一种针对响应相关惯性振荡器的辨识方法 ⋆

Yuval Harduf [a]、Eyal Setter [a]、Izhak Bucher [a]

[a] *Technion, Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering*

arXiv:2305.02135v2 [eess.SY] 3 Oct 2023

摘要

本文研究如何基于测得的动力学，辨识具有响应相关广义惯性（质量、电感或等效量）的受迫振荡系统的瞬时模态参数。本文提出一种辨识方法，它是"FORCEVIB"方法的一种变体。该方法利用解析信号表示和希尔伯特变换的性质，建立系统固有频率和阻尼系数与其响应及激励信号之间的解析关系。通过将辨识结果与一个具有响应相关惯性的简单系统的渐近解进行比较，验证了所提出的方法；随后以数值和实验方式，将其应用于其他更复杂的非线性系统。

Key words: 辨识方法 ；线性/非线性模型；变质量系统；电感器饱和；希尔伯特变换 m.

1 引言

1.1 变惯量系统

变惯量系统是指其惯性项不是常数，而是取决于时间或系统状态的系统 [1]。这类系统可见于机械和电振荡器装置中。各种系统会随时间获取或排出质量：燃烧燃料的火箭、正在排空的容器，或正在缠绕或解绕材料的转子 [2]。本文关注的变惯量系统的一个相关子类别，是惯量显式依赖于系统状态的系统；例如：从卷筒上放出的缆绳，其悬挂质量取决于铺放卷筒的转动；自由液面穿透管中的水柱高度 [3] ；或在旋转抛物面上运动的粒子的径向位置 [4]。其他例子可能来自电路领域——在机械振荡器与RLC电路的等效关系中扮演惯量角色的电感器，其特性可能会随流经其中的电流而改变 [5]。尽管变惯量系统并不常见，但它们并非只是理论概念，但真实的工程系统需要采用适当的工具进行分析。已有多项研究致力于求解变惯量系统的正问题，即根据其运动方程 [6–9]求得系统的响应。由于这类系统具有非线性特征，要从系统响应辨识其运动方程，需要采用非线性辨识方法 [10,11]。然而，这些方法大多假设惯性项为常数；据作者所知，对于受迫变惯量系统，如何根据其受迫响应辨识系统属性的问题尚未得到全面解决。本文提出一种基于希尔伯特变换的非参数非线性系统辨识方法的改进，使其能够辨识惯性项取决于系统状态的受迫系统。

1.2 理论背景：希尔伯特变换与解析信号表示

许多信号，包括振动系统的响应 $y(t)$，都可以用缓慢变化的实值函数来表示——包络，或振幅 $A(t)$和相位 $\phi(t)$ [12]：

$$y(t) = A(t)\cos(\phi(t)) \tag{1.1}$$

⋆ 本文未在任何 IFAC 会议上发表。通讯作者：Y. Harduf。电话 +1-(781) 655-1754。*Email addresses:* Hardufy2@gmail.com（Yuval Harduf）、Eyalsetter.es@gmail.com（Eyal Setter）、Bucher@technion.ac.il（Izhak Bucher）。

信号的瞬时频率定义为相位的导数：

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \tag{1.2}$$

信号 $Y(t)$ 的解析表示是时间的复函数。解析信号可以用信号的希尔伯特变换（HT），也可以用振幅和相位来表示：

$$\begin{aligned} Y(t) &= y(t) + j\tilde{y}(t) = A(t)\exp(j\phi(t)) \\ A(t) &= \sqrt{y^2(t) + \tilde{y}^2(t)} \\ \phi(t) &= \arctan(\tilde{y}(t)/y(t)) \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中，$j = \sqrt{-1}$ 和 $\tilde{y}(t)$ 是 $y(t)$ 的 HT，定义如下：

$$\tilde{y}(t) = H[y(t)] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t-\tau}, \mathrm{d}\tau \tag{1.4}$$

HT 可以看作一个增益为 1 的滤波器，它使信号的所有正频率分量的相位偏移 $-\pi/2$，负频率分量的相位偏移 $\pi/2$[14]。

1.3 FORCEVIB 方法

本文提出的方法基于 FORCEVIB 方法 [13]。FORCEVIB 方法研究以下形式的变刚度系统：

$$\ddot{y}(t) + h(y,\dot{y})\dot{y}(t) + \omega_n^2(y,\dot{y})y(t) = \frac{1}{m}x(t) \tag{1.5}$$

其中，$y(t)$ 是系统的响应，$h(y,\ \dot{y})$ $\omega_n(y,\ \dot{y})$ 分别是系统的对称阻尼系数和固有频率，m 是系统的恒定质量，$x(t)$ 是外部激励（输入）。

FORCEVIB 方法旨在根据系统响应和激励力的时间序列测量，估计系统模态（即稳态）参数与其响应幅值$h(A)$ $\omega_n(A)$之间的隐式关系。

为此，该方法采用希尔伯特变换（HT）和解析信号表示。将解析信号表示用于辨识有两大优势。首先，当模态参数相较于系统响应缓慢变化时，系统响应的微分方程对响应的解析信号表示同样成立：根据贝德罗相定理 [14], 当模态参数的频谱 $\omega_n(t)$ $h(t)$低于响应的频谱 $y(t)$且两者不重叠时，那么 $H[h(t)\cdot y(t)] = h(t)\tilde{y}(t)$。利用贝德罗相定理和希尔伯特变换（HT）的线性性质，我们可以对方程 1.5 的两边进行希尔伯特变换，将结果乘以 j 并加到原方程上，从而得到一个关于解析信号的微分方程：

$$\ddot{Y}(t) + 2h(A)\dot{Y}(t) + \omega_n^2(A)Y(t) = \frac{1}{m}X(t) \tag{1.6}$$

将方程1.6分解为实部和虚部，并求解模态参数，可得模态参数与系统输入和响应信号之间的显式关系：

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{x\dot{\tilde{y}} - \tilde{x}\dot{y}}{m(y\dot{\tilde{y}} - \tilde{y}\dot{y})} - \frac{\ddot{\tilde{y}}\dot{y} + \ddot{y}\dot{\tilde{y}}}{y\dot{\tilde{y}} - \tilde{y}\dot{y}} \\ 2h &= \frac{\tilde{x}y - x\tilde{y}}{m(y\dot{\tilde{y}} - \tilde{y}\dot{y})} - \frac{\ddot{\tilde{y}}y - \ddot{\tilde{y}}y}{y\dot{\tilde{y}} - \tilde{y}\dot{y}} \end{aligned} \tag{1.7}$$

而 m 的值可通过求解线性拟合问题来估计，如 [13]中所述。

使用解析信号表示的第二个好处是，可以通过数字滤波来估计测量信号的希尔伯特变换（HT）；虽然无法完美实现此类滤波器，但可以设计并使用一种实用滤波器，使其在系统响应所包含的频谱范围内具有单位增益和 $\pi/2$相位延迟，从而估计系统响应的希尔伯特变换（HT） [12]。

由于方程1.5描述的是具有常数惯量的系统，因此 FORCEVIB 方法不适用于变惯量系统。不过，稍作修改后，同样的思路也可应用于变惯量系统，这正是本文的研究目标。

2 所提出的方法

我们提出一种适用于参数对称、运动方程具有以下形式的受迫变惯量系统的辨识方法：

$$m(y,\dot{y})\ddot{y} + c(y,\dot{y})\dot{y} + ky = x(t) \tag{2.1}$$

其中，$m(y,\ \dot{y})$ $c(y,\ \dot{y})$ k 分别为系统的惯量、阻尼和刚度系数。请注意，在此模型中，刚度项为常数。虽然通常按惯量项对运动方程进行归一化更为方便，但我们将按常数刚度项对方程进行归一化，以得到：

$$T^2(y,\dot{y})\ddot{y} + 2\chi(y,\dot{y})\dot{y} + y = \frac{1}{k}x(t) \tag{2.2}$$

其中 $T^2 = {}^{m}\!/_{k}$，$\chi = {}^{c}\!/_{2k}$。

辨识的目标是根据系统响应和激励信号的时间序列测量，辨识模态参数与响应幅值之间的隐式关系，即 $T(A)$ $\chi(A)$，以及常数项 k 。由于该方法仅依赖系统输入和输出的时间序列测量，因此也可用于复杂系统的降阶建模。通过测量任意系统的输入和输出，可以辨识出等效变惯量系统的模态参数，并据此建立降阶模型。虽然 $T(A)$ $\chi(A)$ 对辨识过程很有用，但其物理意义并非一目了然。我们将使用以下关系，以一种有意义且符合广泛惯例的方式呈现辨识结果（见 [15]）：

$$\omega_n^2(A) = \frac{1}{T^2(A)}, h(A) = \frac{\chi(A)}{T^2(A)} \tag{2.3}$$

由于惯量变化会同时影响固有频率和阻尼系数，因此可变惯量系统会呈现丰富的动态响应，正如本文第4节中的示例所示。

2.1 信号滤波与解析形式估计

如引言中所述，所提出的方法需要估计激励信号和响应信号的希尔伯特变换（HT），以及它们的导数。虽然可以使用数字滤波器实现希尔伯特变换，但测量噪声可能会在信号求导过程中引发数值计算困难。为处理测量噪声，本文提出采用希尔伯特振动分解（HVD）中最大的分量，该方法在 [16],中有所描述。HVD 用于将信号分解为具有 1.1 所示形式的非平稳分量。通过估计信号的瞬时频率，对所得结果进行平均，然后利用同步解调估计相应的包络，即可提取信号中最大的非平稳分量，并将其用于后续计算。通过采用 HVD 程序并提取信号中最大的分量，可以确保：（a）信号的希尔伯特变换不含较小的附加分量，包括确定性分量和随机分量；（b）提高信号在数值求导时对噪声的鲁棒性 [17]。在附录 A 中，通过模拟噪声展示了该方法对噪声的鲁棒性。

2.2 变化模态参数的辨识

按照 [13], 中的思路，方程 2.2 以类似于第 1.3 小节所述的方式转换为解析形式：对方程两边应用 HT。左端乘以 j ，并利用贝德罗相定理和 HT 的线性性质进行化简。将所得结果与原方程相加，得到：

$$T(A)^2\ddot{Y} + 2\chi(A)\dot{Y} + y = \frac{1}{k}X \tag{2.4}$$

方程 2.4 是复数。将实部和虚部分离后，我们得到两个方程：

$$\begin{aligned} \text{Real:} \quad & T^2\ddot{y} + \chi\dot{y} + y = \frac{1}{k}x \\ \text{Imaginary:} \quad & T^2\ddot{\tilde{y}} + \chi\dot{\tilde{y}} + \tilde{y} = \frac{1}{k}\tilde{x} \end{aligned} \tag{2.5}$$

求解 T^2, χ:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{x\dot{\tilde{y}} - \tilde{x}\dot{y}}{k\left(\ddot{y}\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\ddot{\tilde{y}}\right)} + \frac{\tilde{y}\dot{y} - y\dot{\tilde{y}}}{\ddot{y}\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\ddot{\tilde{y}}} \quad (a) \\ \chi &= \frac{\tilde{x}\ddot{y} - x\ddot{\tilde{y}}}{2k\left(\ddot{y}\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\ddot{\tilde{y}}\right)} + \frac{y\ddot{\tilde{y}} - \tilde{y}\ddot{y}}{2\left(\ddot{y}\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\ddot{\tilde{y}}\right)} \quad (b) \end{aligned} \tag{2.6}$$

方程 2.6 是辨识问题的解。该解包含输入信号 $x(t)$ 和响应信号 $y(t)$、它们的希尔伯特变换，以及信号及其希尔伯特变换的导数；所有这些都可通过测量输入和响应信号获得。该解还包含常数刚度项，其估计方法将在下一小节中说明。

2.3 常数刚度项的辨识

遵循 [13], 中的思路，我们利用模态参数的缓慢变化（参见第1.3节），假设在相对较短的时间内，方程2.6(a)左侧的变化可以忽略不计，并且参数 T^2 可视为常数。该方程可重排为：

$$g = -\frac{1}{k}s + T^2 \tag{2.7}$$

其中 $g = \frac{\tilde{y}\dot{y} - y\dot{\tilde{y}}}{\ddot{y}\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\ddot{\tilde{y}}}$， $s = \frac{x\dot{\tilde{y}} - \tilde{x}\dot{y}}{\ddot{y}\dot{\tilde{y}} - \dot{y}\ddot{\tilde{y}}}$。方程 2.7 描述了一条斜率为 $-\frac{1}{k}$ 、截距为T^2的直线。为了估计 k，可以采用简单的直线拟合过程，利用从一个较短时间间隔内获取的测量值。由于 $g = g(A, \omega)$ $s = s(A, \omega)$（参见方程 A.3），且假设响应幅值 A 为常数，因此，响应频率在不同采样点之间发生变化非常重要，这样才能沿拟合直线获得不同的g， s 值。由于噪声会影响方程两侧，因此提出采用正交直线拟合方法来求解方程 [18]。这里的公式考虑了两个项中强度相近的零均值噪声。在求解拟合问题时，较好的做法是省略部分测量数据。

在响应幅值快速变化期间（例如，由激励突然开始引起的瞬态响应）。附录 B 中介绍了一种改进估计的方法。刚度项估计方法可用于求解方程 2.6，并可使用 2.3 将结果转换为固有频率和阻尼参数。通过估计系统在每一时刻的模态参数和瞬时响应幅值，无需任何关于系统的先验知识，即可绘制关系 $\omega_n(A)$ $h(A)$；我们将这种方法称为“FORCEVIBmod”。

2.4 激励信号的选择

选择合适的激励信号对该方法的精度至关重要。选择激励信号时需要考虑几个因素。首先，信号应缓慢变化：在推导方程 2.4 时，我们假设模态参数的变化速度远慢于激励信号和响应信号，即它们的频谱内容不重叠（参见贝德罗相定理 [14]）。由于模态参数是瞬时响应幅值的函数，因此我们需要选择合适且同样缓慢变化的激励信号，以确保响应幅值缓慢变化。其次，为了研究系统在特定幅值范围内的行为，应选择能使系统在所关注幅值范围内产生响应的激励信号。最后，要估计常数刚度项，响应信号的瞬时频率必须随时间变化。满足所有要求的激励信号——即幅值缓慢变化、响应覆盖较宽的幅值范围以及频率变化——一个很有吸引力的选择是幅值恒定且扫频速率较慢的扫频正弦信号。对于采用扫频正弦激励的线性模态测试，研究表明扫频速率应低于 $h^2/4$ [19,20]。然而，接下来章节中的仿真和实验表明，采用高得多的扫频速率也能获得准确结果。

2.5 方法总结及与 *FORCEVIB* 方法的比较

总而言之，本节通过图1展示了辨识过程的逐步示意图。

此外，表 1 对比了用于变刚度系统的 FORCEVIB 方法与用于变惯量系统的 FORCEVIBmod方法。该对比展示了该方法所辨识系统的微分方程、辨识得到的模态参数，以及模态参数与估计信号之间的关系。附录 C 讨论了无外力作用的变质量振子的辨识。

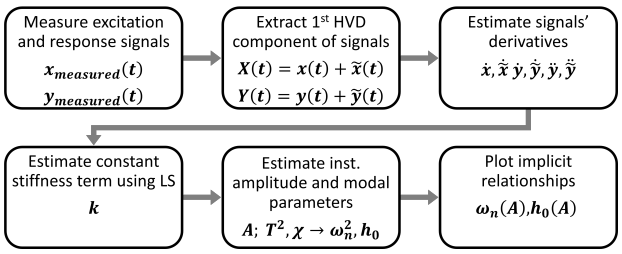


图1. FORCEVIBmod方法的图形概要

3 方法验证

现在，我们将通过研究一个简单的变惯量系统来验证所提出的方法，该系统的响应通过数值积分计算得到。我们将使用 FORCEVIBmod方法辨识系统模态参数与其响应幅值之间的关系，并将辨识结果与这些关系的渐近近似进行比较。

3.1 简单数学系统

考虑一个受迫无阻尼振子，其刚度为线性常数 k，而其惯量是关于位置 y 的非线性对称函数，表示为：

$$(m + \beta y^2)\ddot{y} + ky = x \tag{3.1}$$

其中，m 是线性惯性项，β 是非线性惯性项，x 是激励力。

该系统并不描述任何物理系统，而是一种可以进行渐近分析的数学构造。我们可以使用 Lindstedt-Poincaré 方法 [4] 找到系统瞬时频率与其响应幅值之间的关系，并将其与所提出方法的辨识结果进行比较。通过渐近近似得到的固有频率与响应幅值之间的关系为：

$$\begin{aligned}\omega_n(A) = \omega_0 - \frac{3}{8}A^2\omega_0\left(\frac{\beta}{m}\right) + \\ \frac{65}{356}A^4\omega_0\left(\frac{\beta}{m}\right)^2 + O\left(\omega_0\left(\frac{\beta}{m}\right)^3\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

完整推导见附录 D。

3.2 与辨识结果的比较

我们模拟了系统对以下形式啁啾激励的响应：

$$x(t) = A\sin\left(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)\frac{t^2}{2T}\right) \tag{3.3}$$

表 1 FORCEVIB 与 FORCEVIBmod 方法的比较。

	FORCEVIB	**FORCEVIBmod**
解析信号方程	$\ddot{Y}+2h\dot{Y}+\omega_n^2 Y=\frac{X}{m}$	$T^2\ddot{Y}+2\chi\dot{Y}+Y=\frac{X}{k}$
模态参数	$\omega_n^2=\frac{k}{m}$，固有频率 $h=\frac{c}{2m}$，阻尼参数 m，常数参数（质量）	$T^2=\frac{m}{k}$，倒数固有频率 $\chi=\frac{c}{2k}$，修正阻尼参数 k，常数参数（刚度）
模态参数方程	$\omega_n^2=\frac{\tilde{x}\dot{y}-\tilde{x}\dot{y}}{m(y\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{y})}-\frac{\ddot{\tilde{y}}\dot{y}+\ddot{y}\dot{\tilde{y}}}{y\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{y}}$ $2h=\frac{\tilde{x}y-x\tilde{y}}{m(y\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{y})}-\frac{\tilde{y}\ddot{y}-\ddot{\tilde{y}}y}{y\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{y}}$	$T^2=\frac{\frac{x\dot{\tilde{y}}-\tilde{x}\dot{y}}{k\ y\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{y}}()}{}+\frac{\tilde{y}\dot{y}-y\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{y}}$ $\chi=\frac{\tilde{x}\dot{y}-x\dot{\tilde{y}}}{(\dot{y}\dot{\tilde{y}}-\tilde{y}\dot{\tilde{y}})}+\frac{y\ddot{\tilde{y}}-\ddot{y}\tilde{y}}{()}$

研究所使用的数值参数列于表 2 中。

采用 FORCEVIBmod 方法，根据数值积分的时间历程结果，辨识系统瞬时固有频率与响应幅值之间的关系，如图 2a 所示。首先，采用第 2.3 节所述的方法估计系统的刚度 k，其近似误差为 0.06%。接下来，利用方程 2.6 中的关系式，估计各个时刻的固有频率和响应幅值。辨识结果以及渐近近似的前三阶结果如图 2b 所示。可以看出，随着渐近近似阶数的增加，近似结果逐渐趋近于辨识结果。这证实了所提出的方法能够正确辨识系统模态参数与响应幅值之间的关系。下一节将展示该方法在更复杂物理系统中的辨识能力。

4 案例研究

现在我们考虑具有可变惯量的更复杂非线性系统。由于解析地求出系统模态参数与其响应振幅之间的关系并非易事，因此，通过仿真或实验辨识这些关系，是表征此类系统动态特性的有效方法。

表 2 简单系统数值研究中使用的数值参数。

参数	**数值**	**单位**
$\omega_n=\sqrt{\frac{m}{k}}$	$2\pi\cdot 30$	$\frac{rad}{\sec}$
$\varepsilon=\frac{\beta}{m}$	0.1	$\frac{1}{m^2}$
A	10^3	N
ω_1	$2\pi\cdot 20$	$\frac{rad}{\sec}$
ω_2	$2\pi\cdot 40$	$\frac{rad}{\sec}$
T	10	sec

4.1 带有饱和电感器的电路

我们考虑一个串联RLC电路，其中包含一个常数电阻器R、一个常数电容器 C，以及一个在接近饱和状态下工作的电感器，即其电感 L 取决于电流 i，关系为 $L(i)$。该电路如图 3a 所示。利用基尔霍夫电压定律，可以推导出描述该电路的微分方程：

$$L(i)\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}q=e(t) \tag{4.1}$$

其中，$q(t)$ 是电容器电荷，$e(t)$ 是可变电源的电压。由于电流是电荷的变化率，即 $i=\frac{dq}{dt}$，我们可以改写方程 4.1：

$$L(\dot{q})\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=e(t) \tag{4.2}$$

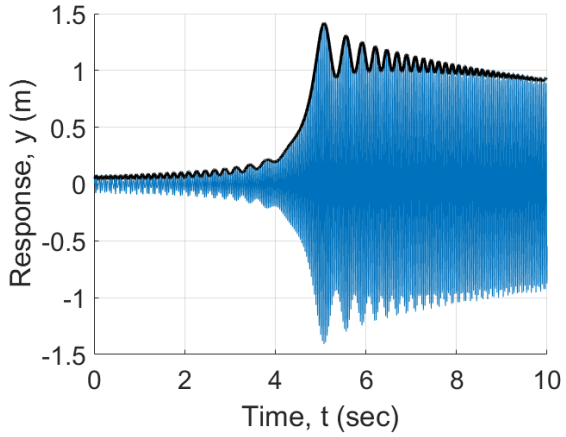
方程 4.2 与方程 2.1 具有相同的形式，这使其成为展示 FORCE-VIBmod 方法的一个可行候选方案，因为可变电感在其中发挥着与可变惯量相同的作用。此前已有多项研究探讨了电感器的电感-电流关系辨识问题 [5,21,22]。本文提出的方法可能优于现有方法，因为它是一种只需进行简单测量的非参数方法。

4.1.1 理想电路仿真

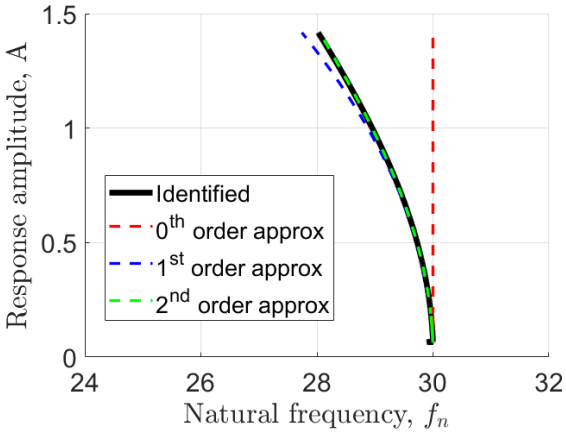
为便于演示，我们使用 [22] 中提出的电流相关电感模型来描述电感器的非线性：

$$L=L_{ds}+\frac{L_{nom}-L_{ds}}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\sigma\cdot(i-i^*)\right)\right) \tag{4.3}$$

其中，L_{ds},L_{nom} 分别为深度饱和电感值和标称电感值，而 σ,i^* 是用于定义电流增大时电感滚降的参数。为了展示 σ,i^* 对电感特性的影响，我们给出了



(a)



(b)

图 2. (a) 数学系统在啁啾激励下的响应时程及包络 (b) 描述系统固有频率与响应幅值关系的不同阶渐近近似（虚线）与辨识结果（黑色实线）的比较。

图 3b 中不同 σ 取值下的 $L(i)$。我们可以看到，σ 控制电感变化的陡峭程度，而 i^* 是电感不随 σ变化时的电流。

将方程 4.2 两边乘以 C，我们得到一个形式为方程 2.2 的方程：

$$CL\ddot{q} + RC\dot{q} + q = Ce(t) \tag{4.4}$$

将方程 4.4 与方程 2.4 进行比较，该电路的模态参数为 $T^2 = CL, 2\chi = RC, k = \frac{1}{C}$。

使用数值积分，我们模拟电路对以下形式的扫频正弦激励电压的响应：

$$e\left(t\right) = V\sin\left(2\pi f_1 t + 2\pi\frac{f_2 - f_1}{2T}t^2\right) \tag{4.5}$$

如第 2.4 节所述，为了研究电路在较宽电流幅值范围内的响应，应选择适当的激励信号，使电路能够在整个感兴趣的幅值范围内产生响应。当使用恒定幅值的扫频正弦信号激励系统时，系统响应幅值的变化不一定能够覆盖所有感兴趣的响应幅值范围。为了研究系统在整个幅值范围内的动态特性，我们模拟电路对若干不同幅值的电压信号的响应，每个信号分别覆盖所需响应幅值范围中的不同部分。随后，可以将不同的曲线拼接在一起，形成一条覆盖整个感兴趣幅值范围的曲线。所选电路的数值参数列于表 3 中。

表 3 非线性电路数值研究中使用的数值。

参数	值	单位
L_{nom}	498	μH
L_{ds}	100	μH
i^*	0.7	A
σ	100	A^{-1}
C	$9 \cdot 10^{-6}$	F
R	1.25	Ω
f_1	1500	Hz
f_2	4500	Hz
T	10	sec
V	$1, 3, 5, 20, 50$	V

我们使用 FORCEVIBmod 方法分析仿真的时间序列结果，以估算固有频率与电流幅值之间，以及阻尼系数与电流幅值之间的关系。这些关系以图形形式展示在图 3c 和图 3d 中，每种线条颜色对应一个具有不同激励电压幅值的仿真。在每次仿真中，系统的响应幅值范围各不相同；所有图表合在一起，描述了整个振幅范围内模态参数的变化。除受迫振荡器的辨识结果外，我们还给出了无阻尼电路固有频率的估算值以供比较，在图 3c 和图 3d 中以黑色圆形标记表示。由于无外力作用的电路会以其固有频率振荡，因此我们可以根据电路对初始条件作出的无阻尼响应仿真来估算其固有频率。通过改变初始条件，我们

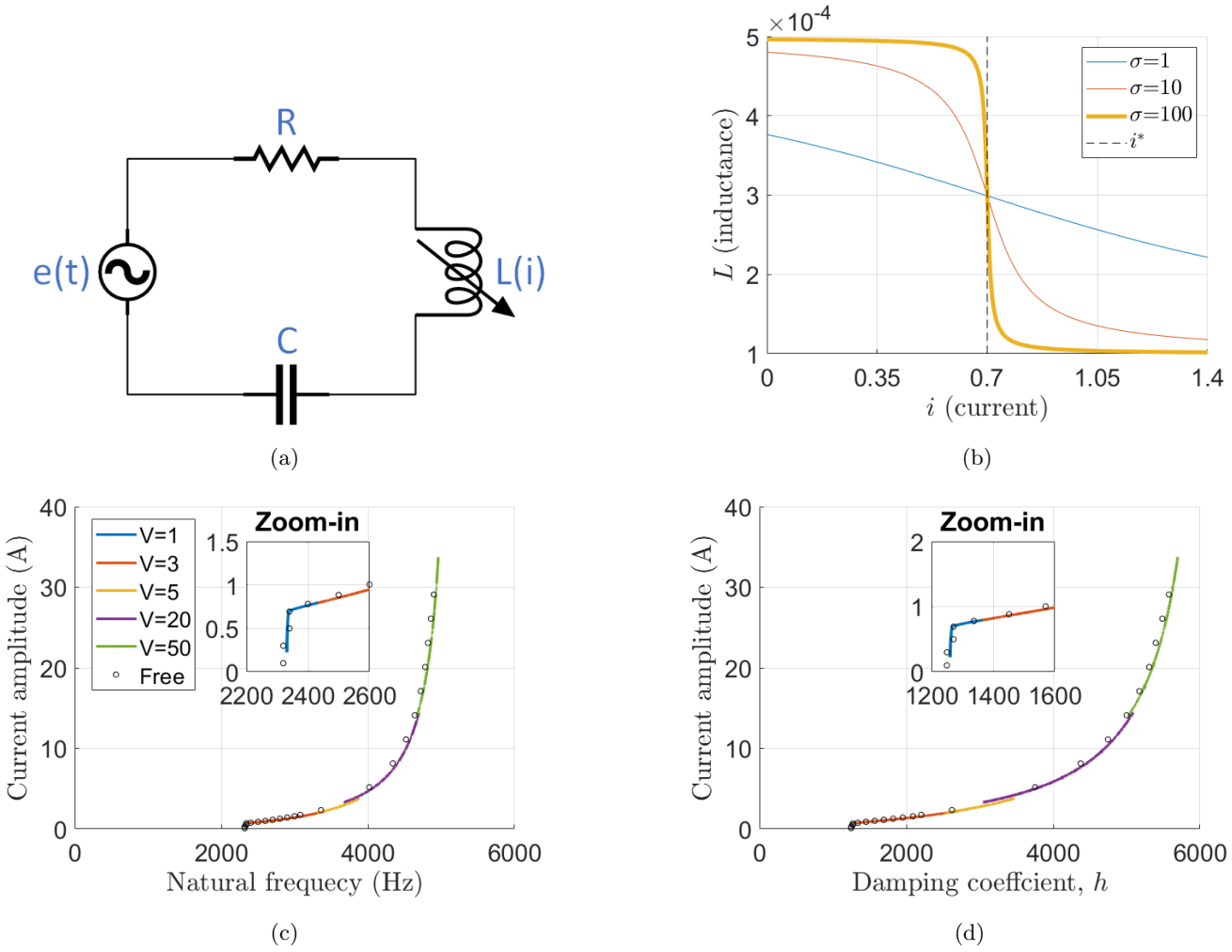


图 3. (a) 含非线性电感器的 RLC 电路 (b) 电感器饱和模型。较粗的线对应于数值仿真中使用的 σ 值 (c-d) 使用 FORCEVIBmod 方法，根据非线性 RLC 电路仿真得到的 (c) 固有频率、(d) 阻尼系数与电流幅值之间的关系。每种线条颜色对应不同的激励幅值。黑色标记对应于根据无外力电路响应得到的估计值。

获得不同振幅的振荡。估算每种振荡振幅下的振荡频率后，我们得到关系式 $\omega_n(A)$。我们也给出了阻尼系数的估算值，计算方法很简单，即 $h = \omega_n \frac{RC}{2}$。可以看到，辨识结果与根据电路无外力、无阻尼响应得到的固有频率估算值一致。正如预期，随着响应幅值增大，固有频率也随之升高，这是由于电感减小所致。可以看到，在响应幅值较低时，估算的固有频率接近 $f_{nom}\frac{1}{2\pi\sqrt{L_{nom}C}}$，而在幅值很高时则趋近于极限值 $f_{ds}\frac{1}{2\pi\sqrt{L_{ds}C}}$。根据图 3b，电感在接近 1A 时趋近其极限值；然而，固有频率似乎要到响应幅值高得多时才趋近 f_{ds}。由于电感在振荡过程中连续变化，其平均值低于对应于电流幅值；由于瞬时固有频率是一种平均属性，因此可以预期，随着响应幅值增大，固有频率将趋近于某个极限值。还可以看到，阻尼系数随电流幅值增大而增大，这符合预期，因为阻尼系数与电感成反比。对于非线性电路，解析求得这些关系相当复杂；自由振动方法效率很低，而且在许多实际情况下不可行，因此，从受迫响应测量值中进行非参数辨识很有用。

4.1.2 实验演示

为通过实验检验 FORCEVIBmod方法并证明其对噪声的鲁棒性，我们在面包板上搭建了一个简单的 LC 电路。标称电

路的电感、电容和电阻分别使用 RLC 测量仪测得为 $L_{nom} = 498\mu$H $C_{nom} = 9\mu$F $R_{nom} = 1.05\Omega$。根据这些标称测量值，估算出电路的标称固有频率和阻尼系数分别为 $f_{nom} = 2377$ $h_{nom} = 1054$ Hz、秒。电路接入由电流放大器提供的频率逐渐升高的电压信号 V_{in}，并使用电流探头测量电路中的电流 I_{out}。图 4a 展示了 RLC 电路的照片。图 4b 展示了实验系统的示意图，其中增加了一个电阻器 R_L，用于表示电感器的电阻。附录 E 对该系统作了更详细的说明。

提供给电流放大器的参考信号是一个啁啾信号，其频率从 $f_1 = 1500$Hz 开始，到 $f_2 = 4500$Hz 结束，持续时间为 $T_{chirp} = 10$sec。实验针对不同的啁啾振幅重复进行了多次。由于放大器自身的动态响应，输入电路的电压并未保持恒定的电压振幅，但由于测得的输入电压被用作估计的一部分，因此这些影响已得到补偿。每次实验的测量数据均采用 HVD 方法进行滤波，并使用 FORCE-VIBmod 方法估计模态参数与响应幅值之间的关系。图 4c 展示了最低电压振幅下输入电压和输出电流的时间序列测量值，以及它们的第一个 HVD 分量和剩余噪声。两个信号估计得到的信噪比（SNR）均介于 40 至 50 dB 之间。

辨识结果如图 4d 和 4e 所示。根据电流幅值最低时（$C_{est} = 9.145\mu$F）的时间序列结果估算出电容值，与测得的标称值相比误差为 4.6%。从图 4d 和 4e 可以看出，在电流幅值较低时，电路工作在线性区间，固有频率和阻尼系数基本保持不变。它们的值约为 $f_{nlin} = 2281$Hz、$h_{lin} = 1171$ 1 秒，相应误差分别为 4 % 和 11.1%。当电流幅值超过约 0.7A 时，固有频率迅速升高。这一升高归因于电感器的饱和。当电流幅值超过 2A 时，随着电感器接近深度饱和，固有频率的增长速率似乎有所下降。由于阻尼系数取决于电感，因此预计其也会随着电流幅值增大而增大。实验辨识结果相当准确（频率和电容的误差小于 5%，阻尼误差小于 15%），并为深入了解电路的动态特性提供了重要见解。

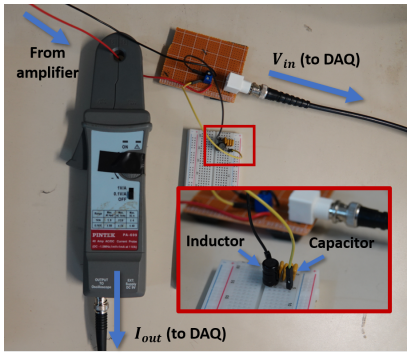
4.2 双质量系统

最后一个有效质量取决于其状态的系统示例，是一个带摩擦界面的双质量系统，导致两个质量发生粘滑运动 [23]。系统示意图如图 5a 所示。质量 1（m_1）通过线性弹簧 k 和阻尼器 c 与地面相连，其位置记为 x_1。质量 2（m_2）置于 m_1 表面，其位置记为 x_2。两个质量之间的摩擦界面采用库仑摩擦模型，静摩擦系数和动摩擦系数相同，均记为 $\mu_s = \mu_k = \mu$。系统受到直接作用于 m_1 的时变力激励，其响应为 x_1。当惯性力小于摩擦力时，两个质量作为刚体一起运动，这种状态称为“粘着”。在粘着状态下，系统的有效质量为 m_1 和m_2之和，因此其固有频率和阻尼系数分别为 $f_{stick} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$、$h_{stick} = \frac{c}{2\sqrt{k(m_1+m_2)}}$。当惯性力大于摩擦力时，$m_2$ 相对于 m_1 滑动，这种状态称为“滑动”。当两个质量的速度相等时，相对运动停止，两个质量恢复到“粘着”状态。系统在各状态下的运动方程可写为：

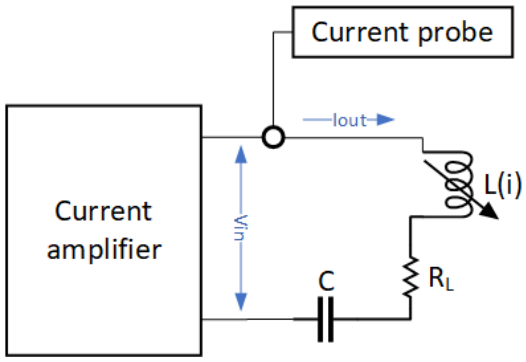
$$\text{stick}: \begin{cases} (m_1+m_2)\,\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F(t) \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 \end{cases}$$
$$\text{slip}: \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F(t) + m_2\mu g\,\mathrm{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -m_2\mu g\,\mathrm{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases} \tag{4.6}$$

在“滑移”期间，摩擦会造成能量耗散，系统的有效质量仅为 m_1。随着响应幅值增大，一个周期内滑移相位所占的相对时长也随之增加，直至不再出现粘着相位。由于滑移相位所占的相对时长增加，系统的有效质量或平均质量从 m_1+m_2 开始下降，并趋近于其极限值 m_1。相应地，预期在响应幅值极高时，固有频率将趋近于 $f_{slip} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}$。

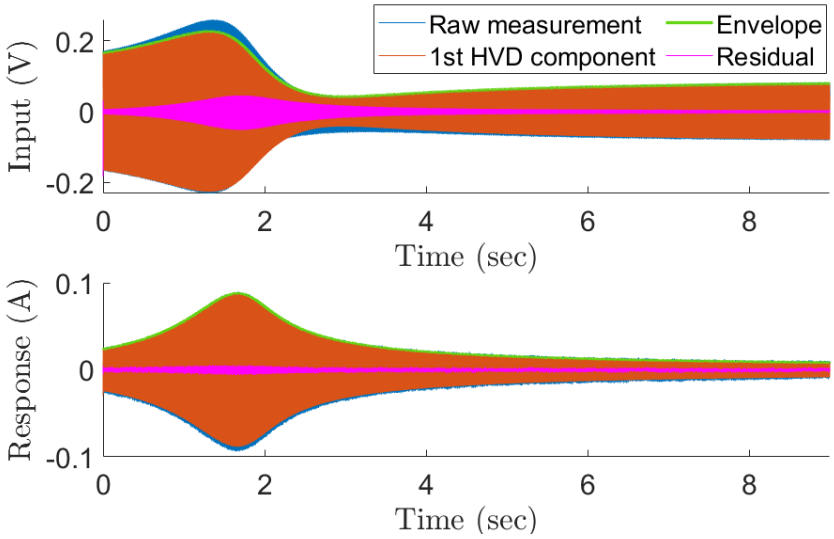
对此类系统进行解析处理相当复杂，需要分段分析，因此，从 2DOF 系统的时间序列响应中识别等效变惯量系统的模态参数，以推导降阶模型，在此处也可能很有用。有关计算该系统时间序列响应所采用的数值模拟的详情，请参见附录 F。时间序列结果采用 FORCEVIBmod方法进行了分析，结果见图 5b 和图 5c。模态参数绘制为系统加速度的函数。



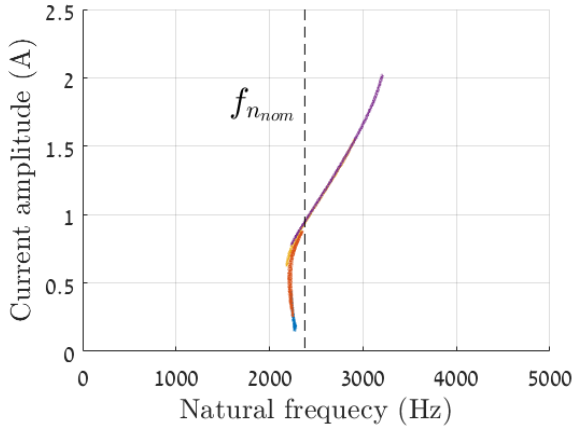
(a)



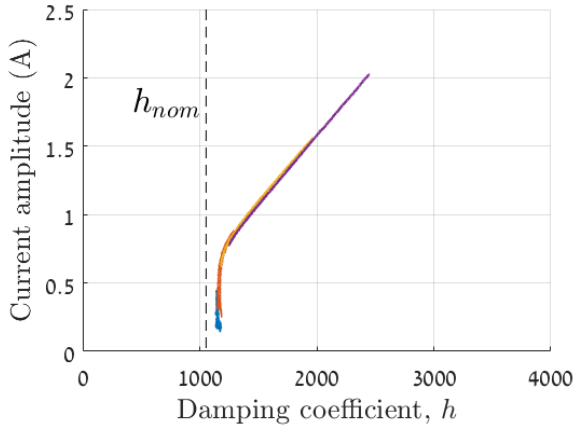
(b)



(c)



(d)



(e)

图 4. (a) RLC电路实验的照片 (b) 实验示意图 (c) 由最低振幅的扫频正弦信号激励的 RLC 电路的输入（上）和响应（下）时间序列测量值。(d-e) 使用 RLC 电路实验的 FORCEVIBmod方法获得的 (d) 固有频率、(e) 阻尼系数与电流幅值之间的关系。每种线条颜色对应不同的参考信号电压幅值。黑色虚线表示低振幅下标称值的估计值。

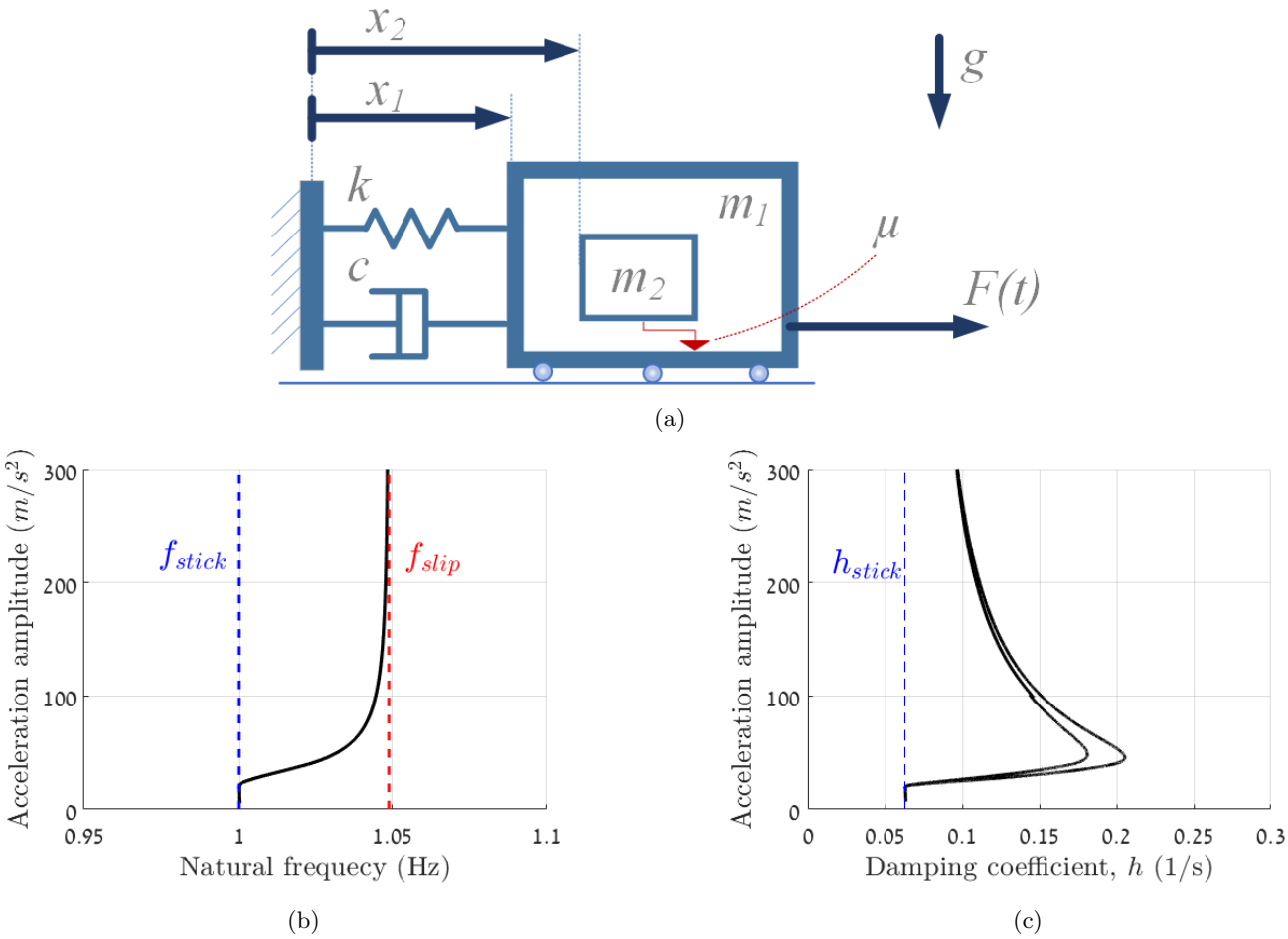


图 5。（a）发生粘滑运动的摩擦界面双质量系统示意图；（b-c）利用 FORCEVIBmod方法对双质量系统进行仿真所获得的（b）固有频率与振动振幅、（c）阻尼系数与振动振幅之间的关系。

振幅而非位移振幅，这有助于突出系统表现出的各种现象：在达到某一加速度振幅之前，模态参数不会随振幅变化。这种行为对应于粘着状态，此时模态参数确实等于 f_{stick}, ζ_{stick}。开始发生滑移的阈值振幅对应于惯性力超过摩擦力的时刻。随着振幅增加，固有频率升高并趋近于其极限值f_{slip}。超过阈值振幅后，阻尼系数也开始增加，这是由摩擦力引起的耗散所致；由于滑移阶段相对持续时间的增加，阻尼系数还会随响应幅值的增加而持续增大。然而，当响应幅值进一步增加时，阻尼系数开始下降。由于摩擦力的大小为常数，而黏性阻尼器的作用大小与振幅呈线性关系，因此当振幅足够大时，摩擦力对总耗散的贡献变得可以忽略，从而有效阻尼减小。我们还可以看到，在中等响应幅值范围内，阻尼曲线有两个分支；由于系统受到啁啾力信号的激励，不同频率下获得了不同的加速度幅值。这表明阻尼系数主要受加速度幅值支配，但响应频率等其他因素也会产生一定影响，凸显了二自由度系统丰富的动力学特性。

5 总结与结论

本文提出了 FORCEVIBmod 方法，用于辨识变惯量系统的模态参数。该方法是 FORCEVIB 方法的改进版，后者适用于变刚度系统（刚度随响应变化的系统）。研究表明，尽管固有频率和阻尼系数可用于描述这两类系统的动力学特性，但要估计

常数参数（变惯量系统中的刚度，反之亦然），则需要对该方法稍作修改。为验证该方法的有效性，本文对一个简单的变惯量振子进行了仿真。使用 FORCEVIBmod 方法分析仿真结果，并将其与频率—振幅关系的渐近近似进行比较。分析结果与渐近近似高度吻合，证明了该方法的有效性。为展示该方法对噪声的鲁棒性，本文使用该方法分析了一个非线性振荡 RLC 电路的测量值。尽管测量值中存在噪声，该方法仍清晰地描述了电感器达到饱和所导致的电路非线性。研究表明，FORCEVIBmod 方法仅需少量、相对快速的测量，便可在无需预先了解所研究系统的情况下，全面描述系统的动力学特性并考虑其非线性。最后，本文讨论了一个二自由度机械系统。尽管该系统并非经典的变惯量系统，FORCEVIBmod 方法仍根据系统仿真结果推导出其动力学特性的等效降阶模型，无需进行解析处理。总之，FORCEVIBmod 方法是研究变惯量系统的有效工具，能够通过相对少量且快速的测量，准确而全面地描述系统的动力学特性。

致谢

作者谨此感谢：最初开发 FORCEVIB 方法并参与审阅本文的 Michael Feldman 博士，以及在 RLC 实验中提供帮助的 Rakhmat-ulla（Roman）Shamsutdinov。本研究得到了 Pazy 研究基金会的资助。

A 评估对噪声的鲁棒性

为了评估该方法对噪声的鲁棒性：

(1) 将展示模态参数对测量信号的振幅和频率的依赖关系，并对噪声对识别结果的影响进行定性分析。

（2）将通过仿真展示噪声对结果的影响。

根据解析信号理论：

$$\begin{aligned} Y(t) &= A(t)\exp(j\phi(t)) \\ \dot{Y}(t) &= Y(t)\left(\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + j\omega(t)\right) \\ \ddot{Y}(t) &= Y(t)\left(\frac{\ddot{A}(t)}{A(t)} - \omega^2(t) + 2j\omega(t)\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + j\dot{\omega}(t)\right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

代入方程 2.4：

$$\begin{aligned} 1+T^2\left(\frac{\ddot{A}}{A} - \omega^2\right) + 2\chi\frac{\dot{A}}{A} \\ + j\left(T^2\left(2\omega\frac{\dot{A}}{A} + \dot{\omega}\right) + 2\chi\omega\right) = \frac{1}{k}\frac{X}{Y} \end{aligned} \tag{A.2}$$

我们定义 $\frac{X}{Y} = \alpha + j\beta$，并将 A 的实部和虚部分离。求解 T^2, χ 可得：

$$\begin{aligned} T^2 = & \frac{A(\beta\dot{A} - \alpha A w)}{k\left(A^2w^3 + A\dot{A}\dot{\omega} - A\ddot{A}w + 2\dot{A}^2w\right)} \\ & + \frac{A^2w}{A^2w^3 + A\dot{A}\dot{\omega} - A\ddot{A}w + 2\dot{A}^2w} \\ \chi = & \frac{\alpha - A^2\dot{\omega} + A^2\beta\left(w^2\right) + 2\alpha A\dot{A}w - A\beta\ddot{A}}{2k\left(A^2w^3 + A\dot{A}\dot{\omega} - A\ddot{A}w + 2\dot{A}^2w\right)} \\ & - \frac{A^2\dot{\omega} + 2A\dot{A}w}{2\left(A^2w^3 + A\dot{A}\dot{\omega} - A\ddot{A}w + 2\dot{A}^2w\right)} \end{aligned} \tag{A.3}$$

由于两个表达式的分母都包含相同的时变表达式，我们应确认该表达式不会被消去。根据所提出方法推导时采用的必要假设，由于我们使用的是缓慢变化的激励信号，振幅预期会缓慢变化$\ddot{}$ $\dot{}$，即：$A \ll A \ll A$。这意味着分母与 $\sim A^2\omega^3$ 成正比。由于响应幅值和频率均为非零正值，我们可以预期，对于缓慢变化的信号，分母不会被消去。由于 $A^2 = y^2 + \tilde{y}^2$，测量信号 y 中的噪声也会影响分母。我们使用 HVD 方法对测量信号 y 进行滤波并估计 $\tilde{y}$，从而确保包络信号不会因噪声而降为零。

为了展示该方法对噪声的鲁棒性，我们在第 3 节的仿真结果中加入了合成噪声，并使用 FORCEVIBmod方法和初步的 HVD步骤分析噪声测量值。噪声由正态分布生成，信噪比分别为 20db、26db

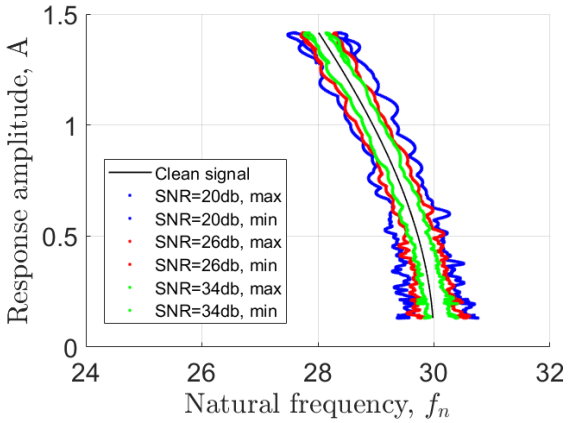


图 A.1. 不同信噪比水平对第 3 节系统辨识结果的影响

和 34db。针对每种噪声水平进行了 100 次仿真，并将每个振幅对应的最小和最大频率值添加到图 A.1 的频率图中。可以看出，未受噪声影响的测量值位于最大值和最小值之间；尽管噪声水平相对较高，估计误差仍低于 3%。

B 常数项估计的改进过程

为改进第 2.3 小节所述的拟合过程，我们可以使用多个短时间段，而不仅仅是一个。考虑在测量过程中的某个时刻截取的一个短时间窗：由于模态参数在整个测量过程中随时间缓慢变化，不同时间窗对应的直线截距会有所不同；然而，由于刚度为常数，所有时间窗对应的直线斜率都相同。这意味着，可以通过对多个时间窗内的 g 、 s 测量值拟合一条直线来辨识刚度项。刚度项辨识的优化问题可表述如下：

将 N 定义为时间序列测量的总时长。取 $m \ll N$ 个测量值（即一个短时间段），并计算所有 m 个测量值的 g， s。由于我们不关注截距的拟合，因此去除均值：$\tilde{g}_j = g_j - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_i$， $\tilde{s}_j = s_j - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i$。定义每个点到斜率为 k 且截距为 0 的直线的距离为 $d_j = e(k) \times (s_j,\ g_j)$，其中 $e(k)$ 是表示该直线方向的方向余弦，而 $\times$ 表示向量叉积[18]。优化问题的目标函数是求使下式最小的 k 值：

$$\min_k \quad J = \sum_i^N \left| \sum_{j=i}^{i+m} d_j(k) \right|^2 \tag{B.1}$$

C 自由变惯量系统辨识

用于表征变惯量系统的模态参数是其固有频率和阻尼系数，这两者也同样用于表征变刚度系统。因此，可以考虑使用 FORCEVIB 方法来表征变惯量系统。然而，描述受迫变惯量的方程右端包含项 $\frac{1}{k}$，而变刚度系统方程的右端包含项 $\frac{1}{m}$，参见方程 1.5 和 2.2。由于变刚度系统和变惯量系统所采用的常数参数估计方法略有不同，因此变惯量系统辨识需要使用 FORCEVIBmod方法。对于自由振动，方程右端为零，因此无需估计常数参数。Feldman 之前曾提出一种利用类似思想对自由振动系统进行辨识的方法——FREEVIB [23]。假设非线性项不为零，对于自由振动，在适当归一化后，变惯量系统和变刚度系统均可由下式描述：

$$\ddot{y}(t) + h(y,\dot{y})\dot{y}(t) + \omega_n^2(y,\dot{y}) = 0 \tag{C.1}$$

FREEVIB 方法能够辨识h， ω_n ，并可应用于变惯量系统和变刚度系统。FREEVIB 方法非常适用于阻尼较轻且可在较长时间内测量其自由响应的系统，但在许多情况下，无法测量自由振动。在这些情况下，需根据所研究系统的类型（变刚度或变惯量）采用 FORCEVIB 或 FORCEVIB-mod 方法。

D 惯量可变振子的渐近分析

考虑第 1.1 节中的系统，该系统由方程 3.1 描述。我们希望使用 Lindstedt-Poincaré 方法，将其固有频率近似表示为响应幅值的函数。首先，将自由系统归一化为以下形式：

$$\left(1+\varepsilon y^2\right)\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \tag{D.1}$$

令 $\varepsilon = \beta/m$ 和 $\omega_0^2 = k/m$。接下来，引入新的时间尺度 $\tau = \omega t$，其中 ω 是系统的固有频率， ω_0 是系统在 $\varepsilon \to 0$下固有频率的首阶近似。利用链式法则进行变量替换后，得到：

$$\omega^2\left(1+\varepsilon y^2\right)y'' + \omega_0^2 y = 0 \tag{D.2}$$

这里记作 $()' = \frac{d}{d\tau}()$。将响应和固有频率展开为关于 ε的幂级数:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ... \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + ... \end{aligned} \tag{D.3}$$

代入方程 D.2，并令 ε 的系数为零，可得以下方程组:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: &\quad y_0'' + y_0 = 0 \\ \varepsilon^1: &\quad y_1'' + y_1 = -2\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} + y_0^2\right) y_0'' \\ \varepsilon^2: &\quad y_2'' + y_2 = -2\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + \frac{2\omega_2}{\omega_0} + \frac{2\omega_1}{\omega_0} y_0^2 + 2y_0 y_1\right) y_0'' \\ &\qquad\qquad - \left(\frac{2\omega_1}{\omega_0} + y_0^2\right) y_1'' \\ &\quad \vdots \end{aligned} \tag{D.4}$$

0^{th}阶展开的解形式如下:

$$y_0 = A\cos(\tau_\phi) \tag{D.5}$$

代入 1st 阶展开式，可得:

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 = &\frac{1}{4}\left(3A^3\omega_0^2 + 8A\omega_1\omega_0\right)\cos\left(\tau + \phi\right) \\ &+ \frac{1}{4}A^3{\omega_0}^2\cos\left(3\tau + 3\phi\right) \end{aligned} \tag{D.6}$$

为消除世俗项 $\cos(\tau + \phi)$，要求其系数为零:

$$\left(3A^3\omega_0^2 + 8A\omega_1\omega_0\right) \tag{D.7}$$

并得到系统瞬时频率的 1^{st}阶近似:

$$\omega_1 = \frac{3}{8}A^2\omega_0 \tag{D.8}$$

现在可以求解 1^{st}阶展开的方程。按照相同的步骤，可得瞬时频率的 2^{nd}阶近似为:

$$\omega_2 = \frac{65}{256}^4\ \omega_0 \tag{D.9}$$

并且我们可以继续推导，直到达到所需的近似阶数。

E RLC电路实验的详细说明

FORCEVIBmod方法通过研究一个RLC电路进行了实验验证，如第 4.1.2 节所述。使用 Labworks PA-151 电流放大器，以频率逐渐升高的电压信号 V_{in} 激励该RLC电路。放大器的参考信号 V_{ref} 由 Agilent 33220A 任意波形发生器生成。电流 I_{out} 使用 Pintek PA-699 电流探头测量。电流放大器输出的电压和电流探头输出的电流信号经过 KEMO 模拟滤波器（型号 vbf10m）滤波，该滤波器设为截止频率为 7kHz 的低通滤波器。滤后的信号由连接至个人计算机的 data-translation DT9873C 数据采集模块测量。实验系统的示意图如图 E.1 所示。

F 黏滑系统的数值模拟

第 4.2 节所述并在图 5a 中展示的双质量系统的运动方程，采用带约束的拉格朗日方法进行推导。自由度向量:

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T \tag{F.1}$$

动能之和 T、势能之和 V 以及耗散函数 D 分别为:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ V &= \frac{1}{2}kx_1^2 \\ D &= \frac{1}{2}c\dot{x}_1^2 \end{aligned} \tag{F.2}$$

通过引入运动学约束来考虑摩擦力，该约束规定各质量块的速度相同，即:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \tag{F.3}$$

该约束可用完整约束矩阵 $W = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ 表示为:

$$W\dot{q} = 0 \tag{F.4}$$

将上述方程代入受约束的拉格朗日方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dD}{d\dot{q}_i} + \frac{dV}{dq_i} = \\ = Q_i + \sum_{j=1}^{n_{constraints}} w_{ij}\left(q\right)\lambda_j \end{aligned} \tag{F.5}$$

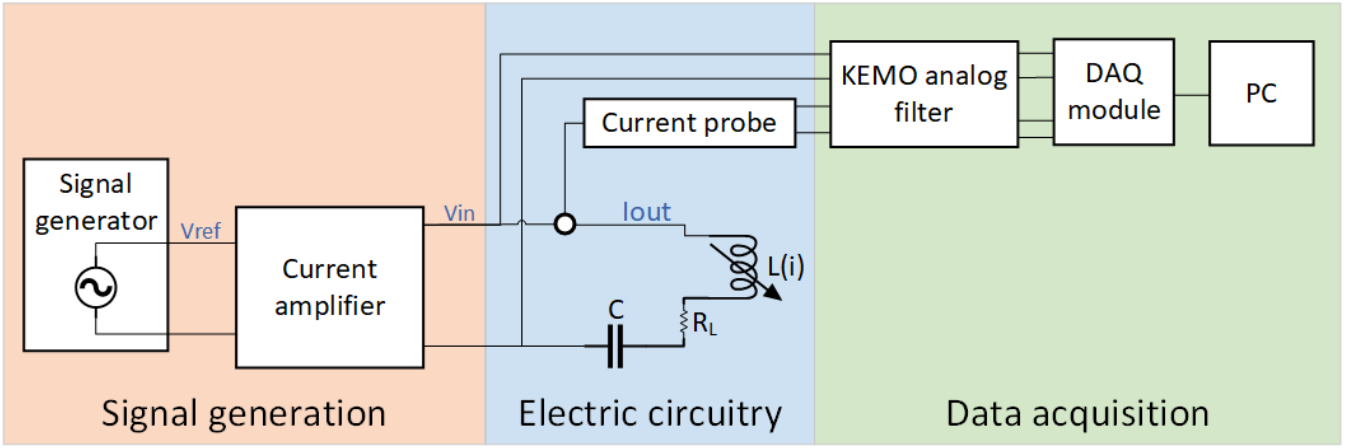


图 E.1. RLC 实验系统的详细示意图

得到系统的受约束运动方程：

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{M}\ddot{q}+\underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}\dot{q}+\underbrace{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{K}q=\underbrace{\begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{Q}+\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{W^T}\lambda \tag{F.6}$$

拉格朗日乘子 λ 表示约束两个质量块共同运动的摩擦力。由于约束方程 F.4 的时间导数为零，因此可用它根据系统状态计算摩擦力的值：

$$\frac{d}{dt}(W\dot{q})=0\rightarrow\dot{W}\dot{q}+W\ddot{q}=0 \tag{F.7}$$

代入方程 F.6 得：

$$WM^{-1}\left(W^T\lambda+Q-C\dot{q}-Kq\right)=0 \tag{F.8}$$

求解约束力 λ：

$$\lambda=\left(WM^{-1}W^T\right)^{-1}\left(WM^{-1}\left(C\dot{q}+Kq-Q\right)\right) \tag{F.9}$$

这是使质量块保持粘连在一起所需的摩擦力。模型假设摩擦为库仑摩擦，即摩擦力受限于 $|f|\leq\mu N$。这意味着，当计算得到的约束力超过摩擦力上限时，约束不再适用，系统应从粘着状态转变为滑动状态。当质量块的速度相等且约束力低于摩擦力上限时，系统则从滑动状态转变回粘着状态。为在数值积分方案中考虑这些状态转换，方程 F.6 中的约束力 λ 被摩擦力 f 取代。在粘着过程中，当约束力的大小低于 μN 时，摩擦力 f 等于约束力 λ。在滑动过程中，摩擦力 f 等于 μN，方向适当。经过这一修改，双质量系统通过对以下方程进行数值积分来模拟：

$$M\ddot{q}+C\dot{q}+Kq=Q+W^Tf \tag{F.10}$$

而摩擦力 f 则通过以下 IF 语句连续计算：

$$\begin{aligned} &if \quad |\lambda|>\mu N\vee|\dot{x}_2-\dot{x}_1|>tol && f=\mu N\,\mathrm{sgn}\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right) \\ &else && f=\lambda \end{aligned} \tag{F.11}$$

并且 λ 的值通过方程 F.9 连续计算。用于计算摩擦力 f 的 IF 语句规定：如果约束力 λ 的大小大于 μN，或者两个质量块的速度不相等，系统就应处于滑移模式。速度条件很重要，因为在滑移过程中，方程 F.9 不再适用，但仍会持续计算，且可能得出小于 μN 的 λ 值。为防止系统转回粘着状态，引入条件 $|\dot{x}_2-\dot{x}_1|>tol$，其中 tol 是某个数值容差。只有当两个质量块的速度相同且约束力的大小小于 μN 时，才允许系统从滑移状态转为粘着状态。

参考文献

[1] Hans Irschik 和 Alexander K. Belyaev，编者。 *Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass*，第 557 卷，收录于 *CISMInternational Centre for Mechanical Sciences*。Springer Vienna，维也纳，2014 年。[2] L. Cveticanin。《变质量机器动力学》。*Dynamics of Machines with Variable Mass*，2022 年 2 月。[3] Celso Pupo Pesce 和 Leonardo Casetta。质量显式依赖于位置的系统。 *CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures*，557：51–106，2014 年。[4] Ali Hasan Nayfeh 和 Dean T. Mook。《非线性振荡》。*Nonlinear Oscillations*，1995 年 5 月。

[5] Alberto Oliveri、Matteo Lodi 和 Marco Storace。功率电感器的非线性模型：综述。 *International Journal of Circuit Theory and Applications* 50 1 2 34, 1 2022 , （）：–。[6] Vasile Marinca 和 Nicolae Herişanu。采用最优同伦渐近法确定旋转抛物面上质点运动的周期解。 *Journal of Sound and Vibration* 329 9 1450 1459, , （）：–4 2010。[7] A. Venkatesan 和 M. Lakshmanan。阻尼和受迫速度相关系统的非线性动力学。 *Physical Review E* 55 5 5134, 5 1997 , （）：。

[8] W. T. van Horssen、A. K. Abramian 和 Hartono。关于质量随时间周期性变化的振子自由振动。*Journal of Sound and Vibration*, 298(4- 5)：1166–1172，2006 年 12 月。[9] W. T. van Horssen、O. V. Pischanskyy 和 J. L.A. Dubbeldam。关于质量随时间周期性变化的振子的受迫振动。 *Journal of Sound and Vibration* 329 6 721 732, 3 2010 , （）：–。[10] Ga¨etan Kerschen 、 Keith Worden 、 Alexander F. Vakakis 和 Jean Claude Golinval。结构动力学中非线性系统辨识的过去、现在与未来。 *Mechanical Systems and Signal Processing* 20 3 505 592, 4 2006 , （）：–。[11] Steven L. Brunton 、 Joshua L. Proctor 、 J. Nathan Kutz 和 William Bialek。通过非线性动力系统的稀疏辨识：从数据中发现控制方程。*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 113 15 3932 3937, 4 2016 , （）：–。[12] Richard G Lyons. *Understanding digital signal processing / Richard G. Lyons.*

Prentice Hall，新泽西州上萨德尔河，第 3 版，2011 年。[13] Michael Feldman。使用希尔伯特变换进行非线性系统振动分析——II：受迫振动分析方法“Forcevib”。
Mechanical Systems and Signal Processing，8 3 309( )：–318，1994 年 5 月。[14] E. Bedrosian。希尔伯特变换的乘积定理。
Proceedings of the IEEE，51(5)：868–869，1963 年。[15]Michael Feldman。 *Hilbert Transform Applications in Mechanical Vibration* 2011 。

Wiley，。[16] Michael Feldman。基于希尔伯特变换的时变振动分解与分析。*Journal of Sound and Vibration* 295 3 5 518 , （-）：–530，2006 年 8 月。[17]Yingzhi Xia、Hui Li、Zhezhe Fan 和 Jiyong Xiao。基于希尔伯特振动分解的桥梁结构振动稳定性模态参数辨识。*Advances in Civil Engineering*，2021，2021。[18] Craig M Shakarji。NIST 算法测试系统的最小二乘拟合算法。 *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology* 103 6 633 , （）：–641，1998 年。[19]Peter J. Torvik。根据频率响应带宽估算系统阻尼。 *Journal of Sound and Vibration* 330 25 6088 6097, 12 2011 , （）：–。[20]Claire Bourquard 和 Nicolas Noiray。关于“缓慢通过共振”的评论。*Physical Review E*，100 4( )：047001，2019 年 10 月。[21] Giulia Di Capua 和 Nicola Femia。一种预测开关电源应用中适度饱和铁氧体电感器实际工作状态的新方法。 *IEEE Transactions on Power Electronics* 31 3 2456 2464, 3 2016 , （）：–。[22]G. Di Capua 、 N. Femia 、 K. Stoyka 、 M. Lodi 、 A. Oliveri 和 M. Storace。开关模式的铁氧体电感器模型电源分析与设计。 *SMACD 2017 - 14th International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design*，2017 年第 7 期。[23]Michael Feldman。使用希尔伯特变换进行非线性系统振动分析——I。自由振动分析方法“FREEVIB”。
Mechanical Systems and Signal Processing，第 8 卷第 2 期：119–127，1994 年 3 月。