arXiv:2305.02113v1 [math.MG] 19 Apr 2023

度量多面体的 Löwner-John 椭球

Raziel Gartsman* Nati Linial†

摘要

所有 n点、直径为 ≤ 1 的度量空间构成一个多面体$\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$，称为 度量多面体。在这篇论文中，我们研究用椭球体对 $\mathcal{M}_n$ 进行的最佳逼近。我们给出了包含于 $\mathcal{M}_n$中的最大体积椭球的精确显式描述。当将其按因子 $\Theta(n)$膨胀时，该椭球包含$\mathcal{M}_n$。事实证明，包含 $\mathcal{M}_n$ 的最小体积椭球是一个球。当将该球按因子 $\Theta(n)$收缩时，所得球包含于 $\mathcal{M}_n$中。我们注意到，关于此类椭球的通常定理仅表明，相应的膨胀/收缩因子可以小至 $O(n^2)$。

1 引言

对于整数 $n \geq 3$，我们用 $\mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$表示一个实 $\binom{n}{2}$维空间，其坐标由无序对 ij、$1 \leq i \neq j \leq n$标记。或者，我们将$\mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$中的一个点视为一个实对称 $n \times n$ 矩阵，其主对角线上元素均为零。这样，我们可以将一个具有 n个顶点的度量空间视为 $d \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 中的一个点，其中 d_{ij} 是顶点 i、 j之间的距离。所有 n点度量空间的集合 $\mathcal{MC}_n$ 是一个 $\binom{n}{2}$维锥，称为 度量锥。也就是说，

$$\mathcal{MC}_n = \left\{ d \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}} \mid \text{ for all distinct } 1 \leq i,j,k \leq n\text{: } d_{ij} \geq 0 \text{ and } d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} \geq 0 \right\}.$$

我们用 $\mathcal{M}_n = \mathcal{MC}_n \cap [0,1]^{\binom{[n]}{2}}$ 表示度量多面体，它由所有直径为 ≤ 1 的 n 点度量空间组成。文献中也出现了该多面体的其他版本（例如参见 [7] 或 [3, 2]）。对 $\mathcal{M}_n$ 的研究在文献中受到了广泛关注。A

*希伯来大学计算机科学与工程学院，以色列耶路撒冷 91904。电子邮件：razielg@cs.huji.ac.il。

†希伯来大学计算机科学与工程学院，以色列耶路撒冷 91904。电子邮件：nati@cs.huji.ac.il。部分经费来自 NSF-BSF 基金“图的整体几何”项目。

度量多面体的一个近亲是割多面体（见下文），它同样是一个得到广泛研究的几何对象。

凸几何中的一个基本事实是，每个凸体 K 都可以用椭球体很好地近似。该领域的两个基本结果分别归功于 John 和 Löwner。这些定理表明， K 可以被其最大体积内接椭球体及其按 t 倍放大的椭球体“夹住”。同样，对于包含 K 的最小体积椭球体也有类似结论。按照惯例， $t\mathcal{E}$ 表示以 $\mathcal{E}$ 的中心为基准，将 $\mathcal{E}$ 放大 $t>0$ 倍后得到的椭球体。

事实 1.1 (Löwner-John [5, 6])。 对于每个凸体 $K \subset \mathbb{R}^m$ ，都存在唯一一个包含于 K 且体积最大的椭球体$\mathcal{E}_{inner}$ 。此外，

$$\mathcal{E}_{inner} \subseteq K \subset m\mathcal{E}_{inner}.$$

此外，还存在唯一一个包含 K 的最小体积椭球体 $\mathcal{E}_{outer}$，并且

$$\frac{1}{m}\mathcal{E}_{outer} \subset K \subseteq \mathcal{E}_{outer}.$$

这些内接和外接椭球有时称为勒夫纳-约翰椭球 [4]。我们的主要结果是给出 $\mathcal{M}_n$ 的勒夫纳-约翰椭球的显式表达式，见定理 1.2 和 1.3:

定理 1.2 (外 Löwner-John 椭球 $\mathcal{M}_n$)。 包含 $\mathcal{M}_n \subseteq \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 的最小体积椭球 $\mathcal{E}_n$ 是半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{\binom{n}{2}}$、中心位于 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{[n]}{2}}$ 的 $\binom{n}{2}$ 维球.....。

通过将 $\mathcal{E}_n$ 缩小 $\left(\sqrt{3\binom{n}{2}}\right)^{1/2}$ 倍，我们可以得到一个包含于 $\mathcal{M}_n$中的球。这个缩放因子是紧的。

定理 1.3 (内部Löwner-John椭球体 $\mathcal{M}_n$)。 包含在 $\mathcal{M}_n$ 中的最大体积椭球 $\mathcal{E}_n$ 定义如下。考虑以下 $\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}$ 半正定矩阵 A_n 和向量 $c_n \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$

$$\mathcal{E}_n = A_n \boldsymbol{B}_{\binom{[n]}{2}} + c_n,$$

其中， $\boldsymbol{B}^{\binom{[n]}{2}}$ 是 $\binom{n}{2}$ 维单位球。

也就是说，

$$c_n = \begin{pmatrix} \delta \\ \vdots \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$for\ all\ ij, kl \in \binom{[n]}{2} : [A_n]_{ij,kl} = \begin{cases} \alpha & ij = kl \\ \beta & |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 1 \\ \gamma & \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset \end{cases}$$

Here

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + o(1) && \approx 0.3660 + o(1) \\
\beta &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot (\sqrt{3-\sqrt{3}} - 1) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) && \approx 0.0461 \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\gamma &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot (4 - 2\sqrt{3-\sqrt{3}}) \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) && \approx 0.6398 \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
\delta &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \sqrt{3} + o(1) && \approx 0.6340 + o(1).
\end{aligned}$$

使得 $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{M}_n \subseteq r\mathcal{E}_n$ 成立的最小 r 介于 $\frac{3\sqrt[4]{5+\sqrt{3}}}{6} n + o(n) \approx 0.99n + o(n)$ 与 $\sqrt{3\binom{n}{2}} + o(n) \approx 1.22n + o(n)$ 之间。

注记。注意，定理 *1.2* 和 *1.3* 中的缩减与膨胀参数仅与 n 呈线性关系，而一般定理 *1.1* 只能给出二次因子。

本文的组织结构如下：我们在第 2 节证明定理 1.2。随后在第 3.1 小节证明定理 1.3，并在第 3.2 小节讨论这一结果的一些推论。

1.1 一些预备知识

这里汇集若干标准事实以供参考：一个 m 维椭球体 $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^m$ 是单位球 $A\mathbf{B}_m + c$ 的仿射像，其中 A 是一个半正定矩阵， c 是一个向量。其几何性质由 A 和 c 给出，具体如下：

- c 是该椭球体的中心。
- 该椭球体的各轴沿 A的特征向量方向排列，其长度与相应的特征值成正比。

- 体积($\mathcal{E}$) $=$ (行列式 A) $\cdot$ 体积($\mathbf{B}_m$)。

2 $\mathcal{M}_n$的外 Löwner–John 椭球

John 的以下定理刻画了包含给定凸体的最小体积椭球体 $\mathcal{E}$。鉴于第 1.1 节中的评论，只需考虑特殊情形$\mathcal{E} = B_n$。

定理 2.1 (John [6]). 设 $K \subset \mathbb{R}^N$ 是一个凸体，其中 $K \subseteq B_N$。那么以下命题等价:

- B_N 是包含 K的唯一最小体积椭球。
- 存在接触点 $u_1, ..., u_m \in \partial K \cap \partial B_N$以及正数 $\lambda_1, ..., \lambda_m$，满足 $m \geq N$，使得 $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$ 且 $I_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(u_i u_i^t\right)$，其中 I_n 是单位矩阵。

我们通过找出适当的接触点和系数 λ_i来证明定理 1.2。正如结果所示，并且我们现在将证明，这些接触点与 $[n]$上的割度量 重合。

定义 2.1 （割度量）。 若存在一个集合 $S \subseteq [n]$ 使得 $\forall 1 \leq i \neq j \leq n$: $d_{ij} = \begin{cases} 1 & |\{i,j\} \cap S| = 1 \\ 0 & else \end{cases}$.，则称 -点度量 $d \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 为割度量。与集合 $S \subseteq [n]$ 对应的割度量记为 $\delta(S) \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$。

$[n]$ 上所有割度量的凸包称为割多面体 $\mathcal{C}_n \subset \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$。接下来我们回顾它与 $\mathcal{M}_n$之间的密切关系。

定理 2.2。 $\mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 中的每个割度量都是 $\mathcal{M}_n$的顶点。

证明。 $\mathcal{M}_n$ 中的一个点是顶点，当且仅当它不能表示为 $\mathcal{M}_n$中任意两个不同点的凸组合。由于所有割度量的坐标都只有 0 或 1，因此显然不可能是这样的凸组合。

□

现在我们可以证明定理 1.2 了。

定理 *1.2* 的证明。 $[n]$上有 $m = 2^{n-1} - 1 \geq \binom{n}{2}$ 个割度量。正如定理 2.2 所示，每个割度量 $\delta(S)$ 都是 $\mathcal{M}_n$ 的一个顶点。对于集合 $S \subseteq [n]$，记

$$\delta'(S) = 2\delta(S) - 1 = \begin{cases} 1 & |\{i,j\} \cap S| = 1 \\ -1 & else \end{cases}$$

并令 $\mathcal{M}_n' = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\binom{n}{2}}}\mathcal{M}_n - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}$。注意，$\sqrt{\binom{n}{2}}\,\delta'(S)$ 是一个单位向量，也是$\mathcal{M}_n'$的一个顶点。将这些顶点记为 $u_1,\dots,u_m$，并设 $\forall i$：$\lambda_i = \lambda = \binom{n}{2}m$。对于任意 $1 \le k \ne l \le n$，下式成立：

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(u_iu_i^T)\right]_{kl,kl} = \lambda\sum_{\delta(S),S\subseteq[n]}\left(\frac{1}{\sqrt{\binom{n}{2}}}\left[\delta'(S)\right]_{kl}\right)^2 = \lambda\frac{m}{\binom{n}{2}} = 1.$$

取一个子集 $S \subseteq [n]$，并考虑相应的割度量 $\delta(S)$。注意，对于 $\{k,l\} \ne \{p,q\}$，随机变量 $\left[\delta'(S)\right]_{kl}$、$\left[\delta'(S)\right]_{pq}$ 相互独立。因此：

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(u_iu_i^T\right)\right]_{kl,pq} = \lambda\sum_{S\subseteq[n]}\frac{1}{\binom{n}{2}}\left[\delta'(S)\right]_{kl}\left[\delta'(S)\right]_{pq} = \frac{\lambda m}{\binom{n}{2}}\mathbb{E}^2_{S\subseteq[n]}\left[\delta'(S)\right]_{kl} = 0.$$

现在，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_iu_iu_i^T = I_{\binom{n}{2}}$ 和 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_iu_i = 0$。根据 John 的定理 2.1，包含 $\mathcal{M}_n'$ 的最小体积椭球体是 $\mathbf{B}(\binom{[n]}{2})$。通过应用上述仿射映射的逆映射，即可得到定理 1.2 的第一部分。

最后，记 $p = \begin{pmatrix}1/2\\ \dots\dots\\ 1/2\end{pmatrix}$。注意，$\mathcal{M}_n$ 有两类面。一类给出了度量空间直径的上界，其中每个这样的面到 p 的距离为 $1\,2$。另一类是三角不等式，其中每个面到 p 的距离为 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$。因此，以 p 为中心且包含于 $\mathcal{M}_n$ 中的最大球，其半径为 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$。结论即刻得证。

□

3 $\mathcal{M}_n$的内部Löwner-John椭球体

本节讨论包含在 $\mathcal{M}_n$中的（唯一）最大体积椭球体 $\mathcal{E}_n$。我们的主要结果是定理 1.3 中对该椭球体的描述。证明分为四个部分：

1. $\mathcal{M}_n$ 在对称群 S_n 的作用下保持不变，因此我们可以推断 $\mathcal{E}_n$的一般结构形式。本部分的结果（3.1、3.2）适用于任何具有这种对称性的凸体。

2. 一个 内部Löwner-John椭球体是最大化问题的解。Th. e

$\mathcal{M}_n$ 的对称性以及由此产生的上述 $\mathcal{E}_n$ 结构帮助我们解决这个优化问题，见引理 3.3。

3. 引理 3.3 中问题的一个渐近解，给出了 $\mathcal{E}_n$ 的显式描述。

4. 最后，这一描述使我们能够对满足 $\mathcal{M}_n \subseteq r\mathcal{E}_n$ 的最小 r 给出界，从而证明定理 1.3。

随后，我们继续讨论这一结果的一些推论。具体而言，推论3.4描述了度量空间 $d \in \mathcal{E}_n$ 中可能的最小距离，而定理 3.5 描述了所有接触点 $\mathcal{M}_n \cap \mathcal{E}_n$。

3.1 定理 1.3 的证明

引理 3.1. 设 $n \geq 3$ 是一个整数，且 $\mathcal{E}_n$ 是包含在 $\mathcal{M}_n$ 中的最大体积椭球，则

$$\mathcal{E}_n = A_n \boldsymbol{B}_{\binom{[n]}{2}} + c_n$$

其中 $\boldsymbol{B}^{\binom{[n]}{2}}$ 是 $\binom{n}{2}$ 维单位球， A_n 是一个 $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ 正半定矩阵，而 $c_n \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 如下所示

$$c_n = \begin{pmatrix} \delta_n \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$for\ all\ ij, kl \in \binom{[n]}{2} \colon [A_n]_{ij,kl} = \begin{cases} \alpha_n & ij = kl \\ \beta_n & |\{i,j\} \cap \{k,l\}| = 1 \\ \gamma_n & \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset \end{cases} \tag{2}$$

$with\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ \delta_n \in \mathbb{R}$。这些参数的具体取值将在下文确定。

注记。 为方便记号起见，当上下文中显然可知 n 时，我们可以省略下标，例如写作 α 而非 α_n。

如上所述，证明的主要思路建立在 $\mathcal{M}_n$ 在 S_n 作用下的不变性之上。置换 $\sigma \in S_n$ 通过以下方式作用于 $x \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$：

$$[\sigma(x)]_{ij} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}.$$

这一作用可通过 $\sigma(B) = \{\sigma(x) \mid x \in B\}$ 扩展到子集 $B \subseteq \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$，并通过 $[\sigma(M)]_{ij,kl} = M_{\sigma(i)\sigma(j),\ \sigma(k)\sigma(l)}$ 扩展到矩阵 M。

引理 *3.1* 的证明。我们希望证明 $\mathcal{E}_n$ 是 S_n-不变的。事实上，$\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ 是包含在 $\mathcal{M}_n$ 中的**唯一的**最大体积椭球。对这个包含关系两侧作用 $\sigma \in S_n$，并利用 $\mathcal{M}_n$ 是 σ- 不变的这一事实，以及 σ 的作用是保体积的，即可得出结论。

为证明 (1)，注意到 c_n（即 $\mathcal{E}_n$ 的中心）在任意 $\sigma \in S_n$ 作用下都保持不变。

为证明 (2)，令 $D \in PSD^{\binom{[n]}{2}}$ 满足

$$\mathcal{E}_n = D\mathbf{B}_{\binom{[n]}{2}} + c_n$$

并令

$$A_n = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\tau \in S_n} \tau(D) \in PSD_{\binom{[n]}{2}}.$$

由于 $\mathcal{E}_n = A_n\mathbf{B}^{\binom{[n]}{2}} + c_n$，且 A_n 是 S_n-不变的，因此可得出结论。 □

定理 3.2。设 $n \geq 3$ 是一个整数，并令 A_n 如上定义。则 A_n 至多有三个不同的特征值:

$$\lambda_1 = \alpha + 2(n-2)\beta + \binom{n-2}{2}\gamma \quad \textit{with multiplicity} \quad 1 \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \alpha + (n-4)\beta - (n-3)\gamma \quad \textit{with multiplicity} \quad n-1 \tag{4}$$

$$\lambda_3 = \alpha - 2\beta + \gamma \quad \textit{with multiplicity} \quad \binom{n}{2} - n \tag{5}$$

证明。 在此证明中，我们明确确定 A_n 的所有特征向量及其对应的特征值。

我们首先证明，$\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ 是特征值为 λ_1 的特征向量。事实上，对于任意 $ij \in \binom{[n]}{2}$:

$$\left[A_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{ij} = \sum_{kl} [A_n]_{ij,kl} = \alpha + 2(n-2)\beta + \binom{n-2}{2}\gamma,$$

如前所述。

对于任意 $1 \leq i \leq n$，定义 $s(i)$ 为 $[s(i)]_{kl} = \begin{cases} 1 & i \in \{k,l\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$。注意，$s(1) - s(2)$ 是一个

A_n 的特征向量，其特征值为 λ_2:

$$[A_n \cdot (s(1)-s(2))]_{ij} = \sum_{kl} [A_n]_{ij,kl}[s(1)-s(2)]_{kl} = \sum_{k\geq 3}[A_n]_{ij,1k} - \sum_{k\geq 3}[A_n]_{ij,2k} =$$
$$= \begin{cases} \alpha + (n-4)\beta - (n-3)\gamma & \{i,j\}\cap\{1,2\} = \{1\} \\ -\alpha - (n-4)\beta + (n-3)\gamma & \{i,j\}\cap\{1,2\} = \{2\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$
$$= [\lambda_2 \cdot (s(1)-s(2))]_{ij}.$$

由于 A_n 的 S_n-对称性，所有形如 $s(i) - s(j)$ 且满足 $1 \leq i \neq j \leq n$ 的向量都是 A_n 的特征向量，对应的特征值为 λ_2。λ_2 的重数至少为 $n-1$，因为 $n-1$ 个向量 $s(1) - s(2) \ldots, s(1) - s(n)$ 线性无关。

对于 $1 \leq r \neq s \leq n$，我们用 e_{rs} 表示一个 $\binom{n}{2}$ 维向量，该向量仅在位置 rs 处为 1，其余位置均为 0。对于任意四个**不同的**指标 $1 \leq i,j,k,l \leq n$，令$\xi(i,j,k,l) = e_{ij} - e_{jk} + e_{kl} - e_{il}$。注意，函数 ξ 并非对称的，因此尽管i,j,k,l 只需构成一个不考虑顺序的 4 元组，但由于函数 ξ 的定义，这种对称性被打破了。以下结论成立:

$$[A_n \cdot \xi(1,2,3,4)]_{ij} = [A_n]_{ij,12} - [A_n]_{ij,23} + [A_n]_{ij,34} - [A_n]_{ij,14} =$$
$$= \begin{cases} \gamma - \gamma + \gamma - \gamma & = 0 & i,j > 4 \\ \beta - \beta + \gamma - \gamma & = 0 & \min(i,j) \leq 4 < \max(i,j) \\ \beta - \beta + \beta - \beta & = 0 & ij \in \{13,24\} \\ \alpha - \beta + \gamma - \beta & = \lambda_3 & ij \in \{12,34\} \\ \beta - \alpha + \beta - \gamma & = -\lambda_3 & ij \in \{23,14\} \end{cases}$$

换句话说，$A_n \cdot \xi(1,2,3,4) = \lambda_3 \cdot \xi(1,2,3,4)$。同样，由对称性，$\xi(i,j,k,l)$ 是 A_n 的特征向量，其特征值为 λ_3，对任意互不相同的 $1 \leq i,j,k,l \leq n$ 均成立。为了证明 λ_3 的重数至少为 $\binom{n}{2} - n$，我们在此特征空间中给出这么多个线性无关的向量。令

$$B_1 = \{\xi(1,2,i,j) \mid 3 \leq i < j\}, \quad B_2 = \{\xi(1,2,3,j) - \xi(1,2,j,3) \mid j \geq 4\}.$$

由于 $|B_1| = \binom{n-2}{2}$、$|B_2| = n-3$ 和 $\binom{n-2}{2} + n - 3 = \binom{n}{2} - n$，只需证明_中文字幕

$B_1 \sqcup B_2$ 中的向量线性无关。对于每个向量 $w \in B_1 \sqcup B_2$，令 $\ell(w)$ 为 w 支撑集中的字典序最后一个坐标。我们的结论可由以下容易验证的事实推出：对于任意两个不同的向量 w_1、$w_2 \in B_1 \sqcup B_2$，$\ell(w_1) \neq \ell(w_2)$。

因此，我们已经确定了 A_n 的所有特征值，因为我们已展示出 $\binom{n}{2} = 1 + (n-1)$ 个线性无关的特征向量。 □

根据上述记号，我们通过最小化相关行列式来确定 α_n、β_n、γ_n 和 δ_n（相关背景请参见 1.1 节）。由此得到一个优化问题，接下来我们将对其进行求解。

引理 3.3. α_n、β_n、γ_n 和 δ_n 的值是以下优化问题的解（其中 λ_1、λ_2、λ_3 如定理 *3.2* 所示）：

$$\begin{aligned}
\textit{maximize} \quad & \log(\lambda_1 \cdot \lambda_2^{n-1} \cdot \lambda_3^{\binom{n}{2}-n}) && (6)\\
\textit{s.t.} \quad & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 && (7)\\
& 3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4(n-2)\beta^2 - 4(n-3)\beta\gamma + \left[\binom{n}{2} - 3\right]\gamma^2 \leq \delta^2 && (8)\\
& \alpha^2 + 2(n-2)\beta^2 + \binom{n-2}{2}\gamma^2 \leq (1-\delta)^2 && (9)
\end{aligned}$$

证明。设 $\mathcal{M}_n = \{x \mid \forall 1 \leq i \leq m : a_i^T x \leq b_i\}$。此外，设 $\mathcal{E} = A\mathbf{B}(\binom{[n]}{2}) + c$ 为一个椭球体，其中 A 是一个半正定矩阵。包含关系 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_n$ 成立，当且仅当对于每个 $x \in \mathcal{E}$ 以及每个指标 i，都有 $a_i^T x \leq b_i$。等价地，对于每个n维单位向量 u，都有 $a_i^T Au + a_i^T d \leq b_i$。由于 $\max^{u \in \mathbf{B}(\binom{[n]}{2})} a_i^T Au = \|a_i^T A\|_2$，我们得到 $A\mathbf{B}(\binom{[n]}{2}) + c \subseteq \mathcal{M}_n$

当且仅当对于所有 $1 \leq i \leq m$，都有 $\|a_i^T A\|_2 \leq b_i - a_i^T c$。

此外，$\mathrm{Vol}(\mathcal{E})$ 随着 $\log\det A$ 严格递增，因此，包含于 $\mathcal{M}_n$ 中的唯一最大体积椭球体必定是以下问题的唯一极大值点：

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \log\det A && (10)\\
\text{s.t.} \quad & A \text{ is positive semidefinite} && (11)\\
& \forall i : \|a_i^T A\|_2 \leq b_i - a_i^T c && (12)
\end{aligned}$$

这是一个针对所有半正定矩阵 A 和向量 c的最大化问题。不过，只需对以下形式的矩阵和向量进行最大化：

定理 3.1。这个观察使我们能够用 α、β、γ和 δ更简洁地重写整个问题。

根据定理 3.2，目标函数 (10) 可写为 $\log(\lambda_1 \cdot \lambda_2^{n-1} \cdot \lambda_3^{\binom{n}{2}-n})$，约束 (11) 可写为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$。现在我们通过显式计算重写约束集 (12)。事实上，分离超平面a_i只有两种：一种表示三角不等式，另一种表示距离不超过 1 的上界。

不等式 $x_{12} + x_{23} \geq x_{13}$ 可写为 $t^T x \leq 0$，其中 $t = -e_{12} - e_{23} + e_{13}$。相应的约束 (12) 为

$$\|t^T A\|_2^2 \leq (0 - t^T c)^2 = \delta^2.$$

Now, $\|t^T A\|_2^2$ 的值可以直接计算。对于任意 $1 \leq i < j \leq n$，我们有 ve

$$[t^T A]_{ij} = \begin{cases} -\alpha & ij \in \{12, 13\} \\ \alpha - 2\beta & ij = 23 \\ \gamma - 2\beta & i = 1, j \geq 4 \\ -\gamma & i \geq 2, j \geq 4 \end{cases} \tag{13}$$

因此，$\|t^T A\|_2^2 = 3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4(n-2)\beta^2 - 4(n-3)\beta\gamma + \left[\binom{n}{2} - 3\right]\gamma^2$。合并后，该约束可写为

$$3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4(n-2)\beta^2 - 4(n-3)\beta\gamma + \left[\binom{n}{2} - 3\right]\gamma^2 \leq \delta^2. \tag{14}$$

由于 A 的对称性，约束 (14) 涵盖了定义 $\mathcal{M}_n$ 的所有三角不等式。类似地，条件 $x_{12} \leq 1$，即 $e_{1,2}^T x \leq 1$，可转化为约束

$$\alpha^2 + 2(n-2)\beta^2 + \binom{n-2}{2}\gamma^2 \leq (1-\delta)^2. \tag{15}$$

这最终成为引理中提出的最大化问题。 □

现在我们可以证明定理 1.3 了。证明大部分是技术性的，涉及求解引理 3.3 中提出的优化问题。

定理 *1.3* 的证明（第 *1* 部分，共 *2* 部分）。我们希望求解引理中的优化问题

3.3 使用拉格朗日乘子。我们为约束 (8)、(9) 分别引入松弛变量 t_1、t_2。由于 λ_1、λ_2、λ_3 在最优解中必须为正，因此可以忽略条件 (7)。该问题可转化为以下 8 个拉格朗日方程组：

$$3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4(n-2)\beta^2 - 4(n-3)\beta\gamma + \left[\binom{n}{2} - 3\right]\gamma^2 - \delta^2 - t_1 = 0 \tag{16}$$

$$\alpha^2 + 2(n-2)\beta^2 + \binom{n-2}{2}\gamma^2 - (1-\delta)^2 - t_2 = 0 \tag{17}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{n-1}{\lambda_2} + \frac{\binom{n}{2} - n}{\lambda_3} = \mu_1 \cdot (6\alpha - 4\beta) + \mu_2 \cdot (2\alpha) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{2(n-2)}{\lambda_1} + \frac{(n-1)(n-4)}{\lambda_2} + \frac{-2\left[\binom{n}{2} - n\right]}{\lambda_3} = \\ \mu_1 \cdot (-4\alpha + 8(n-2)\beta - 4(n-3)\gamma) + \mu_2 \cdot (4(n-2)\beta)\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n-2}{2}}{\lambda_1} + \frac{-(n-1)(n-3)}{\lambda_2} + \frac{\binom{n}{2} - n}{\lambda_3} = \\ \mu_1 \cdot (-4(n-3)\beta + 2\left[\binom{n}{2} - 3\right]\gamma) + \mu_2 \cdot \left(2\binom{n-2}{2}\gamma\right)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\mu_1\delta + \mu_2\delta - \mu_2 = 0 \tag{21}$$

$$\mu_1 t_1 = 0 \tag{22}$$

$$\mu_2 t_2 = 0 \tag{23}$$

注意到，不存在满足 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 的解。此外，这个问题的几何性质决定了最优解满足 $\delta \neq 0$,1。结合这些事实，方程 (21)、(22) 和 (23) 得出 $t_1 = t_2 = 0$ 和 $\delta = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$。

现在，可以用以下线性组合方程组替换方程 (18)、(19) 和 (20)，从而得到更简便的方程：

$$\begin{aligned}2\binom{n-2}{2}\mathrm{eq}_{(18)} - (n-3)\mathrm{eq}_{(19)} + 2\mathrm{eq}_{(20)} \\ 2(n-1)\mathrm{eq}_{(18)} + (n-4)\mathrm{eq}_{(19)} - 4\mathrm{eq}_{(20)} \\ \mathrm{eq}_{(18)} \qquad + \mathrm{eq}_{(19)} \quad + \mathrm{eq}_{(20)}\end{aligned}$$

经过这次代换后，我们得到以下方程组：

$$\frac{\mu_2^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} = 3\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4(n-2)\beta^2 - 4(n-3)\beta\gamma + \left[\binom{n}{2} - 3\right]\gamma^2 \tag{24}$$

$$\frac{\mu_1^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} = \alpha^2 + 2(n-2)\beta^2 + \binom{n-2}{2}\gamma^2 \tag{25}$$

$$3\binom{n}{3} = 2((3n-4)\mu_1 + (n-2)\mu_2)\cdot(\alpha - 2\beta + \gamma)^2 \tag{26}$$

$$3\binom{n}{3} = (4(n-1)\mu_1 + 2(n-2)\mu_2)\cdot(\alpha + (n-4)\beta - (n-3)\gamma)^2 \tag{27}$$

$$\binom{n}{2} = 2(\mu_1+\mu_2)\cdot(\alpha + 2(n-2)\beta + \binom{n-2}{2}\gamma)^2 \tag{28}$$

根据几何上的考虑，参数 λ_1、 λ_2、 λ_3 和 δ 均为 $\Theta(1)$。结合定理 3.2，我们得到:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lambda_3 + o(1) = \Theta(1)\\
\beta &= O\left(\frac{1}{n}\right)\\
\gamma &= O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

将其代入我们的方程，得到以下渐近等式。 :

$$\frac{\mu_2^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} = 3\lambda_3^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{29}$$

$$\frac{\mu_1^2}{(\mu_1+\mu_2)^2} = \lambda_3^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{30}$$

$$\frac{1}{4}n^2 = (3\mu_1+\mu_2)\cdot\lambda_3^2 + O(n) \tag{31}$$

$$\frac{1}{4}n^2 = (2\mu_1+\mu_2)\cdot\lambda_2^2 + O(n) \tag{32}$$

$$\frac{1}{4}n^2 = (\mu_1+\mu_2)\cdot\lambda_1^2 + O(n). \tag{33}$$

因此，接下来的解法可通过简单计算得出：

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\sqrt[4]{3}+o(1) && \approx 0.4817+o(1)\\
\lambda_2 &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}+o(1) && \approx 0.4122+o(1)\\
\lambda_3 &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}+o(1) && \approx 0.3660+o(1)\\
\alpha &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}+o(1) && \approx 0.3660+o(1)\\
\beta &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot(\sqrt{3-\sqrt{3}}-1)\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) && \approx 0.0461\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\
\gamma &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot(4-2\sqrt{3-\sqrt{3}})\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) && \approx 0.6398\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
\delta &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\sqrt{3}+o(1) && \approx 0.6340+o(1).
\end{aligned}$$

□

现在我们可以完成定理的证明，并确定最小膨胀因子$r>0$ 的界，使得以其中心为基准将 $\mathcal{E}_n$ 扩大 r 倍后，能够包含所有的 $\mathcal{M}_n$。如定理中所述，我们证明它介于 $0.99n+o(n)$ 和 $1.22n+o(n)$ 之间。再次注意，该上界关于 n 呈线性，并且优于定理 1.1 所保证的二次上界。

定理 *1.3* 的证明（第 *2* 部分，共 *2* 部分）。为得到一个上界，我们寻求一个较小的 $r>0$，使得每个 $x\in\mathcal{M}_n$ 也属于 $r\mathcal{E}_n$。显然，对所有 $x\in[0,1]^{\binom{n}{2}}$ 都成立是一个更强的条件，等价地说，对所有 0-1 向量都成立。因此，设 $x\in\{0,1\}^{\binom{n}{2}}$ 是一个 0-1 向量，并设 $r=\binom{n}{2}^{1/2}\cdot\frac{\delta_n}{\lambda_3}=\sqrt{3\binom{n}{2}}+o(n)\approx 1.22n+o(n)$。那么

$$\|x-c_n\|_2^2=\left(\binom{n}{2}-\|x\|_1\right)\cdot\delta_n^2+\|x\|_1\cdot(1-\delta_n)^2\le\binom{n}{2}\delta_n^2$$

由此可知，如果 n 足够大，那么 $\mathcal{M}_n\subseteq r\mathcal{E}_n$，因为对于每个 $x\in\mathcal{M}_n$，都有

$$\|(rA_n)^{-1}(x-c_n)\|_2\le\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\lambda_3}\max_{x\in\{0,1\}^{\binom{n}{2}}}\|x-c_n\|_2=1.$$

为得到一个下界，考虑一个对应于大小为 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 的割的顶点 v。直接

计算表明，对于 $r' < \frac{3\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{6} n + o(n) \approx 0.99n + o(n)$， v 不属于 $r'\mathcal{E}_n$。

□

注记。 我们不知道取此 r' 值的膨胀椭球是否包含 $\mathcal{M}_n$，但它确实包含割多面体。

3.2 定理 1.3 的结论

本节其余部分将讨论这一主要结果的一些推论。

Kozma、Meyerovitch、Peled 和 Samotij 在他们精彩的论文 [7] 中证明， $\mathcal{M}_n$ 可以由超立方体 $[\frac{1}{2} - n^{-s}, 1]^{\binom{n}{2}}$很好地近似，其中 $s > 0$ 是一个绝对常数（见他们的定理 1.3）。具体而言，对于所有 $n \geq 3$，均匀采样的度量空间 $d \in \mathcal{M}_n$ 满足：

$$\text{with probability } > 1 - O(n^{-s}), \text{all distances } d_{ij} \text{ are } \geq \frac{1}{2} - n^{-s}$$

这引出了一个问题： $\mathcal{E}_n$ 中各点坐标的取值范围如何?

推论3.4。 设 $n \geq 3$ 为一个整数，且 $\mathcal{E}_n$ 为包含于 $\mathcal{M}_n$ 中的最大体积椭球。则

$$\min_{d \in \mathcal{E}_n,\, ij \in \binom{[n]}{2}} d_{ij} = 2 - \sqrt{3} + o(1) \approx 0.27 + o(1)$$

证明。 由于 $\mathcal{E}_n$ 的 S_n-对称性，有：

$$\min_{d \in \mathcal{E}_n,\, ij \in \binom{[n]}{2}} d_{ij} = \min_{d \in \mathcal{E}_n} d_{12} = \min_{d \in \mathcal{E}_n} e_{12}^T d.$$

回顾 $\mathcal{E}_n = A_n \mathbf{B}^{\binom{[n]}{2}} + c_n$，因此

$$\begin{aligned}
\min_{d \in \mathcal{E}_n} e_{12}^T d &= \min_{\|v\|_2 \leq 1} e_{12}^T c_n + e_{12}^T A_n v = \delta_n + \min_{\|v\|_2 \leq 1} \left(e_{12}^T A_n\right) v = \\
&= \delta_n - \|e_{12}^T A_n\|_2 = \delta_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 2(n-2)\beta_n^2 + \binom{n-2}{2}\gamma_n^2} = \\
&= 2 - \sqrt{3} + o(1) \approx 0.27 + o(1)
\end{aligned}$$

□

最后，我们确定 $\mathcal{E}_n$ 与 $\mathcal{M}_n$的交集。请注意，内洛恩-约翰椭球具有类似于定理 2.1 [1] 中所示的性质。

定理 3.5. 对于每个 $n \geq 3$， $\mathcal{M}_n$ 与其内部*Löwner-John*椭球体 $\mathcal{E}_n$ 的交集由以下各点的 S_n-轨道组成 p， $q \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$：

$$[p]_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + o(1) & \approx 0.42 + o(1) \quad ij \in \{12, 13\} \\ 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + o(1) & \approx 0.85 + o(1) \qquad ij = 23 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} + o(1) & \approx 0.63 + o(1) \qquad otherwise \end{cases} \tag{34}$$

$$[q]_{ij} = \begin{cases} 1 & ij = 12 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} + o(1) \approx 0.63 + o(1) & otherwise \end{cases} \tag{35}$$

证明。回忆一下， $\mathcal{M}_n$ 有两类面：表示三角不等式的面，以及将所有距离限制为不超过 1 的面。

设 $p \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 是 $\mathcal{E}_n$ 与对应于三角不等式 $d_{23} - d_{12} - d_{23} \leq 0$ 的面的接触点，并将 $-e_{12} - e_{23} + e_{13} \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 记为 t。由于 $\mathcal{E}_n = A_n \mathbf{B}^{\binom{[n]}{2}} + c_n$，有：

$$\begin{aligned} p = c_n + A_n \left(\operatorname*{argmax}_{\|v\| \leq 1} t^T (A_n v + c_n) \right) &= c_n + A_n \left(\operatorname*{argmax}_{\|v\| \leq 1} t^T A_n v \right) \\ &= c_n + \frac{1}{\|t^T A_n\|} A_n \left(A_n^T t \right) = c_n + \frac{1}{\|t^T A_n\|} A_n^2 t. \end{aligned}$$

如（13）所示，对于所有 $1 \leq i$、 $j \leq n$：

$$[At]_{ij} = \begin{cases} \alpha & ij \in \{12, 13\} \\ \alpha - 2\beta & ij = 23 \\ \gamma - 2\beta & i = 1, j \geq 4 \\ \gamma & i \geq 2, j \geq 4 \end{cases}$$

因此

$$[A \cdot At]_{ij} = \sum_{kl} A_{ij,kl} [At]_{kl} = (A_{ij,12} + A_{ij,13})\, \alpha + A_{ij,23}(2\beta - \alpha) + \sum_{l \geq 4} A_{ij,1l}(2\beta - \gamma) + \sum_{\substack{k \geq 2 \\ l \geq 4}} A_{ij,kl} \gamma.$$

公式（34）可通过直接计算得出（为简洁起见，此处略去计算过程），结合定理 1.3 中的界，我们得到所需结果。将 $\sigma \in S_n$ 应用于 p，得到 $\mathcal{E}_n$ 与超平面 $t_{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)}$ 的交集点。

如果 $q \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{2}}$ 是 $\mathcal{E}_n$ 与面 $d_{12} \leq 1$ 相交的点，那么

$$q = c_n + A_n \left(\operatorname*{argmax}_{\|v\| \leq 1} e_{01}^T (A_n v + c_n) \right) = c_n + A_n \left(\operatorname*{argmax}_{\|v\| \leq 1} [A_n]_{12} v \right) = c_n + \frac{1}{\|[A_n]_{12}\|_2} A_n [A_n]_{12}$$

a而等式（35）同样可由直接计算得到，具体细节从略。 □

4 讨论与开放问题

• 提及一个研究用椭球逼近凸体的不那么显而易见的理由：在椭球上优化线性函数相当简单，因为椭球是球的仿射像。这或许能为求解困难优化问题的近似解提供一种方法。如果无法确定某个（线性或凸）函数 f 在凸体上 K的最大值，可以先用椭球 $\mathcal{E}$ 逼近 K，再在其上 f 进行优化。目前我们还无法举出任何有意义的具体例子，但这引出了下一个问题。

• 能否求出割多面体的勒夫纳–约翰椭球？由此得到的近似对最大割问题而言效果如何？请注意，我们在研究 $\mathcal{M}_n$的逼近椭球时使用的对称性论证在这里同样适用。

• 我们成功得到了定理 1.3 中最优膨胀因子的良好上界和下界，但其确切数值仍未能确定。确定该因子的精确值仍是一个开放问题。

参考文献

[1] Keith Ball.《凸体中的最大体积椭球》。载于：*Geometriae Dedicata*41.2 (1992)，第 241–250 页。

[2] Antoine Deza、Komei Fukuda、Dmitrii Pasechnik 和 Masanori Sato。《度量多面体的骨架》。载于：离散与计算几何（东京，*2000*）。第 2098 卷。《计算机科学讲义笔记》。柏林：施普林格，2001 年，第 125–136 页。

[3] Michel Marie Deza 和 Monique Laurent。《割与度量的几何》。算法与组合学。Springer Berlin Heidelberg，1997年。isbn: 9783540616115。[4] Martin Henk。“勒夫纳-约翰椭球”。载于：*Documenta Math* 95（2012年），第 106 页。[5] Ralph Howard。“约翰椭球定理”。载于：南卡罗来纳大学 （1997年）。[6] Fritz John。《以不等式为辅助条件的极值问题，为庆祝 R. Courant 六十岁生日而作的研究与论文》。1948年。[7] Gady Kozma、Tom Meyerovitch、Ron Peled 和 Wojciech Samotij。“典型度量空间是什么样的？”载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2104.01689* （2021年）。