arXiv:2305.02119v1 [physics.optics] 3 May 2023

矢量多普勒复谱及其在旋转探测中的应用

Shuxian Quan, Ling Chen,* Siyao Wu, 和 Baocheng Zhang†
School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China

光的矢量偏振场已用于通过旋转多普勒效应探测旋转速度，但此前的测量针对的是单粒子系统的旋转。当旋转表面粗糙时，散射矢量多普勒信号谱会变得复杂。本文采用轨道角动量模态展开法进行复谱分析。研究发现，复谱的傅里叶形式中最高峰出现在频移 $2l\Omega$ 处，该频移与入射涡旋光的拓扑荷（l）以及粗糙表面的旋转速度（Ω）有关。基于复谱分析，我们构建了一种可同时测量一般物体旋转速度大小和方向的方法，该方法在遥感和天文学中具有实际应用价值。

一、引言

光学涡旋的概念最早于 1989 [1], 提出，此后不久，人们发现拉盖尔–高斯（LG）光束形成的光学涡旋具有轨道角动量（OAM），其相位表示为 $exp(il\phi)$，其中 l 是拓扑荷（拓扑荷） [2] ，决定光子轨道角动量的大小（$l\hbar$），而 ϕ 是绕旋转轴的方位角。经过约30年的发展，光学涡旋已应用于光通信、量子信息等诸多领域 [3]。

理论上，1996 年有人提出可将光学涡旋用于测量旋转物体的旋转速率 [4]。当涡旋光束被旋转物体散射时，可以观测到光的轨道角动量分量发生频移，并据此推导出旋转速率。从本质上说，这种频移源于多普勒效应 [5], ，这一现象也称为旋转多普勒效应（RDE） [6–11]。2013 年，研究人员首次在实验中利用 RDE 探测旋转物体 [12, 13], ，并证实即使旋转物体的角动量矢量平行于观测方向，RDE 仍然有效。此后，RDE 也被用于探测不同的宏观与微观目标的旋转（参见综述 [14] 及其中的参考文献）。当旋转物体表面粗糙时，仍可利用 RDE 测量其旋转速率。然而，粗糙表面产生的散射光频谱较为复杂，对频谱进行分析对于测量至关重要。通常采用一种方法，将频谱展开为对应于不同拓扑荷值的各个轨道角动量分量 [15–19]。

以上这些都基于空间偏振分布固定的标量涡旋光束，因此可以测量旋转速度的大小，但是 the 在这些情况下，无法确定旋转方向。近期一项颇具吸引力的研究 [20, 21] 利用柱矢量偏振场（CVPFs） [22–25] 实现了对旋转粒子速度大小和方向的同时测量。所谓的柱矢量偏振场，其特点是光束横向平面上的偏振场在空间上呈周期性变化，并能够形成偏振涡旋。在这项近期研究中，利用柱矢量偏振场光束照射旋转粒子，并通过观测两束光之间的相对相位差来确定速度矢量（大小和方向）。然而，该研究仅展示了对单个旋转粒子的测量，该粒子由数字微镜器件（DMD）模拟（另见参考文献 [26, 27] 中的其他相关测量），这相当于对均匀各向同性且均质表面的旋转进行测量。由于粗糙表面的非均匀特性可能导致光束照射旋转粗糙表面后产生复杂的多普勒散斑信号，因此，这种方法能否直接应用于测量粗糙表面的旋转，尚不明确。

本文研究了利用矢量涡旋光场测量旋转锡箔粗糙表面在垂直于光轴的横向平面内的速度矢量。我们对旋转粗糙表面散射产生的复谱进行了理论分析，此前尚未针对矢量涡旋光场开展这方面的研究。我们还采用近轴双路径偏振检测方法测量多普勒频移，该方法能够抑制复谱中低频项带来的噪声。结果表明，仍可同时测量垂直于光轴的横向平面内速度的大小和方向。将矢量多普勒测量方法扩展至一般旋转物体，对实际检测具有重要意义，并有望应用于遥感和天文学。

*电子邮箱：lingchen@cug.edu.cn
†电子邮箱：zhangbaocheng@cug.edu.cn

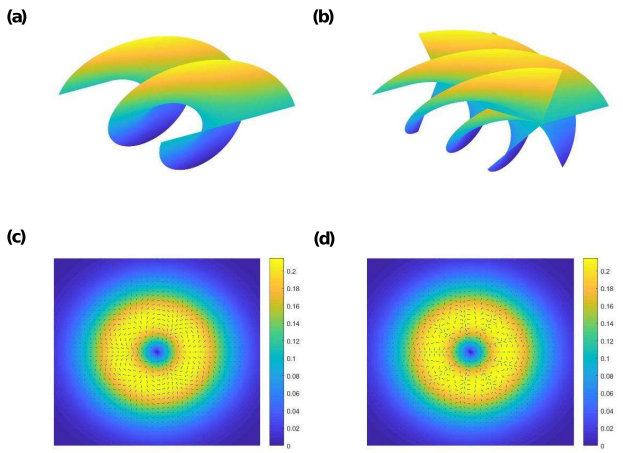

图 1：光学涡旋示意图。(a) 中展示了拓扑荷为 $l = 2$ 的标量涡旋光束的相位波前，(b) 中展示了拓扑荷为 $l = 5$ 的标量涡旋光束的相位波前。(c) 中展示了拓扑荷为 $l = 2$ 的矢量涡旋光束在横向平面上的偏振分布，(d) 中展示了拓扑荷为 $l = 5$ 的矢量涡旋光束在横向平面上的偏振分布。

II. 散射光

我们首先考虑一个一般的柱矢量偏振场（CVPF），其光场可利用琼斯矩阵表示为

$$\vec{E} = \vec{E}_0(r,z)\, e^{-2\pi i f t} \begin{pmatrix} \cos(l\phi+\alpha) \\ -\sin(l\phi+\alpha) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

它可以由一束拓扑荷为 l 的右旋偏振涡旋光束与一束拓扑荷为 $(-l)$ 的左旋偏振涡旋光束叠加产生。这两束光在重叠位置 (r,z) 处具有相同的场振幅 $\vec{E}_0(r,z)$，且频率 f 相同。对于矢量涡旋光场，l 也可理解为偏振的阶数，表示偏振矢量的旋转周期数；ϕ 为方位角，α 为初始相位。显然，矢量涡旋光场的偏振取决于空间位置，如图 1 所示。将其与标量涡旋光场进行比较，后者可表示为 $E_l = E_0(r,z)e^{il\theta}e^{-2\pi i f t}$。在垂直于涡旋光束传播方向的横向方向上，场 E_l 或其偏振均匀分布，如图 1 所示。

当矢量光束照射到粗糙表面时，其相位将按照调制函数 [28] as $M(r,\phi,t) = e^{i\varphi(r,\phi)} = \sum_k A_k(r)\, e^{ik\phi}$ 进行调制，其中 $A_k(r)$ 是 k 阶调制因子的复振幅，并满足归一化条件$\sum_k |A_k(r)|^2 = 1$。如果粗糙表面以角频率 Ω 旋转，调制函数将变为$M(r, \Omega\ t) = e^{i\varphi(r,\theta-\Omega t)} = \sum_k A_k(r)\ e^{ik\phi}e^{-ik\Omega t}$。

涡旋光束经旋转体的粗糙表面散射后，光场变为

$$\vec{E}_s = M(r,\Omega,t)\,\vec{E}, \quad (2)$$

其中，为简化起见，忽略 $\vec{E}_0(r,z)\ e^{-2\pi i f t}$，因为本文只需要考虑散射光场沿角向的变化。进一步计算可得

$$\vec{E}_s = \vec{E}(r) \begin{pmatrix} G\cos(\alpha+l\Omega t) + iF\sin(\alpha+l\Omega t) \\ -G\sin(\alpha+l\Omega t) + iF\cos(\alpha+l\Omega t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

它可以分解为两个偏振态不同的光束的叠加，

$$\vec{E}_s = G \begin{pmatrix} \cos(\alpha+l\Omega t) \\ -\sin(\alpha+l\Omega t) \end{pmatrix} + iF \begin{pmatrix} \sin(\alpha+l\Omega t) \\ \cos(\alpha+l\Omega t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中 Ω 是旋转体的角频率。调制函数$NG = \sum (A_{m-l} + A_{m+l})\, e^{-im\Omega t}e^{im\phi}$，$F m=-N N\sum ($ $A_{m-l} - A_{m+l})\, e^{-im\Omega t}e^{im\phi}$ 其中 $m m=-N =$ repre-

表示散射光的 OAM 模式，且$m = k + l$。G 可视为频率为 $m\Omega$、振幅为 $A_{m-l} + A_{m+l}$的不同谐振荡的叠加，而 F 可视为频率为 $m\Omega$、振幅为 $A_{m-l} - A_{m+l}$ 的不同谐振荡的叠加，但其方向与 G垂直。根据式（4），对于形式为 $(G,F)^T$的矢量涡旋光场，其偏振分布并不固定，而是随时间变化；散射场可通过旋转角度 $l\Omega t$ 得到（本文将逆时针方向定义为正方向）。特别是，如果角频率 Ω 保持不变，但旋转方向反转（即式（4）中的 Ω 变为 $-\Omega$），则散射场将发生变化，即 $\vec{E}_s$（ $- \quad t \neq \vec{E}_s \quad t$ Ω）（Ω），这表明散射矢量涡旋光场中的偏振分布取决于旋转方向。这为检测旋转方向提供了一种方法。

当散射光通过与水平方向成角度 θ 的偏振片后，光场变为

$$\begin{aligned} \vec{E}_{sf} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{E}_s \\ &= G \begin{bmatrix} \cos(l\Omega t+\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + iF \begin{bmatrix} \sin(l\Omega t+\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中，为简便起见，取初始相位 $\alpha = 0$。光强可表示为

$$\begin{aligned} I_j &= |G|^2\cos^2(l\Omega t+\theta) + |F|^2\sin^2(l\Omega t+\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}i(G^*F - GF^*)\sin 2(l\Omega t+\theta), \\ &= \frac{1}{2}\left(|G|^2 - |F|^2\right)\cos 2(l\Omega t+\theta) \\ &\quad + \frac{|G|^2+|F|^2}{2} + \frac{1}{2}i(G^*F - GF^*)\sin 2(l\Omega t+\theta), \end{aligned} \quad (6)$$

其中，$*$ 表示复共轭，并使用了关系式 $\cos^2(l\Omega t+\theta) = \frac{1+\cos 2(l\Omega t+\theta)}{2}$ 和 $\sin^2(l\Omega t+\theta) = \frac{1-\cos 2(l\Omega t+\theta)}{2}$。尽管结果中的最后一项含有虚数 i，但项 $i(G^*F - GF^*)$ 是实数，如下所示。

为了简化强度的表达式，我们必须计算与调制函数相关的各项。首先，我们计算项 $|G|^2$，得到

$$|G|^2 = GG^* = \sum_{m,m'} (A_{m-l} + A_{m+l}) \left(A^*_{m'-l} + A^*_{m'+l}\right) e^{i(m-m')(\phi+\Omega t)}. \tag{7}$$

可以看出，令 $m - m' = n$，其中 n 是取值范围为 0 到 $2m$ 的整数，则右侧的项为实数。当 $m - m' = n$ 时，$|G|^2 = \sum_m A_{m-l} + A_{m+l} \left(A^*_{m+n-l} + A^*_{m+n+l}\right) e^{in(\phi+\Omega t)}$ 这两项互为复共轭，因此它们的和为实数。同样，当 $m - m' = -n$，$|G|^2 = \sum_m (A_{m+n-l} + A_{m+n+l}) \left(A^*_{m-l} + A^*_{m+l}\right) e^{-in(\phi+\Omega t)}$. 由于 n 项和 $(-n)$ 项成对出现，且互为复共轭，因此总和为实数。

类似地，我们可以计算项 $|F|^2$，得到

$$|F|^2 = FF^* = \sum_{m,m'} (A_{m-l} - A_{m+l}) \left(A^*_{m'-l} - A^*_{m'+l}\right) e^{i(m-m')(\phi+\Omega t)}. \tag{8}$$

它也是实数。接着，我们计算

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(|G|^2 - |F|^2\right) &= \sum_{m,m'} (A_{m-l}A^*_{m'+l} + A_{m+l}A^*_{m'-l}) e^{i(m-m')(\phi+\Omega t)}, \\ &= \sum_{m,n} [(A_{m-l}A^*_{m+n+l} + A_{m+l}A^*_{m+n-l}) e^{in(\phi+\Omega t)} + c.c.],\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$c.c.$ 表示前面各项的复共轭。现在我们将这些表达式写成实际形式。首先，分析以下求和式：$(a+bi)e^{i\phi} + (a-bi)e^{-i\phi} = 2a\cos\phi - 2b\sin\phi = 2\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\phi - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\phi\right) = 2\sqrt{a^2+b^2}(\cos\phi'\cos\phi - \sin\phi'\sin\phi) = 2\sqrt{a^2+b^2}\cos(\phi'+\phi)$，其中 $\sqrt{a^2+b^2}$ 和 ϕ' 分别是复数 $(a+bi)$ 的模和辐角。由于式（7）和式（8）中的求和项两两互为复共轭，因此根据上述分析可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(|G|^2 - |F|^2\right) \\ &= 2\sum_{m,n}(|A_{m-l}|\left|A^*_{m+n+l}\right|\cos(n(\phi+\Omega t) + \varphi_n^{-l}) \\ &+ |A_{m+l}|\left|A^*_{m+n-l}\right|\cos(n(\phi+\Omega t) + \varphi_n^{l})),\end{aligned} \tag{10}$$

其中，φ_n^{-l} 和 φ_n^{l} 分别是复数 $A_{m-l}A^*_{m+n+l}$ 和 $A_{m+l}A^*_{m+n-l}$ 的辐角。采用相同的分析方法，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(|G|^2 + |F|^2\right) \\ &= 2\sum_{m,n}(|A_{m-l}|\left|A^*_{m+n-l}\right|\cos(n(\phi+\Omega t) + \psi_n^{-l}) \\ &+ |A_{m+l}|\left|A^*_{m+n+l}\right|\cos(n(\phi+\Omega t) + \psi_n^{l})),\end{aligned} \tag{11}$$

where ψ_n^{-l} and ψ_n^{l} are the arguments of the complex numbers $A_{k-l}A^*_{k+p+l}$ and $A_{k+l}A^*_{k+p-l}$, and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}i(G^*F - GF^*) \\ &= -2\sum_{m,n}(|A_{m-l}|\left|A^*_{m+n+l}\right|\sin(n(\phi+\Omega t) + \varphi_n^{-l}) \\ &+ |A_{m+l}|\left|A^*_{m+n-l}\right|\sin(n(\phi+\Omega t) + \varphi_n^{l})).\end{aligned} \tag{12}$$

然后将式（10）—（12）代入光强表达式（6），得到

$$\begin{aligned}I = \left|\vec{E}_{sf}\right|^2 = 2\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-Z}^{Z-n} &[|A_{m+l}|\left|A^*_{m+n-l}\right| \\ &\times \cos((2l+n)\Omega t + n\phi + 2\theta + \varphi_n^{l}) \\ &+ |A_{m-l}|\left|A^*_{m+n+l}\right|\cos((2l-n)\Omega t - n\phi + 2\theta - \varphi_n^{-l}) \\ &+ |A_{m+l}|\left|A^*_{m+n+l}\right|\cos(n\Omega t + n\phi + \psi_n^{l}) \\ &+ |A_{m-l}|\left|A^*_{m+n-l}\right|\cos(n\Omega t + n\phi + \psi_n^{-l})].\end{aligned} \tag{13}$$

当 $n = 0$ 时，最后两项变为 $\sum_m |A_{m+l}|^2 + \sum_m |A_{m-l}|^2$，它们与旋转角频率无关。$n$、$N$ 和 Z 均为正整数。Z 是可探测的最大TC，对于对称测量，可探测的TC为 0、±1、±2、$\cdots$、$\pm Z$。$N = 2Z$ 表示拍频模式，即从 $-Z$ 到 Z 的任意两个模式之间的最大差值。对于给定的 n 阶谐波分量，存在 $(N-n+1)$ 项对强度作出贡献。图 2 给出了直观的解释。

强度 I 由四项组成，但只有前两项与偏振片的角度有关。这使得通过改变偏振片的角度来检测旋转速度成为可能。我们将它们称为拍频项，其中包含相对于中心频率 $2l\Omega/2\pi$ 的不同拍频，即 $2l\Omega/2\pi$、$(2l\pm1)\,\Omega/2\pi$、$(2l\pm2)\,\Omega/2\pi$、$(2l\pm3)\,\Omega/2\pi$、$\cdots$。另外两项称为低频项。理论上，散射光应包含所有可能的模式，但在实际实验中，只能测量少量模式（即 N 较小）。尤其是，频率为 $2l\Omega/2\pi$ 的模式振幅最大，如图2所示。

从上述计算可以看出，偏振振幅和方向的分布

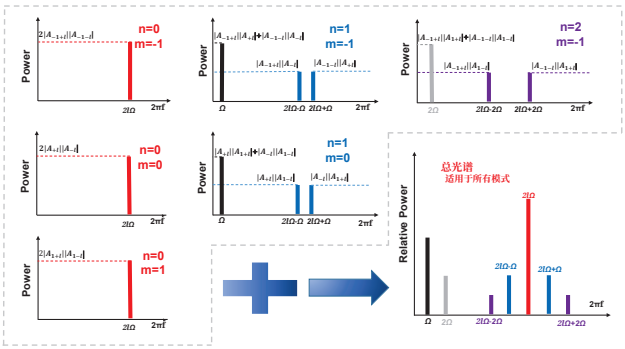

图 2 $Z =$: 1 $N = 2$ 13 式（ ）中复谱的示意图。同行中的图表示相同散射模式 m 但不同谐波阶数 n，同列中的图表示相同谐波阶数 n 但不同散射模式 m。这里假设粗糙表面调制的散射光振幅相同。右下角的图表示将所有这些分量相加得到的复谱，其在频率 $2l\Omega$处具有最大振幅。

取决于角位置 ϕ，该位置位于垂直于光传播方向的横向平面内。同时，在光传播过程中，该分布以频率 $l\Omega$ 旋转。当旋转粗糙表面的旋转方向发生改变时，偏振分布的旋转手性也会随之改变。这些特性为检测旋转物体的振幅和旋转方向提供了依据。

这里需要强调一个特定操作。如式（5）所示，在检测散射光之前加装了偏振片。如果不加偏振片，检测到的光强为 $I = E^*E = G^2 + F^2$，其中只包含一些与入射光拓扑荷无关的低频项，类似于式（13）中的后两项。这无法提供检测旋转方向的方法。加装偏振片后，光强的最终表达式中会出现拍频项，如式（13）中的前两项所示，因此可以检测旋转方向。这与标量光场不同。如果入射光是标量光，散射光也为标量光。因此，即使在检测前加装偏振片，也只有标量光的振幅会受到调制（即 $I \propto f(\theta)\cos(2l\Omega t + \alpha)$，其中 θ 是所加偏振片的角度，$f(\theta)$是与调制振幅相关的函数），所以在这种情况下无法检测旋转方向。

因此，一个问题是：由于散射光场非常复杂，如何确定光强曲线峰值与频率之间的对应关系。首先，我们解释参数 A, m 与粗糙表面粗糙程度之间的关系。 m 由材料表面相对于参考平面的高度决定，而 A 由材料在相同高度处的表面积决定。

在我们的实验中，锡箔表面高度的起伏处于微米量级，因此不同位置的 A 和 m 变化很小。所以在对式（13）展开时，参数 $|A_m|$ 的值近似相同。这样，我们就可以利用式（13）进行简单计算，估算频谱傅里叶形式中最高峰对应的频率。在实验中，我们采用傍轴对称测量，收集对称模式（如 0、 ±1、 ±2 等）进入探测器。通常，当可探测的最高模式为 m 时，低频模式有 $2m$ 项，而中心频率为 $2l\Omega$ 的拍频模式有 $4m+1$ 项。注意，频率为 $2l\Omega$ 的模式贡献来自 $2m+1$ 项，每一项对振幅的贡献为 $2A^2$，因此总贡献为 $(4m+2)A^2$，从而在频谱曲线上形成最高峰。图2以可探测的最高模式为 1 为例，给出了直观说明。在图中，每一行表示同一模式与所有可能模式之间的拍频。也就是说，第一行表示模式 $m=-1$ 与模式 $m=-1$、0、1 之间的拍频，对应的谐波阶数为 $n=0$、1、2；第二行表示模式 $m=0$ 与模式 $m=0$、1 之间的拍频，对应的谐波阶数为 $n=0$、1；第三行表示模式 $m=1$ 与模式 $m=1$ 之间的拍频，对应的谐波阶数为 $n=0$。根据式（13），谐波阶数 $n=0$ 对应于频率 $2l\Omega$ 处的峰值，且有三项对强度作出贡献，每项均为 $2A^2$。其他频率处的强度也可以用这种方法计算，结果如图2最后一幅图（所有模式的总频谱）所示。

为验证我们的理论分析，图 3a 展示了实验测得的复谱的傅里叶变换形式，其中可以明显观察到式（13）中的低频项和拍频项对应的信号。可以看出，最高峰出现在低频 Ω 处，这与我们的理论估计不同（如补充材料（SM）中所分析的，最高峰应出现在频率 $2l\Omega/2\pi$ 处）。这可能是由旋转电机机械振动产生的噪声所导致的。为了提高测量结果，要么应采用某些特定方法消除噪声，要么在最终测量结果中减去低频项。无论采用哪种方式，都无法直接测量光强，因此需要进行其他操作。在下一节中，我们将讨论测量方法并介绍测量过程。

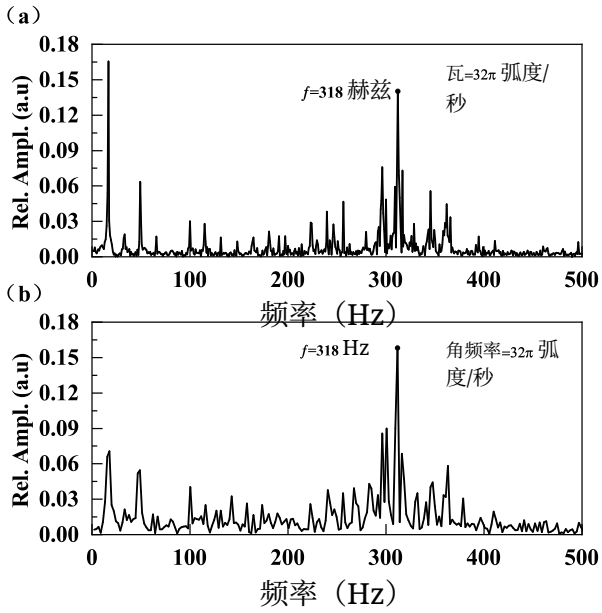

图 3：在实验中预先设定旋转角速度 $\Omega = 32\pi$ rad/s 和拓扑荷 $l = 10$ 时，复谱测量结果的傅里叶变换形式。下图（上图）分别表示扣除（未扣除）低频项后的结果。扣除过程是利用主路径中的测量结果减去参考路径中的测量结果，然后进行傅里叶变换。

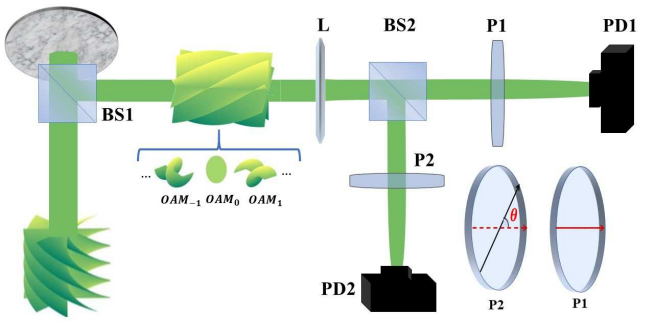

图4：测量方法。入射矢量涡旋光被旋转粗糙表面散射。散射光经分束器（BS）分成两条路径。光线通过偏振片（P1，其角度在整个实验中均设为零度）的一条路径为参考路径。光线通过 P2（其角度将根据测量要求进行调整）的一条路径称为主路径。

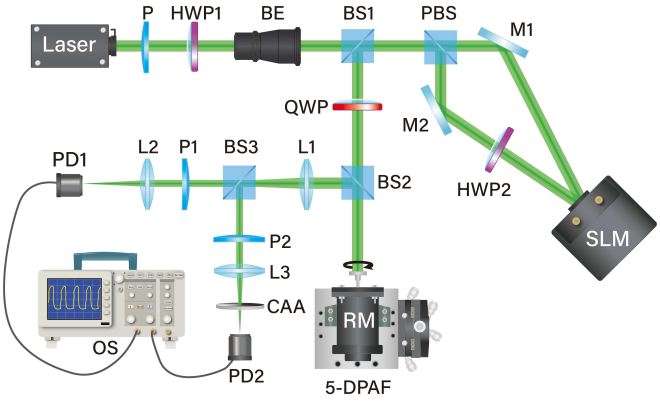

图 5：实验装置。P、P1、P2：偏振片；BE：扩束器；HWP1、HWP2：半波片；BS1、BS2、BS3：分束器；PBS：偏振分束器；QWP：四分之一波片；M1、M2：反射镜；SLM：空间光调制器；L1、L2、L3：焦距为 100 mm 的透镜；PD1、PD2：光电探测器；OS：示波器；CAA：连续可调衰减器；5-DPAF：五维精密调整架；RM：旋转电机。

III. 实验装置

如上文对散射光复谱的分析所示，我们可以通过改变偏振片的角度θ 来实现这一点。然而，需要注意的是，低频项中的模式与角度 θ无关，因此测量时必须将其扣除。为此，我们使用分束器（BS）将散射光分成两条路径，使每条路径中的振幅相同，如图 4 所示（完整的实验装置如图 5 所示，包含三个部分：柱矢量偏振场的产生、柱矢量偏振场被旋转粗糙表面散射，以及散射光的探测）。包含偏振片（P1）的路径视为参考路径，整个实验中 P1 的角度均设为零度。包含偏振片（P2）的路径称为主路径，通过改变 P2 的角度来实现测量。为了测量并获取旋转速度的大小，我们可以使用在主路径中测得的光强（I_2（θ））减去光强

在参考路径中测得的（I_1（$\theta = 0$）），

$$
\begin{aligned}
I = I_2 - I_1 = 4\sin\theta \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-Z}^{Z-n} & [|A_{m+l}| \left|A^*_{m+n-l}\right| \\
& \times \sin((2l+n)\,\Omega t + n\phi + \theta + \varphi_n^l) \\
& + |A_{m-l}| \left|A^*_{m+n+l}\right| \sin((2l-n)\,\Omega t - n\phi + \theta_j - \varphi_n^{-l})],
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中使用式（13）进行计算。可以看出，低频项已得到抑制。随后，我们找出与最大振幅对应的频率，并利用已知涡旋光束的关系式，推导粗糙

表面的旋转速度，其拓扑荷为 l。 $f = {}^{2l}\Omega\overline{2\pi}$ 为了测量旋转方向，我们可以沿同一方向旋转主路径中的 P2，以增大角度 θ。通过观察谱线的偏移即可推断旋转方向，详细讨论如下。

由式（14）可知，频域光谱曲线中的最高峰对应于拍频 $2l\Omega/2\pi$，如图3b所示，这与傍轴对称测量的预期一致。利用该拍频可以推导出转速的大小。根据我们的测量，转速为 31.8π rad/s，与我们事先设定的转速（32π rad/s）基本一致。此处还给出了更多类似的情况，所有结果均表明，相减对于正确提取对应最高峰的频率是必要的。图6给出了在转速相同、但入射矢量涡旋光束不同且拓扑荷不同的条件下，振幅随频率变化的结果。图7给出了类似结果，但条件不同：入射矢量涡旋光束相同，转速不同。图6和图7左列为在主路径中测得的结果，右列为用主路径中测得的结果减去参考路径中测得的结果所得的振幅差。可以看出，图6和图7右列中的低频项受到明显抑制。同时还可以看出，图6和图7右列中的最高峰出现在频率 $2l\Omega$ 处。实际上，这些结果适用于其他任何情况，但在我们的实验中，由于设备限制，转速不能设置得过高。

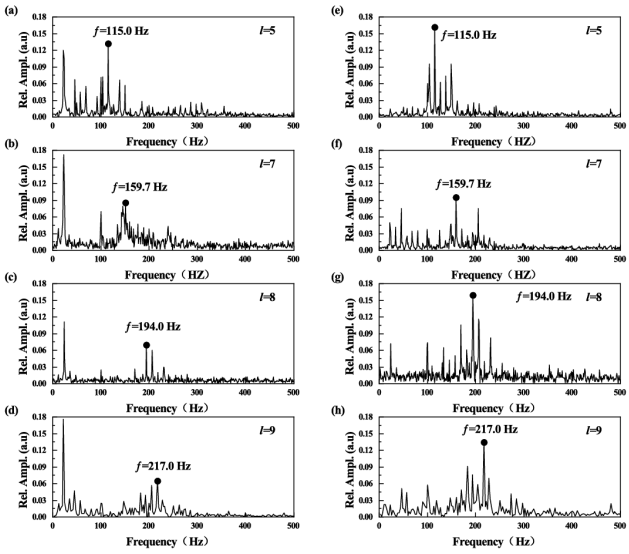

图6：粗糙表面在旋转速度相同且 $\Omega = 23\pi$ rad/s 时，振幅随频率变化的实验结果。(a-d) 中的图展示了主路径中的测量结果，(e-f) 中的图展示了主路径与参考路径中的测量结果之差。

IV. 测量结果

图 8 展示了旋转速度大小的测量结果。数据来自主光路中光强的测量值减去参考路径的测量值。直线表示理论结果，描述最大振幅处的测量频率与旋转角速度之间的关系，即 $f = 2l\Omega/2\pi$。可以看出，测量结果与理论结果非常吻合。实际上，已知旋转速率时，也可以用这种方法测量光学涡旋的拓扑荷。图 9 展示了已知旋转角速度时拓扑荷的测量结果。在我们的测量中，如果旋转速度过小，测量结果就不够准确。这是因为实验误差会导致两条光路中的光强测量结果无法完全抵消。因此，低频项会干扰低旋转速度下的实验结果，导致.....

速度。

图10描述了如何测量旋转方向。该方法是在主光路中旋转偏振片（P2）。从图10左侧的图中可以看出，当偏振片沿着与检测到的旋转相同的方向旋转时， $2l\Omega/2\pi$ 分量的拍频对应的最大振幅将向左移动。相反，当偏振片沿着与检测到的旋转相反的方向旋转时， $2l\Omega/2\pi$ 分量的拍频对应的测量最大振幅将向右移动。因此，通过观察这些曲线的移动，我们可以快速而准确地估计旋转方向。特别是，图10中的结果是通过两条光路中的同步测量结果之差获得的。这种方法可以消除低频项中的噪声，以及偏振片处于不同角度时由时间差引起的噪声。

为了测量锡箔的旋转方向，需要将参考路径中测得的结果进行相减。一方面，这可以减小复谱中低频项的影响；另一方面，由于在不同偏振片角度下进行测量存在时间差，因此可以抑制由此产生的相位误差。由于改变角度需要耗费时间，这会导致不同角度下两次测量之间因时间差而产生新的相移。图11展示了仅通过主路径测量获得的结果，未对参考路径中测得的结果进行相减。可以看出，

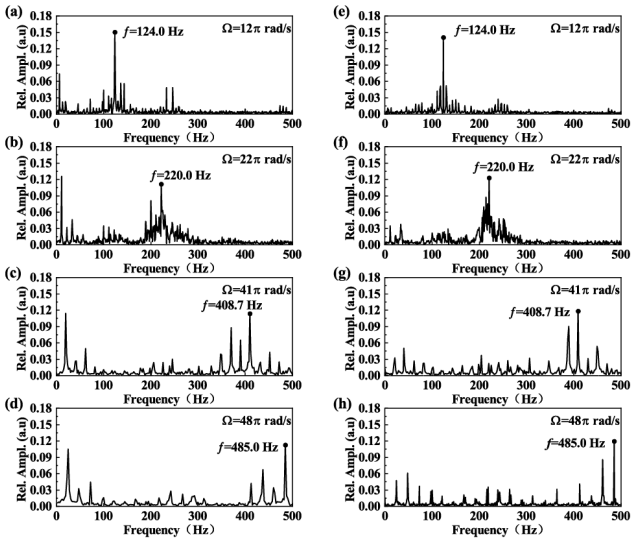

图 7：在相同入射涡旋光束、拓扑荷为 $l = 10$ 的条件下，振幅随频率变化的实验结果。(a-d) 展示了主路径中的测量结果，(e-f) 展示了主路径与参考路径测量结果之间的差异。

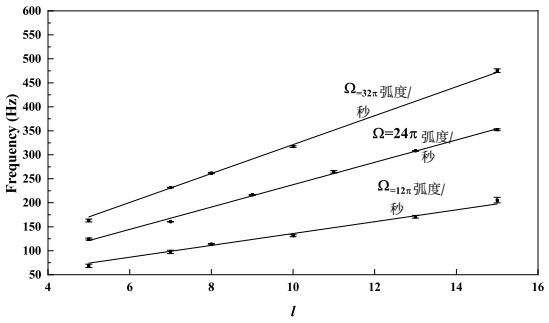

图 8：基于多普勒效应的旋转角速度测量结果。对于拓扑荷分别为 $l = 5$、7、8、9、10、11、13、15 的每个入射光束，测量结果均取自振幅达到最大值时对应的频率。误差棒主要来源于机械振动。旋转角速度通过直线斜率乘以 π 得到。

在偏振片角度发生某些变化时，频移可能会导致错误。事实上，从图10可以看出，只有通过偏振片两个不同角度对应的两条谱线，才能使我们准确推断旋转方向；但从图11可以看出，可能会出现误差，由于偏振片角度选择不当，进而导致对旋转方向的错误判断。然而，通过在偏振片的多个不同角度下进行充分测量，并观察谱线的频移，同样可以正确判断旋转方向。

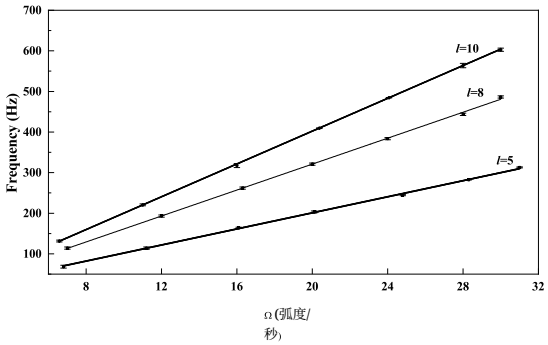

图9：拓扑荷测量的实验结果。测量结果取自不同旋转速度下振幅达到最大值时对应的频率。数据点由主路径中的测量结果减去参考路径中的测量结果得到。它们与直线表示的理论结果吻合良好。拓扑荷可由这些直线的斜率推得。

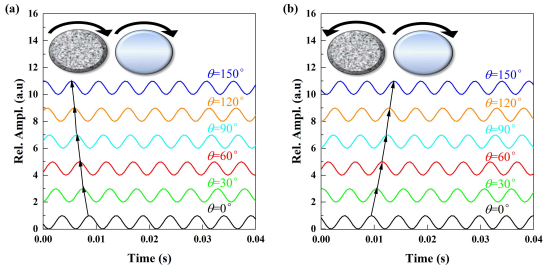

图10：旋转方向的测量结果。信号调制随时间的变化由主路径中的测量结果减去参考路径中的测量结果得到，不同曲线对应P2的不同角度。粗糙表面和P2在(a)中呈现相同的旋转方向，在(b)中则呈现反向。光谱的偏移用带箭头的线标出。

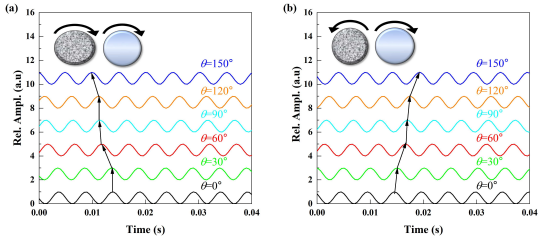

图11：旋转方向的测量结果。振幅随时间的变化取自主路径中的测量结果，不同曲线对应P2的不同角度。粗糙表面和P2在(a)中呈现相同的旋转方向，在(b)中则呈现反向。光谱的偏移用带箭头的线标出。

V. 结论

本文研究了基于矢量涡旋光场的旋转多普勒效应，用于检测粗糙表面的旋转速度。我们从理论上分析了由粗糙旋转表面散射光构成的多普勒轨道角动量复谱，并采用轨道角动量模式展开法，得到了散射光强度分布的表达式。我们发现复谱傅里叶形式中的最高峰；旋转偏振片时，该峰会发生偏移，这为同时测量旋转速度的大小和方向提供了方法。我们还基于傍轴双路径法进行了实验测量。其中一条路径用作参考路径，以消除复谱中与低频项有关的噪声，以及主路径中不同偏振片角度下测量时的时间延迟。不同于早期使用单模光纤滤除特定模式的测量方法，我们采用傍轴对称测量来获得拓扑荷分布范围较小时的复谱。我们测得了最高峰及其随偏振片旋转产生的偏移。由此得到的旋转速度结果与理论分析一致。因此，我们将矢量多普勒测量方法拓展至一般情形，向旋转检测的实际应用迈进了一步。

VI. 致谢

我们感谢中国地质大学（武汉）基金的支持。本工作还得到国家自然科学基金（NSFC）项目（批准号：11654001）的资助。

七、参考文献

[1] P. Coullet、L. Gil 和 F. Rocca，《光学涡旋》，Opt. Commun. 73, 403 (1989)。[2] L. Allen、M. W. Beijersbergen、R. J. C. Spreeuw、J. P. Woerdman，《光的轨道角动量与拉盖尔-高斯激光模式的变换》，Physical Review A 45, 8185 (1992)。[3] Y. Shen、X. Wang、Z. Xie、C. Min、X. Fu、Q. Liu、M. Gong 和 X. Yuan，《光学涡旋三十年：从拓扑荷到多重奇点的 OAM 操控》，Light: Science and Application 8, 90 (2019)。[4] G. Nienhuis，《旋转透镜引起的多普勒效应》，Optics Communications, 132, 8 (1996)。[5] Y. Yeh、H. Z. Cummins，《利用 He–Ne 激光光谱仪进行局部流体流动测量》，Appl. Phys. Lett. 4, 176 (1964)。[6] B. A. Garetz，《角多普勒效应》，J. Opt. Soc. Am. 71, 609 (1981)。[7] I. Bialynicki-Birula、Z. Bialynicka-Birula，《旋转频移》，Physical Review Letters 78, 2539–2542 (1997)。[8] J. Courtial、D. A. Robertson、K. Dholakia、L. Allen 和 M. J. Padgett，《光束的旋转频移》，Physical Review Letters 81, 4828 (1998)。[9] M. J. Padgett，《像一只飞快的手表》，Nature 443, 924 (2006)。[10] S. Barreiro、J. W. R. Tabosa、H. Failache、A. Lezama，《旋转多普勒效应的光谱观测》，Physical Review Letters 97, 113601 (2006)。[11] A. Belmonte 和 J. P. Torres，《结构光的光学多普勒频移》，Optics Letters 36, 4437 (2011)。[12] L. Marrucci，《让多普勒效应旋转起来》，Science 341, 464 2013( )。[13] M. P. J. Lavery、F. C. Speirits、S. M. Barnett 和 M. J. Padgett，《利用光的轨道角动量探测旋转物体》，Science 341, 537 (2013)。[14] T. -Y. Cheng、W. -Y. Wang、J. -S. Li、J. -X. Guo、S. Liu 和 J. -Q. L¨u，《涡旋中的旋转多普勒效应》光及其在旋转运动检测中的应用，Photonics 9, 441 (2022)。[15] H. Zhou、D. Fu、J. Dong、P. Zhang 和 X. Zhang，光学旋转多普勒效应的理论分析与实验验证，Optics Express 24, 010050 (2016)。[16] H. Zhou、D. Fu、J. Dong、P. Zhang、D. Chen、X. Cai、F. Li 和 X. Zhang，基于旋转多普勒效应的涡旋光轨道角动量复谱分析仪，Light: Science & Applications 6, e16251 (2017)。[17] A. Q. Alexander、E. F. Strong、B. M. Heffernan、M. E. Siemens、G. B. Rieker 和 J. T. Gopinath，检测技术对旋转多普勒测量的影响，Optics Letters 45, 2636 (2020)。[18] Y. Ding、Y. Ren、T. Liu、S. Qiu、Ch. Wang、Z. Li 和 Z. Liu，通过模式分解分析失准的光学旋转多普勒效应，Optics Express 29, 15288 (2021)。[19] S. Qiu、R. Tang、X. Zhu、T. Liu 和 Y. Ren，基于光学旋转多普勒效应在不同光束尺寸下对旋转物体的检测，Photonics 9, 517 (2022)。[20] L. Fang、Z. Wan、A. Forbes 和 J. Wang，矢量多普勒计量学，Nature Communications 12, 4186 (2021)。[21] Z. Li、T. Liu、Y. Ren、S. Qiu、C. Wang 和 H. Wang，使用双频涡旋光对旋转物体进行方向敏感检测，Optics Express 29, 7453 (2021)。[22] Q. Zhan，柱矢量光束：从数学概念到应用。Adv. Opt. Photon. 1, 1 (2009)。[23] H. M. Doeleman、F. Monticone、W. den Hollander、A. Al`u 和 A. F. Koenderink，在连续谱中的光学束缚态处对偏振涡旋的实验观测。Nat. Photon. 12, 397 (2018)。[24] L. De Angells、T. Bauer、F. Alpeggiani 和 L. Kuipers,

二维随机矢量波中偏振涡旋的指标对称性破缺。Optica 6, 1237 (2019)。[25] C. He, J. Chang, Q. Hu, J. Wang, J. Antonello, H. He, S. Liu, J. Lin, B. Dai, D. S. Elson, P. Xi, H. Ma, and M. J. Booth，通过梯度折射率透镜级联实现复矢量光学，Nature Communications 10, 4264 (2019)。[26] C. Rosales-Guzm´an, N. Hermosa, A. Belmonte, and J. P. Torres，通过相位调制结构光束实现方向敏感的横向速度测量，Optics Letters 39, 5415 (2014)。

[27] Z. Wan、L. Fang 和 J. Wang，利用圆偏振涡旋光束实现方向判别旋转多普勒测速，Optics Letters 47，1021（2022）。[28] D. B. Phillips、M. P. Lee、F. C. Speirits、S. M. Barnett、S. H. Simpson、M. P. J. Lavery、M. J. Padgett 和 G. M. Gibson，利用旋转多普勒测速探测旋转微粒的角速度，Physical Review A 90，011801（2014）。