arXiv:2305.02130v1 [math.AP] 3 May 2023

Γ-收敛分析：二维半离散与离散模型中刃型位错诱导的非线性自能

R. ALICANDRO、L. DE LUCA、M. PALOMBARO 和 M. PONSIGLIONE

Abstract. 我们提出了二维中由有限个刃型位错诱导的弹性能的非线性半离散和离散模型。在 *dilute regime*框架下，我们分析非线性弹性能的渐近行为，其中 *core-radius* （在半离散模型中）和晶格间距（在纯离散模型中）趋于零。我们的分析通过线性化过程展开，并置于严谨的 Γ-收敛框架之中。

关键词：位错、非线性弹性、塑性、离散到连续介质极限、伽马收敛 MSC2020：74C05、58K45、70G75、74G65、49J45

Contents

引言 1
1. 半离散模型 1.1. 问题描述 1.2. 紧性 1.3. Γ- 4
收敛 2. 纯离散模型 2.1. 问题描述 2.2. 离散能 4
量的主要结果 参考文献 5
8
17
17
19
22

Introduction

我们介绍了一些用于描述二维中有限系统刃型位错所诱导弹性能的变分非线性模型，提出并分析了一种建立在规则三角晶格上的纯离散模型，同时采用（并依赖于） [25]中的一种核半径方法变体。

我们首先描述无缺陷情况下的变分离散模型。假设取规则三角晶格的一块有限区域，晶格间距为 ε （最终趋于零），占据参考构形 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$。在这一框架中，变形由定义在晶格最近邻键上的离散应变场 β 描述。无缺陷时，这些应变实际上是某个隐式定义（通过积分得到）、定义在节点上的变形函数的离散梯度。其基本相容条件是：绕每个三角形单元的 β 离散环流为零。因此，在当前表述中，离散能量是变形应变 β 的函数，由两项组成：一项是描述键伸长的二体相互作用势，另一项是惩罚三角形单元面积变化的三体相互作用项。在热力学极限下（即晶格间距趋于零时），该模型恢复为当今经典的连续非线性模型，其能量密度表现为应变到旋转集合的平方距离；在小应变极限下，经线性化可得到经典的各向同性（连续）线性弹性理论（关于短程和长程相互作用能量背景下的离散到连续极限及线性化结果，参见 [8, 26, 5] ）。值得注意的是，通过调节

非线性离散能量两项前的系数，同时取离散到连续极限并进行线性化，所得极限泛函可以涵盖所有可能的 Lam´e 系数（见公式 (2.6)）。

在这一框架下，可以将刃型位错引入为离散应变场 β 的拓扑奇点；具体而言，在每个单元 εT 上，我们要求 β 的环流属于间距为 ε 的三角晶格（经旋转后）的元素。若该向量非零，它便是所谓的伯格斯矢量$\varepsilon\xi$，用于检测并量化三角形 εT 中刃型位错的存在。由此，我们将这种位错对应为加权狄拉克质量 $\varepsilon\xi\delta_{x_{\varepsilon T}}$，其中 $x_{\varepsilon T}$ 表示三角形 εT 的重心。有限个刃型位错构成的分布，其中心位于点 x^n 、伯格斯矢量为 $\varepsilon\xi^n \in \mathbb{R}^2$，可以用经验测度 $\mu = \varepsilon \sum_n \xi^n \delta_{x^n}$ 表示。对于任意给定的位错构型 μ，可容许应变类由满足以下条件的离散应变场构成：绕每个三角形 εT 的离散环流等于 $\mu(\varepsilon T)$。刃型位错的存在会使任何可容许应变发生一定畸变：由于纯旋转变得不相容，因此会产生储存弹性能。对于单个位错，这种能量的量级为 $\varepsilon^2|\log \varepsilon|$。我们的分析针对刃型位错的稀疏分布情形，此时储存的总能量有界于 $C\varepsilon^2|\log \varepsilon|$，这与存在有限个位错相一致。这一能量区间已通过 Γ-收敛得到广泛研究，涉及连续模型（亦称半离散模型；线性情形见 [15, 13] ，非线性情形见 [25] ）以及离散线性能量 [4]。（关于螺型位错的线性标量框架以及超导中的涡旋，类似结果可参见 [24, 20, 1, 2, 3, 12]。）

当晶格间距趋于零时，离散模型与连续模型之间的差异也应趋于零；同样，由于我们研究的是能量量级为 $\varepsilon^2|\log \varepsilon|$ 且趋于零的情形，非线性模型与线性化模型之间的能量差也应趋于零。本文旨在严格证明这些事实：我们提出一种纯离散的非线性模型（据我们所知，这是首个此类模型），并在离散与连续、非线性与线性刃型位错模型之间搭建桥梁。为此，我们首先引入并分析一种略有变动的（非线性）连续模型，该模型在 [25], 中研究过，并将对离散问题发挥重要作用。随后，我们受 [4, 16, 6], 中的线性离散模型启发，引入纯离散的非线性模型，并证明它的表现与连续模型相似，正如 $\varepsilon \to 0$所示。

我们考虑的非线性连续模型基于所谓的核半径方法：给定一个位错构型 $\mu = \varepsilon \sum_n \xi^n \delta_{x^n}$，我们在每个位错$x^n$ 周围挖去一个半径为 ε 的圆盘，并定义 $\Omega_\varepsilon(\mu) := \Omega \setminus \bigcup_n \overline{B}_\varepsilon(x^n)$。这里， ε 与晶格间距成正比，而圆盘 $B_\varepsilon(x^n)$ 表示所谓的位错核 x^n，塑性效应发生于此。去除位错核意味着忽略这些塑性效应；与在核外（即 $\Omega_\varepsilon(\mu)$ 内）计算的弹性能相比，其能量贡献预计只是低阶扰动。与离散情形类似，可容许应变是定义在 $\Omega_\varepsilon(\mu)$ 上的场 β，其绕每个 $B_\varepsilon(x^n)$ 的环流等于 $\varepsilon\xi^n$。相应的 β （进而由 μ 诱导的）弹性能，其量级与在 $\Omega_\varepsilon(\mu)$ 上对 β 到旋转集合 SO(2) 的平方距离进行积分相当。

现在我们描述对可容许应变施加的进一步运动学条件。为此，暂时假设位错的分布由单个位错 $\varepsilon\xi^0\delta_{x^0}$ 给出，其中 $x^0 \in \Omega$，且 ξ^0 属于正则三角晶格的 R^0-旋转。在这种情况下，刚性估计 [14] 与能量界共同保证， β 接近于一个常数旋转 $R \in$ 二维特殊正交群加上一个 ε 倍的线性应变 β^{lin}，后者满足环流条件 $\int_{\partial B_\varepsilon(x^0)} \beta^{\mathrm{lin}} t \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \xi^0$。一般而言，线性化所围绕的旋转 R 与伯格斯矢量所对应的旋转 R^0 是相互独立的。然而，如果 $R \neq R^0$ 伯格斯矢量通常与经过刚性旋转的底层晶格不相容，那么就会产生物理上不可接受的构型。这表明，有必要在模型中加入伯格斯矢量与可容许应变之间的某种额外相容性条件，以避免这类非物理构型。就此而言，究竟哪些方案最为合适目前仍存在疑问，而现有文献中似乎尚缺乏一种规范选择。其主要原因在于，与纯粹的线性模型不同，我们在这里试图将线性环流

条件（它建立在线性应变的加性分解之上）与非线性能量框架结合起来。在这方面，最好采用将应变分解为塑性部分和弹性部分的乘法分解 [21, 22], ，但目前我们尚不清楚如何在纯离散框架中实现这一点。此外，尽管在极限 $\varepsilon \to 0$ 时我们得到一个固定旋转，但对于正的 ε ，非线性变形使得难以明确界定变形晶格的局部取向。为了克服这种刚性不足，在当前表述中，我们要求：对于每个位错点周围、半径为 ε 和 ε^γ 的环域（其中 $\gamma \in$ （0, 1））， 可容许应变场的平均值与相应伯格斯矢量所对应的旋转一致。对于正的 ε，刚性论证表明，伯格斯矢量的取向与底层晶格之间的这种一致性不仅在平均意义下成立，而且几乎处处成立。事实上，在紧性结果中，这一平均条件保证可容许场的极限常数旋转 R β_ε 也分别是每个伯格斯矢量所对应旋转的极限。这一条件促使我们在能量阱分离假设下开展研究，即将可容许经验测度的类别限制为满足以下条件的测度：任意两个位错之间的距离大于 ε^γ 的某个倍数。

在上述框架下，我们证明，对于给定的满足能量界 $C\varepsilon^2|\log \varepsilon|$ 的刃型位错可容许构型序列 $\{\mu_\varepsilon\}_\varepsilon$ ，经过 ε 缩放后，其质量一致有界；因此，取适当的子序列后，$\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}$ 在弱星拓扑下收敛于有限个 $\mathbb{R}^2$ 加权狄拉克 δ 测度之和 $\mu = \sum_k \xi^k \delta_{x^k}$ 。此外，与 $\{\mu_\varepsilon\}_\varepsilon$ 相容的可容许应变序列 $\{\beta_\varepsilon\}_\varepsilon$ ，取适当的子序列后，收敛于一个与 μ 相容的常数旋转 R，即权重 ξ^k 位于经 R 旋转的正则三角晶格上。最后，我们证明，对于某个无旋度的远场线性应变 β^{cf}，有 $\beta_\varepsilon \sim R + \varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|}\beta^{\mathrm{cf}}$。这就是定理 1.1 的内容。相应的 Γ-收敛结果，即定理 1.7，表明，关于上述收敛方式，能量泛函的 Γ-极限由自能与极限场 β^{cf} 在 R 附近线性化后的弹性能之和给出。对于此类非线性模型，其自能具有 $\sum_k \varphi(R^{\mathrm{T}}\xi^k)$ 的形式，其中 φ 是一个正的 1 次齐次函数，通过考虑底层晶格结构的松弛过程所得到的胞元公式确定。我们强调，这样的能量密度 φ 仅取决于相应的线性化弹性张量和晶格结构，因此与在线性模型 [15] 中计算得到的能量密度一致。粗略而言，我们的结果表明，在能量尺度为 $\varepsilon^2|\log \varepsilon|$ 的情况下，位错核外部的非线性弹性能可以线性化，从而得到与相应线性模型相同的 Γ-极限 Γ。

这里需要作一些说明。我们的结果的证明沿用了 [25], 中的思路，该文作者研究的是一个由固定（即独立于 ε）刃型位错组成的有限系统，其伯格斯矢量属于未旋转晶格。如上所述，我们的变化测度满足全变差的一致有界性；因此，从紧性性质的角度来看，我们的情形与奇点固定的系统相差不大。然而，在考察弹性能的 Γ-极限时，情况会略有不同。事实上，对于固定测度，自能的计算中不会发生松弛；而在我们的模型中，正 ε 时的两个或更多不同奇点可能收敛到同一个极限奇点，从而降低自能的值。这意味着，我们的 Γ-极限可能小于 [25] 中计算出的极限。此外，我们强调，上文所述的应变场平均条件在 [25], 中并不存在；在那里，进行线性化所围绕的（极限）旋转与伯格斯矢量所属晶格的旋转（实际上是单位矩阵）之间可能存在偏差。然而，正如 [19] 中所解释的（另见 [10]），如果将区域 Ω 解释为变形构形而非参考构形，这种偏差并非不符合物理实际。基于这种解释，可容许应变场 β 可在局部理解为逆变形梯度，因此其环流会成为参考晶格（未经任何旋转）的一个向量。事实上，尽管人们普遍认为伯格斯回路应当画在变形构形中，但伯格斯矢量的正确定义却颇有争议。通常将变形构形中闭合路径上（局部）逆变形梯度的环流所对应的矢量称为真实伯格斯矢量 [17, 公式 (1-5)]；如前所述，它的优点在于具有拓扑性质，因为它在.....上是量子化的。

参考晶格，不受任何微小弹性涨落的影响。另一方面，所谓局部伯格斯矢量，定义为沿参考构形中的闭合路径对变形梯度进行环流积分；它不仅广受欢迎，而且与变形场有直接的本构关系。我们提出的伯格斯矢量概念，是对两者的一种折中：它定义在参考构形上，但属于晶格的某个旋转。事实上，这一做法借鉴自线性模型 [6, 9, 15, 13], ，其中（局部）伯格斯矢量被（某种程度上默许地 [17, 第 21] 页）认为属于（未旋转的）参考晶格。在纯离散模型中采用真实伯格斯矢量这一概念似乎颇具挑战；对此，若能（在线性框架中也）引入直接定义在变形构形上的离散模型，将 [18] 的离散形式体系与 [10]中的分析相结合，将会很有意义。

总而言之，我们的模型旨在初步尝试将线性框架中现有的可靠高效技术与基本的离散非线性模型结合起来。具体而言，该模型依赖于参考构形的存在，并隐含地基于应变的加性分解，尽管其能量设定是非线性的。由此产生的建模选择带有折中意味：我们表明，线弹性位错理论中的典型论证也可以拓展并应用于非线性框架，但需要格外谨慎，以化解这种不同寻常的组合所引发的冲突。

我们的贡献代表着首次尝试以 Γ-收敛的方式对一种纯粹离散的二维刃型位错非线性模型进行严格分析。

致谢：R. Alicandro、L. De Luca 和 M. Palombaro 是 Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM) 下属 Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilit`a e le loro Applicazioni (GNAMPA) 的成员。作者感谢 G. Lazzaroni 就离散非线性弹性模型开展的有趣且富有成效的讨论。

记号：设 X 为一个欧几里得空间。对于任意 $\rho > 0$ 以及任意 $x \in X$， $B_\rho(x)$ 表示以 x 为中心、半径为 ρ 的开球（关于欧几里得度量）。此外，对于任意 $x \in X$ 以及任意 $0 < r < R$，符号 $A_{r,R}(x)$ 表示（开）环域 $B_R(x) \setminus \overline{B}_r(x)$。下文中， $\{e_1, e_2\}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 的标准基，即 $e_1 = (1\ 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $e_2 = (0\ 1)^{\mathrm{T}}$。此外，二维特殊正交群 SO(2) 是 $\mathbb{R}^2$ 的旋转集合，即满足 $R^{\mathrm{T}}R = \mathrm{Id}$ 且 $\det R = 1$ 的矩阵 $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 的集合。最后，全文中，符号 C表示一个正数常数，该常数可能随行号而改变。当我们希望强调 C 对某些参数 p_1、...、p_J（其中 $J \in \mathbb{N}$）的依赖关系时，我们写作 $C_{p_1,\dots,p_J}$。

1. The semi-discrete model

在本节 中，我们介绍并分析由一族刃型位错所引起的弹性能的非线性半离散模型。 一族刃型位错。

1.1. 问题描述。这里我们介绍本文将贯穿使用的主要记号。

设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界、开且单连通的集合，其边界为 Lipschitz 连续边界。设 $S \subset \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的有限子集，并令 $\mathbb{S} := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}} S$。此处 $\mathbb{S}$ 表示一个参考底层晶格。我们设 $\Pi(\mathbb{S}) := \bigcup_{R\in \text{二维特殊正交群}} R\mathbb{S}$，且 $\mathcal{I}(\mathbb{S}) := \{R \in \text{二维特殊正交群} : R\mathbb{S} = \mathbb{S}\}$。设 $0 < \gamma < 1$。记 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的 $\mathbb{R}^2$值 Radon 测度类，对于每个 $\varepsilon > 0$（它是一个用于调节晶格间距的参数），我们将可容许刃型位错测度类 $X^\gamma_\varepsilon(\Omega)$定义为

$$
\begin{aligned}
X^\gamma_\varepsilon(\Omega) := \Big\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \,:\, & \mu = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \xi^n \delta_{x^n}\,,\ N \in \mathbb{N},\ x^n \in \Omega,\ \xi^n \in \Pi(\mathbb{S})\,, \\
& |x^{n_1} - x^{n_2}| \geq 4\varepsilon^\gamma \text{ whenever } n_1 \neq n_2, \\
& \mathrm{dist}(x^n, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon^\gamma \text{ for all } n = 1, \dots, N \Big\}\,.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

此外，对于每个 $R \in$ 二维特殊正交群，我们设

$$\overline{X}^R(\Omega) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \,:\, \mu = \sum_{k=1}^{K} \xi^k \delta_{x^k} \,,\, K \in \mathbb{N},\, x^k \in \Omega,\, \xi^k \in R\mathbb{S} \right\}.$$

对于每个 $0 < \varepsilon < 1$ 以及每个 $\mu = \varepsilon \sum_{n=1}^{N} R^n b^n \delta_{x^n} \in X_\varepsilon^\gamma(\Omega)$，若 $b^n \in \mathbb{S}$ 且 $R^n \in$ 属于二维特殊正交群 SO(2)，我们令 $\Omega_\varepsilon(\mu) := \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{N} \overline{B}_\varepsilon(x^n)$，并定义与 μ 相关联的可容许应变类如下

$$\begin{aligned} \mathcal{AS}_\varepsilon^\gamma(\mu) := \Big\{ \beta \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2}) \,:\, & \beta \equiv 0 \text{ in } \bigcup_{x \in \operatorname{supp}\mu} B_\varepsilon(x)\,, \\ & \operatorname{Curl}\beta = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon(\mu), \quad \fint_{A_{\varepsilon,\varepsilon^\gamma}(x^n)} \beta \,\mathrm{d}x \in R^n\mathcal{I}(\mathbb{S}), \\ & \int_{\partial B_\varepsilon(x^n)} \beta t \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \varepsilon R^n b^n \text{ for every } n = 1,\dots,N \Big\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中，此处及下文中，算子 Curl 逐行作用，并在分布意义下理解；t 表示与 $\partial B_\varepsilon(x^n)$ 相切的切向量场，且被积函数 βt 按迹的意义理解。注意，任意容许奇异性的权重都不能唯一地分解为乘积 Rb，其中 $R \in$ 属于二维特殊正交群 SO(2)，而 $b \in \mathbb{S}$（例如，若 $\mathbb{S} = \mathbb{Z}^2$，则 e_1 也可写成沿顺时针方向的 $\frac{\pi}{2}$ -旋转，即 e_2）；因此，(1.2) 中关于 β 平均值的条件是用包含关系（取值于 $R^n\mathcal{I}(\mathbb{S})$）而非等式来表述的。

现在我们引入非线性能量密度。设 $W \in C^0(\mathbb{R}^{2\times 2};[0,+\infty))$ 满足以下假设：

(i) $W(\mathrm{Id}) = 0$；$W(RM) = W(M)$ 对每个 $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $R \in$二维特殊正交群；(ii)$W(MR) = W(M)$ 对每个 $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $R \in \mathcal{I}(\mathbb{S})$；(iii) 存在一个常数 $c > 0$ 使得：$W(M) \geq c\,\mathrm{dist}^2(M,$ 二维特殊正交群) 对每个 $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$；(iv)$W \in C^2$ 在二维特殊正交群的一个邻域内。(v)

条件 (i) 表明参考构形是无应力的，条件 (ii) 则是所谓的框架无差异性。条件 (iii) 表明能量密度 W 在底层晶格的旋转对称群作用下保持不变（如果该条件对所有旋转都成立，则称为各向同性条件）。条件 (iv) 是一项强制性假设，可保证紧性性质；条件 (v) 则用于对平衡态附近的能量进行线性化。我们强调，结合条件 (i)、(ii) 和 (iv)，W 的能量阱为二维特殊正交群 。

鉴于性质 (v)，我们可以将与 W 相关联的 $2\times 2\times 2\times 2$ 线性化弹性张量定义为

$$\mathbb{C} := \frac{\partial^2 W}{\partial M^2}(\mathrm{Id})\,. \tag{1.3}$$

对于每个 $0 < \varepsilon < 1$ 我们定义能量泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma$: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \times L^2($区域 $\Omega;\ \mathbb{R}^{2\times 2}) \to [0,+\infty]$ 为

$$\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma(\mu,\beta) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} W(\beta)\,\mathrm{d}x & \text{if } \mu \in X_\varepsilon^\gamma(\Omega) \text{ and } \beta \in \mathcal{AS}_\varepsilon^\gamma(\mu) \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2. 紧性。这里我们陈述并证明关于式 (1.4) 中半离散能量的紧性结果。

定理 1.1. 设 $\{(\mu_\varepsilon;\beta_\varepsilon)\}_\varepsilon \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \times L^2($区域 $\Omega;\ \mathbb{R}^{2\times 2})$ 满足以下条件。

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon) \leq C\varepsilon^2|\log\varepsilon|\,, \tag{1.5}$$

对于某个常数 $C>0$，那么，经过提取一个子序列后，存在 $\{R_\varepsilon\}_\varepsilon \subset$ 二维特殊正交群、一个旋转$R\in$ 二维特殊正交群、一个测度 $\mu\in\overline{X}^R$(区域 Ω)，以及一个场 $\beta^{\rm cf}\in L^2$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$)，满足 Curl $\beta^{\rm cf}=0$，使得:

$$R_\varepsilon \to R\,; \tag{0}$$

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu\,; \tag{1}$$

$$\frac{\beta_\varepsilon - R_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}} \rightharpoonup \beta^{\rm cf} \ \ in\ L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2})\,. \tag{2}$$

定义1.2. 下文中，若定理 1.1 的条件 (0)、(1) 和 (2) 均满足，我们记作 $(\mu_\varepsilon;\ \beta_\varepsilon;\ R_\varepsilon)\ \to(\mu;\ \beta^{\rm cf};\ R)$。

为证明定理 1.1，我们遵循 [25, 命题 3.5] 的证明思路。以下结果针对一类带孔定义域，给出了统一的刚性估计，其形式类似于 Friesecke-James-M¨uller [14] 的估计。证明方法可逐字照搬 [25, 引理 3.1] 的证明。

引理 1.3. 设 $E\subset\mathbb{R}^2$ 为一个有界开集，且其边界为 Lipschitz 连续边界。则存在一个常数 $C>0$，仅依赖于 E，使得以下性质成立。设$r>0$，并设 $\{x^1,\dots,x^N\}\subset E$满足：对于每个 $n_1,\ n_2=1,\dots,N$，均有 $|x^{n_1}-x^{n_2}|>4r$，且对于每个 $n=1,\dots,N$，均有 dist$(x^n,\partial E)>2r$。令 $E_r:=E\setminus\bigcup_{n=1}^N\overline{B}_r(x^n)$，则对于每个$u\in H^1(E_r;\mathbb{R}^2)$，都存在一个 $R\in$ 二维特殊正交群元素 SO(2)，使得

$$\|\nabla u-R\|_{L^2(E_r;\mathbb{R}^{2\times 2})}\le C\|dist(\nabla u,\mathrm{SO}(2))\|_{L^2(E_r)}\,.$$

定理 1.1 的证明。由能量界 (1.5) 可知，$\mu_\varepsilon\in X_\varepsilon^\gamma$(区域 Ω) 和 $\beta_\varepsilon\in\mathcal{AS}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon)$。对每个 $0<\varepsilon<1$，令 $\mu_\varepsilon:=\varepsilon\sum_{n=1}^{N_\varepsilon}R_\varepsilon^n b_\varepsilon^n\delta_{x_\varepsilon^n}$。我们首先证明测度 $\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}$的紧性性质。令 $K_\varepsilon^\gamma:=\lfloor(1-\gamma)^{|\text{对数 }\varepsilon|\text{对数 }2}-1\rfloor$。固定 $n\in\{1,\dots,N_\varepsilon\}$。我们有 $A_{\varepsilon,\ \overline{\varepsilon^n}(x_\varepsilon^n)}\supset\bigcup_{k=0}^{K_\varepsilon^\gamma}A_{2^k\varepsilon,\ 2^{k+1}\varepsilon}(x_\varepsilon^n)$。由 [14], 可知，存在常数 $C>0$，使得对每个 $k=0,\ 1,\ \dots,\ K_\varepsilon^\gamma$

$$\int_{A_{2^k\varepsilon,2^{k+1}\varepsilon}(x_\varepsilon^n)}\mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon,\mathrm{SO}(2))\mathrm{d}x\ge C\int_{A_{2^k\varepsilon,2^{k+1}\varepsilon}(x_\varepsilon^n)}|\beta_\varepsilon-R_k|^2\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

对于某些旋转 R_k；事实上，(1.6) 已在 [14] 中针对定义在具有 Lipschitz 连续边界的集合上的梯度场得到证明；此外，常数 C 对定义域的位似变换是不变的。实际上，在我们的情形中，β_ε 不是梯度，但仍可通过以下两种方式推出 (1.6)：要么用两个具有 Lipschitz 连续边界且相互重叠的单连通集覆盖 $A_{2^k\varepsilon,\ 2^{k+1}\varepsilon}(x_\varepsilon^n)$，并在每个集合上应用 [14], ；要么在 $A_{2^k\varepsilon,\ 2^{k+1}\varepsilon}(x_\varepsilon^n)$ 中引入适当的切口，并直接在所得的单连通带切口的环域上应用 [14] 。对 k 和 n 求和，利用 (1.5) 和性质 (iv)，我们推得

$$\begin{aligned} C\varepsilon^2|\log\varepsilon| &\ge C\sum_{n=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k=0}^{K_\varepsilon^\gamma}\int_{A_{2^k\varepsilon,2^{k+1}\varepsilon}(x_\varepsilon^n)}|\beta_\varepsilon-R_k|^2\,\mathrm{d}x \\ &\ge C\sum_{n=1}^{N_\varepsilon}\varepsilon^2|b_\varepsilon^n|^2\frac{1}{2\pi}(K_\varepsilon^\gamma+1)\log 2\ \ge C\varepsilon^2|\log\varepsilon|(1-\gamma)\Big|\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\Big|(\Omega)\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中，倒数第二个不等式由应用詹森不等式并利用 $\mathcal{AS}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon)$ 的定义直接得到。由 (1.7) 可知，$\big|\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\big|$(区域 Ω) 一致有界，因此存在一个测度 μ，它由有限个向量加权狄拉克δ之和构成，并且对某个子序列，性质 (1) 成立。

现在, w 我们转而证明性质 (2)。为此，我们将映射 $\bar\beta_\varepsilon$: 区域 Ω $\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ 定义为

$$\bar\beta_\varepsilon(x):=\varepsilon\chi_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)}(x)\sum_{n=1}^{N_\varepsilon}(R_\varepsilon^n b_\varepsilon^n)\otimes \mathsf{J}\frac{x-x_\varepsilon^n}{|x-x_\varepsilon^n|^2}\,,$$

其中，J 是逆时针 $\frac{\pi}{2}$ 旋转。可以很容易地验证，

$$\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} |\bar\beta_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x \le C\varepsilon^2 N_\varepsilon \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |b_\varepsilon^n|^2 |\log\varepsilon| \le C_\gamma \varepsilon^2 |\log\varepsilon|\,, \tag{1.8}$$

其中，最后一个不等式由 (1.7) 得出。根据构造，对于每个开集 $U \subset$ 区域 Ω（其中 $\partial U \subset$ 区域 Ωε(με) 光滑），我们有 $\int_{\partial U}(\beta_\varepsilon - \bar\beta_\varepsilon)t\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0$；因此，存在一个映射 $u_\varepsilon \in H^1$(区域 Ωε(με); $\mathbb{R}^2$)，使得 $\beta_\varepsilon - \beta_\varepsilon = \nabla u_\varepsilon$ 在 区域 Ωε(με) 中。由引理 1.3，我们从而得到存在一个与 ε 无关的常数 $C > 0$ 以及一个二维特殊正交群 $\{R_\varepsilon\}_\varepsilon \subset$ 的旋转序列，使得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\beta_\varepsilon - R_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x \le& 2\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} |\beta_\varepsilon - \bar\beta_\varepsilon - R_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} |\bar\beta_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + C_\gamma\varepsilon^2 \\
\le& 2\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} |\nabla u_\varepsilon - R_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x + C_\gamma\varepsilon^2|\log\varepsilon| \\
\le& C\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} \mathrm{dist}^2(\nabla u_\varepsilon, \mathrm{SO}(2))\,\mathrm{d}x + C_\gamma\varepsilon^2|\log\varepsilon| \\
\le& C\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} \mathrm{dist}^2(\beta_\varepsilon, \mathrm{SO}(2))\,\mathrm{d}x + C_\gamma\varepsilon^2|\log\varepsilon| \le C_\gamma\varepsilon^2|\log\varepsilon|\,,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

其中我们还使用了 (1.7)、(1.8)、性质 (iv) 和 (1.5)。根据 (1.9)，取一个子序列后，$\frac{\beta_\varepsilon - R_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}} \rightharpoonup \beta^{\mathrm{cf}}$ 属于 L^2(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times2}$)，其中某个 $\beta^{\mathrm{cf}} \in L^2$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times2}$)，因此性质 (2) 成立。

现在我们证明，旋度 $\beta^{\mathrm{cf}} = 0$ 在分布意义下成立。为此，取 $\phi \in C_0^1(\Omega)$，并令 $\{\phi_\varepsilon\}_\varepsilon \subset H_0^1(\Omega)$ 是一个收敛到 ϕ、且在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛的族，并满足对于每个 $n = 1, \dots, N_\varepsilon$，都有 $\phi_\varepsilon \equiv \phi(x_\varepsilon^n)$ in$B_\varepsilon(x_\varepsilon^n)$。于是，由 (1.7) 可得

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Curl}\,\beta^{\mathrm{cf}}, \phi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} \Big\langle \mathrm{Curl}\,\frac{\beta_\varepsilon - R_\varepsilon}{\varepsilon}, \phi_\varepsilon \Big\rangle = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} \Big\langle \mathrm{Curl}\,\frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon}, \phi_\varepsilon \Big\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\to0} \frac{\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} R_\varepsilon^n b_\varepsilon^n \phi(x_\varepsilon^n)}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} = 0\,;
\end{aligned}$$

由 ϕ 的任意性可知，旋度 $\beta^{\mathrm{cf}} = 0$ 在分布意义下成立。

此外，由于二维特殊正交群是紧的，取一个子序列后，$R_\varepsilon \to R$ 对某个 $R \in$ SO(2) 成立。为了完成该定理的证明，还需证明 $\mu \in \overline{X}^R$(Ω)。首先，对于每个$n = 1, \dots, N_\varepsilon$，令 $\tilde R_\varepsilon^n \in \mathcal{I}(\mathbb{S})$ 满足 ffl $_{A_{\varepsilon,\ \varepsilon^\gamma}(x_\varepsilon^n)}\ \beta_\varepsilon \mathrm{d}x = R_\varepsilon^n \tilde R_\varepsilon^n$。根据 (1.7)，取一个子序列后，我们可以假设 $N_\varepsilon \equiv N$，其中某个 $N \in \mathbb{N}$ 与 ε 无关。对于每个固定的$n = 1, \dots, N$，有

$$|R_\varepsilon^n \tilde R_\varepsilon^n - R_\varepsilon|^2 = \Big| \fint_{A_{\varepsilon,\varepsilon^\gamma}(x_\varepsilon^n)} (\beta_\varepsilon - R_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \Big|^2 \le C_\gamma \varepsilon^{2(1-\gamma)} |\log\varepsilon|\,, \tag{1.10}$$

其中，最后一个不等式是詹森不等式和（1.9）的结果。由于 $\mathcal{I}(\mathbb{S})$ 是紧的，~ ~ ~
我们有，经过进一步取子序列，$R_\varepsilon^n \to R^n$ 对于某个 $R^n \in \mathcal{I}(\mathbb{S})$。结合（1.10）可得，$R_\varepsilon^n \to R$ ($\tilde R^n$)^{T} 当 $\varepsilon \to 0$ 时，因此 $\mu \in \overline{X}^R$(区域 Ω)。□

注 1.4。在本文中，假设 Ω 是单连通的，是为了保证区域 Ω 上的 L^2 无旋矩阵场类与 $H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ 中函数的梯度类相同。如果在上述紧性结果以及下面的 Γ-收敛结果中，将条件 $\beta^{\mathrm{cf}} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times2})$ with Curl $\beta^{\mathrm{cf}} = 0$ 替换为条件 $\beta^{\mathrm{cf}} = \nabla u$ 对于某个 $u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$，则这一假设可以很容易地去掉。

注释 1.5. 如引言中所述，(1.2) 中对应变场平均值的条件是定理 1.1 所必需的，以保证相容条件：R 既是进行线性化所围绕的渐近旋转，也是极限奇点的权重所在晶格的旋转。事实上，若从 (1.2) 的定义中去掉这一平均条件，就可以考虑 $\mu_\varepsilon \equiv \varepsilon b\delta_0$（其中 $0 \in \Omega$ 且 $b \in \mathbb{S}$），R 为二维特殊正交群 SO(2) 中任意旋转，而场 $\beta_\varepsilon = R + \varepsilon\beta^{b,\ \mathbb{C}}_{\ \mathbb{R}^2}$（其中 $\beta^{\zeta,\ \mathbb{C}}_{\ \mathbb{R}^2}$ 是相应线性化问题的格林函数，见下文 (1.11)）；

线性化问题，见下文 (1.11)）；这样的场（去掉 (1.2) 中的平均条件后）将是可容许应变。此时，奇点的权重位于集合 $\mathbb{S}$ 上，而 β_ε 则是围绕任意固定的旋转 R进行线性化，这使得可容许伯格斯矢量类中出现不符合物理实际的刚性缺失。

此外，我们强调，这种平均条件应在半径为 ε、ε^γ 的“厚环域”上要求，而不能用某个 $M>1$（与 ε 无关）对应的半径为 ε、$M\varepsilon$ 的“薄”环域上的较弱条件来替代，正如下列计算所示。令 $\vartheta_\varepsilon\colon [\varepsilon,1]\to[0,1]$为满足 $\vartheta_\varepsilon(t)\equiv 0$ 属于 $[\varepsilon,M\varepsilon]$、$\vartheta_\varepsilon(t)\equiv 1$ 属于 $[2M\varepsilon,1]$ 且 $\vartheta_\varepsilon(t)=\frac{t}{M\varepsilon}-1$ 属于 $[M\varepsilon,2M\varepsilon)$ 的函数，并令$u_\varepsilon\colon A_{\varepsilon,1}(0)\to\mathbb{R}^2$ 为由 $u_\varepsilon(x):=R(\vartheta_\varepsilon(|x|))x$ 定义的函数，其中

$$R(\vartheta):=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}.$$

通过直接计算，

$$\begin{aligned}\nabla u_\varepsilon(x)=&R(\vartheta_\varepsilon(|x|))\\ &+\frac{\dot\vartheta_\varepsilon(|x|)}{|x|}\begin{pmatrix}-\sin\vartheta_\varepsilon(|x|)x_1^2+\cos\vartheta_\varepsilon(|x|)x_1x_2 & -\sin\vartheta_\varepsilon(|x|)x_1x_2+\cos\vartheta_\varepsilon(|x|)x_2^2\\ -\cos\vartheta_\varepsilon(|x|)x_1^2-\sin\vartheta_\varepsilon(|x|)x_1x_2 & -\sin\vartheta_\varepsilon(|x|)x_2^2-\cos\vartheta_\varepsilon(|x|)x_1x_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由此我们可推得

$$\int_{A_{\varepsilon,1}(0)}\operatorname{dist}^2(\nabla u_\varepsilon,\mathrm{SO}(2))\,\mathrm{d}x\le\frac{C}{M^2\varepsilon^2}\int_{A_{M\varepsilon,2M\varepsilon}(0)}|x|^2\,\mathrm{d}x\le CM^2\varepsilon^2.$$

在这个例子中，∇u_ε 在环域 $A_{\varepsilon,M\varepsilon}(0)$ 上的平均值是单位矩阵 $R(0)$，而$\nabla u_\varepsilon\to R(1)$（例如在 $L^2(\text{区域 }\Omega;\mathbb{R}^{2\times2})$ 中）。上述计算表明，场 $\beta_\varepsilon=R(\vartheta_\varepsilon)+\varepsilon\beta^{b,\mathbb{C}}_{,\mathbb{R}^2}$（其中 $b\in\mathbb{S}$）满足环域 $A_{\varepsilon,M\varepsilon}(0)$ 上的平均假设，且 $R=R(0)=\mathrm{Id}$，但它们收敛到旋转 $R(1)$。因此，对半径为 ε 和 $M\varepsilon$ 的环带（M 固定）上的可容许场的平均值施加条件，并不能建立伯格斯矢量所在晶格的旋转与能量线性化所围绕的旋转之间的任何关系。

另一方面，为了使我们的证明（尤其是 (1.10)）成立，很容易看出，可以通过要求以下条件来弱化 (1.2) 中的平均条件：

$$\operatorname{dist}\left(\fint_{A_{\varepsilon,\varepsilon^\gamma}(x^n)}\beta\,\mathrm{d}x,R^n\mathcal{I}(\mathbb{S})\right)\le\delta_\varepsilon,$$

对于某个 $\delta_\varepsilon>0$，其中 $\delta_\varepsilon\to0$ 为 $\varepsilon\to0$。

1.3. Γ-收敛。本小节致力于研究式（1.4）中半离散能量的 Γ-收敛结果。为了定义 Γ-极限，我们首先引入刃型位错的自能。设 $\mathbb{C}$ 为线弹性中的给定弹性张量。对于每个$\zeta\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，由整个平面中的刃型位错 $\zeta\delta_0$ 所诱导的相应位移 $u^{\zeta,\mathbb{C}}_{,\mathbb{R}^2}$ 和应变 $\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{,\mathbb{R}^2}$ 已在文献中得到明确计算（例如参见 [7, 公式 4.1.25]）；这里我们回顾分析中所需的若干性质。应变场 $\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{,\mathbb{R}^2}$ 满足环流条件

$$\operatorname{Curl}\beta=\zeta\delta_0\text{ in }\mathbb{R}^2$$

以及平衡方程

$$\operatorname{Div}\mathbb{C}\beta=0\text{ in }\mathbb{R}^2.$$

在极坐标中，$\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{,\mathbb{R}^2}$ 具有如下形式

$$\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}(\rho,\theta):=\frac{1}{\rho}\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta),\tag{1.11}$$

其中（见 [15, 注释 7]）$\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}$ 是下式的唯一极小化者：$\int_0^{2\pi}\mathbb{C}\Gamma:\Gamma\mathrm{d}\theta$，在形如以下形式的函数 Γ中

$$\Gamma(\theta):=f(\theta)\otimes(-\sin\theta;\cos\theta)+g\otimes(\cos\theta;\sin\theta),$$

其中 $g\in\mathbb{R}^2$和 $f\in C^0([0,2\pi];\mathbb{R}^2)$ 满足 $f(0)=f(2\pi)$ 以及 $\int_0^{2\pi}f(\omega)\otimes\omega\,\mathrm{d}\omega=\zeta$。最优的$g^{\zeta,\mathbb{C}}$和 $f^{\zeta,\mathbb{C}}$由向量 ζ和张量 $\mathbb{C}$唯一确定。

注 1.6。我们强调,

$$\int_0^{2\pi} \Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0\,, \tag{1.12}$$

因此，对于所有 $0<r<R$、$\int_{A_{r,\,R}(0)} \beta^{\zeta}_{,\,\mathbb{R}^2}{}^{\mathbb{C}}\,\mathrm{d}x = 0$，结论成立。事实上，设 $\bar{f}^{\zeta,\,\mathbb{C}}$为 2π-周期延拓的 $f^{\zeta,\,\mathbb{C}}$，并考虑

$$\hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta) := -\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta+\pi) = \bar{f}^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta+\pi)\otimes(-\sin\theta;\cos\theta) + g^{\zeta,\mathbb{C}}\otimes(\cos\theta;\sin\theta)\,;$$

注意到，$\hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}}$ 的环流与 $\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}$的环流相同。由于凸性,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathbb{C}\Big(\frac{1}{2}\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}+\frac{1}{2}\hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}}\Big) : \Big(\frac{1}{2}\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}+\frac{1}{2}\hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}}\Big)\,\mathrm{d}\theta &\le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathbb{C}\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}} : \Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathbb{C}\hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}} : \hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbb{C}\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}} : \Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}\,\mathrm{d}\theta\,,\end{aligned}$$

由严格凸性可推得,

$$\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\cdot) = \hat{\Gamma}^{\zeta,\mathbb{C}}(\cdot) = -\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\cdot+\pi)\,; \tag{1.13}$$

因此，$\Gamma^{\zeta,\,\mathbb{C}}$ 是奇函数，因此 (1.12) 成立。

对于每个 $\zeta\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$，我们设定

$$\psi^{\mathbb{C}}(\zeta) := \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathbb{C}\,\Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta) : \Gamma^{\zeta,\mathbb{C}}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{|\log r|}\int_{A_{r,1}(0)} \frac{1}{2}\mathbb{C}\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2} : \beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad 0<r<1\,. \tag{1.14}$$

根据 [13, 命题 1] （另见 [15, 推论 6]），我们有

$$\psi^{\mathbb{C}}(\zeta) = \lim_{\frac{r_2}{r_1}\to+\infty} \psi^{\mathbb{C}}_{r_1,r_2}(\zeta)\,, \tag{1.15}$$

其中

$$\psi^{\mathbb{C}}_{r_1,r_2}(\zeta) := \frac{1}{\log\frac{r_2}{r_1}} \min_{\substack{\beta\in L^2(A_{r_1,r_2}(0);\mathbb{R}^{2\times 2})\\ \mathrm{Curl}\,\beta=0 \text{ in } A_{r_1,r_2}(0)\\ \int_{\partial B_r(0)}\beta t\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1=\zeta}} \int_{A_{r_1,r_2}(0)} \mathbb{C}\beta : \beta\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.16}$$

此外，对于每个 $\zeta\in\mathbb{R}^2$ 以及每个 $s\in\mathbb{R}$

$$\psi^{\mathbb{C}}(s\zeta) = s^2\psi^{\mathbb{C}}(\zeta)\,. \tag{1.17}$$

最后，对于每个 $b\in\mathbb{S}$，我们定义

$$\varphi^{\mathbb{C}}(b) := \min\Big\{\sum_{i=1}^{I}|z_i|\psi^{\mathbb{C}}(b_i)\,:\,z_i\in\mathbb{Z}\,,\,b_i\in\mathbb{S}\,,\,N\in\mathbb{N}\,,\,\sum_{i=1}^{I}z_ib_i=b\Big\} \tag{1.18}$$

（其中 $\varphi^{\mathbb{C}}(b)=0$ 对 $b=0$成立）。现在我们可以给出在（1.4）中定义的非线性能量 $\mathcal{F}^{\gamma}_{\varepsilon}$ 的 Γ-收敛结果。

定理 1.7。以下 Γ-收敛结果成立。

（i）（Γ-下极限不等式）设 $R\in$二维特殊正交群，$\mu=\sum_{k=1}^{K}\xi^k\delta_{x^k}\in\overline{X}^R$(区域 Ω)，$\beta^{\mathrm{cf}}\in L^2$(区域 Ω；$\mathbb{R}^{2\times 2}$)，且 $\mathrm{Curl}\,\beta^{\mathrm{cf}}=0$。对于每个 $\{(\mu_\varepsilon;\ \beta_\varepsilon;\ R_\varepsilon)\}_\varepsilon\subset\mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\ \mathbb{R}^2)\times L^2$(区域 Ω；$\mathbb{R}^{2\times 2}$) $\times$二维特殊正交群，使得（$\mu_\varepsilon;\ \beta_\varepsilon;\ R_\varepsilon$）$\to$($\mu;\ \beta^{\mathrm{cf}};\ R$)（按照定义1.2的意义），均有

$$\sum_{k=1}^{K}\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k) + \int_\Omega \frac{1}{2}\mathbb{C}R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}} : R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}\,\mathrm{d}x \le \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{F}^{\gamma}_{\varepsilon}(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon)\,. \tag{1.19}$$

（ii）（Γ-上极限不等式）设 $R \in$ 二维特殊正交群， $\mu = \sum_{k=1}^{K} \xi^k \delta_{x^k} \in \overline{X}^R$(区域 Ω) 和 $\beta^{\mathrm{cf}} \in L^2$ (区域 Ω； $\mathbb{R}^{2\times 2}$)，且 Curl $\beta^{\mathrm{cf}} = 0$。则存在 $\{(\mu_\varepsilon;\ \beta_\varepsilon;\ R_\varepsilon)\}_\varepsilon \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\ \mathbb{R}^2) \times L^2$(区域 Ω； $\mathbb{R}^{2\times 2}$) $\times$ 二维特殊正交群，使得（ μ_ε ； β_ε ； R_ε) $\to (\mu$ ； β^{cf} ； $R)$，且

$$\sum_{k=1}^{K} \varphi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k) + \int_\Omega \frac{1}{2}\mathbb{C}R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}} : R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}\,\mathrm{d}x \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon)\,. \tag{1.20}$$

在给出定理 1.7 的证明之前，我们先陈述并证明以下关于无旋度矩阵场的线性化引理，论证方式与 [25, 命题 3.11] 的证明相同。需要指出的是，这类存在缺陷时的线性化结果推广了梯度场的情形，而后者最初在 [11], 中得到处理，所用方法均依赖于 [14] 中的刚性估计。

引理 1.8。设 $r > 1$。对于每个 $\delta > 0$，设 $\zeta_\delta \in \mathbb{R}^2$ 和 $\beta_\delta \in L^2(A_{1,r}(0);\ \mathbb{R}^{2\times 2})$ 满足 $\int_{\partial B_1(0)} \beta_\delta t\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \zeta_\delta$ 且旋度 $\beta_\delta = 0$ 属于 $A_{1,r}(0)$。假设 $\beta_\delta \to R$ 属于 $L^2(A_{1,r}(0);\ \mathbb{R}^{2\times 2})$ 且 $\frac{\zeta_\delta}{\delta} \to \zeta$ （如 $\delta \to 0$），其中 $\zeta \in \mathbb{R}^2$ 且 $R \in$ 属于二维特殊正交群。那么

$$\liminf_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2}\int_{A_{1,r}(0)} W(\beta_\delta)\,\mathrm{d}x \geq \log r\,\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\zeta)\,. \tag{1.21}$$

证明。为证明 (1.21)，我们采用反证法。假设存在一个趋于零的序列 $\{\delta_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset (0,+\infty)$ 和一个常数 $\sigma > 0$，使得

$$\frac{1}{\delta_l^2}\int_{A_{1,r}(0)} W(\beta_{\delta_l})\,\mathrm{d}x < \log r\,\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\zeta) - \sigma\,. \tag{1.22}$$

由 (1.22)，结合性质 (iv) 以及 [14] 中的刚性估计（关于适用于环带上无旋度场的此类刚性结果的具体表述，见 [25, Proposition3.3]，另见上文引理 1.3），可知存在一个常数 $C > 0$ 和一个常旋转序列 $\{R_{\delta_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset$二维特殊正交群，使得

$$\|\beta_{\delta_l} - \bar{R}_{\delta_l}\|^2_{L^2(A_{1,r}(0);\mathbb{R}^{2\times 2})} \leq C\log r\,\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\zeta)\delta_l^2\,. \tag{1.23}$$

显然，由三角不等式， $\bar{R}_{\delta_l} \to R$ ，当 $l \to +\infty$ 时成立。根据假设，场 $\bar{R}_{\delta_l}^{\mathrm{T}}\beta_{\delta_l} - \mathrm{Id}_{\delta_l}$ 无旋度，因此令 $\mathsf{C} := \{(x_1;0):\ 1 \leq x_1 \leq r\}$，可知存在一个序列 $\{v_{\delta_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset H^1(A_{1,r}(0) \setminus \mathsf{C};\ \mathbb{R}^2)$，使得 $\int_{A_{1,r}(0)} v_{\delta_l}\,\mathrm{d}x = 0$，且 $\bar{R}_{\delta_l}^{\mathrm{T}}\beta_{\delta_l} - \mathrm{Id}_{\delta_l} = \nabla v_{\delta_l}$ 在 $A_{1,r}(0) \setminus \mathsf{C}$ 中。根据构造，

$$[v_{\delta_l}] = \bar{R}_{\delta_l}^{\mathrm{T}}\frac{\zeta_{\delta_l}}{\delta_l} \qquad \text{on } \mathsf{C}\,, \tag{1.24}$$

其中 $[v]$ 表示函数 v 在迹意义下的跳跃。由 (1.23)，我们得到

$$\int_{A_{1,r}(0)} |\nabla v_{\delta_l}|^2\,\mathrm{d}x \leq C\log r\,\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\zeta)\,, \tag{1.25}$$

由此可推得，除去一个子序列后， $v_{\delta_l} \rightharpoonup v$ 属于 $H^1(A_{1,r}(0) \setminus \mathsf{C};\mathbb{R}^2)$，其中某个 $v \in H^1(A_{1,r}(0) \setminus \mathsf{C};\ \mathbb{R}^2)$；此外，由 (1.24) 并回忆起 $\bar{R}_{\delta_l} \to R$，可得

$$[v] = R^{\mathrm{T}}\zeta \qquad \text{on } \mathsf{C}\,. \tag{1.26}$$

现在我们可以在恒等映射附近将能量线性化。为此，我们定义特征函数序列 $\{\chi_{\delta_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$

$$\chi_{\delta_l}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } |\nabla v_{\delta_l}| < \delta_l^{-\alpha} \\ 0 & \text{otherwise in } A_{1,r}(0)\setminus\mathsf{C}\,, \end{cases}$$

其中 $0<\alpha<1$ 任意固定。由 (1.25) 可知，$\chi_{\delta_l}\to 1$ 依测度收敛，因此$\nabla v_{\delta_l}\chi_{\delta_l}\rightharpoonup\nabla v$属于 L^2($A_{1,r}$(0) $\setminus$ C; $\mathbb{R}^{2\times 2}$)。利用泰勒展开并结合 (ii)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta_l^2}\int_{A_{1,r}(0)}W(\beta_{\delta_l})\,\mathrm{d}x&\geq\frac{1}{\delta_l^2}\int_{A_{1,r}(0)}\chi_{\delta_l}W(\bar{R}_{\delta_l}^{\mathrm{T}}\beta_{\delta_l})\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\delta_l^2}\int_{A_{1,r}(0)\setminus\mathsf{C}}\chi_{\delta_l}W(\mathrm{Id}+\delta_l\nabla v_{\delta_l})\,\mathrm{d}x\\&\geq\int_{A_{1,r}(0)\setminus\mathsf{C}}\Big(\frac{1}{2}\mathbb{C}(\chi_{\delta_l}\nabla v_{\delta_l}):(\chi_{\delta_l}\nabla v_{\delta_l})-\frac{\chi_{\delta_l}}{\delta_l^2}\omega(\delta_l|\nabla v_{\delta_l}|)\Big)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}\tag{1.27}$$

其中 $\frac{\omega(t)}{t}_{l^2}\to 0$ 为 $t\to 0^+$。

注意到

$$\frac{\chi_{\delta_l}}{\delta_l^2}\omega(\delta_l|\nabla v_{\delta_l}|)=|\nabla v_{\delta_l}|^2\chi_{\delta_l}\frac{\omega(\delta_l|\nabla v_{\delta_l}|)}{\big(\delta_l|\nabla v_{\delta_l}|\big)^2}\,,$$

它是 L^1($A_{1,r}$(0)) 中一致有界序列 ($\{|\nabla v_{\delta_l}|^2\}_{l\in\mathbb{N}}$) 与 L^∞($A_{1,r}$(0)) 中一致趋于零序列的乘积。因此，由 (1.27) 和下半连续性，我们得出

$$\liminf_{l\to+\infty}\frac{1}{\delta_l^2}\int_{A_{1,r}(0)}W(\beta_{\delta_l})\,\mathrm{d}x\geq\int_{A_{1,r}(0)\setminus\mathsf{C}}\frac{1}{2}\mathbb{C}\nabla v:\nabla v\,\mathrm{d}x\geq\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\zeta)\,,\tag{1.28}$$

其中，最后一个不等式直接由 $\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}$ 在 (1.16) 中的定义以及 (1.26) 得出。由于 (1.28) 与 (1.22) 矛盾，因此 (1.21) 成立。□

设 Le　掌握引理 1.8 后，我们便可以证明定理 1.7 中的 Γ-下极限不等式。　.

定理 1.7(i) 的证明。无需损失一般性，我们可以假设 (1.5) 得到满足。对于每个$\varepsilon>0$令 $\mu_\varepsilon=\varepsilon\sum_{n=1}^{N_\varepsilon}\xi_\varepsilon^n\delta_{x_\varepsilon^n}\in X_\varepsilon^\gamma$(区域 Ω)。根据 (1.7)，我们有 $|\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}|$(区域 Ω) $\leq C_\gamma$，因此我们 ˆ ˆ 可以假设，经过一个子序列，$N_\varepsilon=N$ 对于某个 N，其独立于 ε。此外，经过进一步提取子序列，我们可以假设点 x_ε^n 中的每一个都收敛到有限集 $\{y^j\}_{j=1,\dots,J}\subset$ ¯区域 Ω 中的某个点（其中 $K\leq J\leq$ˆN），且 $y^j=x^k\in$区域 Ω 对于 $j=1,\dots,K$。令 $0<\rho<1$ 使得球 $B_{2\rho}(y^j)$ 两两不相交，并且 $\bigcup_{k=1}^K B_{2\rho}(x^k)\subset$区域 Ω。于是，令

$$\mathcal{E}_\varepsilon^{\mathrm{far}}:=\int_{\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^J\overline{B}_\rho(y^j)}W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,,\quad\mathcal{E}_\varepsilon^k:=\int_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)\cap B_\rho(x^k)}W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x\ (\text{for every } k=1,\dots,K)\,,$$

我们有这里只精品

$$\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon)\geq\mathcal{E}_\varepsilon^{\mathrm{far}}+\sum_{k=1}^K\mathcal{E}_\varepsilon^k\,.\tag{1.29}$$

逐字沿用 [25, 命题 3.11], 的证明思路，即在 R 极限旋转 R 附近进行 W 线性化 W，并利用弹性能关于 L^2中的弱收敛 L^2的下半连续性，可以验证，

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{E}_\varepsilon^{\mathrm{far}}\geq\int_{\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^J\overline{B}_\rho(y^j)}\mathbb{C}R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}:R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}\,\mathrm{d}x\,.\tag{1.30}$$

现在我们声称，对于每一个 $k=1,\dots,K$

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{E}_\varepsilon^k\geq\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)\,.\tag{1.31}$$

注意到，(1.29)、(1.30) 和 (1.31) 得出的是

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma(\beta_\varepsilon)\geq\sum_{k=1}^K\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)+\int_{\Omega\setminus\bigcup_{j=1}^J\overline{B}_\rho(y^j)}\mathbb{C}R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}:R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}\,\mathrm{d}x\,,$$

由此，令 $\rho\to0$ 趋于无穷，即得 (1.19)。

因此，为了完成证明，只需证明对于任意固定的 $k = 1, \dots, K$，公式 (1.31) 成立。为此，我们固定 $k \in \{1, \dots, K\}$ 并令

$$\tilde{\mu}_\varepsilon^k := \varepsilon \sum_{x_\varepsilon^n \in B_\rho(x^k)} \xi_\varepsilon^n \delta_{x_\varepsilon^n};$$

显然，$\frac{\tilde{\mu}_\varepsilon^k}{\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^k \delta_{x^k}$ 和

$$\frac{\tilde{\mu}_\varepsilon^k(B_\rho(x^k))}{\varepsilon} \to \xi^k \qquad \text{as } \varepsilon \to 0\,. \tag{1.32}$$

取一个子序列后，我们可以假设 $\operatorname{supp} \tilde{\mu}_\varepsilon^k$ 的基数由某个与 ε 无关的 $N^k \in \mathbb{N}$ 给出。经过重新编号后，我们还可以假设（回顾一下，k 是固定的）$\operatorname{supp} \tilde{\mu}_\varepsilon^k = \{x_\varepsilon^1, \dots, x_\varepsilon^{N^k}\}$。令（取足够小的 ε）$g_\varepsilon^k\colon \left(\left|\log\frac{\rho}{\varepsilon}\right|\log, 1\right) \to \mathbb{N}$ 表示如下函数：它将任意 $q \in \left(\left|\log\frac{\rho}{\varepsilon}\right|\log, 1\right)$ 映射为 $\bigcup_{n=1}^{N^k} B_{\varepsilon^q}(x_\varepsilon^n)$ 的连通分支数 $g_\varepsilon^k(q)$。我们有，$g_\varepsilon^k \equiv N^k$ 在区间 $[\gamma, 1)$ 内，且 g_ε^k 在 $\left(\left|\log\frac{\rho}{\varepsilon}\right|\log, 1\right)$ 上单调不减；因此，它至多有 $L_\varepsilon^k \le N^k$ 个不连续点。取一个子序列后，我们可以假设 $L_\varepsilon^k = L^k$，其中 L^k 与 ε 无关。令 $\{q_\varepsilon^{k,l}\}_{l=1,\dots,L^k} \subset \left(\left|\log\frac{\rho}{\varepsilon}\right|\log, \gamma\right)$ 表示函数 g_ε^k 的不连续点集，其中 $q_\varepsilon^{k,l} < q_\varepsilon^{k,l+1}$ 对每个 $l = 1, \dots, L^k - 1$ 均成立。存在一个有限集 $\triangle := \{q^{k,1}, \dots, q^{k,\tilde{L}^k}\} \subset (0, \gamma]$，其中 $q^{k,m} < q^{k,m+1}$ 且 $\tilde{L}^k \le L^k$，使得取一个子序列后，$\{q_\varepsilon^{k,l}\}_\varepsilon$ 对每个 $l = 1, \dots, L^k$ 都收敛到 $\triangle$ 中的某个点，当 $\varepsilon \to 0$ 时。此外，令 $q^{k,0} := 0$ 且 $q^{k,\tilde{L}^k+1} := 1$。取 $\lambda > 0$ 使得 $2\lambda < \min\{q^{k,m+1} - q^{k,m}\colon m \in \{0, 1, \dots, \tilde{L}^k\}\}$；于是，当 ε 足够小时，函数 g_ε^k 在区间 $[q^{k,m} + \lambda, q^{k,m+1} - \lambda]$ 上为常数，其值记为 $I_\varepsilon^{k,m}$。

很容易看出（事实上，以下论证是所谓球构造的一部分，例如 [23], 中所采用的球构造；更多细节请参阅该文献），对于每个 $m = 0, 1, \dots, \tilde{L}^k$，都存在一族 $I_\varepsilon^{k,m}$ 环带

$$C_\varepsilon^{k,m,i} := B_{\varepsilon^{q^{k,m}+\lambda}}(z_\varepsilon^{k,m,i}) \setminus \overline{B}_{\varepsilon^{q^{k,m+1}-\lambda}}(z_\varepsilon^{k,m,i}) \tag{1.33}$$

满足 $z_\varepsilon^{k,m,i} \in B_\rho(x^k)$ 且 $i = 1, \dots, I_\varepsilon^{k,m}$，使得以下性质成立：环带 $C_\varepsilon^{k,m,i}$ 两两不相交，包含于 $B_{2\rho}(x^k)$ 中，并且对所有 $m = 0, 1, \dots, \tilde{L}^k$

$$\bigcup_{n=1}^{N^k} B_\varepsilon(x_\varepsilon^n) \subset \bigcup_{i=1}^{I_\varepsilon^{k,m}} B_{\varepsilon^{q^{k,m+1}-\lambda}}(z_\varepsilon^{k,m,i})\,.$$

令 $\xi_\varepsilon^{k,m,i} := \int_{B_{\varepsilon^{q^{k,m+1}-\lambda}}(z_\varepsilon^{k,m,i})}$，由 (1.32) 可知（对每个 $m = 0, 1, \dots, \tilde{L}^k$）

$$\sum_{i=1}^{I_\varepsilon^{k,m}} \frac{\xi_\varepsilon^{k,m,i}}{\varepsilon} \to \xi^k \qquad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{1.34}$$

取子序列后，我们有（对每个 $m = 0, 1, \dots, \tilde{L}^k$）$I_\varepsilon^{k,m} = I^{k,m}$ 与 ε 无关；我们断言

$$\frac{\xi_\varepsilon^{k,m,i}}{\varepsilon} \to \hat{\xi}^{k,m,i} \qquad \text{for every } i = 1, \dots, I^{k,m}\,, \tag{1.35}$$

对于某些向量

$$\hat{\xi}^{k,m,i} \in R\mathbb{S} \tag{1.36}$$

with

$$\sum_{i=1}^{I^{k,m}} \hat{\xi}^{k,m,i} = \xi^k\,. \tag{1.37}$$

事实上，通过构造，经过进一步提取子序列后，$\xi^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i}=\varepsilon\sum^{N^k,\,,\quad\ m\,i}R^n_\varepsilon b^{n'}$，对于某些$N^{k,}_{m,}{}^{i}\in\mathbb{N}$, $R^n_\varepsilon\in$二维特殊正交群，且 $b^n_\varepsilon\in\mathbb{S}$。由 (1.10) 可知，对于每个 $n=1,\dots,N^{k,}_{m,}{}^{i}$，存在一个旋转 $R^n_\varepsilon\in\mathcal{I}(\mathbb{S})$ 使得

$$|R^n_\varepsilon b^n_\varepsilon-R_\varepsilon(\tilde R^n_\varepsilon)^{\mathrm T}b^n_\varepsilon|^2\le C_\gamma\varepsilon^{2(1-\gamma)}\sqrt{|\log\varepsilon|}\,.$$

因此，利用 $(\tilde R^n_\varepsilon)^{\mathrm T}b^n_\varepsilon\in\mathbb{S}$ 以及 $|R_\varepsilon-R|\to0$，我们推出 (1.36)；最后，(1.37) 由 (1.34) 和 (1.35) 立即得出。

固定 $r>1$。对于每个 $m=0,1,\dots,\tilde L^k$，我们令 $H^{k,}_{\varepsilon}{}^{m}:=\big\lfloor(q^{k,m+1}-q^{k,m}-2\lambda)\,|\log\varepsilon|\log r\big\rfloor$；并且，对于每个$h=1,\dots,H^{k,}_{\varepsilon}{}^{m}$，以及对于每个 $i=1,\dots,I^{k,m}$，我们定义 $A^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i\,h},,:=A_{r^{h-1}\varepsilon^{q^k,}{}^{m+1-\lambda},r^h\varepsilon^{q^k,}{}^{m+1-\lambda}}(z^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i},)$。回顾 (1.33) 中 $C^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i}$的定义，并令

$$\hat\beta^{k,m,i,h}_\varepsilon(y):=\beta_\varepsilon(r^{h-1}\varepsilon^{q^{k,m+1}-\lambda}y+z^{k,m,i}_\varepsilon)\,,\qquad\text{for every } y\in A_{1,r}(0)\,,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C^{k,m,i}_\varepsilon}W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm dx&\ge\sum_{h=1}^{H^{k,m}_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{A^{k,m,i,h}_\varepsilon}W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm dx\\&=\sum_{h=1}^{H^{k,m}_\varepsilon}\frac{1}{(r^{1-h}\varepsilon^{1-q^{k,m+1}+\lambda})^2}\int_{A_{1,r}(0)}W(\hat\beta^{k,m,i,h}_\varepsilon)\,\mathrm dy\,,\end{aligned}\tag{1.38}$$

其中我们使用了变量代换 $y=r^{1-h}\varepsilon^{-q^{k,}{}^{m+1}+\lambda}(x-z^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i,})$。

根据构造，$\hat\beta^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i\,h}\in L^{2,}(A_{1,}{}_r(0);\ \mathbb{R}^{2\times2})$，旋度 $\mathrm{Curl}\,\hat\beta^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i\,h}=0^{,}$，以及

$$\begin{aligned}\zeta^{k,m,i,h}_\varepsilon:=\int_{\partial B_1(0)}\hat\beta^{k,m,i,h}_\varepsilon\,t\,\mathrm d\mathcal H^1&=r^{1-h}\varepsilon^{-q^{k,m+1}+\lambda}\int_{\partial B_{r^{h-1}\varepsilon^{q^{k,m+1}-\lambda}}(z^{k,m,i}_\varepsilon)}\beta_\varepsilon\,t\,\mathrm d\mathcal H^1\\&=r^{1-h}\varepsilon^{-q^{k,m+1}+\lambda}\xi^{k,m,i}_\varepsilon\,.\end{aligned}$$

由 (1.35)，我们得到 $\frac{\zeta^{k\,m\,i\,h}_\varepsilon}{r^{1-h}\varepsilon^{1-q^{k,}{}_{,\,,\,,\,m+1}+\lambda}}\to\hat\xi^{k,\ m,\ i}$ 当 $\varepsilon\to0$ 时。此外，由 (1.9)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{A_{1,r}(0)}|\hat\beta^{k,m,i,h}_\varepsilon-R_\varepsilon|^2\,\mathrm dy&=(r^{1-h}\varepsilon^{-q^{k,m+1}+\lambda})^2\int_{A^{k,m,i,h}_\varepsilon}|\beta_\varepsilon-R_\varepsilon|^2\,\mathrm dx\\&\le C_\gamma(r^{1-h}\varepsilon^{1-q^{k,m+1}+\lambda})^2|\log\varepsilon|\to0\qquad\text{as }\varepsilon\to0\,,\end{aligned}$$

这意味着 $\hat\beta^{k,}_{\varepsilon}{}^{m\,i\,h}\to R^{,}$，属于 $L^2(A_{1,}{}_r(0);\ \mathbb{R}^{2\times2})$。因此，我们可以将引理 1.8 应用于 $\delta=r^{1-h}\varepsilon^{1-q^{k,}{}^{m+1}+\lambda}$，从而得到

$$\frac{1}{(r^{1-h}\varepsilon^{1-q^{k,m+1}+\lambda})^2}\int_{A_{1,r}(0)}W(\hat\beta^{k,m,i,h}_\varepsilon)\,\mathrm dy\ge\log r\,\psi^{\mathbb C}_{1,r}\big(R^{\mathrm T}\hat\xi^{k,m,i}\big)-\sigma_\varepsilon\,,\tag{1.39}$$

对于某个族 $\{\sigma_\varepsilon\}_\varepsilon$（与 k、m、i 和 h 无关），满足 $\sigma_\varepsilon\to0$（当 $\varepsilon\to0$ 时）。将 (1.39) 对 $h=1$、...、$H^{k,}_{\varepsilon}{}^{m}$ 求和，根据 (1.38)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C^{k,m,i}_\varepsilon}W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm dx&\ge H^{k,m}_\varepsilon\big(\log r\,\psi^{\mathbb C}_{1,r}\big(R^{\mathrm T}\hat\xi^{k,m,i}\big)-\sigma_\varepsilon\big)\\&\ge(q^{k,m+1}-q^{k,m}-2\lambda)|\log\varepsilon|\Big(\psi^{\mathbb C}_{1,r}(R^{\mathrm T}\hat\xi^{k,m,i})-\frac{\sigma_\varepsilon}{\log r}\Big)\\&\quad-\log r\,\psi^{\mathbb C}_{1,r}(R^{\mathrm T}\hat\xi^{k,m,i})+\sigma_\varepsilon\,.\end{aligned}\tag{1.40}$$

注意，根据 (1.15) 以及齐次性（见 (1.17)），$|\psi^{\mathbb C}_{1,}{}_r(\zeta)-\psi^{\mathbb C}(\zeta)|\le\omega_r|\zeta|^2$ 对于某个连续模 ω_r，当 $r\to+\infty$ 时有 $\omega_r\to0$。现在，先对 $i=1,\ \dots,\ I^{k,}{}^{m}$ 求和，然后对 $m=0$、1、...、$\tilde L^k$ 求和，并结合 (1.36) 和 (1.37) 以及 $\varphi^{\mathbb C}$ 的定义，在

(1.18)，我们得到

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{E}_\varepsilon^k &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{m=0}^{\tilde L^k}(q^{k,m+1}-q^{k,m}-2\lambda)\sum_{i=1}^{I^{k,m}}\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\hat\xi^{k,m,i})\\ &\quad+\liminf_{\varepsilon\to 0}\sum_{m=0}^{\tilde L^k}(q^{k,m+1}-q^{k,m}-2\lambda)I^{k,m}\Big(-\frac{\sigma_\varepsilon}{\log r}\Big)\\ &\quad+\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|\log\varepsilon|}\sum_{m=0}^{\tilde L^k}\sum_{i=1}^{I^{k,m}}\big(-\log r\,\psi_{1,r}^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\hat\xi^{k,m,i})+\sigma_\varepsilon\big)\\ &\geq\sum_{m=0}^{\tilde L^k}(q^{k,m+1}-q^{k,m}-2\lambda)\sum_{i=1}^{I^{k,m}}\Big(\psi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\hat\xi^{k,m,i})-\omega_r|\hat\xi^{k,m,i}|^2\Big)\\ &\geq\big(1-2\lambda(\tilde L^k+1)\big)\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)-\big(1-2\lambda(\tilde L^k+1)\big)C\omega_r\,,\end{aligned}$$

因此，令 $r\to+\infty$ 和 $\lambda\to 0$ 趋于相应值即可得到 (1.31)，从而完成 (i) 的证明。 □

我们通过构造恢复序列来完成定理 1.7 的证明。

定理 1.7(ii) 的证明。根据 Γ-收敛中的标准稠密性论证，只需对 $\psi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)=\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)$（对每个 $k=1,\dots,K$）以及 $\beta^{\mathrm{cf}}\in L^\infty$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$) 证明该结论。由于区域 Ω 是单连通的，且 Curl $\beta^{\mathrm{cf}}=0$，存在一个映射 $u^{\beta^{\mathrm{cf}}}\in W^{1,\infty}$(区域 Ω; $\mathbb{R}^2$)，使得$\beta^{\mathrm{cf}}=\nabla u^{\beta^{\mathrm{cf}}}$。

Se取 C := {(x1; 0) : x1 ≥ 0}，对每个 $\zeta\in\mathbb{R}^2$，令 $u^{R,\zeta}\in C^\infty$(ℝ² \ C; $\mathbb{R}^2$) 满足

$$\nabla u^{R,\zeta}=R\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\,, \tag{1.41}$$

其中 $\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}$ 在 (1.11) 中定义。对于每个 $k=1,\dots,K$，令 $\mathsf{C}^k:=x^k+\mathsf{C}$，我们定义映射$u^{R,\varepsilon}{}^k\in C^\infty$(ℝ² \ C^k; ℝ²) 如下

$$u_\varepsilon^{R,k}(x):=u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}(x-x^k)+\sqrt{|\log\varepsilon|}u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x^k)\,; \tag{1.42}$$

于是 $\nabla u^{R,\varepsilon}{}^k(\cdot)=R\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}(\cdot-x^k)$ 并且

$$[u_\varepsilon^{R,k}]=\xi^k \text{ on } \mathsf{C}^k \text{ (locally in the sense of traces).} \tag{1.43}$$

我们定义映射 $u_\varepsilon^{\mathrm{far}}\in H^1$(区域 Ωε(μ) \ $\bigcup_{k=1}^K\mathsf{C}^k$; $\mathbb{R}^2$) 如下

$$u_\varepsilon^{\mathrm{far}}(x):=\sum_{k=1}^K u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}(x-x^k)+\sqrt{|\log\varepsilon|}u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x)\,. \tag{1.44}$$

设 $\phi\in C^1$([1, 2]; [0, 1]) 满足 $\phi(1)=1$ 和 $\phi(2)=0$；我们将函数 $u_\varepsilon\in H^1$(区域 Ωε(μ) \ $\bigcup_{k=1}^K$ C^k; $\mathbb{R}^2$) 定义如下

$$u_\varepsilon(x):=\begin{cases}u_\varepsilon^{R,k}(x) & \text{if } x\in A_{\varepsilon,\varepsilon^\gamma}(x^k)\text{ for some }k\,,\\ \phi\big(\frac{|x-x^k|}{\varepsilon^\gamma}\big)u_\varepsilon^{R,k}(x)+\big(1-\phi\big(\frac{|x-x^k|}{\varepsilon^\gamma}\big)\big)u_\varepsilon^{\mathrm{far}}(x) & \text{if } x\in A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k)\text{ for some }k\,,\\ u_\varepsilon^{\mathrm{far}}(x) & \text{if } x\in\Omega_{2\varepsilon^\gamma}(\mu)\,.\end{cases} \tag{1.45}$$

最后，我们令 $\beta_\varepsilon:=R+\varepsilon\nabla u_\varepsilon$，其中点属于 Ωε(μ)，并在 Ω 中其他位置令 $\beta_\varepsilon\equiv 0$，从而 $\beta_\varepsilon\in L^2$(Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$)。注意，尽管 u_ε 在 C^k 两侧发生跳跃，但我们有 Curl $\beta_\varepsilon=0\in$Ωε(μ)，因为根据 (1.43)，沿 C^k 的迹的切向导数相等。令 $\mu_\varepsilon\equiv\varepsilon\mu$，并对每个 $\varepsilon>0$ 令 $R_\varepsilon\equiv R$，我们声称 $\{(\mu_\varepsilon;\beta_\varepsilon;R_\varepsilon)\}_\varepsilon$ 是一个恢复序列。首先，根据注 1.6，$\beta_\varepsilon\in\mathcal{AS}^\gamma_\varepsilon(\mu_\varepsilon)$。其次，由 R_ε 和 μ_ε 的定义，性质 (0) 和 (1) 显然成立。现在我们来证明条件 (2) 也成立。为此，我们首先注意到，根据 (1.11)，

$$\begin{aligned}&\|\nabla u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(0);\mathbb{R}^{2\times 2})}\leq C\sqrt{|\log\varepsilon|}\,,\\ &\frac{1}{\sqrt{|\log\varepsilon|}}\|\nabla u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}\|_{L^1(\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(0);\mathbb{R}^{2\times 2})}\to 0\quad\text{for every } k=1,\dots,K\,,\end{aligned} \tag{1.46}$$

这意味着，特别是，

$$\frac{1}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}}(\beta_\varepsilon - R_\varepsilon)\chi_{A_{\varepsilon,\varepsilon^\gamma}(x^k)} = \frac{\nabla u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}(\cdot - x^k)}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} \rightharpoonup 0 \qquad \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2})\,. \tag{1.47}$$

此外，回顾（1.42）和（1.44），对于每个 $k = 1,\dots,K$ 以及每个 $x \in A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k)$，我们有

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) = {} & u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}(x - x^k) + \Big(1 - \phi\Big(\frac{|x-x^k|}{\varepsilon^\gamma}\Big)\Big)\Big(\sum_{j\neq k} u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^j}(x - x^j) + \sqrt{|\log\varepsilon|}u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x)\Big) \\ & + \phi\Big(\frac{|x-x^k|}{\varepsilon^\gamma}\Big)\sqrt{|\log\varepsilon|}u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x^k)\,; \end{aligned}$$

因此，当 ε 充分小时，且对于 $x \in A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k)$，我们有

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x)| \le {} & |\nabla u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^k}(x - x^k)| \\ & + \Big|1 - \phi\Big(\frac{|x-x^k|}{\varepsilon^\gamma}\Big)\Big|\Big(\sum_{j\neq k}|\nabla u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^j}(x - x^j)| + \sqrt{|\log\varepsilon|}|\beta^{\mathrm{cf}}(x)|\Big) \\ & + \Big|\nabla\phi\Big(\frac{|x-x^k|}{\varepsilon^\gamma}\Big)\Big|\Big(\sum_{j\neq k}|u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^j}(x - x^j)| + \sqrt{|\log\varepsilon|}|u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x) - u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x^k)|\Big) \\ \le {} & C\varepsilon^{-\gamma} + C(1 + \sqrt{|\log\varepsilon|}) + C\varepsilon^{-\gamma}(1 + \varepsilon^\gamma\sqrt{|\log\varepsilon|}) \le C\varepsilon^{-\gamma}\,, \end{aligned} \tag{1.48}$$

这里我们用到了 $|\nabla u^{R,R^{\mathrm{T}}\xi^j}(x)| \le \frac{C}{|x|}$，$\beta^{\mathrm{cf}} \in L^\infty$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$)，以及 $|u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x) - u^{\beta^{\mathrm{cf}}}(x^k)| \le \|\beta^{\mathrm{cf}}\|_{L^\infty(\text{区域 }\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2})}|x - x^k|$。由（1.48）可立即得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}}\|\beta_\varepsilon - R_\varepsilon\|_{L^2(A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k);\mathbb{R}^{2\times 2})} &= \frac{1}{\sqrt{|\log\varepsilon|}}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k);\mathbb{R}^{2\times 2})} \\ &\le \frac{C}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} \to 0 \qquad \text{as } \varepsilon \to 0\,. \end{aligned} \tag{1.49}$$

因此，由（1.47）和（1.49），再次利用（1.46），我们有

$$\begin{aligned} \frac{\beta_\varepsilon - R_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}} = {} & -\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}}\chi_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)} \\ & + \sum_{k=1}^K \frac{1}{\varepsilon\sqrt{|\log\varepsilon|}}(\beta_\varepsilon - R_\varepsilon)\chi_{A_{\varepsilon,2\varepsilon^\gamma}(x^k)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{|\log\varepsilon|}}\nabla u_\varepsilon^{\mathrm{far}}\chi_{\Omega_{2\varepsilon^\gamma}(\mu_\varepsilon)} \rightharpoonup \beta^{\mathrm{cf}} \qquad \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2})\,, \end{aligned} \tag{1.50}$$

即，（2）。

现在，我们通过证明序列 $\{(\mu_\varepsilon;\beta_\varepsilon)\}_\varepsilon$ 满足 (1.20) 来结束本节。由于 $W \in C^0(\mathbb{R}^{2\times 2})$ 且 $\|\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\ \mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_\varepsilon(0);\mathbb{R}^{2\times 2})} \le \frac{C}{\varepsilon}$ 对某个 $C > 0$（与 ε 无关）成立，因此，对每个 $\lambda > 1$，我们有

$$\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon,\lambda\varepsilon}(x^k)} W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \frac{C\lambda^2}{|\log\varepsilon|} \to 0 \qquad \text{as } \varepsilon \to 0\,. \tag{1.51}$$

此外，注意到根据假设 (v)，存在 $\rho > 0$ 和 $c_\rho > 0$，使得

$$W(M) \le c_\rho \mathrm{dist}^2(M,\mathrm{SO}(2)) \qquad \text{for every } M \in \mathrm{SO}(2) + B_\rho(0)\,. \tag{1.52}$$

设 $\rho > 0$ 满足 (1.52)，设 $\lambda > 1$ 满足 $\|\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\ \mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_{\lambda\varepsilon}(0);\mathbb{R}^{2\times 2})} \le \frac{\rho}{\varepsilon}$，并设 $\alpha \in (\gamma, 1)$。根据 β_ε 的定义，利用 (ii) 和 (1.52)，可以验证对每个

$k = 1, \ldots, K$

$$\begin{aligned}(1.53)\quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\lambda_\varepsilon,\varepsilon^\alpha}(x^k)} W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\ = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\lambda_\varepsilon,\varepsilon^\alpha}(x^k)} W(R_\varepsilon(\mathrm{Id}+\varepsilon\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}(x-x^k))\,\mathrm{d}x \\ \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{c_\rho}{|\log\varepsilon|}\int_{A_{\lambda_\varepsilon,\varepsilon^\alpha}(0)} \left|\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\right|^2\mathrm{d}x = C(1-\alpha)\,.\end{aligned}$$

此外，由于 $\|\varepsilon\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\ \mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\|_{L^\infty} \le C\varepsilon^{1-\alpha}$ 在 $A_{\varepsilon^\alpha,\ \varepsilon^\gamma}(0)$ 中，通过对 W在恒等映射附近作泰勒展开，对于任意 $k = 1, \ldots, K$，我们有

$$\begin{aligned}&\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^k)} W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^k)} W(R_\varepsilon(\mathrm{Id}+\varepsilon\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}(x-x^k))\,\mathrm{d}x \\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(0)} \frac{1}{2}\mathbb{C}\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2} : \beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma(\varepsilon\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2})\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

且 $\lim_{|M|\to 0} \frac{\sigma(M)}{|M|^2} = 0$。因此，结合 (1.11) 和 (1.14)，得到

$$(1.54)\qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^k)} W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le (\alpha-\gamma)\psi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)\,.$$

此外，类似的计算（或者逐字沿用证明 [25, 命题3.12]中的论证，参见其中的所有细节）表明

$$(1.55)\qquad \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{\Omega_{2\varepsilon^\gamma}(\mu)} W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \gamma\sum_{k=1}^K \psi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k) + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbb{C}R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}} : R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}\,\mathrm{d}x\,.$$

最后，由 (1.49) 和 (1.52)，对每个 $k = 1, \ldots, K$，我们有

$$\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k)} W(\beta_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \frac{c}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\|\beta_\varepsilon - R_\varepsilon\|^2_{L^2(A_{\varepsilon^\gamma,2\varepsilon^\gamma}(x^k);\mathbb{R}^{2\times 2})} \to 0\,,$$

结合 (1.51)、(1.53)、(1.54) 和 (1.55)，可得 (1.20)（令 α 趋于 1 ）. □

注 1.9. 令 $0 < \gamma \le \gamma' < 1$。对于每个 $\varepsilon > 0$，我们可以定义泛函 $\mathcal{F}^{\gamma,\ \gamma'}_{\varepsilon}$:$\mathcal{M}$(区域 Ω; $\mathbb{R}^2$) $\times L^2$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$) $\to [0,+\infty]$ 如下

$$\mathcal{F}^{\gamma,\gamma'}_\varepsilon(\mu,\beta) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} W(\beta)\,\mathrm{d}x & \text{if } \mu \in X^\gamma_\varepsilon(\Omega) \text{ and } \beta \in \mathcal{AS}^{\gamma'}_\varepsilon(\mu) \\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

显然，$\mathcal{F}^{\gamma,\ \gamma}_{\varepsilon} \equiv \mathcal{F}^\gamma_\varepsilon$。逐字沿用定理 1.1 和定理 1.7 的证明，可以很容易地验证，同样的紧性和 Γ- 收敛结论对于泛函 $\mathcal{F}^{\gamma,\ \gamma'}_{\varepsilon}$ 也成立。

此外，对于每个 $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$，若满足 $\delta_\varepsilon < \varepsilon^\gamma$，我们可以像 (1.2) 中那样定义测度 $\mu \in X^\gamma_\varepsilon$(区域 Ω) 的可容许应变类 $\mathcal{AS}_{\varepsilon,\ \delta_\varepsilon}(\mu)$，其中将条件 $\fint_{A_{\varepsilon,\ \varepsilon^\gamma(x^n)}} \beta\,\mathrm{d}x \in R^n\mathcal{I}(\mathbb{S})$ 替换为 $\fint_{A_{\varepsilon,\ \delta_\varepsilon(x^n)}} \beta\,\mathrm{d}x \in R^n\mathcal{I}(\mathbb{S})$；类似地，我们可以定义能量泛函

$$\mathcal{F}^\gamma_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(\mu,\beta) := \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon(\mu)} W(\beta)\,\mathrm{d}x & \text{if } \mu \in X^\gamma_\varepsilon(\Omega) \text{ and } \beta \in \mathcal{AS}_{\varepsilon,\delta_\varepsilon}(\mu) \\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

可以验证，若 $\delta_\varepsilon \gg \varepsilon\sqrt{|\log\ \varepsilon|}$，则针对泛函 $\mathcal{F}^\gamma_\varepsilon$ 所证明的紧性与 Γ-收敛结果仍然成立。正如注 1.5 中所观察到的，若 $\delta_\varepsilon \sim \varepsilon$，则每个位错周围的微观旋转与线性化所给出的宏观旋转之间的一致性将不复存在。

2. The purely discrete model

在本节中，我们介绍并分析由一族刃型位错诱导的弹性能的非线性纯离散模型。

2.1. 问题描述。这里我们介绍本节将使用的主要记号。

参考晶格。设 $\nu := \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ 且 $\eta := -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$。令 $\mathbb{T} :=$ 张成 $\mathbb{Z}\{e_1, \nu\}$，并设

$$T^+ := \mathrm{conv}\{0, e_1, \nu\} \quad \text{and} \quad T^- := \mathrm{conv}\{0, e_1, -\eta\},$$

其中，对于每个 $a, b, c \in \mathbb{R}^2$，集合 $\mathrm{conv}\{a, b, c\}$ 表示点 a, b,c的凸包，即顶点为 a, b, c的（闭）三角形。对于每个 $\varepsilon > 0$，我们用 $\mathcal{T}_\varepsilon$ 表示由形如 $i + \varepsilon T^{\pm}$、满足 $i \in \varepsilon\mathbb{T}$ 的三角形 T_ε 构成的族。此外，设

$$\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega) := \{T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon \,:\, T_\varepsilon \subset \Omega\}$$

并定义 $\Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon} := \bigcup_{T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)} T_\varepsilon$。此外，设 $\Omega_\varepsilon^0 := \Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon} \cap \varepsilon\mathbb{T}$，并用 Ω_ε^1 表示 $\Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon}$中的最近邻键族，即 $\Omega_\varepsilon^1 := \{(i,j) \in \Omega_\varepsilon^0 \times \Omega_\varepsilon^0 : \ |i-j| = \varepsilon\}$。显然，$(i,j) \in \Omega_\varepsilon^1$ 当且仅当 $(j,i) \in \Omega_\varepsilon^1$。

接下来，我们将把上文引入的记号推广到 $\mathbb{R}^2$ 的一般子集（不一定是开集）。特别地，对于每个三角形 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$，我们有

$$(T_\varepsilon)_\varepsilon^1 = \{(i,j) \in (T_\varepsilon \cap \varepsilon\mathbb{T}) \times (T_\varepsilon \cap \varepsilon\mathbb{T}) \,:\, i \neq j\}.$$

对于每个 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$ 以及每个映射 $V : (T_\varepsilon)_\varepsilon^1 \to \mathbb{R}^2$，我们将 V 在“T_ε 的边界”上的离散环流定义为

$$\mathrm{d}V(T_\varepsilon) := V(i,j) + V(j,k) + V(k,i),$$

其中，(i,j,k) 是 T_ε 中按逆时针方向定向的三个顶点。

可容许应变与能量泛函。对于每个 $\varepsilon > 0$，我们将离散应变类定义为

$$\mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}(\Omega) := \{\beta : \Omega_\varepsilon^1 \to \mathbb{R}^2 \,:\, \beta(i,j) = -\beta(j,i) \text{ for any } (i,j) \in \Omega_\varepsilon^1\}.$$

在下文中，对于每个 $\beta \in \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}$(区域 Ω)，我们设定

$$\mu[\beta] := \sum_{T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)} \mathrm{d}\beta(T_\varepsilon)\delta_{x_{T_\varepsilon}},$$

其中，点 x_{T_ε} 表示 ε 三角形 T_ε 的重心。对于任意 $\beta \in \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}(\Omega)$，以及任意满足 $\mu[\beta](T_\varepsilon) = 0$ 的 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$，我们用 $\tilde{\beta}^{T_\varepsilon}$ 表示 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中由以下性质唯一确定的矩阵。

$$\beta(i,j) = \tilde{\beta}^{T_\varepsilon}(j-i) \qquad \text{for every } (i,j) \in (T_\varepsilon)_\varepsilon^1. \tag{2.1}$$

此外，我们将场 $\tilde{\beta}^{\mathcal{T}_\varepsilon} \in L^2$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$) 定义为

$$\tilde{\beta}^{\mathcal{T}_\varepsilon} := \sum_{\substack{T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega) \\ \mu[\beta](T_\varepsilon)=0}} \tilde{\beta}^{T_\varepsilon} \chi_{T_\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon(\mu[\beta])}; \tag{2.2}$$

注意到每个 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$(区域 Ω)（其中 $\mu[\beta](T_\varepsilon) \neq 0$）都包含在 $B_\varepsilon(x_{T_\varepsilon})$ 中。

设 $\psi_1, \psi_2 \in C(\mathbb{R}; [0, +\infty))$ 满足：在 1 的某个邻域内，$\psi_1^{-1}(0) = \psi_2^{-1}(0) = \{1\}$，$\psi_1, \psi_2 \in C^2$，且 $\psi_1''(1)\ \psi_2''(1) > 0$。此外，假设存在 $a, b > 0$，使得对每个 $t \in [0, +\infty)$，$\psi_1(t) \geq at^2 - b$。

我们定义离散能量泛函 $E_\varepsilon : \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}$(区域 Ω) $\to [0,+\infty)$ 如下：

$$E_\varepsilon(\beta) := \sum_{(i,j)\in\Omega_\varepsilon^1} \varepsilon^2 \psi_1\Big(\frac{|\beta(i,j)|}{\varepsilon}\Big) + \sum_{\substack{(i,j),(i,k)\in\Omega_\varepsilon^1 \\ \langle (j-i)\wedge(k-i), e_3\rangle > 0}} \varepsilon^2 \psi_2\Big(\frac{2}{\sqrt{3}\varepsilon^2}\langle \beta(i,j)\wedge\beta(i,k), e_3\rangle\Big).$$

我们还将考虑能量泛函 E_ε 的局部化版本。具体而言，对于每个开有界集 $A \subset \mathbb{R}^2$，我们定义 $E_\varepsilon(\cdot; A)$: $\mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}(A) \to [0,+\infty]$ 为

$$E_\varepsilon(\beta; A) := \sum_{(i,j)\in A_\varepsilon^1} \varepsilon^2 \psi_1\Big(\frac{|\beta(i,j)|}{\varepsilon}\Big) + \sum_{\substack{(i,j),(i,k)\in A_\varepsilon^1 \\ \langle (j-i)\wedge(k-i), e_3\rangle > 0}} \varepsilon^2 \psi_2\Big(\frac{2}{\sqrt{3}\varepsilon^2}\langle \beta(i,j)\wedge\beta(i,k), e_3\rangle\Big),$$

使得 $E_\varepsilon(\beta;$ 区域 $\Omega) = E_\varepsilon(\beta)$。

令 $0 < \gamma < 1$ 固定。我们设 $S := \{e_1, \nu\}$，从而根据第1节中的记号，有 $\mathbb{S} = \mathbb{T}$。我们定义

$$X_\varepsilon^{\gamma,\mathrm{discr}}(\Omega) := \Big\{\mu \in X_\varepsilon^\gamma(\Omega) \,:\, \operatorname{supp}\mu \subset \bigcup_{T_\varepsilon\in\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)} \{x_{T_\varepsilon}\}\Big\},$$

其中，类 X_ε^γ(区域 Ω) 在（1.1）中定义。

此外，对于任意的 $\mu = \varepsilon\sum_{n=1}^N R^n b^n \delta_{x^n} \in X^{\gamma,\mathrm{discr}}_\varepsilon$(区域 Ω)，其中 $N \in \mathbb{N}$, $R^n \in$ 二维特殊正交群，$b^n \in \mathbb{T}$，且$x^n \in$ 区域 Ω，我们将与 μ 相关联的可容许离散应变类定义为

$$\mathcal{AS}_\varepsilon^{\gamma,\mathrm{discr}}(\mu) := \Big\{\beta \in \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}(\Omega) \,:\, \fint_{A_{\varepsilon,\varepsilon^\gamma}(x^n)} \tilde\beta^{\mathcal{T}_\varepsilon}\,\mathrm{d}x \in R^n\mathcal{I}(\mathbb{T}), \quad \mu[\beta] = \mu\Big\},$$

其中 $\tilde\beta^{\mathcal{T}_\varepsilon}$ 是式 (2.2) 中定义的映射，而 $\mathcal{I}(\mathbb{T})$ 是由 $\frac{\pi}{3}$ 顺时针旋转 $R(\frac{\pi}{3})$ 生成的旋转群。

对于 e 很 $0 < \varepsilon < 1$ 我们定义离散能量 $\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma$: $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2) \times \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}$(区域 Ω) $\to [0,+\infty]$ 为

$$\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma(\mu,\beta) := \begin{cases} E_\varepsilon(\beta) & \text{if } \mu \in X_\varepsilon^{\gamma,\mathrm{discr}}(\Omega) \text{ and } \beta \in \mathcal{AS}_\varepsilon^{\gamma,\mathrm{discr}}(\mu), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在陈述并证明泛函 $\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma$ 的 Γ-收敛结果之前，我们首先推导与离散泛函 E_ε 相关的连续非线性能量密度，以及相应的线性化弹性张量。

注2.1. 设 $\beta \in \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}$区域 Ω；对于每个 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$区域 Ω，我们定义

$$\tilde E_\varepsilon(\beta; T_\varepsilon) := \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in(T_\varepsilon)_\varepsilon^1} \varepsilon^2 \psi_1\Big(\frac{|\beta(i,j)|}{\varepsilon}\Big) + \sum_{\substack{(i,j),(i,k)\in(T_\varepsilon)_\varepsilon^1 \\ \langle (j-i)\wedge(k-i), e_3\rangle > 0}} \varepsilon^2 \psi_2\Big(\frac{2}{\sqrt{3}\varepsilon^2}\langle \beta(i,j)\wedge\beta(i,k), e_3\rangle\Big).$$

注意，对于每个 $A \subset$ 区域 Ω,

$$E_\varepsilon(\beta; A) = \sum_{\substack{T_\varepsilon\in\mathcal{T}_\varepsilon \\ T_\varepsilon\subset A_{\mathcal{T}_\varepsilon}}} \tilde E_\varepsilon(\beta; T_\varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in A_\varepsilon^1 \\ i,j\in\partial A_{\mathcal{T}_\varepsilon}}} \varepsilon^2 \psi_1\Big(\frac{|\beta(i,j)|}{\varepsilon}\Big). \tag{2.3}$$

此外，对于任意满足 $\mu[\beta](T_\varepsilon)=0$ 的 $T_\varepsilon\in\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)$，我们很容易得到

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\varepsilon(\beta;T_\varepsilon)&=\varepsilon^2\Big[\frac{1}{2}\Big(\psi_1(|\tilde{\beta}^{T_\varepsilon}e_1|)+\psi_1(|\tilde{\beta}^{T_\varepsilon}\nu|)+\psi_1(|\tilde{\beta}^{T_\varepsilon}\eta|)\Big)+3\,\psi_2(\det\tilde{\beta}^{T_\varepsilon})\Big]\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon^2W(\tilde{\beta}^{T_\varepsilon})=\int_{T_\varepsilon}W(\tilde{\beta}^{T_\varepsilon})\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中，$\tilde{\beta}^{T_\varepsilon}$ 是 (2.1) 中定义的矩阵，W 由下式给出：

$$W(M):=\frac{4}{\sqrt{3}}\Big[\frac{1}{2}\Big(\psi_1(|Me_1|)+\psi_1(|M\nu|)+\psi_1(|M\eta|)\Big)+3\,\psi_2(\det M)\Big]\,.\tag{2.5}$$

关于 ψ_1、ψ_2 的假设很容易推出，映射 $W\colon\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}$ 满足假设 (i)-(v)。令 $\alpha_1:=\psi_1''(1)$ 和 $\alpha_2:=\psi_2''(1)$，则 (1.3) 中相应的张量 $\mathbb{C}$ 为：

$$\mathbb{C}\delta:\delta:=\frac{4}{\sqrt{3}}\Big[\frac{1}{2}\alpha_1\Big(|e_1^*\delta e_1|^2+|\nu^*\delta\nu|^2+|\eta^*\delta\eta|^2\Big)+3\alpha_2|\mathrm{tr}\,\delta|^2\Big]\,,\qquad\text{for every }\delta\in\mathbb{R}^{2\times2}\,.\tag{2.6}$$

直接计算可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\delta:\delta&=\frac{4}{\sqrt{3}}\Big[\frac{1}{2}\alpha_1\Big(\frac{3}{8}|\mathrm{tr}\,\delta|^2+\frac{3}{4}|\delta^{\mathrm{sym}}|^2\Big)+3\alpha_2|\mathrm{tr}\,\delta|^2\Big]\\&=\Big(\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_1+4\sqrt{3}\alpha_2\Big)|\mathrm{tr}\,\delta|^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1|\delta^{\mathrm{sym}}|^2.\end{aligned}$$

特别地，$\mathbb{C}$ 是各向同性的，其 Lam´e 模量为 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_1+4\sqrt{3}\alpha_2$ 和 $\mu=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_1$。在这种情况下，由 (1.14) 定义的函数 $\psi^{\mathbb{C}}$（例如参见 [9]）为：

$$\psi^{\mathbb{C}}(b)=\frac{1}{4\pi}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}|b|^2=:C(\alpha_1,\alpha_2)|b|^2\,,$$

因此，回顾 (1.18) 中 $\varphi^{\mathbb{C}}$ 的定义，可得：

$$\varphi^{\mathbb{C}}(b)=C(\alpha_1,\alpha_2)\min\Big\{\sum_{i=1}^3|z_i|\,:\,z_1,z_2,z_3\in\mathbb{Z}\,,\,b=z_1e_1+z_2\nu+z_3\eta\Big\}\,.\tag{2.7}$$

由 (2.4)、(2.2) 和 (2.3) 可知，对于每个 $\mu\in X^{\gamma,\,\mathrm{discr}}_\varepsilon(\Omega)$ 和 $\beta\in\mathcal{S}^{\mathrm{discr}}_\varepsilon(\Omega)$，其中 $\mu[\beta]=\mu$，以及每个开集 $A\subset\subset\Omega$，当 ε 充分小时，有以下结论

$$E_\varepsilon(\beta)\geq\int_{A_\varepsilon(\mu)}W(\tilde{\beta}^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x\,.\tag{2.8}$$

通过反射论证（例如，参见 [4, 引理 4.3]），可以证明以下结果。

引理 2.2. 设 $\varepsilon>0$, $\mu\in X^{\gamma,\,\mathrm{discr}}_\varepsilon$(区域 Ω) 且 $\beta\in\mathcal{AS}^{\gamma,\,\mathrm{discr}}_\varepsilon(\mu)$，并设 $\tilde{\beta}^{\mathcal{T}_\varepsilon}$ 为式 (2.2) 中定义的映射。则存在一个场 $\hat{}\,\beta^{\mathcal{T}_\varepsilon}\in L^2$(区域 $\Omega;\mathbb{R}^{2\times2}$)，使得

(i) \hat$\beta^{\mathcal{T}_\varepsilon}=\tilde{\beta}^{\mathcal{T}_\varepsilon}$ 属于 $\Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon}$；(ii) \旋度 \hat $\beta^{\mathcal{T}_\varepsilon}=0$ 属于 $\Omega_\varepsilon(\mu)$（按分布的意义）；(iii) $\int_{\text{区域 }\Omega_\varepsilon(\mu)}W($ \hat$\beta^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x\leq CE_\varepsilon(\beta)$，其中某个常数 C 与 ε 无关。

2.2. 离散能量的主要结果。现在我们可以陈述并证明泛函在 $|\log\varepsilon|$ 区间内的 Γ-收敛结果，其中 $\varepsilon\to0$ as $\mathcal{E}^\gamma_\varepsilon$。

定理 2.3. 设 $\mathbb{C}$ 为由 (2.6) 定义的弹性张量，设 $\varphi^{\mathbb{C}}$ 为由 (2.7) 定义的函数。以下 Γ-收敛结果成立。

(i) 设 $\{(\mu_\varepsilon;\beta_\varepsilon)\}_\varepsilon$，其中 $\mu_\varepsilon\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ 且 $\beta_\varepsilon\in\mathcal{S}^{\mathrm{discr}}_\varepsilon$(区域 Ω)（对每个 $\varepsilon>0$），满足

$$\sup_{\varepsilon>0}\mathcal{E}^\gamma_\varepsilon(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon)\leq C\varepsilon^2|\log\varepsilon|\,,\tag{2.9}$$

对某个常数 $C>0$。那么，存在一个旋转序列 $\{R_\varepsilon\}_\varepsilon\subset$ 二维特殊正交群、一个旋转 $R\in$ 二维特殊正交群、一个测度 $\mu\in\overline{X}^R$(区域 Ω)，以及一个场 $\beta^{\mathrm{cf}}\in L^2$(区域 $\Omega;\,\mathbb{R}^{2\times2}$)，其旋度 $\beta^{\mathrm{cf}}=$0，使得在取一个子序列后，$(\mu_\varepsilon;\,\tilde{\beta}^{\mathcal{T}_\varepsilon}_\varepsilon;\,R_\varepsilon)\to(\mu;\,\beta^{\mathrm{cf}};\,R)$，当 $\varepsilon\to0$ 时，在定义1.2的意义下成立。

(ii)（Γ-下极限不等式）设 $R\in$二维特殊正交群、 $\mu=\sum_{k=1}^K\xi^k\delta_{x^k}\in\overline{X}^R$(区域 Ω)、 $\beta^{\rm cf}\in L^2$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times2}$)，且旋度 $\beta^{\rm cf}=0$。对于每个 $\{(\mu_\varepsilon;\beta_\varepsilon;R_\varepsilon)\}_\varepsilon$，其中 $\mu_\varepsilon\in X^{\gamma,\,\varepsilon}{}^{\rm discr}$(区域 Ω)、 $\beta_\varepsilon\in\mathcal{S}_\varepsilon^{\rm discr}$(区域 Ω)，且$R_\varepsilon\in$二维特殊正交群（对每个 $\varepsilon>0$）满足 $(\mu_\varepsilon;\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon};R_\varepsilon)\to(\mu;\beta^{\rm cf};R)$，当 $\varepsilon\to0$ 时，有

$$\sum_{k=1}^K\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\rm T}\xi^k)+\int_\Omega\frac{1}{2}\mathbb{C}R^{\rm T}\beta^{\rm cf}:R^{\rm T}\beta^{\rm cf}\,{\rm d}x\le\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon)\,. \tag{2.10}$$

(iii)（Γ-上极限不等式）设 $R\in$二维特殊正交群， $\mu=\sum_{k=1}^K\xi^k\delta_{x^k}\in\overline{X}^R$(区域 Ω) 且 $\beta^{\rm cf}\in L^2$(区域 Ω;$\mathbb{R}^{2\times2}$)，并满足旋度 $\beta^{\rm cf}=0$。那么，存在 $\{(\mu_\varepsilon;\beta_\varepsilon;R_\varepsilon)\}_\varepsilon$，其中 $\mu_\varepsilon\in X^{\gamma,\,\varepsilon}{}^{\rm discr}$(区域 Ω)， $\beta_\varepsilon\in\mathcal{S}_\varepsilon^{\rm discr}$(区域 Ω)，且 $R_\varepsilon\in$二维特殊正交群（对每个 $\varepsilon>0$），使得 $(\mu_\varepsilon;\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon};R_\varepsilon)\to(\mu;\beta^{\rm cf};R)$，当 $\varepsilon\to0$时

$$\sum_{k=1}^K\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\rm T}\xi^k)+\int_\Omega\frac{1}{2}\mathbb{C}R^{\rm T}\beta^{\rm cf}:R^{\rm T}\beta^{\rm cf}\,{\rm d}x\ge\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\mathcal{E}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon,\beta_\varepsilon)\,. \tag{2.11}$$

证明。我们首先证明紧性性质 (i)。根据 (2.9)，引理 2.2 给出的映射 $\hat\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}$属于 $\mathcal{AS}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon)$，并满足

$$\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma(\mu_\varepsilon,\hat\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon})\le C\varepsilon^2|\log\varepsilon|\,,$$

其中，泛函 $\mathcal{F}_\varepsilon^\gamma$在 (1.4) 中定义，对应于 (2.5) 中的 W。因此，注意到$\|R_\varepsilon\|_{L^2(\text{区域 }\Omega\setminus\text{区域 }\Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon})}\le C\varepsilon$ 后，由定理 1.1 和引理 2.2(i) 可得结论。

现在我们转而证明 (ii)。不失一般性，我们可以假设 (2.9) 成立。由 (1) 可知，对于某个与 ε 无关的 C，有 $|\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}|$(区域 Ω) $\le C$，因此，经过取子序列后， $|\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}|\overset{*}{\rightharpoonup}\bar\mu$ 对于某个有限支集测度 $\bar\mu\in\mathcal{M}$ ($\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^2$) 成立，且其支集包含于区域 Ω 中。令 $A\subset\subset$区域 Ω 为具有 Lipschitz 连续边界的开集，使得 supp $\bar\mu\subset A$。根据构造，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，有 $\mu_\varepsilon\llcorner A\in X_\varepsilon^\gamma(A)$ 和 $\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}\llcorner A\in\mathcal{AS}_\varepsilon^\gamma(A)$。于是，由 (2.8)、在区域 $\Omega=A$ 上应用的定理 1.7(i)，以及 A 的任意性，可得 (2.10)。

最后，我们证明 (iii)。根据 Γ-收敛中的标准稠密性论证，我们可以假设对于每个 $k=1,\,\varphi^{\mathbb{C}}(R^{\rm T}\xi^k)=\psi^{\mathbb{C}}(R^{\rm T}\xi^k)$，……， K，并且 $\beta^{\rm cf}\in W^{1,\,\infty}$(Ω; $\mathbb{R}^{2\times2}$)。此外，令 $u^{\beta^{\rm cf}}\in W^{2,\,\infty}$(Ω; $\mathbb{R}^2$) 满足 $\beta^{\rm cf}=\nabla u^{\beta^{\rm cf}}$。

对于每个 $k=1,\,\ldots\ldots,\,K$，令

$$x^{k,\varepsilon}\in{\rm argmin}\{|x^k-x_{T_\varepsilon}|\,:\,T_\varepsilon\in\mathcal{T}_\varepsilon(\Omega)\}$$

并设 $\mu_\varepsilon:=\varepsilon\sum_{k=1}^K\xi^k\delta_{x^{k,\,\varepsilon}}$。那么，当 ε 足够小时， $\mu_\varepsilon\in X^{\gamma,\,\varepsilon}{}^{\rm discr}$(Ω)。此外，设 $R_\varepsilon\equiv R_0$ 为构造 β_ε，我们按照定理 1.7(ii) 的证明进行。首先，按照 (1.45) 构造 u_ε，将 x^k 替换为 $x^{k,\,\varepsilon}$，并适当调整环带的半径。

更准确地说，对于每个 $k=1,\ldots,K$，我们定义映射 $u^{R,\,\varepsilon}{}^k\in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\mathsf{C}^{k,\varepsilon};\mathbb{R}^2)$ 为

$$u_\varepsilon^{R,k}(x):=u^{R,R^{\rm T}\xi^k}(x-x^{k,\varepsilon})+\sqrt{|\log\varepsilon|}u^{\beta^{\rm cf}}(x^{k,\varepsilon})\,,$$

其中 $\mathsf{C}^{k,\varepsilon}:=x^{k,\varepsilon}+\mathsf{C}$（其中 $\mathsf{C}:=\{(x_1;0):\ x_1\ge0\}$），且 $u^{R,\zeta}$ 满足（1.41）。因此，$\nabla u^{R,\varepsilon}{}^k(\cdot)=R\beta^{R^{\rm T}\xi^k}{}_{,\mathbb{R}^2}{}^{\mathbb{C}}(\cdot-x^{k,\varepsilon})$，且 $[u_\varepsilon^{R,k}]=\xi^k$ 在 $\mathsf{C}^{k,\varepsilon}$ 上（局部意义下的迹）。

我们定义映射 $u_\varepsilon^{\rm far}$：区域 $\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$ 为

$$u_\varepsilon^{\rm far}(x):=\sum_{k=1}^K u^{R,R^{\rm T}\xi^k}(x-x^{k,\varepsilon})+\sqrt{|\log\varepsilon|}u^{\beta^{\rm cf}}(x)\,.$$

令 $\phi\in C^1([0,3];[0,1])$ 满足 $\phi\equiv1$ 属于 $[0,1]$ 且 $\phi\equiv0$ 属于 $[2,3]$。我们将函数u_ε：区域 $\Omega_{2\varepsilon}^\varepsilon(\mu_\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$ 定义为

$$u_\varepsilon(x):=\begin{cases}u_\varepsilon^{R,k}(x) & \text{if } x\in A_{\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon^\gamma+\varepsilon}(x^{k,\varepsilon})\text{ for some }k\,,\\ \phi\big(\frac{|x-x^{k,\varepsilon}|}{\varepsilon^\gamma+\varepsilon}\big)u_\varepsilon^{R,k}(x)+\big(1-\phi\big(\frac{|x-x^{k,\varepsilon}|}{\varepsilon^\gamma+\varepsilon}\big)\big)u_\varepsilon^{\rm far}(x) & \text{if } x\in A_{\varepsilon^\gamma+\varepsilon,2(\varepsilon^\gamma+\varepsilon)}(x^{k,\varepsilon})\text{ for some }k\,,\\ u_\varepsilon^{\rm far}(x) & \text{if } x\in\Omega_{2(\varepsilon^\gamma+\varepsilon)}(\mu)\,.\end{cases}$$

此外，对于每个 $k=1$、...、K，我们定义滑移变量 $\sigma^{k,\varepsilon}$：区域 $\Omega_\varepsilon^1 \to \varepsilon\mathbb{T}$ 为

$$\sigma^{k,\varepsilon}(i,j) := \begin{cases} -\xi^k & \text{if } \mathsf{C}^{k,\varepsilon} \cap [i,j] \neq \emptyset \text{ and } \langle i - x^{k,\varepsilon}, e_2\rangle < 0 \\ +\xi^k & \text{if } \mathsf{C}^{k,\varepsilon} \cap [i,j] \neq \emptyset \text{ and } \langle i - x^{k,\varepsilon}, e_2\rangle > 0 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

并设定 $\sigma_\varepsilon := \sum_{k=1}^K \sigma^{k,\varepsilon}$。最后，我们将映射 $\beta_\varepsilon \in \mathcal{S}_\varepsilon^{\mathrm{discr}}$(区域 Ω) 定义为

$$\beta_\varepsilon(i,j) := R(j-i) + \varepsilon(u_\varepsilon(j) - u_\varepsilon(i) - \sigma_\varepsilon(i,j))\,.$$

我们声称，$\{(\mu_\varepsilon; \beta_\varepsilon; R_\varepsilon)\}_\varepsilon$ 是一个恢复序列。根据构造，$\mu_\varepsilon = \mu[\beta_\varepsilon]$ 并且根据注 1.6（特别是根据 (1.13)），我们还有 $\beta_\varepsilon \in \mathcal{AS}^{\gamma,\varepsilon}{}^{\mathrm{discr}}(\mu_\varepsilon)$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立。此外，性质 (0) 和 (1) 显然满足。我们还将证明性质 (2) 也满足。根据 (1.11) 中 $\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}$ 的定义，存在一个普适常数 $C > 0$，使得对每个 $\zeta \in \mathbb{T}$

$$|\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}(\rho,\theta)| \le \frac{C}{\rho}|\zeta|^2\,, \qquad |\nabla\beta^{\zeta,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}(\rho,\theta)| \le \frac{C}{\rho^2}|\zeta|^2\,. \tag{2.12}$$

因此，回顾 $\beta^{\mathrm{cf}} \in W^{1,\infty}$(区域 Ω; $\mathbb{R}^{2\times 2}$)，对于每个满足 $T_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^K A_{\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon^{\gamma}+\varepsilon}(x^{k,\varepsilon}) \cup \Omega_{2(\varepsilon^\gamma+\varepsilon)}(\mu_\varepsilon)$ 的 $T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon$(区域 Ω)，以及每个 $x \in T_\varepsilon$，有

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{T_\varepsilon} - R_\varepsilon}{\varepsilon} - \nabla u_\varepsilon(x)\Big|^2 &\le C\varepsilon^2 \|\nabla^2 u_\varepsilon\|^2_{L^\infty(T_\varepsilon;\mathbb{R}^{2\times 2})} \\ &\le C\varepsilon^2\Big(\sum_{k=1}^K \|\nabla\beta^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^2}\|^2_{L^\infty(T_\varepsilon;\mathbb{R}^{2\times 2})} + |\log\varepsilon|\|\nabla\beta^{\mathrm{cf}}\|^2_{L^\infty(T_\varepsilon;\mathbb{R}^{2\times 2})}\Big) \\ &\le C\varepsilon^2\Big(\sum_{k=1}^K \frac{1}{|x-x^{k,\varepsilon}|^4} + |\log\varepsilon|\Big)\,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

对于某个与 ε 无关的常数 $C > 0$。此外，完全仿照 (1.48) 的证明，我们可得，对于每个 $k = 1, \dots, K$，

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty\left(A_{\frac{\varepsilon^\gamma}{2},3\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon});\mathbb{R}^{2\times 2}\right)} + \Big\|\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon} - R_\varepsilon}{\varepsilon}\Big\|_{L^\infty\left(A_{\frac{\varepsilon^\gamma}{2},3\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon});\mathbb{R}^{2\times 2}\right)} \le \frac{C}{\varepsilon^\gamma}\,. \tag{2.14}$$

因此，由 (2.13)-(2.14) 以及 $|\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon}| \le C\varepsilon$ 这一事实，我们很容易看出

$$\frac{1}{|\log\varepsilon|}\Big\|\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon} - R_\varepsilon}{\varepsilon} - \nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)}\Big\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2})} \to 0 \qquad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{2.15}$$

此外，完全仿照 (1.47)、(1.49) 和 (1.50) 的论证，我们得到

$$\frac{\nabla u_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon(\mu_\varepsilon)}}{\sqrt{|\log\varepsilon|}} \rightharpoonup \beta^{\mathrm{cf}} \qquad \text{in } L^2(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2})\,. \tag{2.16}$$

因此，由 (2.15) 和 (2.16)，我们推得 $(\mu_\varepsilon; \tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}; R_\varepsilon) \to (\mu; \beta^{\mathrm{cf}}; R)$。

接下来我们证明 (2.11) 也成立。根据构造，我们有

$$\tilde E_\varepsilon(\beta_\varepsilon; T_\varepsilon) \le C\varepsilon^2 \qquad \text{for every } T_\varepsilon \in \mathcal{T}_\varepsilon(\Omega) \text{ with } \min_{k=1,\dots,K} \operatorname{dist}(x^{k,\varepsilon}, T_\varepsilon) \le \varepsilon\,, \tag{2.17}$$

并且对于每个 $(i,j) \in \Omega_\varepsilon^1$，满足 $i, j \in \partial\Omega_{\mathcal{T}_\varepsilon}$

$$\varepsilon^2\psi\Big(\frac{|\beta_\varepsilon(i,j)|^2}{\varepsilon^2}\Big) \le C\varepsilon^2\,. \tag{2.18}$$

此外，根据（2.14）和（1.52），对于每个 $k = 1$，....., K，我们有

$$\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\frac{\varepsilon^\gamma}{2},3\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})} W(\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{|\log\varepsilon|}\Big\|\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon} - R_\varepsilon}{\varepsilon}\Big\|^2_{L^2\left(A_{\frac{\varepsilon^\gamma}{2},3\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon});\mathbb{R}^{2\times 2}\right)} \le \frac{C}{|\log\varepsilon|}\,. \tag{2.19}$$

设 $\alpha \in (\gamma, 1)$。通过类似（1.51）和（1.53）中证明的论证，可以证明，

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon,\varepsilon^\alpha}(x^{k,\varepsilon})} W(\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x = C(1-\alpha)\,, \tag{2.20}$$

对于每个 $k=1,\dots,K$。此外，由于 $\|\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R_\varepsilon\|_{L^\infty}\le C\varepsilon^{1-\alpha}$ 属于 $A_{\varepsilon^\alpha,\,\varepsilon^\gamma}(x^k,\,\varepsilon)$，根据 (ii)，将 W 在恒等元附近进行泰勒展开，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})}W(\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x\\
&\le\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})}\frac12\mathbb{C}\Big(R^{\mathrm{T}}\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R}{\varepsilon}\Big):\Big(R^{\mathrm{T}}\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})}\frac{\sigma(\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R)}{|\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R|^2}\Big|\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R}{\varepsilon}\Big|^2\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

其中 \(\lim\{v1\}\)$_{(M)\frac{}{|M|^2}}=0$。由（2.13）和（2.12），我们得到 $\left|\frac{\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon}-R}{\varepsilon}\right|\le\frac{C}{|x-x^{k,\varepsilon}|}$ 对每一个 $x\in A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})$ 均成立，由此可推知，（2.21）中的最后一个上极限等于零。因此，由（2.21），再次利用（2.13），我们得到

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})}W(\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x\\
&\le\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(x^{k,\varepsilon})}\frac12\mathbb{C}\big(R^{\mathrm{T}}\nabla u_\varepsilon\big):\big(R^{\mathrm{T}}\nabla u_\varepsilon\big)+C\varepsilon^2\Big(\frac{1}{|x-x^{k,\varepsilon}|^4}+|\log\varepsilon|\Big)\,\mathrm{d}x\\
&=\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{|\log\varepsilon|}\int_{A_{\varepsilon^\alpha,\varepsilon^\gamma}(0)}\frac12\mathbb{C}\beta_{\mathbb{R}^2}^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}:\beta_{\mathbb{R}^2}^{R^{\mathrm{T}}\xi^k,\mathbb{C}}\,\mathrm{d}x\\
&=(\alpha-\gamma)\psi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)\,,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

其中，最后一个等号由（1.14）得出。此外，通过类似的论证可得

$$
\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon^2|\log\varepsilon|}\int_{\Omega_{2\varepsilon^\gamma}(\mu_\varepsilon)}W(\tilde\beta_\varepsilon^{\mathcal{T}_\varepsilon})\,\mathrm{d}x\le\gamma\sum_{k=1}^K\psi^{\mathbb{C}}(R^{\mathrm{T}}\xi^k)+\frac12\int_\Omega\mathbb{C}R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}:R^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{cf}}\,\mathrm{d}x\,.
\tag{2.23}
$$

最后，结合 (2.3)、(2.17)–(2.20)、(2.22)–(2.23)，并令 $\alpha\to1$，即可得到 (2.11)。 □

References

[1] Alicandro, R., Cicalese, M.: XY 模型渐近行为的变分分析。 *Arch. Rational Mech.* ( ), – *Anal.* **192** 2009 501 536 。[2] Alicandro, R., Cicalese, M., Ponsiglione, M.: Ginzburg-Landau 、 XY 自旋系统与螺型位错能量之间的变分等价性。 *Indiana Univ. Math. J.* **6** (2011), 171–208。[3] Alicandro, R., De Luca, L., Garroni, A., Ponsiglione: 二维离散拓扑奇点的亚稳态与动力学：一种 Γ-收敛方法。 *Arch. Rational Mech. Anal.* **214** (2014), 269–330。[4] Alicandro, R., De Luca, L., Lazzaroni, G., Palombaro, M., Ponsiglione, M.: 规则三角晶格中刃型位错离散模型的粗粒化。 *J. Nonlinear Sci.* **33** (2023), 第 33 号文章。[5] Alicandro, R., Lazzaroni, G., Palombaro, M.: 一般类别原子能量的线弹性推导。 *SIAM J. Math. Anal.* **53** (2021), 5060–5093。[6] Ariza, M. P.; Ortiz, M.: 晶体中的离散晶体弹性与离散位错。 *Arch. Rational Mech. Anal.* **178** 2005 149 226 ( ), – 。[7] Bacon, D.J., Barnett, D.M., Scattergood, R.O.: 晶格缺陷的各向异性连续介质理论。 *Progress Mater. Sci.* **23** 1978 51 262 ( ), – 。

[8] Braides, A., Solci, M., Vitali, E.: 从成对相互作用原子系统推导线弹性能量。*Netw. Heterog. Media* **2** (2007), 551–567。[9] Cermelli, P., Leoni, G.: 位错的重整化能量与力。 *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2005), 1131–1160。[10] Conti, S., Garroni, A., Marziani, R.: 线奇点的线张力极限及其在混合增长情形中的应用。 *Preprint* (2022), ArXiv: 2207.01526。[11] Dal Maso, G., Negri, M., Percivale, D.: 作为 Γ -极限的线性化弹性理论。 *Set-Valued Anal.* **10** 2002 165 183 ( ), – 。[12] De Luca, L: Γ-收敛分析：离散拓扑奇点、各向异性三角晶格与长程相互作用能量。 *Asymptot. Anal.* **96** (2016), 185–221。[13] De Luca, L., Garroni, A., Ponsiglione, M.: 刃型位错系统的 Γ-收敛分析：自能量机制。 *Arch. Rational Mech. Anal.* **206** (2012), 885–910。[14] Friesecke, G., James, R.D., M¨uller, S.: 关于几何刚性的定理以及从三维弹性推导非线性板理论。 *Comm. Pure Appl. Math.* **55** (2002), 1461–1506。

[15] Garroni, A., Leoni, G., Ponsiglione, M.: 通过离散位错的均匀化建立塑性的梯度理论。 *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010),1231–1266。
[16] *J. Eur. Math. Soc.*
[17] *Theory of Dislocations* 1982

Giuliani, A., Theil, F.：固体原子模型中的长程有序，即将在 Hirth, J.P., Lothe, J. 所著《》，Krieger 出版公司，佛罗里达州马拉巴尔，出版。[18] S. Luckhaus, L. Mugnai：关于描述弹性剪切与位错的介观多体哈密顿量。*Cont. Mech. Thermodyn.* **22** (2010), 251–290。[19] M¨uller, S., Scardia, L., Zeppieri, C.I.：通过位错均匀化建立几何非线性塑性的梯度理论。载于 S. Conti 和 K. Hackl 编， *Analysis and Computation of Microstructure in Finite Plasticity*，175–204。施普林格，2015。[20] Ponsiglione, M.：螺型位错在晶体中引起的弹性能：从离散到连续。*SIAM J. Math. Anal.* **39** (2017), 449–469。[21] Reina, C., Conti, S.：有限运动学框架下晶体塑性的运动学描述：对 F = F^eF^p 的微观力学理解。 *J. Mech. Phys. Solids* **67** (2014), 40–61。[22] Reina, C., Schl¨omerkemper, A., Conti, S.：推导 F = F^eF^p，将其作为晶体滑移的连续介质极限。*J. Mech. Phys. Solids* **89** (2016), 231–254。[23] Sandier, E.：单位向量场能量的下界及其应用。 *J. Func. Anal* **152** (1998), 379–403。[24] Sandier, E., Serfaty, S.：《》，《非线性微分方程及其应用进展》，第70卷，Birkh¨auser Boston，波士顿（马萨诸塞州），2007。[25] Scardia, L., Zeppieri C.I.：作为非线性位错能的 Γ-极限的塑性线张力模型。*SIAM J. Math. Anal.* **44**(2012), 2372–2400。[26] Schmidt, B.：从原子模型推导线弹性。 *Netw. Heterog. Media* **4** (2009), 789–812。

(Roberto Alicandro) DIEI, Università di Cassino e del Lazio meridionale, via Di Biasio 43, 03043 Cassino(FR), *Italy Email address*, R. Alicandro: alicandr@unicas.it(Lucia DeLuca（通讯作者）)

Istituto per le Applicazioni del Calcolo "M. Picone", IAC-CNR, via dei Taurini 19, 00185 Roma, Italy*Email address*, L. De Luca: lucia.deluca@cnr.it(Mariapia Palombaro)

DISIM Università dell'Aquila Via Vetoio 67100 L'Aquila Italy , , , , , M. Palombaro: mariapia.palombaro@univaq.it(Marcello Ponsiglione) Dip. di Matematica, Univ. Roma-I "La Sapienza", Piazzale Aldo Moro 5, 00185Roma, Italy*Email address*, M. Ponsiglione: ponsigli@mat.uniroma1.it