）的量子隐形传态电路，总时间约为 490μs；借助专门设计并经 GRAPE 优化的脉冲，我们将实验实现时间大幅缩短至约 25μs。这使我们能够以高保真度在实验中实现态传输协议。

IV. 结论

我们通过在四顶点环上进行两步量子游走，实验演示了 Alice 和 Bob 两方之间的一种量子态传输方案。我们进行了基于约束凸优化的量子态层析，并重构了实验密度矩阵。通过使用纠缠见证，验证了量子游走过程中 genuine 四体纠缠的产生。我们通过计算传输态在 Alice 的量子比特基态上的投影，在 Bob 的量子比特上重构了传输态。我们还进行了量子过程层析，以表征态传输协议的过程矩阵；为重构传输态，仅测量了 Bob 的量子比特。该方案能够以较高的态保真度，近乎完美地传输任意单量子比特态。此外，实验线路结合若干局部酉算符，可用于生成四量子比特簇态，这类状态在量子信息处理中备受关注。

我们的实验方案具有通用性，可轻松扩展至通过多硬币、多行走者设置传输更大规模量子比特寄存器中的状态。我们的结果表明，基于硬币的量子随机游走方案可用于实现任意量子态的稳健传输，并为其在量子通信和量子信息处理中的更广泛应用铺平道路。

致谢

所有实验均在 IISER Mohali 核磁共振研究设施内，使用布鲁克 Avance- III 600 MHz FT-NMR 光谱仪完成。Arvind 感谢印度科学技术部（DST）提供资助，资助编号：DST/ICPS/QuST/Theme- 1/2019/Q-68。K.D. 感谢印度科学技术部（DST）提供资助，资助编号：DST/ICPS/QuST/Theme-2/2019/Q-74。G.S. 感谢印度大学拨款委员会（UGC）提供的资金支持。

[1] A. M. Childs, Phys. Rev. Lett. 102, 180501 (2009). [2] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley, Phys. Rev. A 67, 052307 (2003). [3] P. Rebentrost, M. Mohseni, I. Kassal, S. Lloyd, and A. Aspuru-Guzik, New J. Phys. 11, 033003 (2009). [4] A. Ambainis, Int. J. Quantum Inf. 01, 507 (2003). [5] V. M. Kendon, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 364, 3407 (2006). [6] S. E. Venegas-Andraca, Quant. Inf. Proc. 11, 1015 (2012). [7] J. Du, H. Li, X. Xu, M. Shi, J. Wu, X. Zhou, and R. Han, Phys. Rev. A 67, 042316 (2003). [8] C. A. Ryan, M. Laforest, J. C. Boileau, and R. Laflamme, Phys. Rev. A 72, 062317 (2005). [9] D. Lu, J. Zhu, P. Zou, X. Peng, Y. Yu, S. Zhang, Q. Chen, and J. Du, Phys. Rev. A 81, 022308 (2010). [10] P. Xue, B. C. Sanders, and D. Leibfried, Phys. Rev. Lett. 103, 183602 (2009). [11] F. Z¨ahringer, G. Kirchmair, R. Gerritsma, E. Solano, R. Blatt, and C. F. Roos, Phys. Rev. Lett. 104, 100503 (2010). [12] M. Genske, W. Alt, A. Steffen, A. H. Werner, R. F. Werner, D. Meschede, and A. Alberti, Phys. Rev. Lett. 110, 190601 (2013). [13] M. A. Broome, A. Fedrizzi, B. P. Lanyon, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, and A. G. White, Phys. Rev. Lett. 104, 153602 (2010). [14] A. Peruzzo, M. Lobino, J. C. F. Matthews, N. Matsuda, A. Politi, K. Poulios, X.-Q. Zhou, Y. Lahini, N. Ismail, K. W¨orhoff, Y. Bromberg, Y. Silberberg, M. G. Thompson, and J. L. OBrien, Science 329, 1500 (2010). [15] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Cr´epeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 1993( ). [16] H.-J. Briegel, W. D¨ur, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 81, 5932 (1998). [17] D. Gottesman and I. L. Chuang, Nature 402, 390 (1999). [18] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinf urter, and A. Zeilinger, Nature 390, 575 (1997). [19] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri, and D. J. Wineland, Nature 429, 737 (2004). [20] X.-M. Jin, J.-G. Ren, B. Yang, Z.-H. Yi, F. Zhou, X.-F. Xu, S.-K. Wang, D. Yang, Y.-F. Hu, S. Jiang, T. Yang, H. Yin, K. Chen, C.-Z. Peng, and J.-W. Pan, Nat. Photonics 4, 376 (2010). [21] M. A. Nielsen, E. Knill, and R. Laflamme, Nature 396, 52 1998( ). [22] M. Baur, A. Fedorov, L. Steffen, S. Filipp, M. P. da Silva, and A. Wallraff, Phys. Rev. Lett. 108, 040502 (2012). [23] W. Pfaff, B. J. Hensen, H. Bernien, S. B. van Dam, M. S. Blok, T. H. Taminiau, M. J. Tiggelman, R. N. Schouten, M. Markham, D. J. Twitchen, a nd R. Hanson, science 345, 532 (2014). [24] Y. Wang, Y. Shang, and P. Xue, Quant. Inf. Proc. 16, 221（2017）。[25] H.-J. Li、X.-B. Chen、Y.-L. Wang、Y.-Y. Hou 和 J. Li，《量子信息处理》18，266（2019）。[26] T. Yamagami、E. Segawa 和 N. Konno，《量子信息处理》20，224（2021）。[27] H.-J. Li、J. Li 和 X. Chen，《量子信息处理》21，387（2022）。[28] W.-M. Shi、M.-X. Bai、Y.-H. Zhou 和 Y.-G. Yang，《量子信息处理》22，34（2022）。[29] Y. Chatterjee、V. Devrari、B. K. Behera 和 P. K. Panigrahi，《量子信息处理》19，31（2019）。[30] S. Rajiuddin、A. Baishya、B. K. Behera 和 P. K. Panigrahi，《量子信息处理》19，87（2020）。[31] X.-F. Liu、D.-F. Li、Y.-D. Zheng、X.-L. Yang、J. Zhou、Y.-Q. Tan 和 M.-Z. Liu，《中国物理B》31，050301（2022）。[32] Y. Shang 和 M. Li，《量子科学与技术》5，015005（2019）。[33] Y. Tokunaga、T. Yamamoto、M. Koashi 和 N. Imoto，《物理评论A》74，020301（2006）。[34] A. Singh、K. Dorai 和 Arvind，《量子信息处理》17，334（2018）。[35] G. Bhole, *Coherent control for quantum information processing* 2020，博士学位论文，牛津大学（）。[36] N. Khaneja、T. Reiss、C. Kehlet、T. Schulte-Herbr¨uggen 和 S. J. Glaser，《磁共振杂志》172，296（2005）。[37] C. A. Ryan、C. Negrevergne、M. Laforest、E. Knill 和 R. Laflamme，《物理评论A》78，012328（2008）。[38] A. Gaikwad、Arvind 和 K. Dorai，《量子信息处理》20（2021），10.1007/s11128-020-02930-z。[39] A. Gaikwad、K. Shende、Arvind 和 K. Dorai，《科学报告》12，3688（2022）。[40] J. Li、S. Huang、Z. Luo、K. Li、D. Lu 和 B. Zeng，《物理评论A》96，032307（2017）。[41] H. Singh、Arvind 和 K. Dorai，《物理快报A》380，3051（2016）。[42] H. Singh、Arvind 和 K. Dorai，《物理评论A》97，022302（2018）。[43] A. Uhlmann，《数学物理报告》9，273（1976）。[44] R. Jozsa，《现代光学杂志》41，2315（1994）。[45] S. Dogra、A. Dorai 和 K. Dorai，《国际量子信息杂志》13，1550059（2015）。[46] R. Raussendorf 和 H. J. Briegel，《物理评论快报》86，5188（2001）。[47] S. Muralidharan 和 P. K. Panigrahi，《物理评论A》78，062333（2008）。[48] A. Gaikwad、D. Rehal、A. Singh、Arvind 和 K. Dorai，《物理评论A》97，022311（2018）。[49] A. Gaikwad、Arvind 和 K. Dorai，《量子信息处理》21，388（2022）。[50] F. Mallet、F. R. Ong、A. Palacios-Laloy、F. Nguyen、P. Bertet、D. Vion 和 D. Esteve，《自然物理学》5，791（2009）。[51] A. C. Doherty 和 K. Jacobs，《物理评论A》60，2700（1999）。