arXiv:2305.02146v1 [math.CO] 3 May 2023

H 形树的整除性及其谱判定

Zhen Chen[a]、JianfengWang[a, *]、Maurizio Brunetti[b]、Francesco Belardo[b]

[a]山东理工大学数学与统计学院，中国淄博 255049[b]那不勒斯费德里科二世大学数学与应用系，意大利那不勒斯

摘要

若图 G 的特征多项式能被图 H 的特征多项式整除，则称图 G 可被图 H 整除。本文利用递归图可被路径整除的充要条件证明，已知当 n 足够大时，H 形图 $P^{2,\ 2\ 2\ n-4,\ ;}_{n-7}$ 是阶为 n 且直径为 $n-5$ 的图中谱半径最小者；该图能由其邻接谱判定，当且仅当 $n \neq 10$, 13,15。

AMS分类：05C50

关键词：邻接矩阵；谱判定；特征多项式；可除性；谱不变量。

1 引言

本文只讨论无向简单图。设 $G = (V_G,\ E_G)$ 是一个阶为 ν_G、边数为 ε_G 且邻接矩阵为 $A(G)$ 的图。 G 的谱 sp(G) 是 $A(G)$ 的特征值组成的多重集，即 G $\phi(G) = \phi(G,\ \lambda)$ 的特征多项式的根：=det($\lambda I - A(G)$)。矩阵 $A(G)$ 是对称的；因此，其特征值均为实数，记为 $\lambda_1(G) \geqslant \lambda_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{\nu_G}(G)$。 G 的最大特征值 $\lambda_1(G)$ 称为 G 的指标，通常记为 $\rho(G)$。由 Perron-Frobenius 定理可知， $\rho(G)$ 的重数为 1，并且它也等于 G 的谱半径，即 max$\{|\lambda_i(G)| \mid 1 \leqslant i \leqslant \nu_G\}$。

若两个不同构的图 G 和 H 具有相同的谱，则称它们为（A-）余谱图。显然，当且仅当 $\phi(G) = \phi(H)$ 时，这种情况才会发生。若图 G 没有余谱图，或者等价地，若只有当 G 和 H 同构时才有 sp(G) =sp(H)，则称图 G 由其谱确定（简称 DS）。

谱图论的一个重要研究领域致力于确定哪些图可由其谱确定。多年来，这一问题吸引了许多研究者的关注 [5, 6]。

尽管文献中已有大量成果，但仍有许多工作有待完成：例如，著名的 Schwenk 定理指出，几乎所有树都有余谱[21], ，但 van Dam 和 Haemers [5] 发起的寻找 DS 树的探索仍在继续。人们已经研究了 T 形树 [26], 、星形树 [10, 19], 、匕首树 [18] 以及谱半径至多为 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ [9, 22] 的树。

*通讯作者。*Email addresses:* chenzzhen@126.com（Z. Chen）、jfwang@sdut.edu.cn（J.F. Wang）、mbrunett@unina.it、fbe- lardo@gmail.com（F. Belardo）

关于 H 形图 [13, 17]，目前仅取得了一些部分结果（定义见下一段）。

分别用 P_n 和 C_n 表示具有 n 个顶点的路径和圈。我们将它们的顶点标记为 0、1、.....、$n-1$，并假设连续整数对应的顶点相邻。对于 $0 < m_1 < \cdots < m_t < r-1$，我们记作 P^{m_1}、$n_1 \overset{m_2}{n_2} \cdots n_t \overset{m_t}{r}$、.....、，，，；该图由 P_r 在其顶点 m_i 处，为每个 $i = 1$、2、.....、t 添上一条有 n_i 条边的悬挂路径得到。类似地，对于 $0 \leqslant m_1 < \cdots < m_t \leqslant r-1$，我们记作 C^{m_1}、$n_1 \overset{m_2}{n_2} \cdots n_t \overset{m_t}{}$、.....、，，，；$r$ 表示由 C_r 在其顶点 m_i 处，为每个 $i = 1$、2、.....、t 添上一条有 n_i 条边的悬挂路径得到的图（见图 1）。在 [27], 之后，类型为 P^{m_1}、$n_1 \overset{m_2}{n_2} \cdots n_t \overset{m_t}{r}$、.....、，，，；以及 C^{m_1}、$n_1 \overset{m_2}{n_2} \cdots n_t \overset{m_t}{}$、.....、，，，；$r$ 的图分别称为开放魁普图和闭合 quipu 图。它们在结构上可分别刻画为最大顶点度为 3 且所有度为 3 的顶点都位于同一路径上（分别位于同一圈上）的树（分别为单圈图）。具有 $t = 1$ 的开放魁普图也称为 T 形图；而具有 $t = 2$ 的开放魁普图有时称为 H 形树或 Π 形树（见图 2 ）。仅有一条悬挂路径的闭合 quipu 图称为棒棒糖图或蝌蚪图。

本文聚焦于该族图的谱判定 ily

$$\mathscr{H} := \{H_n\}_{n \geqslant 10}, \qquad \text{where } H_n = P^{2,n-7}_{2,2,n-4}. \tag{1}$$

我们的工作是一个更大项目的一部分，该项目研究在具有 n 个顶点且直径为 D 的图集合中，$G_{n,D}$' 的谱半径最小化图的谱判定。事实上，van Dam 和 Kooij [7] 猜想，开放魁普图

$$OQ_{n,e} = P^{\lfloor \frac{e-1}{2} \rfloor, n-e-\lceil \frac{e-1}{2} \rceil}_{\lfloor \frac{e-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{e-1}{2} \rceil; n-e+1}$$

当 $D \in \{1, 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-3, n-2, n-1\}$ 时，对于 $D = n - e$ 和足够大的 n，它是其中一个极小化图，从而确定了 $G_{n,D}$ 。

在 [2, 7, 28], 之后，我们知道 van-Dam-Kooji猜想对 $1 \leq e \leq 5$ 成立，但对 $e \geqslant 6$ 不成立（见 [2, 14, 15, 16, 24]）。

具有 $D \in \{n-1, n-2, n-3, n-4\}$ 的 $G_{n,D}$ 的谱判定已在 [8, 9] 中完成。下一个定理是我们的主要结果，正如前文所述，它涉及

$$H_n = P^{2,n-7}_{2,2;n-4} = OQ_{n,5} = G_{n,n-5}.$$

定理 1.1。集合 $\mathscr{H} = \{H_n \mid n \geqslant 10\}$ 中唯一不是 DS 的图是 H_{10}、H_{13} 和 H_{15}。

如果 $\phi(H)$ 能整除 $\phi(G)$，则称图 G 能被图 H 整除。在某些情况下，整除性有助于判断图 G 是否为 DS。事实上，图 G 与图 $\bigsqcup_{i=1}^{s} G'_s$ 的不交并余谱，当且仅当 $\phi(G)$ 能整除 $= \prod_{i=1}^{s} \phi(G'_i)$。此外，由于 $\mathbb{Z}[x]$ 是唯一因子分解整环，如果对于每个整除 G 的连通图 G'，$\phi(G)/\phi(G')$ 是某个图的特征多项式，当且仅当 G' 同构于 G，那么 G 就是 DS（注意，按照惯例，1 零图 P_0 的特征多项式为 1；零图没有顶点，因此更不可能有边）。这就是本文研究图的整除性的动机。

我们现在说明本文的组织结构。第 2 节汇集了基本工具，其中大多数为学者所熟知。第 3 节主要讨论整除性；具体而言，我们给出了递归图序列被路径整除的条件，以及图 $\mathscr{H}$ 被圈和某些特定闭合 quipu 图整除的条件。第 4 节探讨了 $\mathscr{H}$ 和某些闭合 quipu 图的其他谱性质。这些性质的选取是为了证明第 5 节给出的定理 1.1。

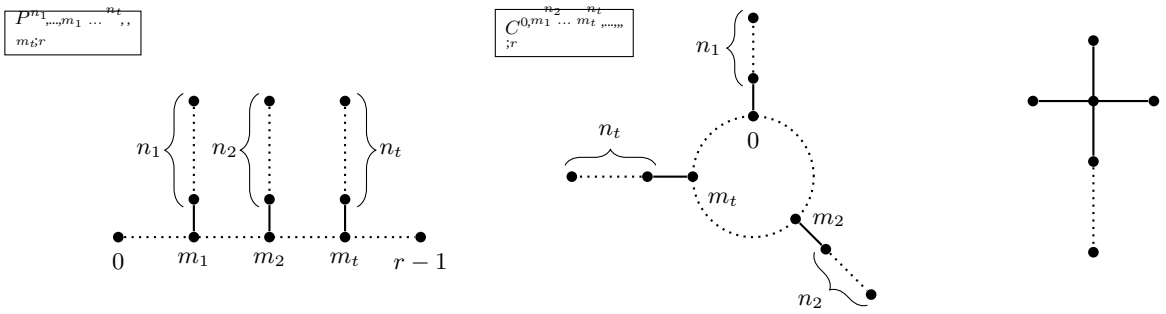

图 1：开放奎普图、闭合奎普图和匕首蕨

2 预备知识

引理2.1。 [4, p。 73] 对于 $n \in \mathbb{N}$，以下等式成立。

$$\phi(P_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - 2\cos\frac{\pi i}{n+1} \right) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \binom{n-r}{r} \lambda^{n-2r}$$

and

$$\phi(C_n, \lambda) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\lambda - 2\cos\frac{2\pi i}{n} \right) = -2 + \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} \lambda^{n-2r}.$$

引理 2.2. [5,命题 1] 路径 P_n 对每个正整数 n 都是 DS。

为了证明一个图是 DS，找到尽可能多的余谱图的代数不变量会很有帮助，以下命题对此作了总结（证明参见例如 [5, 引理 4]）。

命题 2.3. 设 G 和 H 是两个同谱图。那么，
(i) $\nu_G = \nu_H$ 和 $\varepsilon_G = \varepsilon_H$。(ii) G 是二部图，当且仅当 H 是二部图。
(iii) G 是 k-正则图，当且仅当 H 是 k-正则图。(iv) G 是围长为 g 的 k-正则图，当且仅当 H 是围长为 g的 k-正则图。(v) 对任意固定长度， G 和 H 的闭游走数量相同。

引理 2.4. [4, 23] 设 $\mathscr{G}_{<2}$ 是指标小于 2 的连通图集合。那么，

$$\mathscr{G}_{<2} = \left\{ P_n (n \geq 1),\, P^1_{1;n-1} (n \geq 4) \right\} \cup \left\{ P^1_{2;k-1} \mid k = 5, 6, 7 \right\}.$$

引理2.5. [4, 23] 设 $\mathscr{G}_2$ 是指标为 2 的连通图集合。那么，

$$\mathscr{G}_2 = \left\{ C_n \ (n \geq 3),\, P^{1,n-4}_{1,1;n-2} \ (n \geq 6),\, K_{1,4},\, P^2_{2;5},\, P^2_{1;8},\, P^3_{1;7} \right\}.$$

在本文中，我们用 $\mathfrak{h}$ 表示数 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$，该数在文献中称为（邻接）Hoffman 极限值。

引理 2.6. [1, 3] 指标位于区间 $(2, \mathfrak{h})$ 内的 $\mathscr{G}_{(2,\mathfrak{h})}$ 连通图只包含 T 形图和 H 形图。更准确地说，$\mathscr{G}_{(2,\mathfrak{h})} = \mathcal{T} \cup \mathcal{H}$，其中

$$\mathcal{T} = \left\{ P^1_{c;4} \,\middle|\, c > 5 \right\} \cup \left\{ P^1_{c;b+2} \,\middle|\, b > 2,\ c > 3 \right\} \cup \left\{ P^2_{c;5} \,\middle|\, c > 2 \right\} \cup \left\{ P^2_{3;6} \right\}$$

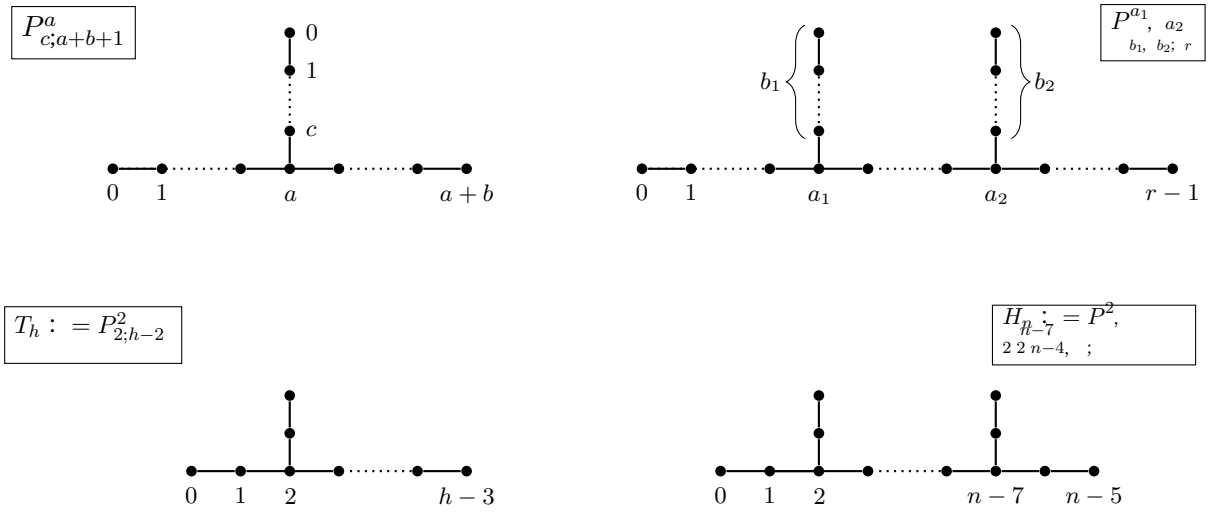

图 2：T 形图和 H 形图

and

$$\mathcal{H} = \left\{P^{1,2}_{1,1;5},\ P^{2,6}_{1,1;9},\ P^{2,7}_{1,1;11},\ P^{3,10}_{1,1;14},\ P^{3,11}_{1,1;16}\right\} \cup \left\{P^{a,a+b}_{1,1;a+b+c+1} \;\middle|\; a>0, c>0, b \geq b^*(a,c)\right\},$$

$$\textit{with } b^*(a,c) = \begin{cases} c & \textit{for } a=1, \\ c+3 & \textit{for } a=2, \\ a+c+2 & \textit{for } a>2. \end{cases}$$

引理 2.7. [27, 定理 1] 谱半径位于区间 $\left(\mathfrak{h}, 3\sqrt{2}/2\right]$ 内的连通图，要么是开放魁普图，要么是闭合 quipu 图，要么是匕首图（见图 1）。

如果 $H \subseteq G$（分别地，$H \subset G$）是图 G 的子图（分别地，真子图），则记作 H。

引理 2.8. [4, 定理 0.6 和 0.7] 设 G 为一个连通图且 $H \subset G$。那么 $\rho(H) < \rho(\{v9)$。

对于 $v \in V_G$，设 $G-v$ 为从 G 中删除 v 及其关联边后得到的图。 .

引理 2.9. [4, 定理 0.10] 设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 和 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1}$ 分别为图 G 和 $G-v$ 的特征值。那么，$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n$。

用 $d(v)$ 表示 $v \in V_G$ 在 G 中的顶点度，G 的内部路径是一个（可能闭合的）游走 $v_1 \ldots v_k$，使得 $\min\{d(v_1)\ d(v_k)\} \geqslant 3$ 且 $d(v_i) = 2$ 对于 $2 \leqslant i \leqslant k-1$。我们还回顾一下，将边 $uv \in E_G$ 细分意味着在 V_G 中插入一个新顶点 z，并用 uz 和 zw 替换 uv。以下引理的两部分分别来自引理 2.8 和 [12]。

引理 2.10。设 uv 是连通图 G 的一条边，并设 G_{uv} 是通过细分边 $uv \in E_G$ 从 G 得到的图。那么，

(i) 如果 uv 不在 G 的内部路径中，且 G 不是圈，那么 $\rho(G_{uv}) > \rho(G)$；(ii) 如果 uv 属于 G 的一条内部路径，且 $G \notin \left\{P^1_{,\ 1\ 1^{\ n-4}\ ,\ ;\ n-2} \mid n \geqslant 6\right\}$，那么 $\rho(G_{uv}) < \rho(G)$。

设 v 是图 G 的一个顶点。按照惯例，我们用 $N_G(v)$ 表示 v 的邻域，即集合 $\{w \in V_G \mid vw \in E_G\}$。

引理 2.11. [20, 定理2和 3] 设 $\mathscr{C}(v)$（分别为 $\mathscr{C}(e)$）是图G 中所有包含顶点 $v \in V_G$ （分别包含边 $e = uw \in E_G$）的圈的集合。多项式满足以下恒等式

$$\phi(G) = \lambda\phi(G - v) - \sum_{v' \in N_G(v)} \phi(G - v - v') - 2 \sum_{C \in \mathscr{C}(v)} \phi(G - V(C)) \tag{2}$$

and

$$\phi(G) = \phi(G - e) - \phi(G - u - w) - 2 \sum_{C \in \mathscr{C}(e)} \phi(G - V(C)) \tag{3}$$

对每个 $v \in V_G$ 以及每个 $e = uw \in E_G$ 都成立（注意，如果 H 是零图，则 $\phi(H) = 1$ ）。

方程 (2) 和 (3) 通常称为 Schwenk 公式，可以作为直接计算的替代方法，用于证明以下恒等式：

$$\phi(H_{10}) = \phi(P_2 \cup C^{0,3}_{1,1;6}); \quad \phi(H_{13}) = \phi(P^1_{2;4} \cup C^0_{1;6}); \quad \phi(H_{15}) = \phi(P^{1,3}_{1,2,6} \cup C_6), \tag{4}$$

（ H_n 已在 (1) 中定义）。

设 k 为正整数。我们回顾一下，图 G 中的 k-匹配是由 k 条互不相邻的边组成的集合。我们用 $M_k(G)$ 表示图 G 中 k-匹配的数量，并用 Δ_G 表示其最大顶点度。以下结果由图的特征多项式的 Sachs 系数定理推出（见 [4,定理 1.3]）。

命题 2.12. 设 G 和 H 是两个余谱图。

（i）如果 G 和 H 都不含作为子图的四边形，则 $M_2(G) = M_2(H)$。（ii）如果 G 和 H 都不含作为子图的四边形或六边形，则 $M_3(G) = M_3(H)$。

引理 2.13. 设 G 是一个具有 N 个三角形且度序列为 $(d_1, d_2, \ldots, d_{\nu_G})$ 的图。

(i) G 中的 2-匹配数为 $M_2(G) = \binom{\varepsilon_G}{2} - \sum_{i=1} \binom{d_i}{2}$.

(ii) 如果 T是一个最大度为 $\Delta_T = 3$的树，则 $M_2(T) = \frac{\nu_T^2 - 5\nu_T}{2} + 3 - k_T$，其中 k_T是 V_T中度为 3 的顶点数。

相反，如果 G 是一个闭合奎普图，则 $M_2(G) = \frac{\nu_G^2 - 3\nu_G}{2} - k$。

(iii) G 中的 3-匹配数为

$$M_3(G) = \binom{\varepsilon_G}{3} - (\varepsilon_G - 2)\sum_{i=1}^{\nu_G} \binom{d_i}{2} + 2\sum_i \binom{d_i}{3} + \sum_{ij \in E(G)} (d_i - 1)(d_j - 1) - N.$$

证明。(i) 是初等的： $M_2(G)$ 的数量等于边对的总数减去相依边对的数量。(ii) 本质上是 [26]中的引理 2.10。对于(iii)，见 [11, 定理 1]。

□

H 形树的几种类型如图 3 所示，其中虚线表示至少含有两条边的路径。换言之，H 形树的集合是不交并$\bigsqcup_{i=1}^{12} \mathcal{T}_i$，其中 $\mathcal{T}_1 = \left\{ P^{1,1\,1\,\,\,

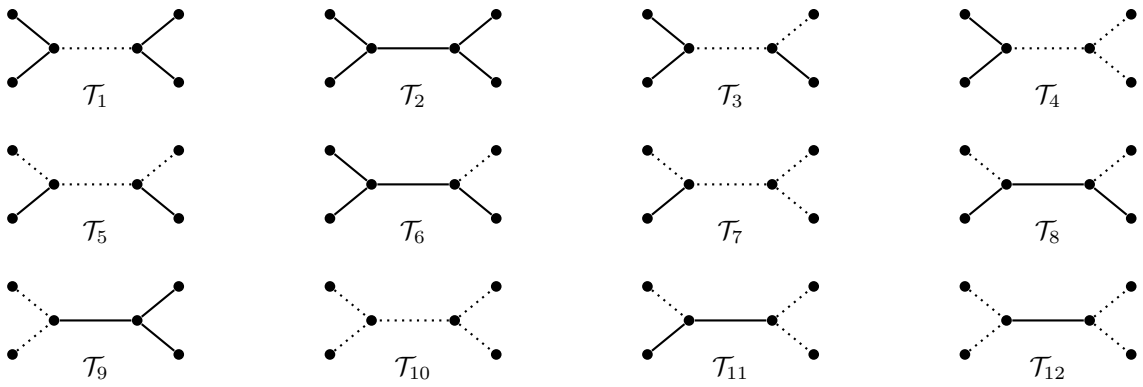

图 3：H 形树的若干类型

推论 2.14. 设 T为一棵有 n 个顶点的 H 形树，并设 $f(n) = (n^3 - 12n^2 + 35n)/6$。那么，

$$M_3(T) = \begin{cases} f(n), & for \quad T \in \mathcal{T}_1; \\ f(n)+1, & for \quad T \in \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3; \\ f(n)+2, & for \quad T \in \mathcal{T}_4 \cup \mathcal{T}_5 \cup \mathcal{T}_6; \\ f(n)+3, & for \quad T \in \mathcal{T}_7 \cup \mathcal{T}_8 \cup \mathcal{T}_9; \\ f(n)+4, & for \quad T \in \mathcal{T}_{10} \cup \mathcal{T}_{11}; \\ f(n)+5, & for \quad T \in \mathcal{T}_{12}. \end{cases}$$

在本节末尾，我们考察图 G 的最低次项 $\vartheta(G)$，即其特征多项式中次数最低的非零单项式。显然， $\vartheta(G)$ 是所有与 G 余谱的图共有的代数不变量。 $\vartheta(G)$ 的次数也等于 $\eta(G)$ 的零度，即 $\mathrm{sp}(G)$ 中 0 的重数。以下三个命题的证明推迟到附录 A。

命题 2.15. 对于每一对正整数 (s,t),

$$\vartheta(C^0_{4s-2\epsilon_1;4t+2\epsilon_2}) = \begin{cases} -4t(s+t)\lambda^2, & if \quad (\epsilon_1,\epsilon_2) = (0,0); \\ -4, & if \quad (\epsilon_1,\epsilon_2) = (0,1); \\ 2t(2s+2t-1)\lambda^2, & if \quad (\epsilon_1,\epsilon_2) = (1,0); \\ 4, & if \quad (\epsilon_1,\epsilon_2) = (1,1). \end{cases}$$

下一个命题给出了该族中图的最低次项

$$\mathscr{T} = \{T_n\}_{n\geqslant 6} \qquad \text{where } T_n := P^2_{2;n-2}. \tag{5}$$

命题 2.16. 设 $\mathscr{T}$ 为式 (5) 中定义的 T 形图族，对于每个整数 $n \geqslant 6$，令 s 为满足 $n = 4s + \epsilon$ 且 $\epsilon \in \{0,1,2,3\}$ 的整数。那么，对于每个 $T_n \in \mathscr{T}$,

$$\vartheta(T_n) = \begin{cases} 1, & if \ \epsilon = 0; \\ (2s+1)\lambda, & if \ \epsilon = 1; \\ -1, & if \ \epsilon = 2; \\ -2(s+1)\lambda, & if \ \epsilon = 3; \end{cases} \tag{6}$$

命题 2.17。对于每个整数 $n \geqslant 10$，令 H_n 为式 (1) 中定义的 H 形图，并令 s 为满足 $n = 4s + \epsilon$ 且 $\epsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$ 的整数。那么，

$$\vartheta(H_n) = \begin{cases} 1, & if\ \ n = 4s; \\ (2s+1)\lambda, & if\ \ n = 4s+1; \\ -1, & if\ \ n = 4s+2; \\ -(2s+2)\lambda, & if\ \ n = 4s+3. \end{cases} \tag{7}$$

3 图之间的整除性

尽管图之间的整除性在谱图论的多个领域有着显而易见的应用，但它尚未得到应有的关注。事实上，关于这一主题的文献仍然很少。我们只能提及 Ghareghani 等人的论文 [10]，其中研究了路径对星形树的整除性。在这里，我们为一大类图能够被路径整除给出了充要条件。

定义 3.1. 若图 G 属于一列图 $\{G_n\}_{n \geqslant h}$，且满足 $\nu_{G_n} = n$ 和，则称其为递归图。

$$\phi(G_{n+2}) = \lambda\phi(G_{n+1}) - \phi(G_n). \tag{8}$$

由（2）易见，存在悬挂顶点 $v \in V$（G）是 G 为递归图的充分条件。事实上，若 u 是 G中 v 的唯一邻点，我们可以考虑序列 $\{F_n\}_{n \geqslant \nu_G - 2}$，使得 $F_{\nu_G - 2} = G - u - v$、$F_{\nu_G - 1} = G - v$、$F_{\nu_G} = G$，并且 F_n（其中 $n > \nu_G$ 由 G 与路径 $P_{n-\nu_G+1}$的一个端点融合 v 而得到）。然而，正如本节中的命题 3.5 将要说明的，并非所有递归图族都能通过在一个固定图上附加任意长的路径得到。

引理 3.2. 对每个 $n > 1$，多项式 $\phi(P_n)$ 和 $\phi(P_{n-1})$ 互素。

证明. 引理 2.11 可让我们轻松地得到众所周知的递推公式

$$\phi(P_n) = \lambda\phi(P_{n-1}) - \phi(P_{n-2}). \tag{9}$$

该公式对所有 $n \geqslant 2$ 都成立。由于 $\phi(P_0) = 1$ 和 $\phi(P_1) = \lambda$ 互素，利用关于 n 的直接归纳论证，即可由 (9) 得出结论。 □

引理 3.3. 设 $\{g_n(\lambda)\}_{n \geqslant 0}$ 是一个多项式序列，其元素满足

$$g_{n+2}(\lambda) = \lambda g_{n+1}(\lambda) - g_n(\lambda) \qquad for\ all\ n \geqslant 0. \tag{10}$$

那么，
(i) $g_n(\lambda) = \phi(P_k)\, g_{n-k}(\lambda) - \phi(P_{k-1})\, g_{n-k-1}(\lambda)$，对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 成立；(ii) 对每个正 i，$\phi(P_n) \mid g_{n+1+i}(\lambda)$ 当且仅当 $\phi(P_n) \mid g_i(\lambda)$。

证明。为简洁起见，我们令 $g_i := g_i(\lambda)$。我们通过对 k 进行归纳来证明 (i)。由于$\phi(P_0) = 1$ 且 $\phi(P_1) = \lambda$，对于 $k = 1$，(i) 可直接由 (10) 得出。现在假设 (i) 对 $k \leqslant l - 1 < n - 2$ 成立。根据 (8) 和归纳假设，

$$\begin{aligned} g_n &= \lambda g_{n-1} - g_{n-2} \\ &= \lambda\left(\phi(P_{l-1})g_{n-l} - \phi(P_{l-2})g_{n-l-1}\right) - \left(\phi(P_{l-2})g_{n-l} - \phi(P_{l-3})g_{n-l-1}\right) \\ &= \left(\lambda\phi(P_{l-1}) - \phi(P_{l-2})\right) g_{n-l} - \left(\lambda\phi(P_{l-2}) - \phi(P_{l-3})\right) g_{n-l-1} \\ &= \phi(P_l)g_{n-l} - \phi(P_{l-1})g_{n-l-1}, \end{aligned}$$

这就完成了 (i) 的证明。注意，(i) 蕴含多项式的恒等式

$$g_{n+1+i} = \phi(P_{n+1})g_i - \phi(P_n)g_{i-1} \qquad (i \geqslant 2),$$

来自其中的h (ii) 立即得出，因为根据引理 3.2， $\phi(P_n)$ 和 $\phi(P_{n+1})$ 互素 e. □

定理 3.4。设 $\{G_n\}_{n\geqslant h}$ 是一个递归图序列，其元素满足 (8)，并设 $g_n := \phi(G_n, \lambda)$。则，

(i) $g_n = \phi(P_k)\, g_{n-k} - \phi(P_{k-1})\, g_{n-k-1}$ 对于 $1 \leqslant k \leqslant n-1-h$;
(ii) 对于每个整数 $i \geqslant 2$， $\phi(P_n) \mid g_{n+1+i}$ 当且仅当 $\phi(P_n) \mid g_i$.

证明。由式 (8) 和引理 3.3 可立即得出。 □

命题 3.5. (1) 中定义的集合 $\mathscr{H} = \{H_n\}_{n\geqslant 10}$ 是一个递归图序列。换句话说，

$$\phi(H_n) = \lambda\phi(H_{n-1}) - \phi(H_{n-2}) \quad for\ n \geqslant 12. \tag{11}$$

证明. 在证明过程中，我们使用 (5) 中定义的图族 $\mathscr{T}$。当 $n \in \{12, 13\}$ 时，方程 (11) 可通过直接计算得出。现在令 $n \geqslant 14$。对图 2 中标签为 $n-7$ 的顶点应用 (2)，我们得到

$$\begin{aligned}
\phi(H_n) &= \left(\lambda\phi(P_2)^2 - 2\phi(P_1)\phi(P_2)\right)\phi(T_{n-5}) - \phi(P_2)^2\phi(T_{n-6}) \\
&= \left(\lambda\phi(P_2)^2 - 2\phi(P_1)\phi(P_2)\right)\left(\lambda\phi(T_{n-6}) - \phi(T_{n-7})\right) - \phi(P_2)^2\left(\lambda\phi(T_{n-7}) - \phi(T_{n-8})\right) \\
&= \lambda\left((\lambda\phi(P_2)^2 - 2\phi(P_1)\phi(P_2))\phi(T_{n-6}) - \phi(P_2)^2\phi(T_{n-7})\right) \\
&\qquad - \left((\lambda\phi(P_2)^2 - 2\phi(P_1)\phi(P_2))\phi(T_{n-7}) - \phi(P_2)^2\phi(T_{n-8})\right) \\
&= \lambda\phi(H_{n-1}) - \phi(H_{n-2}).
\end{aligned}$$

因此，(11) 得证。 □

在下一个命题中，我们考虑多项式序列 $\mathcal{R} := \{g_i\}_{i\geqslant 0}$，其中

$$\begin{aligned}
g_0 &:= -\lambda^{14} + 9\lambda^{12} - 28\lambda^{10} + 35\lambda^8 - 13\lambda^6 - 5\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1, \\
g_1 &:= -\lambda^{13} + 8\lambda^{11} - 21\lambda^9 + 20\lambda^7 - 3\lambda^5 - 4\lambda^3 + \lambda, \\
g_2 &:= -\lambda^{12} + 7\lambda^{10} - 15\lambda^8 + 10\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1, \\
g_3 &:= -\lambda^{11} + 6\lambda^9 - 10\lambda^7 + 4\lambda^5 + 3\lambda^3 - 2\lambda, \\
g_4 &:= -\lambda^{10} + 5\lambda^8 - 6\lambda^6 + 2\lambda^4 - \lambda^2 + 1, \\
g_5 &:= -\lambda^9 + 4\lambda^7 - 2\lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda, \\
g_6 &:= -\lambda^8 + 4\lambda^6 - 6\lambda^4 + 4\lambda^2 - 1, \\
g_7 &:= -4\lambda^5 + 8\lambda^3 - 4\lambda, \\
g_8 &:= \lambda^8 - 8\lambda^6 + 14\lambda^4 - 8\lambda^2 + 1, \\
g_9 &:= \lambda^9 - 8\lambda^7 + 18\lambda^5 - 16\lambda^3 + 5\lambda, \\
g_{10} &:= \phi(H_{10}) = \lambda^{10} - 9\lambda^8 + 26\lambda^6 - 30\lambda^4 + 13\lambda^2 - 1, \\
g_{11} &:= \phi(H_{11}) = \lambda^{11} - 10\lambda^9 + 34\lambda^7 - 48\lambda^5 + 29\lambda^3 - 6\lambda, \\
g_n &:= \phi(H_n) \text{ for } n \geq 12.
\end{aligned} \tag{12}$$

引理 3.6。序列 $\mathcal{R}$ 中的多项式满足 (10)。

证明。对于 $0 \leqslant n \leqslant 9$，直接检查即可。对于 $n \geqslant 10$，等式 (10) 等价于 (11)。

□

命题 3.7. 对于 $m \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 10$，当且仅当 P_m 整除 H_n 才成立

$$(m,n) \in \{(1,2k+1) \mid k \geqslant 5\} \cup \{(2,n) \mid n \geqslant 10\} \cup \{(5,6k+5) \mid k \geqslant 1\}.$$

证明。对于 $m=1$，注意到 $\phi(P_1) = \lambda$ 不整除 $g_0 \in \mathcal{R}$，而 $\lambda \mid g_1 \in \mathcal{R}$。因此，根据引理 3.3(ii)，$\phi(P_1)$ 整除 g_n 当且仅当 n 为奇数。这意味着 P_1 整除 H_n 当且仅当 $n(\geqslant 10)$ 为奇数。

现在设 $m=2$。数字 1 和 -1 是 g_0、g_1 和 g_2 的根。再次由引理 3.3(ii)，我们可以推知 λ^2-1 是所有 g_i 的一个因子。特别地，这意味着对于所有 $n \geqslant 10$，P_2 都整除 H_n。

从现在起，我们假设 $m \geqslant 3$。每个整数 $n \geqslant 3$ 都可以唯一地写成$n=(m+1)k+i$，其中 k 是一个适当的非负整数，且 $0 \leqslant i \leqslant m$。引理 3.3(ii)表明，$\phi(P_m)$整除 g_n，当且仅当 $\phi(P_m)$整除 g_i。

经过直接检查可知，对于 $3 \leqslant m \leqslant 9$ 和 $0 \leqslant i \leqslant 9$，只有当 $(m,i) = (5,5)$ 时，$\phi(P_m)$ 才是g_i的因子；若此条件成立，则 $g_5 = -\phi(P_5)(\lambda^4-1)$。引理 3.3(ii) 现在保证，在范围 $3 \leqslant m \leqslant 9$ 内，路径 P_m 整除 H_n，当且仅当 $m=5$ 且 $n \equiv 5 \mod 6$。

证明将以说明带有 $m \geqslant 10$ 的 P_m 永远不能整除 $\mathscr{H}$ 中的图而结束。根据引理 3.3(ii)，只需证明，对于 $m \geqslant 10$，所有满足 $i \leq m$ 的 g_i 中，$\phi(P_m)$ 都不是其因子。

事实上，通过考察多项式次数可知，对于 $0 \leq i \leq 4$，只有 $\phi(P_{14-i})$ 可能整除 g_i，但事实并非如此：实际上，我们可以利用引理 2.2 和 (12) 比较次高次数单项式的系数，并得出结论：$g_i(\lambda)$ 与 $\phi(P_{14-i})$ 不成比例。对于 $5 \leq i \leq 9$，我们有 $\deg g_i < 10$；因此，$\phi(P_m) \nmid g_i(\lambda)$。

最后，令 $m \geqslant i \geqslant 10$。如果 $\phi(P_m)$ 是 $g_i = \phi(H_i)$ 的一个因子，则前者的度不能大于 $i = \deg g_i$；因此，m 必然等于 i，这意味着 $\phi(P_m) = \phi(H_i)$，与引理 2.2 矛盾，因为该引理指出每条路径都是 DS。 □

引理 3.8。对于分别由 (5) 和 (1) 定义的 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{H}$ 中的图，以下不等式成立。

(i) 对于 $6 \leqslant h < k$，$\rho(T_h) < \rho(T_k)$。
(ii) 对于 $10 \leqslant s < t$，$\rho(H_s) > \rho(H_t)$。

证明。(i) 由引理 2.8 得出，因为当 $h<k$ 时，$T_h \subset T_k$。(ii) 由引理 2.10(ii) 得出，因为 H_t 是通过将内部路径 $t-s$ 细分 H_s 次从 H_s 得到的。 □

引理 3.9. 对于 $n \geqslant 10$、$\lambda_3(H_n) < 2$。

证明。直接计算可得 $\lambda_3(H_{10}) = 1 < 2$。现在设 $n > 10$。设 H_n 中标签为 2 的顶点为 w'（见图 2），并设 T_{n-5} 中唯一的度为 3 的顶点为 w''。由引理 2.1 和引理 2.9 可得

$$\lambda_3(H_n) \leqslant \lambda_2(H_n - w') = \lambda_2(2P_2 \cup T_{n-5}) \leq \lambda_1(2P_2 \cup (T_{n-5} - w'')) = \lambda_1(4P_2 \cup P_{n-10}) < 2,$$

正如所声称的那样。 □

命题 3.10. 对于 $n = 2k+1 > 10$，T 形图 T_h 整除 H 形图 H_n，当且仅当 $h = k \geqslant 6$。

证明. 设 $k \geqslant 6$。将 (3) 应用于 H_n，关于边 $\tilde{e} = \tilde{u}\tilde{v}$，其中 $\tilde{u}$ （分别为 $\tilde{v}$）是图 1 中 H_n 的水平路径上标记为 $k-3$ （分别为 $k-2$）的顶点，我们得到

$$\phi(H_{2k+1}) = \begin{cases} \phi(T_6)\,(\phi(T_7) - \phi(P_5)) & \text{for } k = 6; \\ \phi(T_k)\,(\phi(T_{k+1}) - \phi(T_{k-1})) & \text{for } k > 6. \end{cases} \tag{13}$$

这就证明了"若"部分。现在假设

$$\phi(H_{2k+1}) = \phi(T_h) f(\lambda) \tag{14}$$

对于适当的多项式 $f(\lambda)$。作为 [26, 定理 1] 的推论，$f(\lambda)$ 具有正的度；因此，称其 i 个最大根 $\lambda_i(f)$（对于 $1 \leqslant i \leqslant$ 度 $f(\lambda)$）是有意义的。我们明确指出，根据证明的第一部分，类型 (14) 的情形实际上至少在 $h = k$ 时会出现。从引理 2.6 可知，$\lambda_1(T_h) < \mathfrak{h} < \lambda_1(H_{2k+1})$；因此，$\lambda_1(H_{2k+1}) = \lambda_1(f)$。显然，$\lambda_2(H_{2k+1}) \in \{\lambda_2(f)\ \lambda_1(T_h)\}$。$\lambda_2(H_{2k+1}) = \lambda_2(f)$ 的情形不可能发生，否则

$$\lambda_3(H_{2k+1}) = \max\{\lambda_1(T_h), \lambda_3(f)\} \geqslant \lambda_1(T_h) \geqslant 2,$$

这与引理 3.9 矛盾。因此，$\lambda_2(H_{2k+1}) = \lambda_1(T_h)$。同样的论证，从（13）而非（14）出发，可以得出 $\lambda_2(H_{2k+1})$也等于 $\lambda_1(T_k)$；因此，根据引理 3.8，h 必然等于 k 。

□

引理 3.11. 对每个 $n \geqslant 10$，多项式 $\phi(H_n, \lambda)$ 在 2 处的取值为 $\phi(H_n, 2) = 9(n-15)$。

证明。我们可以应用 [9, 引理 4]，也可以利用由 (12) 和恒等式 (11) 给出的 $\phi(H_{10}, 2) = -45$ 和 $\phi(H_{11}, 2) = -36$ 的取值进行归纳论证。

□

命题 3.12. 对于 $n \geqslant 10$ 和 $m \geqslant 3$，C_m 整除 H_n 当且仅当 $(m, n) \in \{(3, 15), (6, 15)\}$。

证明。由引理2.1，或等价地由引理2.5可知，对于每个 $m \geqslant 3$，$(\lambda - 2) \mid \phi(C_m)$；而由引理 3.11 可得，$2 \in \mathrm{sp}(H_n)$ 仅当 $n = 15$ 时成立。因此，若 C_m 整除 H_n，则 $m \leqslant n = 15$。通过直接计算，

$$\phi(H_{15}) = \lambda(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1)^3 h(\lambda), \qquad \text{where } h(\lambda) := \lambda^6 - 7\lambda^4 + 12\lambda^2 - 2.$$

现在，显然 $\phi(C_3) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ 和 $\phi(C_6) = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1)^2$ 整除 $\phi(H_{15})$。此外，对于 $m \notin \{3, 6\}$，$C_m \nmid H_{15}$，因为 $\phi(C_4) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$，并且对于 $m \notin \{3, 4, 6\}$，$\lambda_2(C_m) = 2\cos(2\pi/m)$ 不属于 $\mathrm{sp}(H_{15})$。为说明这一点，注意到

$$0 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) < \zeta_1 < 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \text{and} \qquad 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) < \zeta_2 < 2\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right),$$

其中，$\zeta_1 \approx 0.4317$ 和 $\zeta_2 \approx 1.5718$ 是 $h(\lambda)$的两个正根。

□

鉴于本节最后关于 H_n 的整除性的结果，我们在此给出两个涉及 ρ_n 的命题：$= \rho(H_n)$ $(n \geqslant 10)$。

13. H_n 的指标 ρ_n 属于区间 $\left(\mathfrak{h}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，当且仅当 $n \geqslant 12$。

命题3。

证明。由于以下两个事实，不等式 $\rho_n > \mathfrak{h}$ 对每个 $n \geqslant 10$ 都成立：

- 由引理2.4-2.6，$H_n \notin \mathscr{G}_{<2} \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_{(2,\ \mathfrak{h})}$；
- 数 $\mathfrak{h}$ 不是图的特征值，因为它的最小多项式有非实根。

通过直接计算，

$$\rho_{10} > 2.17008 > \rho_{11} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{17}}}{2} > \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \rho_{12} < 2.115 < \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

现在，由引理 3.8(ii)，对于所有 $n > 12$，我们有$\rho_n < \rho_{12} < 3/\sqrt{2}$。 □

命题3.14。设 $n \geqslant 12$。如果 $\rho(C^0_{,\ 1\,2\overset{s}{\cdots}2,\ ;\ 2s}) \leqslant \rho_n$，那么 $s \geqslant 7$。

证明。对于每个 $s \geqslant 2$，图 $C^0_{,\ 1\,2\overset{s+1}{\cdots}2,\ ;\ (s+1)}$ 由 $C^0_{,\ 1\,2\overset{s}{\cdots}2,\ ;\ 2s}$ 在同一度为 3 的顶点关联的圈上的两条边上细分而得；因此，根据引理 2.10(ii)，$\rho(C^0_{,\ 1\,2\overset{s}{\cdots}2,\ ;\ 2s}) > \rho(C^0_{,\ 1\,2\overset{s+1}{\cdots}2,\ ;\ (s+1)})$。因此，

$$\rho(C^{0,2}_{1,2;4}) > \rho(C^{0,3}_{1,2;6}) > \rho(C^{0,4}_{1,2;8}) > \rho(C^{0,5}_{1,2;10}) > \rho(C^{0,6}_{1,2;12}) \approx 2.1215 > 3/\sqrt{2} > \rho_n,$$

其中，最后一个不等式由命题 3.13 得出。 □

引理 3.15. [25, 定理 4.1] $\rho(C^0_{,s\,t\overset{k}{\cdots}t,;g}) < \rho(C^0_{,s\,t\overset{k-1}{\cdots}t,;g})$ 当 $2 \leqslant k \leqslant$ 时 $\left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$

并且 $(s,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$。命题3.16. 设 $n \geqslant 12$，不存在三元组 (t,s,k)，使得 $t > 1$、$s > 3$ 和 $1 < k \leqslant s$ 满足 $\phi(C^0_{,1\,t\overset{k}{\cdots}t,;2s}) = (\lambda^2-1)^{-1}\phi(H_n)$。

证明。反设存在一个闭合奎普图 $CQ := C^0_{,1\,t\overset{k}{\cdots}t,;2s}$，其满足 $t > 1$、$s > 3$ 和 $1 < k \leqslant s$，使得 $\phi(H_n) = \phi(P_2)\phi(CQ)$。显然，$\rho_n = \rho(CQ)$。由引理 3.15 和交错定理，我们得到

$$\rho_n = \rho(CQ) \geqslant \rho(C^{0,s}_{1,t;2s}) \geqslant \rho(C^{0,s}_{1,2;2s}),$$

由命题3.14可知，$s \geqslant 7$，因此 CQ 的围长 $2s$ 至少为14。因此，$P^8_{2;15} \subseteq P^{s+1}_{2\ ;2s+1}$，结合 $P^{s+1}_{2\ ;2s+1} \subset C^0_{,1\,2\overset{s}{\cdots}2,;2s}$ 以及上述不等式，可得

$$\rho_n > \rho(P^{s+1}_{2;2s+1}) \geq \rho(P^8_{2;15}) = 2.0904+. \tag{15}$$

注意，对于 $n \geqslant 15$, $\rho_n \leqslant \rho_{15} \approx 2.08397$；因此，(15) 仅在 $n \in \{12,13,14\}$ 时才可能成立。因此，CQ的顶点数至多为 12，这与前文得到的其围长下界矛盾。

□

4 树 H_n 及一些相关闭合 quipu 图的特征值位置

在第 3 节中，我们已经取得了一些与 H_n 的特定特征值位置相关的结果（参见引理 3.9 和命题 3.13）。下面列出 $\rho_n := \rho(H_n)$ 的近似值，精确到 $n = 20$。与命题 3.13 一致，对于 $n \geqslant 12$，式 (16) 中的值属于区间 $\left(\mathfrak{h}, 3/\sqrt{2}\right)$。

$$\begin{array}{llll} \rho_{10} \approx 2.17009 & \rho_{13} \approx 2.10100 & \rho_{16} \approx 2.07852 & \rho_{19} \approx 2.06843 \\ \rho_{11} \approx 2.13578 & \rho_{14} \approx 2.09118 & \rho_{17} \approx 2.07431 & \rho_{20} \approx 2.06637. \\ \rho_{12} \approx 2.11491 & \rho_{15} \approx 2.08397 & \rho_{18} \approx 2.07103 & \end{array} \tag{16}$$

以下命题涉及 $\lambda_2(H_n)$ 的位置。随后，我们将讨论 H_n 与一些闭合 quipu 图的谱半径之间的关系。

命题 4.1. 设 $\lambda_2(H_n)$ 为 H_n 的第二大特征值。那么,

$$\lambda_2(H_n)\begin{cases} <2 & for\ 10\leqslant n<15;\\ =2 & for\ n=15;\\ \in(2,\mathfrak{h}) & for\ n>15.\end{cases}$$

证明。为方便起见,令 $\lambda_2:=\lambda_2(H_n)$。根据标准微积分,

$$\phi(H_n,c)\begin{cases} >0 & \text{if } c\in(\lambda_3(H_n),\lambda_2),\\ <0 & \text{if } c\in(\lambda_2,\rho_n).\end{cases}$$

由于 $\rho_n>\mathfrak{h}>2$ (根据命题 3.13) 且 $\lambda_3(H_n)<2$ (根据引理 3.9),由引理 3.11 可知,只需根据 $n<15$ 或 $n>15$,判断 $\lambda_2<2$ 或 $\lambda_2>2$,以及 $\lambda_2=2$ 对于 $n=15$。

当 $n>15$ 时, λ_2 的上界证明如下:利用交错定理和引理 2.6,

$$\lambda_2(H_n)\leqslant\rho(H_n-w)=\rho(2P_2\cup P^2_{2,n-7})<\mathfrak{h},$$

其中, w 是 H_n中度为 3 的顶点。 □

命题 4.2。在阶为 n 、类型为 $\mathcal{T}^{10}$ 的树中(见图 3),最小谱半径仅由 H_n 达到。

证明。设 G 是 $\mathcal{T}_{10}\setminus\{H_n\}$ 中一个具有 n 个顶点的图:由于 G 是一棵树,因此 $\varepsilon_G=\varepsilon_{H_n}=n-1$。回顾一下,图 3 中每条虚线的长度至少为 2。

令 G' 为从 G 得到的图,其中四条悬挂路径上各恰好保留两条边;令 G'' 为将删去的边插入 G' 的内部路径后,从 G' 得到的图。显然, $G''=H_n$,且 $\rho(G)>\rho(G')>\rho_n$。前一个不等式由引理 2.8 得出,后一个则由引理 2.10 得出。

□

命题 4.3. 在所有阶为 ν 的闭合 quipu 图中,棒棒糖图 $C^0_{1,\nu-1}$ 的谱半径最小。此外, $\mathfrak{h}<\rho(C^0_{1,\nu-1})\leqslant\rho_{10}$,当且仅当 $\rho(C^0_{1,\nu-1})=\rho_{10}$ (分别地, ρ_{11}),当且仅当$\nu=4$ (分别地, $\nu=5$)。

证明。对于第一个结论,可以使用引理 2.8 和引理 2.10,具体方法与命题 4.2 的证明中所采用的方法完全相同;因此,无需写出详细过程。

推导 $\mathfrak{h}<\rho(C^0_{1,\ \nu-1})$ 的最快方法是查看引理 2.4、2.5 和 2.6,并确认集合 $\mathscr{G}_{<2}\cup\mathscr{G}_2\cup\mathscr{G}_{(2,\mathfrak{h})}$ 不包含闭合 quipu 图(回想一下,没有任何图的谱是 $\mathfrak{h}$)。

对于陈述的其余部分,直接验证可得$C^0_{1,3}\mid H_{10}$ 和$C^0_{1,4}\mid H_{11}$;此外, $\rho(C^0_{1,3})=\rho_{10}$ 和 $\rho(C^0_{1,4})=\rho_{11}$。因此,引理 2.10意味着

$$\rho(C^0_{1,\nu-1})<\rho(C^0_{1,4})=\rho_{11}<\rho(C^0_{1,3})=\rho_{10}\qquad\text{for all }\nu>5.$$

□

命题 4.4。设 $\mathcal{CQ}_{2s}$ 为围长为 $2s$的所有闭合 quipu 图的集合。若存在一个图$G\in\mathcal{CQ}_{2s}$ 使得 $\rho(G)=\rho_n$ 对 $n\geqslant12$ 和 $n\neq13$成立,则, $s\geqslant4$。

证明。我们证明,在 $\mathcal{CQ}_4\cup\mathcal{CQ}_6$ 中没有图满足该命题的条件。由于每个 $G\in\mathcal{CQ}_4$ 都包含 $C^0_{1;4}$ 作为其子图,根据交错定理和引理 2.10,我们得到

$$\rho(G)\geqslant\rho(C^0_{1;4})=\rho_{11}>\rho_n\quad\text{for } n\geqslant12.$$

直接检查可得 $C^0_{1;6} \mid H_{13}$ and $\rho(C^0_{1;6}) = \rho_{13}$ （后一个结果也可由后续的命题 4.6 得出）。因此，对于每个 $G \in \mathcal{CQ}_6 \setminus \{C^0_{1;6}\}$，我们有

$$\rho(G) > \rho(C^0_{1;6}) = \rho_{13} > \rho_n \quad \text{for } n > 13.$$

此外，在 G 的子图中，我们至少能找到集合中的一个图。

因此， $\rho(G) \geqslant$ 最小值 $\left\{\rho(C^0_{2;6}) \quad \rho(C^{0,1}_{1,1;6}) \quad \rho(C^{0,2}_{1,1;6}) \quad \rho(C^{0,3}_{1,1;6})\right\} > 2.13578 > \rho_{12} \approx 2.11491.$ □

引理 4.5. [25, 引理 4.2] 设 (r_1, r_2) 和 (s_1, s_2) 为两对非负整数，使得 $r_1 \leqslant r_2$, $r_1 < s_1 \leqslant s_2$ 和 $r_1 + r_2 = s_1 + s_2$。那么，

$$\phi(P_{r_1})\phi(P_{r_2}) - \phi(P_{s_1})\phi(P_{s_2}) = -\phi(P_{s_1-r_1-1})\phi(P_{s_2-r_1-1}).$$

由引理 4.5 可特别得出，

$$\phi(P_{k-5})\phi(P_{k-2}) = \phi(P_{k-4})\phi(P_{k-3}) - \lambda \quad \text{and} \quad \phi(P_{k-6})\phi(P_{k-4}) = \phi^2(P_{k-5}) - 1. \tag{17}$$

对所有 $k \geqslant 5$。

在命题 4.4 的证明过程中，我们注意到 $\rho(C^0_{1;4}) = \rho_{11}$ and $\rho(C^0_{1;6}) = \rho_{13}$。接下来的命题表明，这些只是一个更普遍现象中的特殊情况。

Pr命题 4.6. 对于 $s \geqslant 2$ 和 $k \geqslant 5$， $\rho(C^0_{1;2s}) = \rho_{2k+1}$ 当且仅当 $s = k - 3$.

证明。设定 $s = k - 3$。通过适当地应用 (3)、(9) 和 (17)，我们得到以下等式序列：

$$\begin{aligned}
\phi(C^0_{1;2k-6}) &= \lambda\phi(C_{2k-6}) - \phi(P_{2k-7}) \\
&= (\lambda\phi(P_{2k-6}) - \phi(P_{2k-7})) - \lambda\phi(P_{2k-8}) - 2\lambda \\
&= \phi(P_{2k-5}) - \lambda\phi(P_{2k-8}) - 2\lambda \\
&= (\phi(P_{k-4})\phi(P_{k-1}) - \phi(P_{k-5})\phi(P_{k-2})) - \lambda\left(\phi^2(P_{k-4}) - \phi^2(P_{k-5})\right) - 2\lambda \\
&= \phi(P_{k-4})\phi(P_{k-1}) - \lambda\phi^2(P_{k-4}) - \phi(P_{k-4})\phi(P_{k-3}) + \lambda\phi(P_{k-6})\phi(P_{k-4}) \\
&= \phi(P_{k-4})q(\lambda).
\end{aligned}$$

其中 $q(\lambda) = \phi(P_{k-1}) - \lambda\phi(P_{k-4}) - \phi(P_{k-3}) + \lambda\phi(P_{k-6})$。

通过（3），我们类似地将 $\phi(H_{2k+1})$ 分解为：

$$\begin{aligned}
\phi(H_{2k+1}) &= \phi(T_k)\left(\phi(T_{k+1}) - \phi(T_{k-1})\right) \\
&= \phi(T_k)\left(\phi(P_2)\phi(P_{k-1}) - \lambda\phi(P_2)\phi(P_{k-4}) - \phi(P_2)\phi(P_{k-3}) + \lambda\phi(P_2)\phi(P_{k-6})\right) \\
&= \phi(P_2)\phi(T_k)q(\lambda).
\end{aligned}$$

到目前为止，我们已经证明了 $\phi(C^0_{1;2k-6}) = \phi(P_{k-4})q(\lambda)$ 和 $\phi(H_{2k+1}) = \phi(P_2)\phi(T_k)q(\lambda)$。现在我们声称，

$$\rho(C^0_{1;2k-6}) = \rho_{2k+1} = q_1,$$

其中 q_1 是 $q(\lambda)$ 的最大根。事实上，

$$\rho(C^0_{1;2k-6}) > \rho(\phi(P_{k-4})) \qquad \text{and} \qquad \rho_{2k+1} > \rho(T_k) > \rho(P_2),$$

因为 $P_{k-4} \subset C^0_{1;2k-6}$ 和 $P_2 \subset T_k \subset H_{2k+1}$。因此，命题的“若”部分得证。

“仅若”部分可由“若”部分和引理 3.8(ii)轻易推出。事实上，

$$\rho(H_{2k'+1}) < \rho(C^0_{1;2s}) = \rho(H_{2s+7}) < \rho(H_{2k''+1})$$

对于 $k' > s + 3$ 和 $5 \leqslant k'' < s + 3$。 □

5 定理 1.1 的证明

我们首先回顾 Liu 和 Huang 提出的一个非常有用的引理。

引理 5.1. [17, 公式 (2) 和引理 3.1] 设 G 是与一个有 n 个顶点的 H 形图余谱的图。那么， G 中的四边形数量 $n_4(G)$ 至多为 1。此外， G 的度序列为 $(1_2, 2^{n-2})$，如果 $n_4(G) = 1$；而如果 $n_4(G) = 0$，则属于 $\{(0_1, 1_1, 2^{n-3}, 3_1), (1_2, 2^{n-6}, 3_2)\}$。

根据（4），树 H_{10}、H_{13} 和 H_{15} 都不是 DS。因此，我们需要考虑的最小阶的图是 H_{11}。对于这个特定的 H 形树，我们给出命题 5.2，其证明推迟至附录 B。

命题 5.2. 树 H_{11} 是 DS 的。

鉴于 (4) 和命题 5.2，从现在起我们可以假设 $n \geqslant 12$ 和 $n \notin \{13, 15\}$。我们的目标是证明，对于该范围内的 n， H_n 是 DS。

设 G 是一个图，使得 $\phi(G) = \phi(H_n)$。由命题 2.3 可知， G 必为二部图，且 $\nu_G = \varepsilon(G) + 1 = n(\geqslant 12)$。由命题 3.13 和 4.1 可推知， G 恰好包含 $\mathscr{G} := \mathscr{G}_{<2} \cup \mathscr{G}_2 \cup \mathscr{G}_{(2,\mathfrak{h})}$ 中的一个连通分支。由引理 2.4–2.7 可知， G 的每个连通分支都是树或单圈图。结合这一信息与 $\nu_G = \varepsilon_G + 1$，我们可以得出结论： G 的一个连通分支（记作 T）是树，其余连通分支（若有）则是单圈图。此外， G 没有连通分支是圈，否则对于某个适当的 k， $\phi(C_k)$ 应整除 $\phi(G)$，而这对 $n \neq 15$ （见命题 3.12）从不成立。

综合以上所有信息，并回想 $\mathscr{G}$ 仅包含树和圈，我们可以看出只有两种可能性：要么 $G = T$，要么 $G = T \cup CQ$，其中 CQ 是一个具有 $\rho(CQ) = \rho_n$ 的闭合奎普图。

情形 1. $G = T$. 根据 [17, 引理 3.1], 显然 $\Delta_T < 4$。因此，根据引理 2.7， $G = T$ 是一个开放魁普图。由于 $\nu(T) = n$ 以及 $M_2(T) = M_2(H_{11})$，根据引理 2.13(ii) 的前两部分，$\Delta_T = 3$ 和 $k_T = 2$。换言之， T 是一个类型为 $P^{m_1}_{,n_1\ n_2^{m_2},,a}$ 的开放魁普图。根据命题 2.12(ii)，$M_3(T) = M_3(H_{11})$；因此，根据推论 2.14， T 属于 $\mathcal{T}_{10} \cup \mathcal{T}_{11}$。

情况 1.1。 $T \in \mathcal{T}_8$。命题 4.2 确保 T 必然等于 H_n。我们将看到，后续两种情况实际上都不可能发生。

情况 1.2： $T \in \mathcal{T}_{11}$。在这种情况下， $T = P^{1}_{,n_1\ \ 2,n_2,a}$，其中某些 n_1、$n_2 \geqslant 2$ 和 $a \geqslant 5$。由于 $\nu_T \geqslant 12$，因此 $T'' := P^{1}_{,2\,22,,5}$ 是 T 的真子图。通过对 T 中一个度为 3 的顶点应用交错定理，我们得到 $\lambda_2(H_{11}) = \lambda_2(T) < 2$。因此，根据命题 4.1， $n \in \{12, 14\}$。计算 $\phi(T'')$ 和 $\phi(H_{11})$ 后，我们看到，这两个多项式的谱半径都是 $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 2$ 的最大根。因此，根据引理 2.8 和 3.8(ii)，我们得到

$$\rho_{14} < \rho_{12} < \rho_{11} = \rho(T'') < \rho(T) \in \{\rho_{12}, \rho_{14}\},$$

这与假设矛盾。

情况 2： $G = T \cup CQ$和 $\rho(G) = \rho(CQ)$。令 $\nu_1 = \nu_T$和 $\nu_2 = \nu_{CQ}$。显然， $\nu_1 + \nu_2 = n$。由于 G 是二部图， CQ具有偶数围长，并且根据命题 4.4，此围长 g 至少为 8。由引理 5.1可推得， G 的度序列要么为 $(3_1, 2^{n-3}, 1_1, 0_1)$，要么为 $(3_2, 2^{n-6}, 1_4)$。在分析这两种可能情况之前，我们注意到，无论哪种情况，根据命题 2.12(ii)，$(M_2(G)\ M_3(G)) = (M_2(H_n)\ M_3(H_n))$。如第 2 节中一样，我们令 $f(n) = (n^3 - 12n^2 + 35)/6$。

情况 2.1： G 的度序列为 $(3_1, 2^{n-3}, 1_1, 0_1)$。在此情况下， $G = P_1 \cup C^0_{\ell;n-\ell-1}$。借助命题 2.13(ii)，我们计算得

$$M_3(G) = \begin{cases} f(n)+1 & \text{if } \ell = 1, \\ f(n)+2 & \text{if } \ell \geqslant 2. \end{cases}$$

无论如何，由推论 2.14， $M_3(G) < M_3(H_n) = f(n) + 4$，这与 G and H_n 余谱的假设相矛盾。

情况 2.2： G 的度序列为 $(3_2, 2^{n-6}, 1_4)$。在这种情况下， T 中度为 3 的顶点数 k_T 至多为 1。遗憾的是， $M_2(G) = M_2(H_n)$ 并未对 T and CQ 施加任何限制；因此，我们需要比较 $M_3(G)$ 和 $M_3(H_n)$。

情况 2.2.1： $k_T = 0$。度序列和命题 3.7 所施加的限制得出

$$G = P_{\nu_1} \cup CQ, \qquad \text{where} \quad CQ = C^{0,m}_{n_1,n_2;g},\ \nu_1 \in \{2, 5\}, \quad \text{and} \quad g \geqslant 8.$$

设 $e_{i,j}$ 表示图 CQ中类型为 uv 且满足 $d(u) = i$ 和 $d(v) = j$ 的边数。令 $e_{3,3} = x$ 以及 $e_{1,2} = y$，显然 $x \in \{0, 1\}$ 和 $y \in \{0, 1, 2\}$。不难证明

$$e_{1,3} = 2 - y, \qquad e_{2,3} = 4 - 2x + y \qquad \text{and} \qquad e_{2,2} = \nu_2 + x - y - 6.$$

一个计数论证结合引理 2.13 的 (ii) 和 (iii) 得出

$$M_3(G) = \begin{cases} M_3(CQ) + M_2(CQ) = f(n) + x + y + 3 & \text{if } \nu_1 = 2; \\ M_3(CQ) + 4M_2(CQ) + 3\nu_2 = f(n) + x + y + 2 & \text{if } \nu_1 = 5. \end{cases} \tag{18}$$

情况 2.2.1.1： $\nu_1 = 2$。等式 $M_3(G) = M_3(H_n) = f(n) + 4$ 仅当 $(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ 时成立。若 $(x, y) = (1, 0)$，则 $CQ = C^0_{,1\,11,;n-4}$。在这种情况下， $P^3_{,4\,11,;8} \subset C^0_{,1\,11,,g}$ 并且，根据引理 2.8，

$$\rho_n = \rho(CQ) = \rho(C^{0,1}_{1,1,n-4}) > \rho(P^{3,4}_{1,1,8}) = 2.1267+ > \rho_{12} > \rho_n,$$

矛盾。

若 $(x, y) = (0, 1)$，则 $CQ \cong C^0_{,1\,t\,,;2s}$，其中 $t > 1$、 $s \geqslant 4$ 和 $1 < k \leqslant s$。然而，等式

$$\phi(H_n) = \phi(G) = \phi(P_2)\phi(C^{0,k}_{1,t,2s})$$

这与命题3.16矛盾。

情况 2.2.1.2： $\nu_1 = 5$。这一次，只有当 $(x, y) \in \{(0, 2), (1, 1)\}$ 时，等式 $M_3(G) = M_3(H_n)$ 和 (18) 才同时成立。

如果 $(x, y) = (0, 2)$，那么 $CQ \cong C^0_{,\ t_1\ ,\ t_2,\ 2s}$，其中 $1 < k \leqslant s$ 和 $t_1, t_2 > 1$。因此，图 CQ包含以下图作为真子图

$$K' := C^{0,4}_{2,2;8} \qquad \text{for } (k, s) = (4, 8) \qquad \text{or} \qquad K'' := P^{2,k}_{2,2,k+5} \quad \text{otherwise.}$$

现在可以看出， $\rho(K') > 2.17532 > \rho_n$；此外，由 $\nu_{K''} \leqslant n - 5$、引理 2.8和引理 2.10(ii)，

$$\rho(K'') > \rho(H_{n-7}) > \rho(H_n).$$

无论如何， $\rho(G) > \rho_n$ 与初始假设矛盾。

现在，假设 $(x,y)=(1,1)$。在这种情况下，$CQ\cong C^{0,\ 1\ 1}_{\ t\ ,\ ;\ 2s}$，其中 $s\geqslant 4$ 且 $t>1$。注意到 $K'''\coloneqq P^{2,\ 3\ 12,\ ;\ 6}\subset CQ$。由于 $\phi(K''')=\lambda(\lambda^2-1)(\lambda^2-2)(\lambda^4-5\lambda^2+2)$，我们得到$\rho(K''')=\rho_{11}$，并由引理 2.8 和 3.8(ii),

$$\rho_n=\rho(G)=\rho(CQ)>\rho(K''')=\rho_{11}>\rho_{12}\geqslant\rho_n,$$

这是不可能的。

情况 2.2.2：$k_T=1$。由 $T\in\mathscr{G}$ 可知，T 是类型为 $P^b_{a;b+c+1}$ 的 T 形树，其中$a\leqslant b\leqslant c$ 且 $\rho(T)<\mathfrak{h}$。因此,

$$G=P^b_{a;b+c+1}\cup C^0_{\ell;2s}.$$

我们用 $e_{i,j}(T)$（分别地，$e_{i,j}(CQ)$）表示 T（CQ）中类型为 $uv\,\text{with}\,d(u)=i$ 且 $d(v)=j$ 的边的数量。一旦我们设定 $e_{1,2}(T)=x$ 和 $e_{1,2}(CQ)=y$，便可得出:

$$\begin{aligned}
&e_{1,3}(T)=3-x, && e_{1,3}(CQ)=1-y,\\
&e_{2,3}(T)=x, && e_{2,3}(CQ)=2+y,\\
&e_{2,2}(T)=\nu_1-x-3, && e_{2,2}(CQ)=\nu_2-y-3.
\end{aligned}$$

显然，$0\leqslant x\leqslant 3$ 和 $0\leqslant y\leqslant 1$。由引理 2.13 可知,

$$\begin{aligned}
M_3(G)&=M_3(T)+M_3(CQ)+\nu_2M_2(T)+(\nu_1-1)M_2(CQ)\\
&=\frac{(\nu_1+\nu_2)^3-12(\nu_1+\nu_2)^2+35(\nu_1+\nu_2)+6(x+y)}{6}\\
&=f(n)+x+y.
\end{aligned}$$

由于 $M_3(H_n)=f(n)+4$，我们得到 $x+y=4$，这仅在 $(x,y)=(3,1)$ 时出现。$\mathscr{G}$ 中没有悬挂顶点与度为 3 的顶点相邻的 T 形图的子集为$\mathscr{P}\coloneqq\{P^3_{2;7},\,P^2_{2;c+3}\mid c>1\}$。因此，$T\in\mathscr{P}$和 $CQ=C^0_{\ell,2s}$，其中 $\ell>1$，因为 $y=1$。

现在，显然 $T\neq P^3_{2;7}$；事实上，$\phi(P^3_{2,7})=\phi(P_3)(x^6-6x^4+8x^2-2)$，但根据命题 3.7，$P_3$ 不能整除H_n。唯一的其他可能性是

$$G=P^2_{2,c+3}\cup C^0_{\ell,2s}\qquad\text{with } c>1,\ s\geqslant 4 \text{ and } \ell>1. \tag{19}$$

情况 2.2.2.1：整数 n 是偶数。由命题 2.17 可知，$\vartheta(G)=\vartheta(H_n)\in\{\pm1\}$。因此，若 (19) 成立，$T=P^2_{2,c+3}$ 的最低次项必须是非零常数。由命题 2.16 可推得，$\vartheta(T)\in\{\pm1\}$ 且 ν_1 是偶数。现在，由 $n=\nu_1+2s+\ell$可得 ℓ 也是偶数；因此，根据命题 2.15，$\vartheta(CQ)$ 应属于 $\{\pm4\}$，而由 (19) 可知，$\vartheta(CQ)=\vartheta(G)/\vartheta(T)$ 应属于 $\{\pm1\}$，这证明了这种情况不可能发生。

情形 2.2.2.2：整数 n 为奇数。令 $n=2k+1$。由于 $\nu_1\geqslant 5$ 和 $\nu_2\geqslant 10$，且 $n\neq 15$，因此 $k\geqslant 8$。由 $\phi(T)\mid\phi(H_n)$ 以及命题 3.10，我们得到 $c=k-5$，或者等价地，$T=P^2_{2,\ k-2}$。由此可得 $\nu_2=k+1$，因而 $2s<k$。在我们的假设下，$k\geq 8$和 $\ell>1$。于是，$2s<k<2k-6$ 和 $C^0_{1,\ 2s}\subset C^0_{\ell,\ 2s}$。结合引理 2.10(ii)和命题 4.6，我们得到

$$\rho(H_{2k+1})=\rho(C^0_{\ell,2s})>\rho(C^0_{1,2s})>\rho(C^0_{1,2k-6})=\rho(H_{2k+1}),$$

这是错误的。

这段漫长的分类讨论到此结束，也标志着证明结束。事实上，我们已经证明，若 G 和 H_n 与 $n\notin\{10,13,15\}$余谱，则 $G=H_n$。

6 结论

本文取得了若干关于递归图整除性的结果，重点研究了 H 形树 H_n ($n \geqslant 10$) 这一类，并探讨其中哪些树可由其邻接谱唯一确定。研究简单图领域中的整除性，或许有助于揭示一个颇为引人深思的一般性问题：哪些系数属于 $\mathbb{Z}$ 的首一多项式是简单图的特征多项式?

已知许多必要条件。例如，存在一个图 G，使得 $\phi(G) = p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i \in \mathbb{Z}[\lambda]$，当且仅当 $a_1 = 0$、$-a_2$ 为非负数，且 $-a_3$ 为偶数且非负（事实上，a_1、$-a_2$ 和 $-a_3$ 分别给出了 $A(G)$ 的迹、ε_G，以及图 G 中三角形数量的两倍）；此外，$p(\lambda)$ 的所有根都必须是实数（因为 $A(G)$ 是对称矩阵）。

即使将所有这些条件综合起来，它们仍远远不足以保证：该多项式

$$q(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^2 + 7\lambda^2 - 2$$

不是简单图的特征多项式。我们无需运行程序来计算所有阶和大小均为 6 的无三角形简单图的特征多项式，而可以使用命题 5.2：由于 $q(\lambda)\phi(P_5) = \phi(H_{11})$（事实上，我们使用了命题 3.7 来确定 $q(\lambda)$），存在一个图 G，使得 $\phi(G) = q(\lambda$，这将与 H_{11} 由其谱决定这一事实相矛盾。

更一般地，如果存在一对图（G', G），使得 $\phi(G')p(\lambda) = \phi(G)$，且 G 是 DS，那么多项式 $p(\lambda)$ 就不可能是简单图的特征多项式。

致谢

前两位作者受到中国国家自然科学基金（编号：11971274）的资助。第三位和第四位作者感谢 INDAM-GNSAGA 的支持。

参考文献

[1] A.E. Brouwer, A. Neumaier，谱半径介于 2 和 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 之间的图，Linear Algebra Appl. 114/115 (1989) 273–276.[2] S.M. Cioabˇa, E.R. van Dam, J.H. Koolen, J. Lee，关于图的谱半径和直径的渐近结果，Linear Algebra Appl. 432 (2010) 722–737.[3] D.M. Cvetkovi´c, M. Doob, I. Gutman，关于谱半径不超过 $(2+\sqrt{5})^{1/2}$ 的图，Ars Combin. 14 (1982) 225–239.[4] D.M. Cvetkovi´c, M. Doob, H. Sachs，《图的谱：理论与应用》，第三版，Joham Abrosius Barth Verlag，海德堡，1995.[5] E. R. van Dam, W. H. Haemers，哪些图由其谱唯一确定？Linear Algebra Appl. 373 (2003) 241–272.[6] E. R. van Dam, W. H. Haemers，图的谱刻画研究进展，Discrete Math. 309 (2009) 576–586。

[7] E. R. van Dam, R. E. Kooij，给定直径图的最小谱半径，Linear Algebra Appl. 423 (2007) 408–419.[8] X. Gao, J.F. Wang，给定直径树的谱判定，已投稿.[9] N. Ghareghani, G.R. Omidi, B. Tayfeh-Rezaie，指标不超过 $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 的图的谱刻画，Linear Algebra Appl. 420 (2007) 483–489.[10] N. Ghareghani, F. Ramezani, B. Tayfeh-Rezaie，与星形树余谱的图，Lin- ear Algebra Appl. 429 (2008) 2691–2701.[11] E. J. Farrell, J. M. Guo 和 G. M. Constantine，关于匹配系数，Discrete Math. 89 (1991) 203–210.[12] A.J. Hoffman, J. H. Smith. 关于拓扑等价图的谱半径，Recent Advances in Graph Theory，M. Fiedler 编，Academia Praha，1975，273–281.[13] S. Hu，关于 H 形树的谱刻画，Advances in Linear Algebra & Matrix Theory，4 (2014) 79–86.[14] J. Lan, L. Lu，谱半径至多为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图的直径，Linear Algebra Appl. 438 (2013) 4382–4407.[15] J.F. Lan, L.Y. Lu, L.S. Shi，直径为 $n-e$ 、使谱半径最小的图，Linear Algebra Appl. 437 (2012) 2823–2850.[16] J.F. Lan, L.S. Shi，阶为 n 且直径为 2($n-1$)/3 、使谱半径最小的图，Linear Algebra Appl. 486 (2015) 219–233.[17] F. Liu 和 Q. Huang，关于 Π 形树的谱刻画，Linear Multilinear Algebra 61(3) (2013), 355–367.[18] F. Liu, Q. Huang 和 Q. Liu，† 形树的谱刻画，Electron. J. Linear Algebra 22 (2011) 822–837.[19] M. Lepovi´c, I. Gutman，没有星形树是余谱的，Discrete Math. 242 (2002) 291–295.[20] A.J. Schwenk，计算图的特征多项式，载于：Graphs and Com- binatorics，Lect. Notes in Math.，406 (1973)，第 153–172 页.[21] A.J. Schwenk，几乎所有树都是余谱的，载于：F. Harary（编），New Directions in the Theory of Graphs，Academic Press，纽约，1973，第 275–307 页.[22] X.L. Shen, Y.P. Hou, Y.P. Zhang，图 Z_n 及与 Z_n 相关的一些图可由其谱判定，Linear Algebra Appl. 404 (2005) 58–68.[23] J.H. Smith，图的谱的一些性质，Combinatorial Structures and their Applications，Gordon and Breach，纽约，1970，第 403–406 页.[24] X. Sun，按谱半径对给定直径的图排序，硕士论文，清华大学，2008（中文）.[25] J.F. Wang, Q.X. Huang, X.H. An 和 F. Berlardo，关于谱半径接近 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图的一些注记，Linear Algebra Appl. 429 (2008) 1606–1618。

[26] W. Wang, C.X. Xu，关于 T 形树的谱刻画，Linear Algebra Appl. 414 (2006) 492–501。

[27] R. Woo, A. Neumaier，关于谱半径不超过 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图，Graphs Combin. 23 (2007) 713–726。

[28] X. Yuan, J. Shao, Y. Liu，阶为 n 且直径为 $n-4$ 的图的最小谱半径，Linear Algebra Appl. 428 (2008) 2840–2851。

附录

A 某些图的最低次项

来自 th 由等式 $\phi(P_0)=1$ 以及引理2.1，我们很容易得到以下命题 .

命题 A.1. 对于每个非负整数 k 和 $\epsilon\in\{0,1,2,3\}$,

$$\vartheta(P_{4k+\epsilon})=\begin{cases}1 & \text{if } \epsilon=0;\\ (2k+1)\lambda & \text{if } \epsilon=1;\\ -1, & \text{if } \epsilon=2;\\ -2(k+1)\lambda & \text{if } \epsilon=3.\end{cases}\tag{20}$$

此外，对于 $k\in\mathbb{N}$或（k， ϵ）=(0,3)。

$$\vartheta(C_{4k+\epsilon})=\begin{cases}-4k^2\lambda^2 & \text{if } \epsilon=0;\\ -2 & \text{if } \epsilon\in\{1,3\};\\ -4 & \text{if } \epsilon=2.\end{cases}\tag{21}$$

现在我们给出命题 2.15、2.16 和 2.17 的证明。它们的证明技巧基本相同：我们只需结合命题 A.1，使用引理 2.11 中给出的某个 Schwenk 公式。回顾一下，如果顶点 v 使得 $N_G(v)$ 包含一个悬挂顶点，则称其为准悬挂顶点。

命题 2.15 的证明。对于 $n=4s+2\epsilon_1$ 和 $g=4t-2\epsilon_2$，设 u 是 $G=C^0_{n,\ g}$ 中唯一的度为 3 的顶点，并设 v 是 $N_G(u)\setminus C_g$ 中唯一的顶点。对边 $e=uv$应用 (3)，我们得到 $\phi(C^0_{n,\ g})=\phi(C_g)\phi(P_n)-\phi(P_{g-1})\phi(P_{n-1})$。因此，$\vartheta(C^0_{n,\ g})$ 由多项式的最低次项给出

$$\vartheta(C_g)\vartheta(P_n)-\vartheta(P_{g-1})\vartheta(P_{n-1}).\tag{22}$$

现在，将表 1 各行中读出的 $\vartheta(C_g)$、$\vartheta(P_n)$、$\vartheta(P_{g-1})$ 和$\vartheta(P_{n-1})$ 的值代入 (22)，即可得到该结论；表 1 的每一行都是借助 (20) 和(21) 填写的。□

命题 2.16 的证明。设 T_n 中唯一度为 3 的顶点为 u，并设 $N_{T_n}(u)$ 中的一个准悬挂顶点为 v。对于边 uv，应用 Schwenk 公式 (3)，得到 $\phi(T_n)=(\lambda^2-1)(\phi(P_{n-2})-\lambda\phi(P_{n-5}))$。因此，$\vartheta(T_n)$ 等于 $\lambda\vartheta(P_{n-5})-\vartheta(P_{n-2})$ 的最低次项。现在，由命题 A.1，

$$\lambda\vartheta(P_{n-5})-\vartheta(P_{n-2})=\begin{cases}-2(s-1)\lambda^2+1 & \text{if } n=4s,\\ (2s+1)\lambda & \text{if } n=4s+1,\\ (2s-1)\lambda^2-1 & \text{if } n=4s+2,\\ -2(s+1)\lambda & \text{if } n=4s+3,\end{cases}$$

(ϵ_1, ϵ_2)	$\vartheta(C_g)$	$\vartheta(P_n)$	$\vartheta(P_{g-1})$	$\vartheta(P_{n-1})$
(0, 0)	$-4t^2\lambda^2$	1	$-2t\lambda$	$-2s\lambda$
(0, 1)	-4	1	$(2t+1)\lambda$	$-2s\lambda$
(1, 0)	$-4t^2\lambda^2$	-1	$-2t\lambda$	$(2s-1)\lambda$
(1, 1)	-4	-1	$(2t+1)\lambda$	$(2s-1)\lambda$

表 1：计算 $\vartheta(C^0_{4s-\epsilon_1,\ 4t+\epsilon_2})$所需的值

由此可立即得到（6）。 □

命题 2.17 的证明。对于 $n = 10$，由直接计算可得等式 (7) 成立。现在假设 $n = 4s + \epsilon > 10$。令 u 为 H_n 中两个度为 3 的顶点之一，并令 v 为 $N_{H_n}(u)$中的一个准悬挂顶点。对边uv应用 Schwenk 公式 (3)，得到

$$\phi(H_n) = (\lambda^2 - 1)\left(\phi\left(T_{n-2}\right) - \lambda\phi\left(T_{n-5}\right)\right)$$

（关于若干个 T_n 的定义，见 (5)）。因此， $\vartheta(G)$ 是多项式的最低次项

$$p(\lambda) := \lambda\vartheta\left(T_{n-5}\right) - \vartheta\left(T_{n-2}\right) = \begin{cases} -2(s-1)\lambda^2 + 1 & \text{if } n = 4s; \\ (2s+1)\lambda & \text{if } n = 4s+1; \\ (2s-1)\lambda^2 - 1 & \text{if } n = 4s+2; \\ -2(s+2)\lambda & \text{if } n = 4s+3. \end{cases}$$

多项式 $p(\lambda)$ 借助命题 2.16 计算得出。 □

B 树 $H_{11} = P^2,\ _{4\ 22},\ ,\ _7$ 是 DS

引理 B.1. 若连通图 G 与某个 H 形图余谱，则 G 本身也是 H 形图。

证明. 由引理 3.3]立即可得。 □

引理 B.2. 若 $\phi(G) = \phi(H_{11})$，则 G 是连通的。

证明. 通过直接计算，

$$\phi(H_{11}) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2(\lambda^2-3)(\lambda^4-5\lambda^2+2).$$

因此，这两个 H_{11}的谱 sp 中最大的两个特征值分别为 $\rho_{11} = (\sqrt{10+2\sqrt{17}})/2$ 和 $\lambda_2(H_{11}) = \sqrt{3}$。

令 $G_1, G_2, \ldots, G_i$ 为 G 的连通分支，并反设 $i > 1$。不妨设 $\rho(G_1) \geqslant \rho(G_2) \geqslant \cdots \geqslant \rho(G_i)$。由命题 2.3 可知， G 是二部图，且 $\nu_G = \varepsilon_G + 1 = 11$。于是， G 只含围长为偶数且不超过 10 的圈。由交错定理（即引理 2.9），$\sqrt{3} = \lambda_2(G) \geqslant \lambda_1(G_2)$。因此，只有 G_1 含有圈（否则 $\rho(G_2)$ 会大于 2）。我们先证明 G_1 必为单圈图。若 G_1 含有两个圈，那么 $i \geqslant 3$，且只有 G_i 可能是孤立点，因为 $\eta(G) = 1$。因此， $\nu_{G_1} \leqslant 8$。此外， G_1 的圈都不可能是四边形，否则 $C^0_{1;4} \subset G_1$，这意味着 $\rho_{11} = \rho(G_1) > \rho(C^0_{1;4}) = \rho_{11}$，与事实矛盾。这说明，非单圈的二部图 G_1 应含有两个共享 3 条或 4 条边的六边形；然而，无论哪种情况，其谱半径都会大于 ρ_{11}。

至此，我们已证明，若 G 不连通，则 $G = G_1 \cup G_2$，其中 G_1 是单圈图， G_2 是树。此外，由交错定理可知， G_2 要么是星形图 $K_{1,\,3}$ ，要么是路径 P_r，且 $r \leqslant 5$。由此可得， G_2 属于 $\{P_1, P_2, P_5\}$，因为 P_3、 P_4 和 $K_{1,\,3}$ 都不能整除 H_{11}。因此， $\nu_{G_1} \in \{6, 9, 10\}$。现在令 $\mathfrak{g}$ 为 G_1 的围长。我们已指出 $\mathfrak{g} \in \{4, 6, 8, 10\}$。

情形 1. $\mathfrak{g} = 4$。此情形不会出现，因为 G_1 至少有六个顶点，会真包含 $C^0_{1;4}$；我们已在上文解释过为何这是不可能的。

情形 2. $\mathfrak{g} = 6$。显然 $\nu_{G_1} \in \{9, 10\}$，因为 $G_1 \neq C_6$ 的指标为 2。由于 $\lambda_1(C^0_{1;6}) = \rho_{11}$，根据引理 2.8 $C^0_{1;6}$ 不能是 G_1 的真子图。因此，对于适当的 $k \in \{1, 2, 3\}$， G_1 应包含 $C^{0,\,\overset{k}{1\,1},\,,\,6}$。然而，这是不可能的，因为 $\min\left\{\lambda_1(C^{0,\,\overset{k}{1\,1},\,,\,6}) \;\middle|\; 1 \leqslant k \leqslant 3\right\} > 2{,}17 > \rho_{11}$。

情形 3. $\mathfrak{g} \in \{8, 10\}$。阶为 9 或 10 且围长属于 $\{8, 10\}$ 的单圈图属于集合

$$\mathcal{S} = \{C^0_{1;8}, C^0_{2;8}, C_{10}\} \cup \{C^{0,k}_{1,1;8} \mid 1 \leqslant k \leqslant 4\}.$$

$\mathcal{S}$ 中唯一指标为 $\tilde{\rho}$ 的图是 $C^{0,\,4\,11,\,;\,8}$；然而， G_1 不可能等于 $C^{0,\,4\,11,\,;\,8}$，因为 $\sqrt{2}$ 属于 $\mathrm{sp}(C^{0,\,4\,11,\,;\,8}) \setminus \mathrm{sp}(G)$；因此， $C^{0,\,4\,11,\,;\,8}$ 不整除 G。 □

我们现在已经具备证明命题 5.2 所需的全部工具。令 $cw_6(G)$ 表示图 G 中长度为 6 的闭游走的数量，并设 G 是一个与 H_{11} 余谱的图。显然， G 与 H_{11} 一样有 11 个顶点，而 H_{11} 是一个 $\mathcal{T}_{10}$ 类型的图（见图 3）。引理 B.1 和 B.2 保证 $\sim G$ 是一个 H 形图。由命题 2.12(ii) 和推论 2.14 可知， $G \in \mathcal{T}_{10} \cup \mathcal{T}_{11}$。在 [17, 第 6-7] 页中，证明了对于每一对满足 $\sim\nu_{G'} = \nu_{G''}$ 的 (G', G'')，均有 $cw_6(G') \neq cw_6(G'')$。因此，根据命题 2.3(v)，我们可以推得 $G \in \mathcal{T}_{10}$。证明的最后一步是注意到，在 $\mathcal{T}_{10}$ 中，唯一具有 11 个顶点的图是 H_{11}。□