arXiv:2305.02136v1 [cs.LO] 3 May 2023

存量与流量模型的层级式及上游—下游组合

Nicholas Meadows、Xiaoyan Li、Nathaniel D Osgood

公共卫生和医疗保健领域的决策日益复杂，推动了数学建模的日益广泛应用。健康建模的一个重要方向以存量与流量图为基础。这类建模提高了跨学科团队的透明度，而这些团队负责构建大多数影响深远的模型；但现有工具在大规模应用时存在诸多不足。近期研究试图通过为存量与流量建模建立范畴论基础来解决这些局限，其中包括通过识别共同存量和求和变量来组合一对模型的能力。本研究为此类工作增添了两种存量与流量图的新组合形式。首先，我们介绍一种图的层级组合方法：用一个具有兼容的流结构的图替换一个现有的单一存量。我们的组合方法更加灵活，允许被替换存量中的单流拆分为多个流，同时使其总流率保持不变。其次，为满足将存量与流量图与另一个描绘前置因素的“上游”图对接这一常见需求，我们提出一种组合方法，使一个图中上游存量流出的流能够连接到另一个图中的下游存量。上述两种方法均通过将存量与流量图进行余极限分解，拆分为单存量花冠和单位流来实现。

1 引言

数学建模正日益被用于为公共卫生决策提供依据。区室模型是此类建模中一种重要、成熟且得到广泛应用的形式。自 Ross [14, 15] 和 McKermack [11] 一个世纪前开创性的传染病研究以来，这类模型一直为包括大量传染病在内的广泛健康问题的预防、控制和根除提供了重要洞见 [3]。在过去四十年中，系统动力学建模中的存量与流量模型已成为这一地区模型传统中一个重要且日益突出的组成部分 [16, 9]。

然而，长期使用此类模型——尤其是在持续时间较长的公共卫生紧急事件中部署此类模型，例如 COVID-19 大流行期间所采用的模型——凸显了支持模型通过广泛的跨学科团队共同贡献而不断演进的重要性。正如我们在其他地方所详述的那样 [13], , 传统的分室建模方法在支持此类团队时会遇到诸多问题，其中包括它们缺乏对建模模块化的支持。缺乏模块化使大型建模团队难以确保分工，通过削弱复用他人开发的模型子组件的能力来阻碍模型演进，并且由于难以持续地共享、复用和演进稳健的模型子组件而降低效率。

作者及其合作者过去的研究，近期推动了一种以图为核心、以范畴论为基础的隔室建模方法 [1, 13]。这项工作为基于无向连线图、结构化余跨和预层的存量与流量（以下简称存量与流量）图的范畴论处理提供了基础理论；其中，预层采用模式范畴来表示

即将在 EPTCS 上发表。

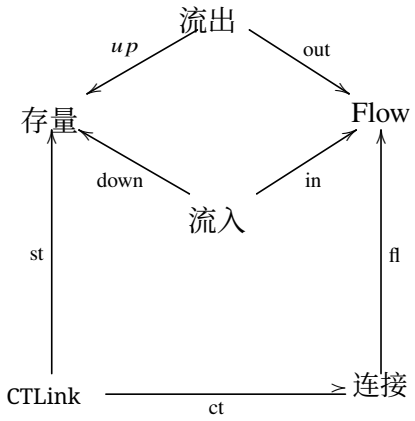
存量与流量图的语法 [7, 13], ，并大量借鉴了 Baez 及其学生 Pollard [6], 、Courser [4], 、Vasilakopoulou 与 Courser [5]的开创性工作。此外，这项工作还将理论付诸实现，开发了 AlgebraicJulia [2], 中的 StockFlow [1] 组件，以及用于组装和组合此类模型的实时协作图形编辑器 ModelCollab[13]。这种针对存量与流量图的范畴论方法展现了诸多优势，包括通过识别存量来组合模型，并（分别）对辅助变量求和的能力 [1, 13], ；将用于描述图的语法与用于解释图的语义分离的能力 [13],；以及对此类图进行模块化分层 [13]。

然而，正如作者在该研究中所指出的，亟需扩展这项工作的范畴基础，包括支持存量与流量图 [13] 的其他组合类型。本报告响应这一呼吁，为使用存量与流量模型时的两项常见需求提供解决方案。首先，我们致力于满足扩展图范围的需求：更详尽地展开模型的某个区域——也就是“放大”该区域，从而更具体地说明此前以聚合方式处理的模型区域的动态。其次，我们正式刻画一种组合方式：让上游存量与流量图流入下游存量与流量图，从而将二者组合起来。我们此前的工作 [1, 13] 中所刻画并实现的模型组合策略，解决了横向扩展图的需求（将一个存量与流量图粘合到另一个图的存量和求和辅助变量上）；而本文提出的方法，则通过让一个存量与流量图经由现有流量流入下游图来扩展该图；此外，还可分层地将嵌入周围模型中的给定存量替换为一个完整的、与之“兼容”的存量与流量图。这些贡献借鉴了 Kock 的全粒度佩特里网方法 [12] ，并实现了将存量与流量图余极限分解为花冠和单位流。

本文结构如下：下一节将介绍本文采用的符号表示和术语。第2节介绍本文所讨论的简化形式的存量与流量图、这类图的推出，以及花冠和单位流这两个关键概念。第3节将对层次化存量与流量图的概念作形式化定义，同时引入半流等其他关键辅助概念，并提供一些受实际应用启发的存量与流量图示例。第4节将进一步探讨这一方法在实际应用中的一个微妙问题——在进行层次化替换时，需要将被替换的聚合存量原有的单流细分为更详细的图中的多个流。第5节继续运用前文介绍的构造——尤其是花冠和单位流——来描述一种以上游-下游方式组合一对存量与流量图的技术。在这种组合中，上游图的流出流入下游图的流入。第6节将本文置于相关背景中，并作总结性备注。

2 基础存量与流量图

定义 2.1. 我们将由以下图自由生成的范畴记为**Fl**:



(1)

一个 原始存量与流量图是一个预层 X： **Fl** $\to$ *FinSet* 使得

$$X(\text{in}), X(\text{out}), X(\text{ct})$$

是单态射。这只是说明，作为流入流量或流出流量出现的流，是所有流的集合的子集；而与某个存量连接的连接，是所有连接的子集。

一个存量与流量图 是一个原始存量与流量图 X，以及一个连续的流量函数 ϕ_f： $\mathbb{R}^{X(\text{fl})^{-1}(f)} \to \mathbb{R}$ 对每个 $f \in X(\text{Flow})$ 都成立。

我们将 $(X, \phi_\bullet)$ 记作具有流量函数 ϕ_f： $f \in X(\text{Flow})$ 的存量与流量图。下面介绍必要的术语。

设 $(X, \phi_\bullet)$、$(Y, \psi_\bullet)$ 是存量与流量图，且 F： $X \to Y$ 是一个预层态射。进一步设 $F(\text{Flow})(f) = g$（其中 $f \in X(\text{Flow})$，且 $g \in Y(\text{Flow})$）；于是我们得到一个诱导映射:

$$F(\text{Link}) : X(\text{fl})^{-1}(f) \to Y(\text{fl})^{-1}(g)$$

因此是一个线性映射

$$F(\text{Link})^* : \mathbb{R}^{Y(\text{fl})^{-1}(g)} \to \mathbb{R}^{X(\text{fl})^{-1}(f)}$$

由前复合给出:

$$F(\text{Link})^*(x) = x \circ F(\text{Link})$$

我们称预层态射 $F: X \to Y$ 是一个 存量与流量图的态射（X， $\phi_\bullet$） $\to$（Y， $\psi_\bullet$），如果对于每个非空的 F（流量）$^{-1}$（g）

$$\psi_g = \sum_{f \in F(\text{Flow})^{-1}(g)} \phi_f \circ F(\text{Link})^* \tag{2}$$

存量与流量图的态射的复合，就是其底层自然变换的复合。可以证明，复合两个满足方程 2 的自然变换，会得到一个满足方程 2 的新自然变换。因此，我们得到一个称为 StockFlow 的范畴。

备注 2.2。 上述对原始存量与流量图的定义不同于 [10] 的定义。具体而言，我们修改了图式，使其允许存在单位流——悬空流——以及缺少源存量的连接。这些对于余极限分解至关重要，而余极限分解在定义层次化存量与流量图时发挥着核心作用。

[10] 中存量与流量图的态射定义也有所不同。[10] 的作者规定，方程 2 对每个 $g \in Y$（流量）都成立，这意味着存量与流量图的每个映射在存量上都必须是满射。我们对存量与流量图的态射所采用的更大灵活性，使得本文核心的存量与流量图余极限分解成为可能。

例 2.3. 我们绘制存量与流量图的标准方式如下。

1. 我们用方框 *Stock* 表示存量。2. 我们用普通箭头 $\longrightarrow$表示连接，箭头从存量指向流量。3. 我们用箭头 $\Longrightarrow$ 表示流量，并指示流动的方向。4. 我们用云形表示源和汇。

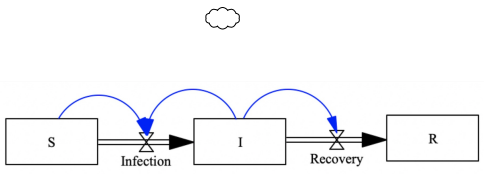


图 1：一个简单的存量与流量图

图 1 描绘了一个简单的存量与流量图，其中包含三个存量、两个非半流（连接上游存量和下游存量）以及三个连接。

定理 2.4。 假设我们有一个存量与流量图的图。

$$\begin{array}{ccc} (X,\phi_\bullet) & \xrightarrow[s_1]{} & (Z,\kappa_\bullet) \\ {\scriptstyle s_2}\downarrow & & \\ (Y,\psi_\bullet) & & \end{array} \tag{3}$$

其中 s_1(流量) X(流量) $\to Z$(流量), s_2(流量): X(流量) $\to Y$(流量)是满射。考虑预层推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[s_1]{} & Z \\ {\scriptstyle s_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ Y & \xrightarrow[p_2]{} & Z \coprod_X Y \end{array}$$

并且对于每个 $f \in (Z \coprod_X Y)$(流量)，令

$$\gamma_f = \sum_{x \in (p_2 \circ s_2)(Flow)^{-1}(f)} \phi_x = \sum_{x \in (p_1 \circ s_1)(Flow)^{-1}(f)} \phi_x$$

那么，图表 *3* 的推出由 $(Z \coprod_X Y, \gamma_\bullet)$ 给出。

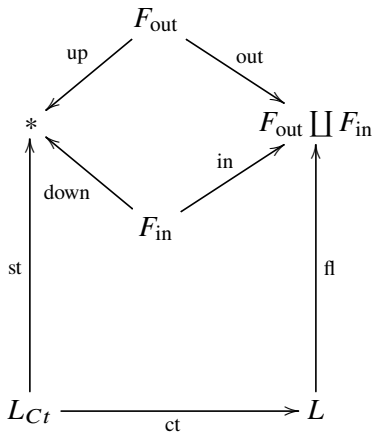
定义 2.5. 存量与流量图中的半流是指在图中作为流入或流出出现，但不会同时作为两者出现的流。封闭的存量与流量图是指其中不存在半流的图。

定义 n 2.6. 单位流是一个存量与流量图 $(X, \phi_\bullet)$，它在对象上的行为如下：：

$$X(p) = \begin{cases} * & \text{if } p = \text{Flow} \\ L & \text{if } p = \text{Link} \\ \emptyset & \text{if } p \neq \text{Flow}, \text{Link} \end{cases} \tag{4}$$

其中，$*$ 是单点集。本质上，它是一个自由悬挂的流量，并有若干指向它的自由悬挂半链接。

一个花冠 仅仅是一个存量与流量图（X，$\phi_\bullet$），其中包含 X（存量）$= *$，即单点集。 X可以表示为



在这种情况下，连接是不相交的并集，由（流入的）悬空链接和连接到存量（即来自存量）的连接组成，而流则是不相交的并集，由来自存量的流入量和流出量各一半组成。

定义 2.7。 设 S 为一个集合。我们用 $\text{Disc}_S = (\text{Disc}_S, \emptyset)$ 表示具有以下特征的存量与流量图。

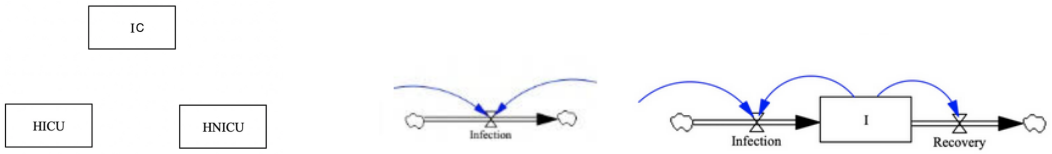
$$\text{Disc}_S(p) = \begin{cases} S & \text{if } p = \text{Stock} \\ \emptyset & \text{if otherwise} \end{cases}$$

由于不存在流量，因此不存在流量函数

这种离散图的一个例子如图 2a 所示。

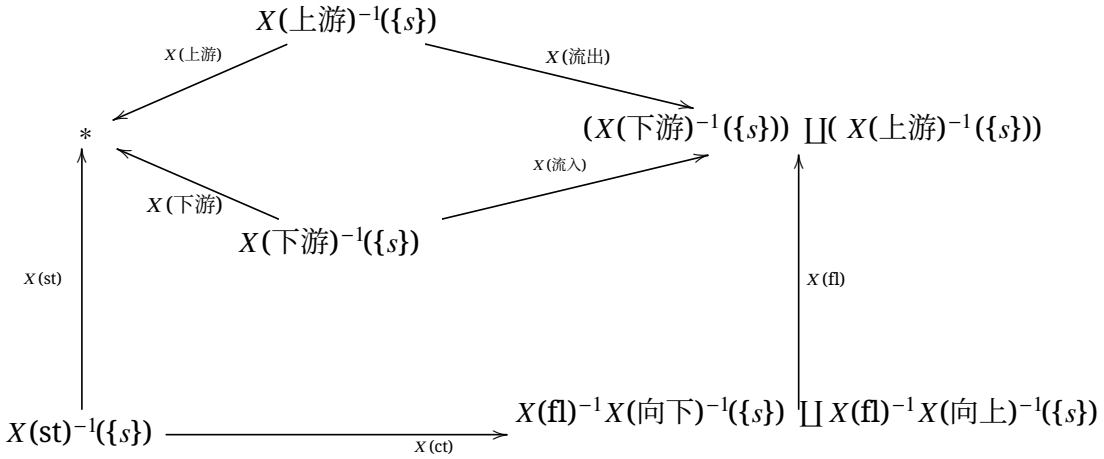
给定一个存量与流量图（X，$\phi_\bullet$），存在唯一的映射 $\text{Disc}_{X(\text{存量})} \to (X, \phi_\bullet)$，它在存量上是恒等映射。这确实是一个态射，因为根据定义，方程 2 只需对满足 $F(\text{流量})^{-1}(f)$ 非空的流f成立。

定义 2.8. 设 $(X, \phi_\bullet)$ 是一个存量与流量图。给定 $s \in X(\text{存量})$，与 s 关联的花冠 C_s 是存量与流量图 $(C_s, \psi_\bullet)$，其中 C_s 如下所示：



(a) 离散图 Disc{IC,HICU,HNICU} (b) 单位流 (c) 花冠

图 2：离散图、单位流和花冠的示例



并且 $\psi_f = \phi_f$对于 $f \in X(\text{下})^{-1}(\{s\}) \coprod X(\text{上})^{-1}(\{s\})$，每个态射 $m \in \text{Mor}(\textbf{流量})$ $C_s(m)$ 都是 $X(m)$ 的限制。

与给定流量相关的单位流$(U_f, \psi_\bullet)$，其形式与方程 2 完全相同，只需将 L替换为 $X(\text{fl})^{-1}(f)$。唯一的流函数 ψ_f就是 ϕ_f。

本质上，与存量 s 相关联的花冠由该存量的所有流入和流出（以半流或自流的形式表示）以及所有指向这些流入和流出的连接构成。需要注意的是，那些源自不同于 s 的存量的连接会以“半链接”的形式出现，即没有源存量的连接。

例 2.9. 单位流由指向单流的悬空连接组成，如图 2b 所示。
另一方面，与例2.3中图示的存量“I”相关的花冠如图2c所示。

构造 2.10. 假设 (X, ϕ_f) 是一个存量与流量图。令 $\mathrm{U}_f = (U_f, \psi_\bullet)$ 为与 f 关联的 StockFlow 中的单位流。存在一个显然的包含态射，我们记作 $\mathfrak{F}_f^X \colon \mathrm{U}_f \to X$。

我们将如下定义 StockFlow 的子范畴 $\mathrm{El}_{/X}$。我们有

$$\mathrm{Mor}(\mathrm{El}_{/X}) = \{\mathfrak{F}_f^{C_s} : \mathcal{U}_f \to C_s : s \in X(\mathrm{Stock}), f \in C_s(\mathrm{Flow})\}$$
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{El}_{/X}) = \{C_s : s \in X(\mathrm{Stock})\} \cup \{\mathcal{U}_f : f \in X(\mathrm{Flow})\}$$

定理 2.11。 X 是包含函子 $\mathrm{El}_{/X} \to$StockFlow 的余极限。

示例 **例 2.12.** 例 2.3 中存量与流量图的余极限分解为：

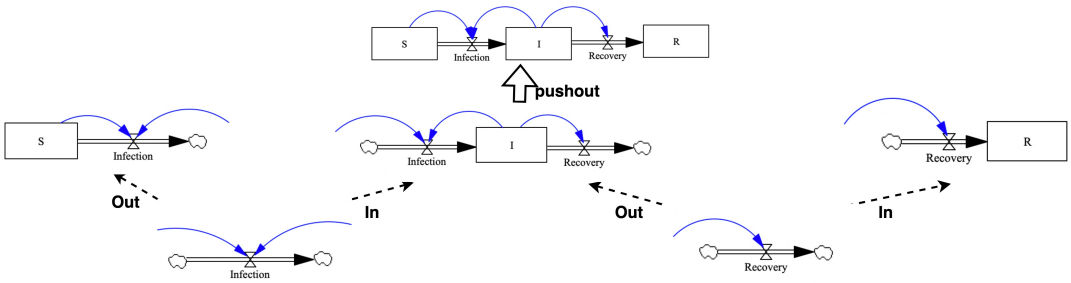


图 3：分解为花冠的余极限示例

中间一行展示了与各个存量相关联的花冠。

3 层级化存量与流量

在本节中，我们想要将层次化存量与流量图这一概念形式化。粗略地说，这意味着将给定存量与流量图中的每个存量替换为一个完整的存量与流量图，同时保留与该存量相关的流出/流入和连接结构。更准确地说，我们想要将每个花冠替换为一个完整的存量与流量图，同时保留半流及其相关的连接结构。通过计算一个由特定形状的图（以 El/x 为索引）的余极限即可实现这一点。

例 3.1. 假设我们要用一个更复杂的存量与流量图替换存量与流量图 $(X, \phi_\bullet)$ 中的花冠 $\mathrm{C}_s = (C_s, \psi_\bullet)$，同时保留流入和流出花冠的流。非正式地说，这个操作包括选择一个闭合存量与流量图 $(Y\gamma_\bullet)$，用它替换 C_s 的存量，然后将流入和流出 C_s 的半流改为连接到 $(Y\gamma_\bullet)$ 的存量上。

作为考试锻炼 例如，我们可能想要用图来替换图 1 中 I 的花冠的图

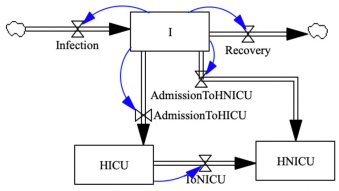
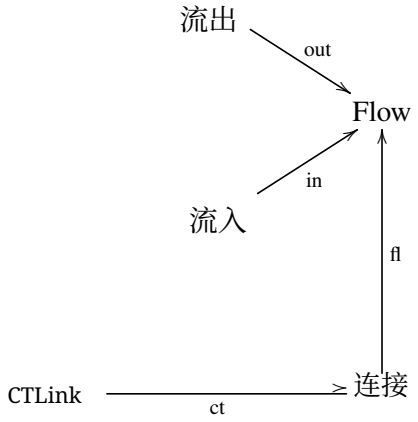


图 4：一个闭合存量与流量图

构造 3.2. 我们想用数学术语解释例 3.1 的构造。固定一个花冠 C_s，以及一个闭合存量与流量图 $(Y \quad \gamma_\bullet)$，我们希望用它替换 C_s 的存量 s。

我们将用**Fl′** 表示由以下内容生成的**Fl** 子范畴：



我们用 $C_s|_{\mathbf{Fl}'}$ 表示 C_s 的底层预层在 $\mathbf{Fl}'$ 上的限制，用 $[0]$ 表示只有一个对象的平凡范畴。让我们来解决扩展问题：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fl}' \coprod [0] & \xrightarrow{(C_s|_{\mathbf{Fl}'},\, Y(\mathrm{Stock}))} & \mathrm{FinSet} \\ {\scriptstyle (\mathrm{inc},\mathrm{Stock})}\downarrow & \nearrow_{D} & \\ \mathbf{Fl} & & \end{array} \tag{5}$$

其中 inc 是包含函子。

结合来自 C_s 的流函数，我们得到一个新的存量与流量图（D，$\psi_\bullet$）。粗略地说，这个扩展问题的解就是选择一种方式，将花冠的半流连接到（Y $\gamma_\bullet$）的存量上。

替换花冠的图可以通过推出计算得出：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Disc}_{Y(\mathrm{Stock})} & \longrightarrow & (D,\psi_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ (Y,\gamma_\bullet) & \longrightarrow & (E,\omega_i) \end{array} \tag{6}$$

注意，由于 $D(\mathsf{Flow}) = \mathsf{C}_s(\mathsf{Flow})$，我们有一个映射 $\mathsf{U}_f \to (D,\ \psi_*)$，它将 $\mathsf{U}f$ 的唯一点映射到 f。与 p 复合后，我们得到一个映射

$$\mathfrak{G}_f^{C_s} : \mathcal{U}_f \to (E,\omega_\bullet) \tag{7}$$

Exa例 3.3. 在例 3.1 的情况下，构造 3.2 可以表示为该推出。 :

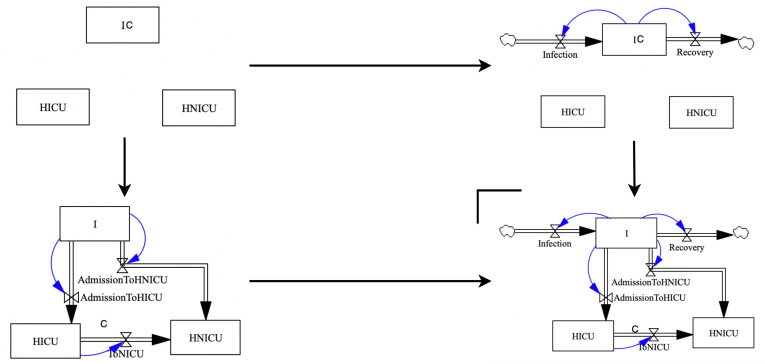


图 5：构造 3.2 的一个例子

定义 3.4。 一个 层次化存量与流量图 F： $\mathrm{El}_{/X} \to$ StockFlow 是一种满足以下条件的图

1. 将花冠映射到图的推出，图形如图 6 2. $\mathrm{U}_f \mapsto \mathrm{U}\ f$3.
$\mathfrak{F}_f^{C_s} \mapsto \mathfrak{G}_f^{C_s}$（来自映射 7）

例 3.5. 我们可以通过计算 F 的余极限，将层次化存量与流量图 F： $El_{/X} \to$StockFlow 替换为更复杂的存量与流量图。例如，将流「Recovery」细分为两个不同的流 $Recovery'$, $RecoveryFromHNICU$（我们会在下一节更正式地描述这一过程）之后，我们可以通过计算余极限，将例 3.1 中图里的花冠 I 替换为：

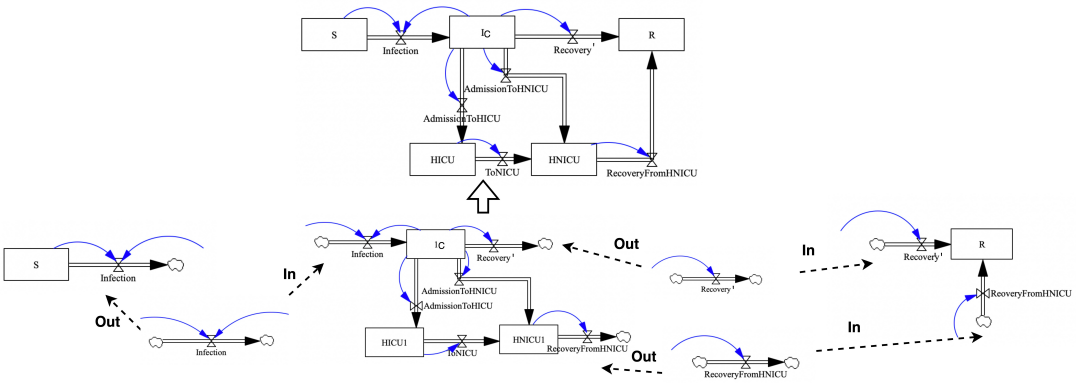


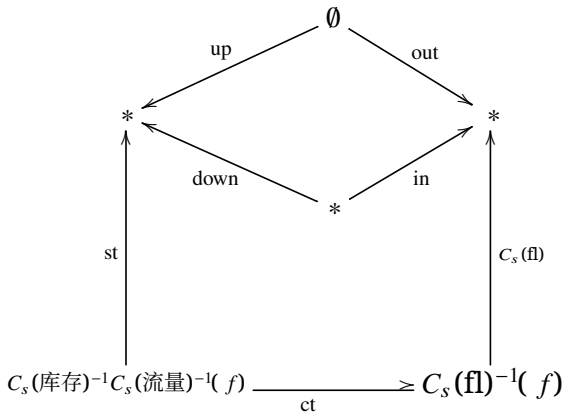
图6：层次化存量与流量图

4 细分流

在本节中，我们将说明如何细分花冠的流入或流出。直观地说，这是构建层级存量与流量图的重要组成部分；存量的流入（流出）将被划分为来自（流向）多个存量的不同流。

例 4.1. 在本例中，我们将展示如何将花冠进一步分解为单流存量与流量图。令 $(C_s, \psi_\bullet)$ 为花冠。不失一般性，我们假设 that

我们选择了一个流入量 $f$of C_s（流量）。考虑原始的存量与流量图 C_s^f，根据定义 2.1 的模式，其表示如下:



(8)

令 [1] 为箭头范畴。每个花冠都可以表示为该图的余极限

$$\Phi : [1] \coprod_{[0]} [1] \cdots \coprod_{[0]} [1] \to \text{StockFlow}, \tag{9}$$

其中，定义域表示一个范畴，该范畴是一个迭代推出，每个元素C_s(流量)对应一个加项。 Φ将与流量 $f \in C_s$(流量)对应的加项映射到唯一的态射 $\text{Disc}_{\{*\}} \to \mathsf{C}_s^f$ 。

掌握上述关于原始存量与流量图的结果后，我们现在来讨论额外配备流量函数的存量与流量图。

构造 4.2. 令 n 为一个固定的正整数。我们将说明如何在存量与流量图中，将选定的流量 f拆分为 n 个不同的流量。考虑由 n 个 C_s^f的迭代推出所诱导的原始存量与流量图函子，该推出在每个直和项上均由恒等映射诱导:

$$(\coprod_{i=1}^{n} C_s^f) \to C_s^f \tag{10}$$

我们希望将这个原始存量与流量图的映射 10 扩展为存量与流量图的映射 $\mathsf{C}'^f_s := (\coprod_{i=1}^n C_s^f, \gamma_\bullet) \to (C_s^f, \psi_\bullet)$。考虑由图 10 诱导的线性映射:

$$\Phi(\text{Link})^* : (\mathbb{R}^{C_s(\text{fl})^{-1}(f)}) \to (\mathbb{R}^{C_s(\text{fl})^{-1}(f)})^n$$

回顾方程 2 为原始存量与流量图（预层态射）的态射能够表示存量与流量图的态射所确立的判定标准。由于 Φ(连接)* 表示一个对角映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，方程 2 所规定的、成为存量与流量图态射的要求意味着，我们必须选择流量函数γ_{fi}， $i = 1, \cdots n$，使得 $\sum_{i=1}^n \gamma_{fi} = \psi_f$

也就是说，分流后每个“分支”对应的流量函数 γ_{fi} 之和需要达到一个与原始完整流量 ψ_f一致的值，从而提供 $n-1$ 个自由度。

为了将一个流量拆分成花冠，我们将把 9 中的 $\Phi(f)$ 替换为 $\text{Disc}_{\{*\}} \to (\coprod_{i=1}^n C_s^f, \gamma_\bullet)$，并计算余极限。

构造 4.3。 假设我们想要像 4.2 中那样细分存量与流量图 $(X,\ \phi_*)$ 中的某个流量 f。下面将说明当该流量连接两个存量时如何进行细分；半流的情况类似，但更简单。

假设流量出现在两个花冠 $\mathsf{C}_s=(C_s,\ \gamma_\bullet)$、$\mathsf{C}_t=(C_t,\ \psi_\bullet)$ 中。根据构造，我们有$\psi_f=\gamma_f$。选择流量函数 $\psi_{f_1}=\gamma_{f_1},\ \cdots,\ \psi_{f_n}=\gamma_{f_n}$，使得

$$\psi_f=\sum\psi_{f_i}=\sum\gamma_{f_i}=\gamma_f$$

我们可以将花冠中的流量 f 替换为 n 个流量，并采用构造 4.2 的过程得到两个新的花冠 D_s、D_t。

我们将用范畴 El′ 替换 El/X，其定义如下:

$$\begin{aligned}Mor(\mathrm{El}')=\{\mathfrak{F}_g^{C_r}:\mathcal{U}_g\to C_r:r\neq s\in X(\mathrm{Stock}),g\in X(\mathrm{Flow}),g\neq f\}\\ \cup\{\mathfrak{F}_g^{\mathcal{D}_s}:\mathcal{U}_g\to\mathcal{D}_x:g\in D_x(\mathrm{Flow}),x=s,t\}\\ \mathrm{Ob}(\mathrm{El}')=\{C_s,y\in(X(\mathrm{Stock})-\{s,t\})\}\cup\{\mathcal{U}_g:g\in X(\mathrm{Flow})-\{f\}\}\\ \cup\{\mathcal{D}_s,\mathcal{D}_t\}\cup\{\mathcal{U}_f:f\in D_s(\mathrm{Flow})\cup D_t(\mathrm{Flow})\}\end{aligned}$$

并计算余极限以拆分流量。

构造 4.4。 最后，我们想说明构造层次化存量与流量图的完整过程，首先从一个存量与流量图 $(X,\ \phi_*)$ 开始

1. 首先，我们构造范畴 $El_{/X}$，其由构造 2.10 给出 2. 我们通过应用构造 4.3 在花冠中拆分流，可能多次修改范畴 $El_{/X}$，从而获得一个新的范畴 El'3. 我们将构造 3.2 和定义 3.4 的过程应用于 El′，以构造一个层次化存量与流量图 El′ →StockFlow 4. 我们计算上述图的余极限

例如，对于例 3.5，其中我们要替换例 3.1 的图中的花冠 I，我们首先将流 $Recovery$拆分为两个流 $Recovery',\ RecoveryFromHNICU$，然后使用构造 3.2，将存量 I 的花冠替换为图中的中间图。最后，我们计算例 3.5 中图的余极限。

5 U上下游存量与流量图的层级构成 s

在本节中，我们将考虑如何定义上述两个存量与流量图的“上游—下游组合”这一问题。为此，我们将利用存量与流量图基于花冠和单位流的余极限分解。

5.1 更新流量和连接

本小节简要说明如何使用范畴构造来更新存量与流量图中的流和连接。我们将首先说明如何对花冠实现这一点，然后说明一般情况。

构造 5.1。 假设存量与流量图 $(X,\gamma) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{StockFlow})$ 中有花冠 $\mathsf{C}_s = (C_s, \phi_\bullet)$。令 $L = \mathsf{C}\,\overset{f}{s}$(连接) 为附属于流量 $f$in C_s 的（输入）连接集合。假设我们选择三元组 $(f, \psi\colon \mathbb{R}^{L'} \to \mathbb{R}, L' \subseteq L)$，其中 f是 C_s 的一个流量。我们希望以这样的方式更新连接结构：使 L' 成为 f 的（输入）连接集合，且流函数由 ψ 给出。

为此，令 $\mathsf{D}\,\overset{f}{s} = (D_s^f, \{\psi\})$ 为方程 2 中所示的图，其中 $D_s^f(\mathrm{ct}) = L' \subseteq L$。接着，我们将 9 中对应于 $\mathsf{C}\,\overset{f}{s}$ 的加项替换为存量与流量图 $(\mathsf{D}\,\overset{f}{s})$，并计算余极限。

备注 5.2。 为了向花冠“添加”流量，我们只需在 9 的图中添加与想要添加的流相对应的加项。最后，我们还可以按照第4节所述的技术细分流量。

5.2 上游—下游组合

假设我们有存量与流量图 $(X,\ \phi_\bullet)$，$(Y,\ \psi_\bullet)$。再假设我们还选择了一个三元组

$$\mathcal{T} = (a, b, f) \in X(\mathrm{Stock}) \times Y(\mathrm{Stock}) \times X(\mathrm{Flow})$$

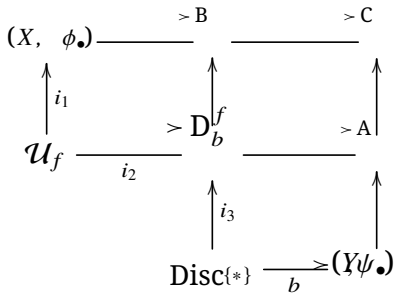
其中 f 是一个从 a 流出的半流，定义见定义 2.5。本节将介绍一个存量与流量图 $X \Rrightarrow_{\mathcal{T}} Y$，它是通过流量 f 将 $a,\ b$“连接”起来，然后添加指向流量 f 的连接结构而得到的。我们可以将其视为一种上游—下游组合。

构造 5.3. 在本构造中，我们将介绍构造“上游-下游组合”$(X,\phi_\bullet) \Rrightarrow_{\mathcal{T}} (Y,\psi_\bullet)$所涉及的步骤。

令 $\mathsf{U}f = (U_f, u_\bullet)$ 为与 $f$in $(X,\phi_\bullet)$相关联的单位流。存在唯一的存量与流量图 $\mathsf{D}\,\overset{f}{b} = (D_b^f, u_\bullet)$，满足

$$D_b^f(p) = \begin{cases} * & \text{if } p = \mathrm{Stock}, \mathrm{Inflow} \\ U_f(p) & \text{if otherwise} \end{cases}$$

考虑唯一的图



其中，i_1, i_2, i_3是显然的包含映射，而 b 将 $\mathrm{Disc}_{\{*\}}$ 的唯一存量映射到 b，并且所有方块都是推出。随后我们将定义：$(X,\phi_\bullet) \Rrightarrow_{\mathcal{T}} (Y,\psi_\bullet) := \mathsf{C}$

6 结论

本文介绍了一种新颖的模型组合方法，旨在解决两个常见问题：首先，我们针对这样一种需求提出了解决方案：需要将存量与流量图中某个特定部分（迄今为止以单个存量表示）所描述的动态扩展为更详细的形式，

即扩展为一张完整的图。鉴于这种情况十分常见，这种层级式组合为此前提出的存量与流量模型横向组合方法提供了亟需的补充 [1, 13]。其次，我们针对一种常见的建模情形提出了解决方案：一个模型描述的情况先于另一个模型所描述的情况，且物质流从前序（或上游）模型流入下游模型。随着建模工具不断拓展，以利用范畴论方法为存量与流量图带来的模块化优势 [7, 13], ，并且越来越多面向终端用户建模者的工具为其提供支持 [13], ，我们预计，使用模型进行这两类组合的机会和需求将迅速增长。

当前研究通过将存量与流量图进行余极限分解，分解为花冠（单个存量）和单位流，从而为这两种建模需求提供了解决方案。这种分解使替换后的图能够与连接到所扩展存量的兼容流量粘合起来。在推进这一过程的同时，本研究也贡献了一些见解，这些见解可能对于实现其他形式的组合具有重要意义。

作者与团队其他成员合作，预计将在 AlgebraicStockFlow 框架中加入此处所述的层级式分解 [1] ，并在 AlgebraicJulia [2]中实现。我们还计划在基于 AlgebraicStockFlow 的 Model-Collab 实时协作存量与流量建模工具中，加入对这种层级式组合的可视化用户界面支持，从而使广大建模者无需理解底层范畴论即可使用该功能。

致谢

我们衷心感谢 Topos Institute 的 Evan Patterson 和 UC Riverside 的 John Baez 所提供的见解与反馈。合著者 Osgood 谨此感谢通过 NSERC Discovery Grants 项目（RGPIN 2017-04647）以及 XZO & SYK 获得的支持。

参考文献

[1] *Stockflow*，可访问 https://github.com/AlgebraicJulia/StockFlow.jl。[2]AlgebraicJulia 团队，*AlgebraicJulia*：为技术计算引入组合性，可访问 https://www.algebraicjulia.org。[3] R. M. Anderson 和 R. M. May，人类传染病：动力学与控制，牛津大学出版社，1992 年。[4] J. C. Baez 和 K. Courser，结构化余跨，《理论与应用范畴》**35** （2020），1771–1822，可访问 arXiv:1911.04630。[5] J. C. Baez、K. Courser 和 C. Vasilakopoulou，结构化余跨与装饰余跨，《组合性》**4**（2022），第 3 期，可访问 arXiv:2101.09363。[6] J. C. Baez 和 B. S. Pollard，反应网络的组合框架，《数学物理评论》**29** （2017），第 09 期，1750028，可访问 arXiv:1704.02051。[7] John Baez、Xiaoyan Li、Sophie Libkind、Nathaniel Osgood 和 Evan Patterson，基于存量与流量图的组合建模，arXiv 预印本 arXiv:2205.08373（2022）。[8] M. Barr 和 C. Wells，拓扑斯、三元组与理论，《范畴理论与应用》**范畴理论与应用重印集**（2005），第 12 期，1–287。[9] J

. W. Forrester，产业动态 ，Pegasus Communications ，1961.

[10] Baez J.、Li X.、Libkind S.、Osgood N 和 Patterson E，《存量与流量的组合建模》，预印本 https://arxiv.org/abs/2205.08373（2022年）。[11] W. O. Kermack 和 A.G. McKendrick，《对流行病数学理论的贡献》，《伦敦皇家学会会刊》。A辑**115**（1927年），第772号，700–721页。[12] Joachim Kock，《全粒度佩特里网与过程》，ACM《计算机协会学报》（JACM）（2022年）。[13] Xiaoyan Li、John Baez、Sophie Libkind、Eric Redekopp、Long Pham 和 Nathaniel Osgood，《使用范畴论建立存量与流量图及动力系统的代数框架》，《下一代数学建模》（Jummy Funke David 编），施普林格，2023年，预印本见 arXiv 预印本 arXiv:2211.01290。[14] Ronald Ross，《将概率论应用于先验病理测量学研究——第一部分》，《伦敦皇家学会会刊》。A辑，载有数学与物理性质论文**92**（1916年），第638号，204–230页。[15] Ronald Ross 和 Hilda P Hudson，《将概率论应用于先验病理测量学研究——第二部分》，《伦敦皇家学会会刊》。A辑，载有数学与物理性质论文**93**（1917年），第650号，212–225页。

[16] J. D. Sterman，《商业动态学》，McGraw-Hill, Inc., 2000.

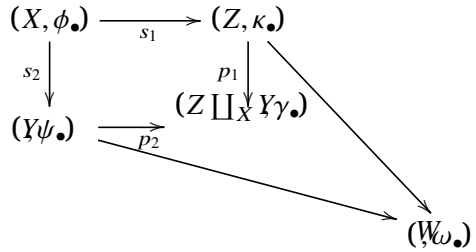
7 附录

7.1 定理 2.4 的证明

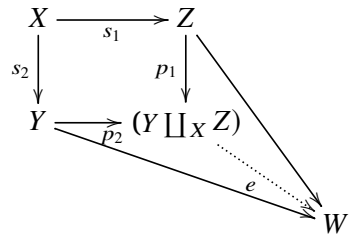
证明。 容易验证，存在一个由存量与流量图构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} (X,\phi_\bullet) & \xrightarrow[s_1]{} & (Z,\kappa_\bullet) \\ {\scriptstyle s_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ (Y,\psi_\bullet) & \xrightarrow[p_2]{} & (Z\coprod_X Y,\gamma_\bullet) \end{array}$$

其中，映射 p_1, p_2 由前述图中的映射 p_1, p_2 诱导得到。现在考虑



根据推出的泛性质，我们可以找到一个使下图交换的预层映射



我们验证 e 诱导了一个存量与流量图的映射。对于 $f \in \mathbb{W}$(流量)，我们有 :

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in e(\mathrm{Flow})^{-1}(f)} \gamma_x \circ e(\mathrm{Link})^* \\
&\qquad = \sum_{x \in e(\mathrm{Flow})^{-1}(f)} \Big(\sum_{y \in p_2(\mathrm{Flow})^{-1}(x)} \psi_y \circ p_2(\mathrm{Link})^* \Big) \circ e(\mathrm{Link})^* \\
&\qquad = \sum_{x \in e(\mathrm{Flow})^{-1}(f)} \sum_{y \in p_2(\mathrm{Flow})^{-1}(x)} \Big(\psi_y \circ \Big(p_2(\mathrm{Link})^* \circ e(\mathrm{Link})^* \Big) \Big) \\
&\qquad = \sum_{y \in (p_2 \circ e)(\mathrm{Flow})^{-1}(f)} \psi_y \circ (e \circ p_2)(\mathrm{Link})^* = \omega_f
\end{aligned}$$

□

7.2 定理 2.11 的证明

证明。 每个余极限都可以改写为余等化子（应用 [8, 定理 I.7.10] 中构造的对偶）。特别地，包含函子的余极限就是余等化子：

$$\big(\textstyle\coprod_{f \in X(\mathrm{Inflow})} \mathcal{U}_f\big) \coprod \big(\coprod_{f \in X(\mathrm{Outflow})} \mathcal{U}_f\big) \underset{\phi_2}{\overset{\phi_1}{\rightrightarrows}} \big(\coprod_{f \in X(\mathrm{Flow})} \mathcal{U}_f\big) \coprod \big(\coprod_{s \in X(\mathrm{Stock})} C_s\big) \longrightarrow (X_{\mathrm{new}}, \phi')$$

其中 ϕ_1 是态射

$$\mathfrak{F}_f^{C_s} : \mathcal{U}_f \to C_s \subseteq \Big(\coprod_{f \in X(\mathrm{Flow})} \mathcal{U}_f \Big) \coprod \Big(\coprod_{s \in X(\mathrm{Stock})} C_s \Big)$$

在每个因子上。映射 ϕ_2 将余积项 $\mathrm{U}_f, f \in X$(流入) ($\mathrm{U}_f, f \in X$(流出)) 中的每个因子包含到 $\big(\coprod_{f \in X(\text{流量})} \mathrm{U}_f\big)$ 的余积项 $\mathrm{U}_{X(\text{流入})(f)}$($\mathrm{U}_{X(\text{流出})(f)}$) 中。注意，根据 2.4，这个余极限存在。

由包含映射 $C_s \to (X, \phi)$ 根据余等化子的泛性质诱导出一个态射 $(X_{\mathrm{new}}, \phi') \to (X, \phi)$。我们来验证这是一个同构。只需验证它在原始存量与流量图上诱导出同构即可。

预层范畴中的余等化子是逐点计算的，对于 $p \neq$ 流量，连接， $U_f(p) = \emptyset$。FinSet 中余等化子的通常描述给出：对于对象 $p \neq$ 连接，流量以及 i： $p \to$ 存量，存在唯一一个指向存量的箭头：

$$X_{new}(p) = \coprod_{s \in X(\mathrm{Stock})} C_s(p) = \coprod_{s \in X(\mathrm{Stock})} i^{-1}(s) = i^{-1}(X(\mathrm{Stock})) = X(p)$$

对于任意 p， $q \neq$ 流量，连接，以及任意态射 ϕ： $p \to q$，从上述讨论可清楚看出， $X(\phi)$ 是 $C_s(\phi)$ 的不交并，因此 $X(\phi) = X_{\mathrm{new}}(\phi)$。

我们注意到， X_{new}(流量)是 $= X$(流入)与 $\coprod X$(流出)的余积，模去如下等价关系：若 x， y 同时作为流入和流出出现，则将其等同。但这正是 X(流量)。类似地， X_{new}(连接)是以下对象的余等化子：

$$\big(\textstyle\coprod_{f \in X(\mathrm{Inflow})} U_f(\mathrm{Link})\big) \coprod \big(\coprod_{f \in X(\mathrm{Outflow})} U_f(\mathrm{Link})\big) \underset{\phi_2}{\overset{\phi_1}{\rightrightarrows}} \big(\coprod_{s \in X(\mathrm{Stock})} C_s(\mathrm{Link})\big)$$

这正是 X(连接)。对于 ϕ指向 Flow、Link 的箭头，我们现在可以将 $X(\phi)$与 $X_{\text{new}}(\phi)$等同。剩下的任务是证明流量函数与 X的流量函数相同。这可由 StockFlow 中推出的描述得出。

□

7.3 上游—下游组合示例

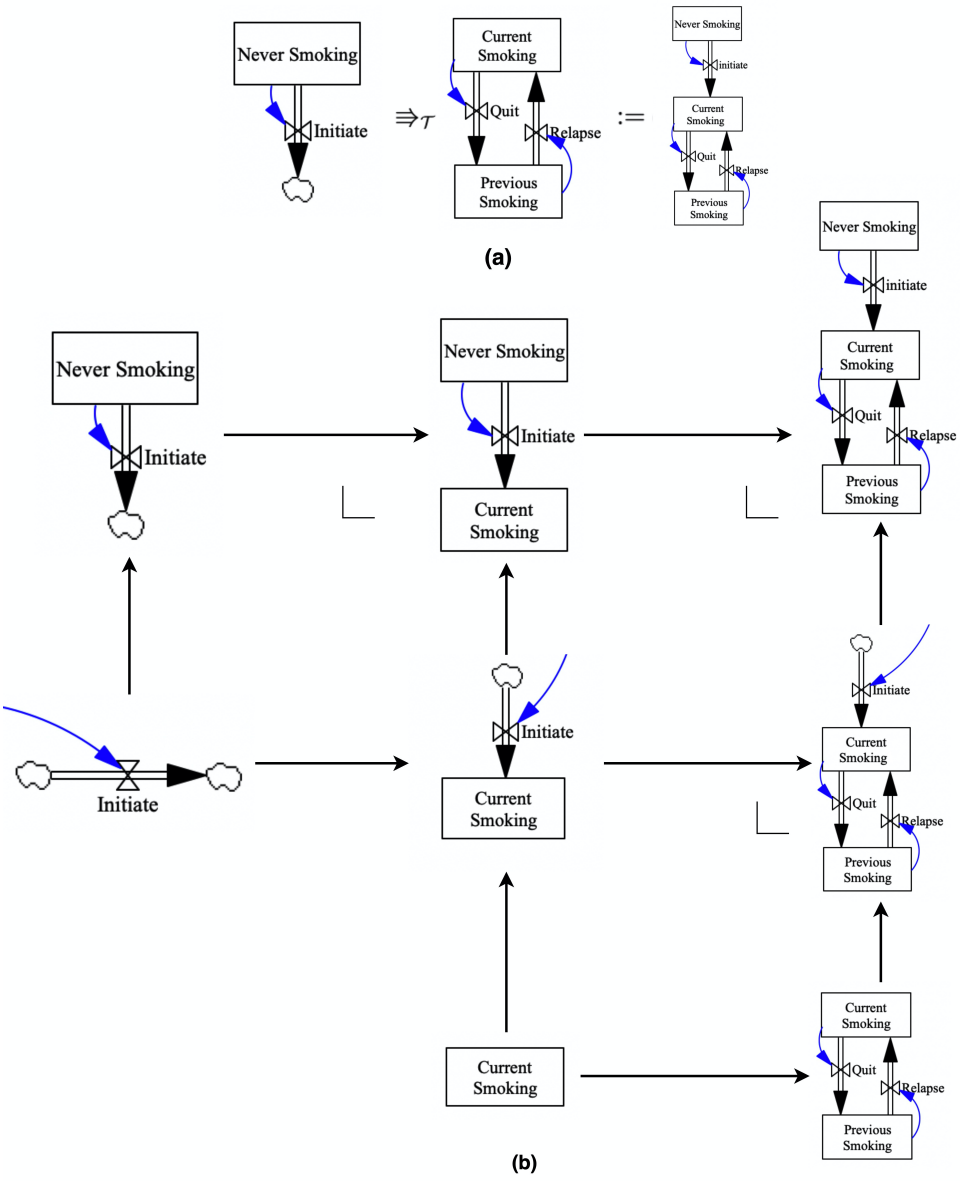


图 7：上游—下游组合示例