arXiv:2305.02114v1 [math.PR] 3 May 2023

受 Chv´atal 定理启发的威布尔分布与帕累托分布研究

Cheng Li[1], Ze-Chun Hu[1], Qian-Qian Zhou[2], *

[1] 四川大学数学学院，中国成都 610065[2] 南京邮电大学理学院，中国南京 210023

摘要

令 $B(n,p)$ 表示参数为 n 和 p的二项随机变量。Chv´atal 定理指出，对于任意固定的 $n \geq 2$，当 m在 $\{0,\ldots,n\}$中变化时，概率 $q_m := P(B(n,m/n) \leq m)$ 在 m最接近$\frac{2n}{3}$时取最小值。受该定理启发，本文研究随机变量服从威布尔分布或帕累托分布时，其取值不超过其期望的概率的最小值问题。

MSC：60C05，60E15

关键词：Chv´atal 定理、威布尔分布、帕累托分布

1 引言

令 $B(n,p)$ 表示一个参数为 n 和 p 的二项随机变量。Janson 在 [5] 中提出了以下由 Va˘sk Chv´atal 的定理所启发的猜想。

猜想 1（Chv´atal）。对于任意固定的 $n \geq 2$，当 m遍历 $\{0,\ldots,n\}$ 时，概率$q_m := P(B(n,m/n) \leq m)$ 在 m最接近 $\frac{2n}{3}$ 时最小。

猜想 1 在机器学习中具有重要应用，例如用于分析相对偏差界和无界损失函数的广义边界（[2] 和 [4]）。关于二项随机变量超过其期望值的概率，我们参考 Doerr [2],Greenberg 和 Mohri [4], Pelekis 以及 Ramon [7]。Janson [5] 证明了，对于较大的 n，猜想 1 成立。Barabesi 等人 [1] 和 Sun [8] 对一般$n \geq 2$下的猜想 1 给出了肯定答案。下文将猜想 1 称为 Chv´atal 定理。

*通讯作者：qianqzhou@yeah.net

受 Chv´atal 定理的启发，Li 等人 [6] 研究了当随机变量的分布为泊松分布、几何分布或帕斯卡分布时，随机变量不超过其期望值的概率的最小值问题。Sun 等人 [9]研究了伽马分布下相应的最小值问题，以及其他相关问题。本文将在第 2 节和第 3 节分别研究威布尔分布和帕累托分布下的最小值问题。

2 威布尔分布

设 X 是参数为 α 和 θ（$\alpha>0$，$\theta>0$）的威布尔随机变量，其密度函数为

$$f(x)=\frac{\alpha}{\theta}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x^{\alpha}}{\theta}},\ x>0.$$

我们知道其期望为 $EX=\theta^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)$，其中 $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)$ 是伽马函数，即 $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)=\int_0^{\infty}u^{\frac{1}{\alpha}}e^{-u}du$。对于任意给定的实数 $\kappa>0$，有

$$P\left(X\leq\kappa EX\right)=\int_0^{\kappa\theta^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}\frac{\alpha}{\theta}t^{\alpha-1}e^{-\frac{t^{\alpha}}{\theta}}dt.$$

通过作变量代换 $t=(\theta x)^{\frac{1}{\alpha}}$，可得

$$\begin{aligned}P\left(X\leq\kappa EX\right) &= \int_0^{\left(\kappa\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)^{\alpha}}\frac{\alpha}{\theta}\left(\theta x\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}e^{-x}\frac{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}dx\\ &= \int_0^{\left(\kappa\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)^{\alpha}}e^{-x}dx\\ &= 1-e^{-\left(\kappa\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)^{\alpha}},\end{aligned}$$

这表明 P（$X\leq\kappa EX$）与 θ 无关。

定义一个函数

$$g_{\kappa}(\alpha):=1-e^{-\left(\kappa\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)^{\alpha}},\quad\alpha>0. \tag{2.1}$$

本节的主要结果是

命题 2.1 (i) 若 $\kappa\leq1$，则

$$\inf_{\alpha\in(0,+\infty)}g_{\kappa}\left(\alpha\right)=\lim_{\alpha\to+\infty}g_{\kappa}(\alpha)=\begin{cases}0, & \kappa<1,\\ 1-e^{-e^{-\gamma}}, & \kappa=1,\end{cases}$$

其中 γ 是欧拉常数，即 $\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$。

(ii) 若 $\kappa>1$，则

$$\min_{\alpha\in(0,+\infty)}g_{\kappa}\left(\alpha\right)=g_{\kappa}\left(\alpha_0\left(\kappa\right)\right),$$

其中 $\alpha_0(\kappa)=\frac{1}{x_0(\kappa)-1}$，且 $x_0(\kappa)$ 是函数 $\varphi_{\kappa}(x):=(x-1)\ \psi(x)\ -\ln\left(\kappa\Gamma\left(x\right)\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一零点，其中 $\psi(x)$ 是双伽马函数（见下文定义 2.3）。

注意 $\left(\kappa\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\right)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(\kappa\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1))}$。令 $x=\frac{1}{\alpha}+1$，并定义函数

$$h_{\kappa}(x):=\frac{\ln(\kappa\Gamma(x))}{x-1},\quad x>1. \tag{2.2}$$

Then

$$g_{\kappa}(\alpha)=1-e^{-e^{h_{\kappa}(x)}}, \tag{2.3}$$

并且为了完成　　命题 2.1 的证明，只需证明以下引理。

引理 2.2 (i) 若 $\kappa\leq 1$，则

$$\inf_{x\in(1,+\infty)}h_{\kappa}(x)=\lim_{x\to 1^{+}}h_{\kappa}(x)=\begin{cases}-\infty, & \kappa<1,\\ -\gamma, & \kappa=1,\end{cases}$$

其中 γ 是欧拉常数。
(ii) 若 $\kappa>1$，则

$$\min_{x\in(1,+\infty)}h_{\kappa}(x)=h_{\kappa}(x_{0}(\kappa)),$$

其中 $x_{0}(\kappa)$ 是函数 $\varphi_{\kappa}(x):=(x-1)\psi(x)-\ln(\kappa\Gamma(x))$ 在 $(1,+\infty)$ 上的唯一零点，其中 $\psi(x)$ 是双伽马函数。

在给出.....之前　引理 2.2 的证明需要先介绍一些关于多伽马函数的预备知识。　　.

定义 2.3 (*[3, 1.16]*) 令 m 为任意非负整数。 m阶多伽马函数 $\psi^{(m)}$定义为

$$\psi^{(m)}(z):=\frac{\mathrm{d}^{m}}{\mathrm{d}z^{m}}\psi(z)=\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}z^{m+1}}\ln\Gamma(z),Rez>0.$$

当 $m=0$, $\psi(z):=\psi^{(0)}(z)=\mathrm{d}\,\mathrm{d}z\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ 被称为双伽马函数。

根据 [3, 1.7(3)] 和 [3, 1.9(10)]，我们知道

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(z+n)}\\ &= -\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[(n+1)(z+n)]}, \qquad (2.4)\\ \psi^{(1)}(z) &= \psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{2}}. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

引理 2.2 的证明。由 (2.2) 和定义 2.3，得

$$h'_{\kappa}(x)=\frac{(x-1)\psi(x)-\ln(\kappa\Gamma(x))}{(x-1)^{2}}=\frac{\varphi_{\kappa}(x)}{(x-1)^{2}},\quad x>1. \tag{2.6}$$

由（2.5），我们得到

$$\varphi_\kappa'(x) = (x-1)\psi^{(1)}(x) = (x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2} > 0, \quad \forall x > 1.$$

由此可知，函数 $\varphi_\kappa(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上严格递增。

因此，若 $\kappa \le 1$，则有

$$\varphi_\kappa(x) > \varphi_\kappa(1) = -\ln\kappa \ge 0, \quad \forall x > 1.$$

于是，由 (2.6) 可得

$$h_\kappa'(x) > 0, \quad \forall x > 1,$$

这意味着函数 $h_\kappa(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上严格递增。因此，函数 $h_\kappa(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上没有最小值，并且

$$\inf_{x\in(1,+\infty)} h_\kappa(x) = \lim_{x\to 1^+} h_\kappa(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\Gamma(x)}{x-1} + \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\kappa}{x-1}.$$

由洛必达法则和 (2.4)，可得

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\Gamma(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \Gamma'(1) = \psi(1) = -\gamma.$$

因此，

$$\lim_{x\in(1,+\infty)} h_\kappa(x) = \begin{cases} -\infty, & \kappa < 1, \\ -\gamma, & \kappa = 1. \end{cases}$$

若 $\kappa > 1$，则 $\varphi_\kappa(1) = -\ln\kappa < 0$. 由 [3, 1.18(1)]（斯特林公式）和 [3, 1.18(7)], 可得，当$z \to \infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \ln\Gamma(z) &= \left(z-\tfrac{1}{2}\right)\ln z - z + \tfrac{\ln(2\pi)}{2} + o(1), \\ \psi(z) &= \ln z - \tfrac{1}{2z} + o\left(\tfrac{1}{z}\right), \quad |\arg z| < \pi. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\varphi_\kappa(x) &= \lim_{x\to+\infty}[(x-1)\psi(x) - \ln\Gamma(x) - \ln\kappa] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)\left(\ln x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)\right) - \ln\kappa\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} - \ln\kappa + o(1)\right] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

由于函数 $\varphi_\kappa(x)$ 连续，根据零点定理，存在 $x_0(\kappa) \in (1,+\infty)$，它依赖于 κ，满足以下条件。

$$\varphi_\kappa(x_0(\kappa)) = 0.$$

此外，结合函数 $\varphi_\kappa(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的单调性，我们知道 $x_0(\kappa)$ 是函数 $\varphi_\kappa(x)$ 的唯一零点，并且

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa(x) &< 0, \quad \forall x \in (1, x_0(\kappa)); \\ \varphi_\kappa(x) &> 0, \quad \forall x \in (x_0(\kappa), +\infty). \end{aligned}$$

然后，由 (2.6) 可得

$$\begin{aligned} h'_\kappa(x) &< 0, \quad \forall x \in (1, x_0(\kappa)); \\ h'_\kappa(x) &> 0, \quad \forall x \in (x_0(\kappa), +\infty). \end{aligned}$$

因此，函数 $h_\kappa(x)$ 在 $(1, x_0(\kappa))$ 上严格递减，在 $(x_0(\kappa)\ +\infty)$ 上严格递增，这意味着

$$h_\kappa(x) \geq h_\kappa(x_0(\kappa)), \quad \forall x > 1.$$

因此，

$$\min_{x\in(1,+\infty)} h_\kappa(x) = h_\kappa(x_0(\kappa)).$$

证明完毕。 □

3 帕累托分布

设 X 是参数为 a 和 θ （$a > 0, \theta > 0$）的帕累托随机变量，其密度函数为

$$f(x) = \theta a^\theta x^{-(\theta+1)} I_{(a,\infty)}(x).$$

当 $\theta > 1$时， X 的期望为 $EX = \frac{\theta a}{\theta-1}$。那么，对于任意给定的实数 $\kappa > 0$，有

$$\begin{aligned} P(X \leq \kappa EX) &= \int_a^{\frac{\kappa\theta a}{\theta-1}} \theta a^\theta t^{-(\theta+1)} dt \\ &= -\left(\frac{a}{t}\right)^\theta \Big|_a^{\frac{\kappa\theta a}{\theta-1}} \\ &= 1 - \left(\frac{\theta-1}{\kappa\theta}\right)^\theta, \end{aligned}$$

这表明 $P(X \leq \kappa EX)$ 与 a 相互独立。注意，为使上述等式有意义，若 $\kappa < 1$，参数 θ 应满足 $1 < \theta \leq \frac{1}{1-\kappa}$；若 $\kappa \geq 1$，参数 θ 应满足 $\theta > 1$.

定义函数

$$g_\kappa(\theta) := 1 - \left(\frac{\theta-1}{\kappa\theta}\right)^\theta, \ 1 < \theta \leq \frac{1}{1-\kappa}, \kappa < 1 \text{ or } \theta > 1, \kappa \geq 1.$$

本节的主要结果是

命题 3.1 (i) 若 $\kappa<1$，则

$$\min_{\theta\in\left(1,\frac{1}{1-\kappa}\right]} g_\kappa(\theta)=g_\kappa\left(\frac{1}{1-\kappa}\right)=0.$$

(ii) 若 $\kappa=1$，则 $\inf^{\theta\in(1,+\infty)} g_1(\theta) = \lim^{\theta\to+\infty} g_1(\theta)$ $=1-e^{-1}$。(iii) 若 $\kappa>1$，则

$$\min_{\theta\in(1,+\infty)} g_\kappa(\theta)=g_\kappa\left(\theta_0(\kappa)\right),$$

其中，$\theta_0(\kappa)=\frac{1}{1-x_0(\kappa)}$，而 $x_0(\kappa)$ 是函数 $\varphi_\kappa(x):=1-\frac{1}{x}-\ln\frac{x}{\kappa}$ 在区间 (0, 1) 上的唯一零点。

注意，$\left(\frac{\theta-1}{\kappa\theta}\right)^\theta=e^{\theta\ln\frac{\theta-1}{\kappa\theta}}$。令 $x=1-\frac{1}{\theta}$，并定义函数

$$h_\kappa(x):=\frac{\ln\frac{x}{\kappa}}{x-1},\ 0<x\le\kappa,\kappa<1,\ \text{or } 0<x<1,\kappa\ge1. \tag{3.1}$$

Then

$$g_\kappa(\theta)=1-e^{-h_\kappa(x)}, \tag{3.2}$$

为了完成命题 3.1 的证明，只需证明以下引理。

引理 3.2 (i) 若 $\kappa<1$，则

$$\min_{x\in(0,\kappa]} h_\kappa(x)=h_\kappa(\kappa)=0.$$

(ii) 若 $\kappa=1$，则 $\inf_{x\in(0,1)} h_1(x) = \lim_{x\to1^-} h_1$ $(x)=1$。(iii) 若 $\kappa>1$，则

$$\min_{x\in(0,1)} h_\kappa(x)=h_\kappa\left(x_0(\kappa)\right),$$

其中，$x_0(\kappa)$ 是函数 $\varphi_\kappa(x):=1-\frac{1}{x}-\ln\frac{x}{\kappa}$ 在区间 (0, 1) 上的唯一零点。

证明。（i）若 $\kappa<1$，由 (3.1) 可得

$$h'_\kappa(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln\frac{x}{\kappa}}{(x-1)^2}=\frac{\varphi_\kappa(x)}{(x-1)^2},\quad 0<x\le\kappa. \tag{3.3}$$

根据 $\varphi_\kappa(x)$ 的定义，可得

$$\varphi'_\kappa(x)=\frac{1-x}{x^2}>0,\quad \forall 0<x\le\kappa.$$

由此可知，函数 $\varphi_\kappa(x)$ 在 $(0,\kappa]$ 上严格递增，因此

$$\varphi_\kappa(x)\le\varphi_\kappa(\kappa)=\frac{\kappa-1}{\kappa}<0,\quad \forall 0<x\le\kappa. \tag{3.4}$$

然后，由 (3.3) 和 (3.4) 可得

$$h'_{\kappa}(x) < 0, \quad \forall 0 < x \leq \kappa,$$

这意味着函数 $h_{\kappa}(x)$ 在 $(0, \kappa]$ 上严格递减。因此

$$\min_{x \in (0,\kappa]} h_{\kappa}(x) = h_{\kappa}(\kappa) = 0.$$

若 $\kappa \geq 1$，根据 (3.1) 以及 $\varphi_{\kappa}(x)$ 的定义，我们还可得

$$h'_{\kappa}(x) = \frac{\varphi_{\kappa}(x)}{(x-1)^2}, \quad 0 < x < 1, \tag{3.5}$$

and

$$\varphi'_{\kappa}(x) = \frac{1-x}{x^2} > 0, \quad \forall 0 < x < 1.$$

由此可知，函数 $\varphi_{\kappa}(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格递增。

(ii) 若 $\kappa = 1$，则

$$\varphi_{\kappa}(x) < \varphi_{\kappa}(1) = -\ln \kappa = 0, \quad \forall 0 < x < 1.$$

由 (3.5) 可得

$$h'_{\kappa}(x) < 0, \quad \forall 0 < x < 1,$$

这意味着函数 $h_{\kappa}(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格递减。因此，

$$\inf_{x \in (0,1)} h_{\kappa}(x) = \lim_{x \to 1^-} h_{\kappa}(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

(iii) 若 $\kappa > 1$，则 $\varphi_{\kappa}(1) = \ln \kappa > 0$。此外，

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \varphi_{\kappa}(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(1 - \tfrac{1}{x} - \ln x + \ln \kappa\right) \\ &= \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \ln \kappa - \tfrac{x \ln x + 1}{x}\right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

由于函数 $\varphi_{\kappa}(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续，根据零点定理，存在 $x_0(\kappa) \in (0, 1)$，其取决于参数 κ，满足以下条件。

$$\varphi_{\kappa}(x_0(\kappa)) = 0.$$

由函数 $\varphi_{\kappa}(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性可知，$x_0(\kappa)$ 是 $\varphi_{\kappa}(x)$ 的唯一零点，并且

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa}(x) &< 0, \quad \forall x \in (0, x_0(\kappa)); \\ \varphi_{\kappa}(x) &> 0, \quad \forall x \in (x_0(\kappa), 1). \end{aligned}$$

然后，由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned} h'_{\kappa}(x) &< 0, \quad \forall x \in (0, x_0(\kappa)); \\ h'_{\kappa}(x) &> 0, \quad \forall x \in (x_0(\kappa), 1). \end{aligned}$$

因此，函数 $h_{\kappa}(x)$ 在 $(0, x_0(\kappa))$ 上严格递减，在 $(x_0(\kappa), 1)$ 上严格递增。由此

$$\min_{x\in(0,1)} h_{\kappa}(x) = h_{\kappa}(x_0(\kappa)).$$

证明完毕。 □

致谢 本研究得到国家自然科学基金（12171335）、四川大学科学发展项目（2020SCUNL201）和南京邮电大学科学基金（NY221026）的资助。

参考文献

[1] L. Bababesi, L. Pratelli, P. Rigo，关于 Chv´atal-Janson 猜想，《统计与概率通讯》194 (2023) 109744。[2] B. Doerr，二项随机变量超过其期望的概率的初等分析，《统计与概率通讯》139 (2018) 67-74。[3] A. Erd´elyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi，《高等超越函数》第三卷，部分内容根据 Harry Bateman 留下的笔记编写。麦格劳-希尔图书公司，纽约-多伦多-伦敦，1955。[4] S. Greenberg, M. Mohri，二项随机变量超过其期望的概率的紧下界，《统计与概率通讯》86 (2014) 91-98。[5] S. Janson，关于二项随机变量不超过其期望的概率，《统计与概率通讯》171 (2021) 109020。[6] F.-B. Li, K. Xu, Z.-C. Hu，受 Chv´atal 猜想启发的泊松分布、几何分布和帕斯卡分布研究，arXiv: 2210.16515v2 (2023)。[7] C. Pelekis, J. Ramon，二项随机变量超过其均值的概率下界，《统计与概率通讯》119 (2016) 305-309。[8] P. Sun，二项分布超过其期望的概率的严格单峰性，《离散应用数学》301 (2021) 1-5。[9] P. Sun, Z.-C. Hu, W. Sun，伽马分布的两个概率函数的极值，arXiv: 2303.17487 (2023)。