arXiv:2305.02149v2 [math.GT] 3 Jun 2024

相对格罗莫夫半范数的巴瓦尔对偶

ALEXIS MARCHAND

摘要。固定一个相对同调类时，相对格罗莫夫半范数是比稳定交换子长度更精细的不变量。我们证明了有界上同调与相对格罗莫夫半范数之间的一个对偶结果，类似于关于稳定交换子长度的巴瓦尔对偶。我们给出该结果在群图中计算稳定交换子长度方面的一个应用。我们还说明，如何通过霍普夫公式的一个相对版本，将我们的对偶结果作纯代数解释。此外，我们证明，这一结果自然导出对 Calegari 关于稳定交换子长度与旋转拟态射之间联系的一项结果的推广。

1. 引言

稳定交换子长度，或 稳定交换子长度，是群的一种不变量，可以视为交换子子群上的一种同调 ℓ^1-范数。由于它与几何拓扑和群论中的各种主题相关，因此备受关注——关于全面综述，参见 Calegari 的著作 [8] 。然而，稳定交换子长度 事实证明很难计算：Calegari [9] 证明了稳定交换子长度在自由群中可计算且取有理值，而 Chen [14] 将这一结果推广到了某些群图，涵盖了此前多位作者的结果 [10, 13, 16, 40, 42], 但对于闭曲面群，稳定交换子长度的可计算性和有理性都尚属未知。

在 [34], 中，作者通过考察某些曲面嵌入是否对稳定交换子长度是等距的，来研究如何理解曲面群中的稳定交换子长度。该论文的一个结论是，关于自由群中稳定交换子长度的一些结果，只有在固定的相对同调类中才能推广到闭曲面群。更准确地说，作者将一条关于自由群中稳定交换子长度的结果推广为关于相对格罗莫夫半范数的结果。

相对格罗莫夫半范数可以定义为 ℓ^1在 $H_2(X,\gamma)$上的半范数，其中 X 是一个拓扑空间，而 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$ 是 X中的一组环路——完整定义见 §2。这一概念最早由 [34]引入，但其思想已隐含在 Calegari 的研究工作中（例如参见 [7, 注释 3。18]）。相对格罗莫夫半范数与稳定交换子长度 之间存在如下联系：

命题 A （格罗莫夫半范数与稳定交换子长度）。设 X 是一个道路连通拓扑空间，并设 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(\pi_1 X;\ \mathbb{Z})$ 是一个由映射 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$所表示的整数共轭类。那么

$$\mathrm{scl}_{\pi_1 X}([c]) = \frac{1}{4}\inf\left\{\|\alpha\|_1 \,\middle|\, \alpha \in H_2(X,\gamma;\mathbb{Q}),\ \partial\alpha = \left[\coprod S^1\right]\right\},$$

其中 $\partial\colon H_2(X,\ \gamma;\ \mathbb{Q}) \to H_1\left(\coprod S^1;\ \mathbb{Q}\right)$ 是对偶对的长正合列中的边界映射$(X,\ \gamma)$ (见命题2.9)。

这里的元策略是，先理解相对格罗莫夫半范数，再对 $H_2(X,\gamma)$ 取下确界，从而或许能够获得关于稳定交换子长度的信息。

日期：2024年6月4日。

稳定交换子长度研究中的一项开创性成果是发现了巴瓦尔对偶 [1], ，表明稳定交换子长度半范数的对偶空间可以用拟态来理解——参见 [8, §2。5] 了解更多详情。巴瓦尔对偶促成了关于稳定交换子长度的大量研究，其中最显著的是得出了各种谱隙结果 [2, 11, 16, 21, 28],，而且自然会问，在相对格罗莫夫半范数的背景下是否存在类似结果。结合若干众所周知的结果，我们证明有界上同调提供了这样一种类似结果：

定理 B (相对格罗莫夫半范数的巴瓦尔对偶)。 设 X 是一个可数 *CW* 复形，且 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$。给定一个实上同调类 $\alpha \in H_2(X, \gamma; \mathbb{R})$， α 的相对格罗莫夫半范数由下式给出

$$\|\alpha\|_1 = \sup \left\{ \frac{\langle u, \alpha \rangle}{\|u\|_\infty} \,\middle|\, u \in H_b^2(X; \mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \right\}.$$

本文的目的是沿三个不同方向应用定理B。

第一种情形是在群图的背景下，在这种情况下，我们能够利用定理B 以及 Bucher 等人关于有界上同调的等距嵌入定理 [5] 来证明顶点群在相对格罗莫夫半范数意义下是等距嵌入的：

定理 C (ℓ^1-群图中顶点群的等距嵌入)。 设 $\mathcal{G}$是一个底层图 Γ 有限、顶点群可数的群图$\{G_v\}_{v \in V(\Gamma)}$，且边群 $\{G_e\}_{e \in E(\Gamma)}$为可均群。固定一个顶点 v ，并考虑包含映射 $i_v : G_v \hookrightarrow \pi_1 \mathcal{G}$。那么，对于每个上同调类$[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G_v; \mathbb{Z})$，嵌入

$$i_{v*} : H_2(G_v, [c]; \mathbb{R}) \hookrightarrow H_2(\pi_1 \mathcal{G}, [i_v(c)]; \mathbb{R}).$$

关于 $\|\cdot\|_1$ 是等距的。

我们将在 §4 中证明，关于稳定交换子长度 的类似结论并不成立，但定理 C 仍可用于计算某些 HNN 扩张中的稳定交换子长度。例如，我们计算了 Dyck 曲面群中稳定交换子长度 的谱隙，并根据 Duncan–Howie 定理 [19]推导出它不是残余自由的。

第二个应用是通过霍普夫公式 对定理*B* 作纯代数诠释。我们将在定理 5.2 中证明，霍普夫公式存在一个相对版本：若 $G = F/R$ 是自由群 F的商空间，且共轭类 $[w]$ 在 G 中由 $\bar{w} \in F$表示，则存在一个同构

$$H_2(G, [w]; \mathbb{Z}) \cong \langle \bar{w} \rangle \, R \cap [F, F]/[F, R].$$

从这一角度出发，我们得到了定理 B 的一种新诠释：

定理 D （通过霍普夫公式得到的巴瓦尔对偶）。 考虑一个整系数类$\alpha \in H_2(G, [w]; \mathbb{Z})$，它由交换子的乘积表示

$$[\bar{a}_1, \bar{b}_1] \cdots [\bar{a}_k, \bar{b}_k] \in \langle \bar{w} \rangle \, R \cap [F, F],$$

¯并令 a_i 和 b_i 分别为 $\bar{a}_i$ 和 b_i 在 $F \to G$ 下的像。
那么， α （视为有理类）的格罗莫夫半范数为

$$\|\alpha\|_1 = \sup \left\{ \frac{1}{\|\psi\|_\infty} \left(\psi(a_1, b_1) + \psi\left(a_1 b_1, a_1^{-1}\right) + \psi\left(a_1 b_1 a_1^{-1}, b_1^{-1}\right) + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \psi\left([a_1, b_1] \cdots [a_{k-1}, b_{k-1}]\, a_k b_k a_k^{-1}, b_k^{-1}\right)\right) \,\middle|\, \psi : G^2 \to \mathbb{R} \text{ } a \text{ } \textit{bounded 2-cocycle} \right\}.$$

我们的第三个应用推广了 Calegari 的一项结果 [7]，该结果揭示了稳定交换子长度与紧双曲曲面中的旋转拟态射之间的联系 S。特别地，Calegari 证明，当 $\partial S \neq \varnothing$时，任何浸入的容许曲面都是稳定交换子长度的极值曲面；若这样的曲面存在，则旋转拟态射也是极值的 [7, 命题 3.8]。他还证明，在闭曲面的情形下，对于所有有理链，浸入的容许曲面都存在 [7, 定理 C]，，并暗示他的论证表明，浸入的容许曲面对于相对格罗莫夫半范数也是极值的 [7, 注 3.18]。我们将这一点明确阐述，并在相对格罗莫夫半范数的语境中，使用有界欧拉类作为旋转拟态射的对应物：

定理E （有界欧拉类的极值性）。设 $\gamma : \coprod S^1 \to S$ 是紧双曲曲面 S中的一组测地环路。设 $\alpha \in H_2(S, \gamma; \mathbb{Q})$由正浸入 $f : (\Sigma, \partial\Sigma) \looparrowright (S, \gamma)$作射影表示。那么

$$\|\alpha\|_1 = \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{n(\Sigma)} = -2\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S), \alpha \right\rangle,$$

其中欧$_b^{\mathbb{R}}(S) \in H_b^2(S; \mathbb{R})$ 是实有界欧拉类 S的。

换言之，f 是极值曲面，而 $-$欧$_b^{\mathbb{R}}(S)$ 是α的极值类。特别地，$\|\alpha\|_1 \in \mathbb{Q}$。

论文提纲。我们在第 2 节开始，引入相对于一族环路的空间同调以及相关的 ℓ^1-半范数；我们证明它可以得到拓扑解释，并推导出命题 A，该命题将其与稳定交换子长度联系起来。随后，我们在第 3 节展示有界上同调如何给出巴瓦尔对偶的同调版本，即定理 B。我们在第 4 节将其首次应用于群图的语境中，得到定理 C。在第 5节中，我们证明相对霍普夫公式，并得到定理 D。最后，第 6 节专门讨论相对格罗莫夫半范数与有界欧拉类之间的联系，并导出定理 E。

虽然第2 节和第3 节奠定了本文的基础，但第4节、第5节和第6 节可以彼此独立阅读。

致谢。我谨向导师 Henry Wilton 致谢，感谢他与我进行了许多富有帮助的讨论。我也由衷感谢 Pierre de la Harpe，他对本文提出的详尽意见极大地提升了论述的清晰度。本研究由英国工程与自然科学研究委员会博士生奖学金资助。

2. 相对格罗莫夫半范数

格罗莫夫半范数将作为衡量相对同调类复杂度的标准。我们从两个角度来考察它：首先将其视为一个 ℓ^1-半范数，其次将其视为表示给定类的曲面的最小复杂度的度量。我们将证明，对于有理类，这两个角度是一致的。对于绝对同调，这一点早已为人所知 [8, §1.2.5], 我们将先前的论证推广到相对情形。

2.a.1-链的共轭类。设 X 是一个道路连通拓扑空间，并且 $G = \pi_1 X$。环路的自由同伦类 $S^1 \to X$ 与 $\pi_1 X$的元素的共轭类之间存在一一对应。本文关注有限个环路的集合 $\coprod S^1 \to X$的自由同伦类；如下文所述，它们可以用 $\pi_1 X$上的某些 1-链上同调类来编码。

固定一个系数环 $R = \mathbb{Z}$ or $\mathbb{Q}$ or $\mathbb{R}$。我们用 $C_n(G; R)$ 表示 G 上系数取自 R 的 n-链群：

$$C_n(G; R) \coloneqq \bigoplus_{g_1, \ldots, g_n \in G} R(g_1, \ldots, g_n).$$

这些构成一个链复形 $C_*(G;R)$，其边界映射 $d_n\colon C_n(G;R)\to C_{n-1}(G;R)$ 定义如下

$$\begin{aligned} d_n(w_1,\dots,w_n) \coloneqq{}& (w_2,\dots,w_n)-(w_1w_2,w_3,\dots,w_n)+(w_1,w_2w_3,\dots,w_n)\\ &-\cdots+(-1)^{n-1}(w_1,\dots,w_{n-2},w_{n-1}w_n)+(-1)^n(w_1,\dots,w_{n-1}). \end{aligned}$$

链复形的同调 $C_*(G;\ R)$ 是群同调 $H_*(G;\ R)$。参见[43, §6。5] 了解更多详情：我们的 $C_*(G;\ R)$ 是 $\mathbb{Z}G$-模 R(带有平凡的 G-作用）与 G的巴尔分解的张量积。

我们还将使用以下记号：

- $Z_n(G;R)\coloneqq\operatorname{Ker}(d_n)\subseteq C_n(G;R)$ is the group of n-*cycles*.
- $B_n(G;R)\coloneqq\operatorname{Im}(d_{n+1})\subset Z_n(G;R)$ is the group of n-*boundaries*.

现在我们聚焦于 1-链，即 $C_1(G;R)=\bigoplus_{g\in G}Rg$ 的元素。1-链 $c=\sum_g\lambda_g g$（其中 $\lambda_g\in R$ 对于 $g\in G$）的支集是有限集合 $\operatorname{Supp}c\coloneqq\{g\in G\mid\lambda_g\neq 0\}$。

我们考虑由形如 $(w-w^t)$ 的元素张成的 $C_1(G;R)$ 的子-R-模 $K(G;R)$，其中 $w,t\in G$，这里我们记 $w^t=t^{-1}wt$。

注 2.1。 $K(G;\ R)\subseteq B_1(G;\ R)\subseteq Z_1(G;\ R)=C_1(G;\ R)$。

证明。 等式 $Z_1(G;\ R)=C_1(G;\ R)$ 是由以下事实得到的：$d_1=0$；而包含关系 $B_1(G;\ R)\subseteq Z_1(G;\ R)$ 是因为 $C_*(G;\ R)$ 是一个链复形。还需证明 $K(G;R)\subseteq B_1(G;\ R)$。这由以下计算得出，其中 $w,\ t\in G$：

$$\begin{aligned} d_2\left(\left(t^{-1},wt\right)+(w,t)-\left(t^{-1},t\right)-(1,1)\right) &= \left(wt-w^t+t^{-1}\right)+(t-wt+w)\\ &\quad-\left(t-1+t^{-1}\right)-(1-1+1)\\ &= w-w^t. \end{aligned}$$

□

定义2.2。 在 G 上取系数于 R 的 R-模链的共轭类是商空间

$$C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)\coloneqq C_1(G;R)/K(G;R).$$

我们还将 $B_1^{\mathrm{conj}}(G;\ R)$ 在 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\ R)$ 中的 $B_1(G;\ R)$ 的像 —— $B_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$ 中的元素称为 边界的共轭类[1]。

我们用 $\pi\colon C_1(G;R)\twoheadrightarrow C_1^{\mathrm{conj}}(G;\ R)$ 表示该投影。给定一个 1-链$c\in C_1(G;R)$，记 $[c]\coloneqq\pi(c)\in C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$。

注意，这里有一个新的链复形

$$\cdots\xrightarrow{d_{n+1}}C_n(G;R)\xrightarrow{d_n}\cdots\xrightarrow{d_3}C_2(G;R)\xrightarrow{d_2^c\coloneqq\pi\circ d_2}C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)\xrightarrow{d_1=0}C_0(G;R),$$

我们将其记作 $C_*^{\mathrm{conj}}(G;R)$。事实上，这个链复形可用于计算 G的第一同调：

注记 2.3. 存在一个同构 $H_1(G;R)\cong C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)/B_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$。

证明。 存在一个具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} C_2(G;R) & \xrightarrow{d_2} & C_1(G;R) & \longrightarrow & H_1(G;R) & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow\pi & & \downarrow\pi_* & & \\ C_2(G;R) & \xrightarrow{d_2^c} & C_1^{\mathrm{conj}}(G;R) & \to & H_1\left(C_*^{\mathrm{conj}}(G;R)\right) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

[1]与 [8, 定义 2.78], 进行比较，其中 Calegari 引入了 $B_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$的一个商空间。

给定 $\alpha \in \operatorname{Ker}\ \pi_* \subseteq H_1(G;\ R)$，取 $a \in C_1(G;\ R)$，使其在 $C_1(G;R)\ \to H_1(G;R)$ 下映射到 α。于是 $\pi(a)\ \in \operatorname{Im}(d_2^{\mathrm{conj}})$，也就是说，存在 $b \in C_2(G;\ R)$，使得 $a - d_2 b \in \operatorname{Ker}\ \pi = K(G;R)$。但是 $K(G;R)\ \subseteq B_1(G;\ R)\ = \operatorname{Im}\ d_2$（见注 2.1），所以 $a \in \operatorname{Im}\ d_2$ 且 $\alpha = 0$。因此，$\pi_*\colon\ H_1(G;\ R)\ \to H_1\left(C_*^{\mathrm{conj}}(G;R)\right)$ 是一个同构。由于 $H_1\left(C_*^{\mathrm{conj}}(G;R)\right) \cong C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)\ /B_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$，这就证明了该结论。 □

2.b. 链的共轭类的标准形式。 现在，我们为 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$ 中的每个链的共轭类，在 $C_1(G;R)$ 中给出一个具有自然拓扑对应物的标准代表元。

这个标准代表元在重排与共轭意义下是唯一的，我们将使用以下引理来证明其唯一性：

引理 2.4。 设 $\kappa \in K(G;R)$。假设 支撑κ 中不存在一对不同的共轭元素。那么 $\kappa = 0$。

证明。 根据定义， κ 可以写成线性组合。

$$(*) \qquad \kappa = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(w_i - w_i^{t_i}\right),$$

对于 λ_1、……、$\lambda_r \in R \smallsetminus \{0\}$、 w_1、……、$w_r \in G$、 t_1、……、$t_r \in G$，并且对所有 i 均有 $w_i \neq w_i^{t_i}$。我们选取一个分解 (*)，使得 r 最小。反设 $\kappa \neq 0$。特别地， $r \geq 1$ 且 $\operatorname{Supp}\kappa \neq \varnothing$。重新排序后，可假设 w_r 和 $w_r^{t_r}$ 中至少有一个属于 $\operatorname{Supp}\kappa$。然而，$\operatorname{Supp}\kappa$ 中没有一对不同的共轭元素。因此，不失一般性，可假设 $w_r \in \operatorname{Supp}\kappa$ 且 $w_r^{t_r} \notin \operatorname{Supp}\ \kappa$。现在定义

$$I_1 := \left\{i < r \;\middle|\; w_i = w_r^{t_r}\right\},$$
$$I_2 := \left\{i < r \;\middle|\; w_i^{t_i} = w_r^{t_r}\right\}.$$

集合 I_1 和 I_2 不相交，因为对于所有 i，$w_i \neq w_i^{t_i}$；我们还设 $I_0 := \{1, \ldots, r-1\} \smallsetminus (I_1 \amalg I_2)$，使得 I_0, I_1, I_2 构成 $\{1, \ldots, r-1\}$ 的一个划分。由于 $w_r^{t_r}$ 在 κ 中的系数为零，我们有

$$\lambda_r = \sum_{i \in I_1} \lambda_i - \sum_{i \in I_2} \lambda_i.$$

因此，对每个 $i \in \{1, \ldots, r\}$，令 $p_i = \left(w_i - w_i^{t_i}\right)$，我们可以将其改写为

$$(\dagger) \qquad \kappa = \sum_{i \in I_0} \lambda_i p_i + \sum_{i \in I_1} \lambda_i (p_i + p_r) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i (p_i - p_r).$$

现在注意：

- For $i \in I_1$, $p_i + p_r = w_r - w_i^{t_i} = w_r - w_r^{t_r t_i}$.
- For $i \in I_2$, $p_i - p_r = w_i - w_r = w_i - w_i^{t_i t_r^{-1}}$.

因此，(†) 是 κ 的一个分解，其形式为 (*)，且至多含有 $|I_0| + |I_1| + |I_2| = r - 1$ 项。这与 r 的极小性矛盾，因此 $\kappa = 0$。 □

现在我们可以得到标准形式：

引理 2.5 (链的共轭类的标准形式)。 设 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G;R)$。(i) 存在一个 1-链

$$c_0 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i \in C_1(G;R),$$

使得 $[c_0] = [c]$ 属于 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\ R)$，其中 $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in R \smallsetminus \{0\}$，并且 w_1、…、$w_d \in G$ 两两不共轭。

(ii) 假设 $c_0' = \sum_{i=1}^{d'} \lambda_i' w_i' \in C_1(G;R)$ 也满足 $[c_0] = [c_0']$，其中w_1'、…、$w_{d'}'$两两不共轭。那么 $d = d'$，并且存在一个置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_d$以及元素 $t_i \in G$，使得 $w_{\sigma(i)}' = w_i^{t_i}$，且对所有 i都有 $\lambda_{\sigma(i)}' = \lambda_i$。

P屋顶。 **(i)** 写作 $c = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i \in C_1(G;\, R)$，其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in R \smallsetminus \{0\}$ 且$w_1, \dots, w_d \in G$。此外，假设 d 在类 $[c]$的所有代表元 c 中是极小的。如果存在 $j \neq k$ 使得对于某个$t \in G$，有 $w_j = w_k^t$，那么

$$c \equiv (\lambda_j + \lambda_k)\, w_j + \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j,k}} \lambda_i w_i \mod K(G;R),$$

这与 d的极小性矛盾。因此，任意两个 w_i都不共轭，正如所需。

(ii) 我们对 $d + d'$ 进行归纳法。若 $d + d' = 0$，则 $c_0 = 0 = c_0'$。假设 $d + d' \geq 1$，并考虑 $\kappa := c_0 - c_0' \in K(G;R)$。若 $\kappa = 0$，则$c_0 = c_0'$，无需证明；否则，引理 2.4 表明，在支撑 κ 中存在一对不同的共轭元素。但支撑$\kappa \subseteq \{w_i\}_{1 \leq i \leq d} \cup \{w_i'\}_{1 \leq i \leq d'}$。根据对 w_i 和 w_i' 的假设，这意味着某个 w_i 与某个 w_i' 共轭。重新标记后，我们可以假设 w_d 与 $w_{d'}'$ 共轭。接下来我们考虑

$$c_1 := (\lambda_d - \lambda_{d'}')\, w_d + \sum_{i<d} \lambda_i w_i \quad \text{and} \quad c_1' := \sum_{i<d'} \lambda_i' w_i'.$$

注意到 $c_1 \equiv c_1' \mod K(G;R)$，因此归纳假设适用于$c_1$ 和 c_1'。若 $\lambda_d \neq \lambda_{d'}'$，则可推得 w_d 与某个满足 $i < d'$ 的 w_i' 共轭，因此 $w_{d'}'$ 与 w_i' 共轭，这就产生了矛盾。因此，$\lambda_d = \lambda_{d'}'$，结论由将归纳假设应用于 c_1 和 c_1' 得出。□

注 2.6。 **(i)** 一个群元素可以看作 $C_1(G;\ \mathbb{Z})$ 中的一个元素，而链的共轭类是群元素共轭类的推广，具体来说，对于 $w \in G$，引理 2.5 蕴含 $\pi^{-1}([w]) \cap G$ 恰好是 w 在 G中的共轭类。

(ii) $K(G;\ R)$ 在 1-链上给出的等价关系应被视为（自由）同伦的代数类比。这与 $B_1(G;\ R)$给出的等价关系相平行，后者是同调的代数类比。因此，注 2.1 是这样一个事实的代数表述：同伦映射在同调中也代表同一个上同调类。

现在我们将 G 视为路径连通空间 X的基本群。取一个整数共轭类 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$，并令 $c_0 = \sum_i \lambda_i w_i \in C_1(G;\mathbb{Z})$为引理 $[c]$ 2.5 给出的标准代表元。对于每个 i，取一个环路$\gamma_i : S^1 \to X$，其在 X 中的自由同伦类对应于$w_i^{\lambda_i}$在 G中的共轭类，并考虑映射

$$\gamma := \coprod_i \gamma_i : \coprod_i S^1 \to X.$$

由引理 2.5(ii)可知，自由同伦类 $[\gamma]$ 的 γ 仅取决于上同调类 $[c]$。若 Ξ 是由两两不同伦的定向环路组成的有限无序集合的自由同伦类集合 $\coprod S^1 \to X$，则这定义了一个映射

$$C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z}) \to \Xi$$

由 $[c] \mapsto [\gamma]$ 给出。我们将称映射 γ 表示 共轭类 $[c]$。

反过来，考虑映射 $\gamma:\coprod S^1\to X$ 的自由同伦类，其分支为 $\{\gamma_i:S^1\to X\}_i$。对于每个 i，选取一个元素 $w_i\in G$，使其共轭类对应于 γ_i 的自由同伦类。将 γ 的自由同伦类映至 $[\sum_i w_i]\in C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$，即可定义上述构造的映射 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})\to\Xi$ 的右逆。

因此，映射 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})\to\Xi$ 是满射，但请注意，它并非单射：给定 $w\in G\smallsetminus\{1\}$ 和 $\lambda\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{1\}$，共轭类 $[\lambda w]$ 和 $\left[w^{\lambda}\right]$ 彼此不同，但它们由同一个环路（的同伦类）$\gamma:S^1\to X$表示。

注 2.7。稳定交换子长度的代数定义（稳定交换子长度）是将交换子乘积视为函数；可以证明该定义可扩展至 $G\to[0,\infty]$，然后通过线性性扩展至 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$—见 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{R})$—参见 [8, §2。6]。对我们而言，稳定交换子长度 将由下文命题 A 所给出的拓扑解释来定义；这一种定义自然适用于 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$中的上同调类。

2.c. 空间关于一条链的同调。设 $\gamma:\coprod S^1\to X$ 是一个有限的（无序）环路集。我们将 X_γ 记为 γ: 的映射柱。

$$X_\gamma:=\left(X\amalg\left(\coprod S^1\times[0,1]\right)\right)/\sim,$$

其中，$\sim$是由 $(u,0)\sim\gamma(u)$（$u\in\coprod S^1$）生成的等价关系。存在一个嵌入 $\coprod S^1\hookrightarrow X_\gamma$，由 $u\mapsto(u,1)$ 给出；我们将 $\coprod S^1$ 与其在此嵌入下的像视为相同。

定义 2.8。系数环为 $R=\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$或 $\mathbb{R}$时，偶对 (X,γ) 的同调定义为偶对 $\left(X_\gamma,\coprod S^1\right)$的奇异同调：

$$H_*(X,\gamma;R):=H_*\left(X_\gamma,\coprod S^1;R\right).$$

我们注意到，偶对 $\left(X_\gamma,\coprod S^1\right)$ 的同伦类型——因此同调 $H_*(X,\gamma)$——仅取决于 γ 的自由同伦类。

写出这对 (X,γ) 的长正合列很有用：

命题 2.9。设 X 是一个拓扑空间，且 $\gamma:\coprod S^1\to X$。那么存在一个正合列

$$0\to H_2(X;R)\to H_2(X,\gamma;R)\xrightarrow{\partial}H_1\left(\coprod S^1;R\right)\xrightarrow{\gamma_*}H_1(X;R).$$

证明。这只是这对 $\left(X_\gamma,\coprod S^1\right)$的长正合列，再加上 X_γ 变形收缩到 X [27, p.2]。□

现在我们在几个特殊情形下计算 $H_*(X,\gamma)$：

例 2.10。 (i) 若 γ 是空环路集，则

$$H_*(X,\gamma;R)\cong H_*(X;R).$$

(ii) 若 γ是一个嵌入 $\coprod S^1\hookrightarrow X$，则对 $\left(X_\gamma,\coprod S^1\right)$ 作变形收缩可得到 $\left(X,\gamma\left(\coprod S^1\right)\right)$，因此存在一个同构

$$H_*(X,\gamma;R)\cong H_*\left(X,\gamma\left(\coprod S^1\right);R\right).$$

一般而言，仍然存在一个态射 $H_*(X,\gamma)\to H_*\left(X,\gamma\left(\coprod S^1\right)\right)$ 它由压缩映射柱得到，但这可能不是一个同构，例如下面的条目 (iii)所示。

(iii) 若 $\gamma:S^1\to X$ 是可缩环路，则商空间 X_γ/S^1 与 $X\vee S^2$ 同伦等价，将这对空间压缩后得到

$$H_*(X,\gamma;R)\cong H_*(X;R)\oplus H_*\left(S^2;R\right).$$

(iv) 假设 $\gamma: S^1 \to X$ 有理同调平凡，即 $\gamma_*: H_1\left(S^1; \mathbb{Q}\right) \to H_1(X; \mathbb{Q})$ 为零。那么，命题 $\gamma_*: H_1\left(S^1; R\right) \to H_1(X; R)$ 的正合列中的映射2.9 的核为$q\left[S^1\right]$，其中某个 $q \in R$，因此边界映射 ∂ 的像同构于 R，从而得到一个分裂短正合序列，以及一个同构

$$H_2(X, \gamma; R) \cong H_2(X; R) \oplus R.$$

注意，存在一个自然同构。

$$H_*(X, \gamma; \mathbb{R}) \cong H_*(X, \gamma; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

从而我们可以将 $H_*(X, \gamma; \mathbb{Q})$ 视为 $H_*(X, \gamma; \mathbb{R})$ 的子集。我们称 $\alpha \in H_*(X, \gamma; \mathbb{Z})$ 是一个整系数类，而 $\alpha \in H_*(X, \gamma; \mathbb{Q})$ 是有理的，$\alpha \in H_*(X, \gamma; \mathbb{R})$ 是实的。

定义 2.11. 设 G 为一个群，X 为一个 $K(G,1)$ 空间。给定 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G; \mathbb{Z})$，我们定义

$$H_*(G, [c]; R) := H_*(X, \gamma; R),$$

其中 $\gamma: \coprod S^1 \to X$ 是一个表示 $[c]$ 的映射，如 §2.b中所述。

注意，X 的同伦类型由 G唯一确定，而 γ的自由同伦类由 $[c]$决定，因此群 $H_*(G, [c]; R)$仅取决于 G和上同调类 $[c]$。

当 $[c] = 0$ 对应于 γ 为空环路集时，因此 $H_*(G, 0; R) \cong H_*(G; R)$ 根据例2.10(i)。

2.d. **实向量空间中的有理点。** $H_2(X, \gamma)$ 中实类与有理类之间的差异将在后文发挥作用，因此我们先稍作偏离，介绍一些与此相关的一般术语。

定义 2.12。设 V是一个 $\mathbb{R}$-向量空间。V上的有理结构是对 V的基的等价类的选择，其中，若一个基中的每个向量在另一个基中具有有理坐标，则称这两个基等价。等价类中的任意基称为有理基。

给定 V上的有理结构，有理点是 V中在某个有理基下具有有理坐标的向量。V 的有理点集 $V_{\mathbb{Q}}$ 自然构成一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，并满足 $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。事实上，$V$上的有理结构等价地可定义为选择 V的一个 $\mathbb{Q}$-子空间 $V_{\mathbb{Q}}$，使得 $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。

例 2.13。 空间 $\mathbb{R}^n$ 具有由标准基的等价类给出的有理结构，其有理点集合为 $\mathbb{Q}^n$。

A有理子空间 W 是由有理点张成的 $\mathbb{R}$-子空间。它自然地继承自 V 的有理结构。

如果 V 和 W 是配备有理结构的 $\mathbb{R}$-向量空间，则有理线性映射 $f: V \to W$ 是指这样一种线性映射：V 的有理基中的每个向量在 W的有理基下的像都具有有理坐标。这意味着，f 的核和像分别是 V和 W 的有理子空间。

设 $C_*^{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个链复形，并且 $C_*^{\mathbb{R}} = C_*^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。因此，每个向量空间 $C_n^{\mathbb{R}}$ 都具有有理结构，其有理点集为 $C_n^{\mathbb{Q}}$。边界映射 $d_n: C_n^{\mathbb{R}} \to C_{n-1}^{\mathbb{R}}$ 是有理的，而 n-循环所构成的空间 $Z_n^{\mathbb{R}} = \operatorname{Ker} d_n$ 是一个有理子空间。特别地，$Z_n^{\mathbb{R}}$ 的有理点集就是 $C_*^{\mathbb{Q}}$ 的 n-循环空间 $Z_n^{\mathbb{Q}}$。此外，存在一个同构

$$H_n\left(C_*^{\mathbb{R}}\right) \cong H_n\left(C_*^{\mathbb{Q}}\right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

赋予 $H_n\left(C_*^{\mathbb{R}}\right)$ 一个有理结构，其有理点集合为 $H_n\left(C_*^{\mathbb{Q}}\right)$。

下面的引理说明，表示有理同调类的任意实系数循环都可以用有理系数循环逼近：

引理 2.14 (同调中的有理逼近)。 设 $C_*^{\mathbb{Q}}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的链复形，且 $C_*^{\mathbb{R}} = C_*^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。设 $\|\cdot\|$ 是 $C_*^{\mathbb{R}}$上的范数。考虑一个实 n-循环$a \in Z_n^{\mathbb{R}}$，其同调类 $[a]$ 是有理的：

$$[a] \in H_n\left(C_*^{\mathbb{Q}}\right) \subseteq H_n\left(C_*^{\mathbb{R}}\right).$$

那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个有理 n-循环 $a' \in Z_n^{\mathbb{Q}}$，使得

- $[a] = [a']$ *in* $H_n\left(C_*^{\mathbb{R}}\right)$, *and*
- $\|a - a'\| \leq \varepsilon$.

证明。 我们沿用 Calegari 的一个论证 [8, 注 1。5]。注意，自然投影映射

$$p : Z_n^{\mathbb{R}} \to H_n\left(C_*^{\mathbb{R}}\right)$$

是有理的。因此，由于 $[a]$ 是 $H_n\left(C_*^{\mathbb{R}}\right)$中的一个有理点，仿射子空间$p^{-1}([a])$ 是 $Z_n^{\mathbb{R}}$中的有理子空间，所以它的有理点都包含在 $Z_n^{\mathbb{Q}}$中。通过将 $Z_n^{\mathbb{R}}$ 限制在包含 a的有限维有理子空间中，我们可以假设 $Z_n^{\mathbb{R}}$ 是有限维的；因此有理点是稠密的。由于实 n-循环 a 位于 $p^{-1}([a])$ 中，对于 $\|\cdot\|$，存在一个有理的 $a' \in p^{-1}([a])$，它可以任意接近 a 。这个有理 n-循环 a' 位于 $Z_n^{\mathbb{Q}}$ 中，并且与 a 同调等价，正如所需。□

2.e. 作为 ℓ^1-半范数的格罗莫夫半范数。现在我们给出格罗莫夫半范数的第一个定义。

给定 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$，回顾一下， $H_*(X_\gamma; \mathbb{R})$ 是奇异链复形 $C_*^{\mathrm{sg}}(X_\gamma;\mathbb{R})$ 的同调。每个 $\mathbb{R}$-向量空间 $C_n^{\mathrm{sg}}(X_\gamma; \mathbb{R})$ 都可以赋予如下定义的 ℓ^1-范数。

$$\left\|\sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma\right\|_1 := \sum_\sigma |\lambda_\sigma|,$$

对于每个奇异 n-单形 σ，有 $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$ $\Delta^n \to X_\gamma$。商空间

$$C_n^{\mathrm{sg}}\left(X_\gamma, \coprod S^1; \mathbb{R}\right) := C_n^{\mathrm{sg}}\left(X_\gamma; \mathbb{R}\right) / C_n^{\mathrm{sg}}\left(\coprod S^1; \mathbb{R}\right)$$

继承了一个商半范数，我们也记作 $\|\cdot\|_1$，其定义为

$$\|a\|_1 := \inf_{\underline{a} \in a} \|\underline{a}\|_1,$$

其中，下确界取遍所有表示 $a \in C_n^{\mathrm{sg}}\left(X_\gamma, \coprod S^1; \mathbb{R}\right)$ 的绝对 n-链 $a \in C_n^{\mathrm{sg}}(X_\gamma;\mathbb{R})$。$\|\cdot\|_1$ 的限制在相对 n-循环的子空间 $Z_n^{\mathrm{sg}}\left(X_\gamma, \coprod S^1; \mathbb{R}\right)$ 上定义了一个半范数，该半范数下降到同调上，仍记作 $\|\cdot\|_1$:

定义 2.15。 设 X 为一个拓扑空间，且 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$。 $H_n(X, \gamma;\mathbb{R})$ 上的相对格罗莫夫半范数 定义为

$$\|\alpha\|_1 := \inf\left\{\|a\|_1 \,\middle|\, a \in Z_n^{\mathrm{sg}}\left(X_\gamma, \coprod S^1; \mathbb{R}\right), [a] = \alpha\right\}.$$

注 2.16. 给定一个可数群 G 和一个整数共轭类 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$，相对同调 $H_2(G, [c]; \mathbb{R})$ 按定义为 $H_2(X, \gamma; \mathbb{R})$，其中 X 是一个 $K(G, 1)$，由于 G 可数，因此可以取为可数 CW 复形；而 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$ 表示 $[c]$ ——见定义 2.11。若 X' 是另一个（可数） $K(G, 1)$ 的选取，且 $\gamma'\colon \coprod S^1 \to X'$ 是另一个表示 $[c]$的映射，则存在一个将 γ 映至 $h\gamma$ 的同伦等价 $h : X \xrightarrow{\simeq} X'$，并且 $h\gamma$ 与 γ'之间存在自由同伦。因此，存在诱导的偶之间的同伦等价。

$$\left(X_\gamma, \coprod S^1\right) \simeq \left(X'_{h\gamma}, \coprod S^1\right) \simeq \left(X'_{\gamma'}, \coprod S^1\right).$$

由于 $\|\cdot\|_1$ 在可数 CW 复形之间的同伦等价下保持不变，事实上在任何诱导基本群同构的映射下也保持不变[2]，上述同伦等价诱导等距同构

$$H_2(X,\gamma;\mathbb{R}) \cong H_2(X',h\gamma;\mathbb{R}) \cong H_2(X',\gamma';\mathbb{R}).$$

因此，可以将格罗莫夫半范数的定义推广到 $H_2(G,\ [c];\ \mathbb{R})$。

如果将各处的 $\mathbb{R}$ 替换为 $\mathbb{Q}$，上述定义仍然成立。给定 $\alpha \in H_n(X,\gamma;\mathbb{Q}) \subseteq H_n(X,\gamma;\mathbb{R})$，自然会问，$\alpha$ 作为有理类的格罗莫夫半范数是否与其作为实类的格罗莫夫半范数相同。下面的引理给出了肯定的回答：

引理 2.17（有理与实格罗莫夫半范数相等）。设 X 是一个拓扑空间，且 $\gamma: \coprod S^1 \to X$。给定一个有理类 $\alpha \in H_n(X,\gamma;\ \mathbb{Q})$，$\alpha$ 的格罗莫夫半范数（视为实类）可以通过有理系数循环计算：

$$\|\alpha\|_1 = \inf\left\{\|a\|_1 \,\middle|\, a \in Z_n^{\mathrm{sg}}\left(X_\gamma, \coprod S^1;\mathbb{Q}\right),\ [a]=\alpha\right\}$$

证明。这由引理 2.14。 □

换言之，引理 2.17 表明，包含映射 $H_n(X,\ \gamma;\ \mathbb{Q}) \to H_n(X,\ \gamma;\ \mathbb{R})$是等距嵌入，只要 $H_n(X,\ \gamma;\ \mathbb{Q})$ 和 $H_n(X,\ \gamma;\ \mathbb{R})$ 分别赋予有理格罗莫夫半范数和实格罗莫夫半范数。

2.f. **格罗莫夫半范数的拓扑解释**。类似于（并且受到）用投影边界为给定环路的曲面对稳定交换子长度所作的拓扑解释的启发 [8, §2.6]，我们现在给出有理类的格罗莫夫半范数在 H_2上的拓扑解释。这推广了绝对格罗莫夫半范数在 H_2 [8, §1.2.5]中的拓扑解释。

对于 γ，一个容许曲面 $\coprod S^1 \to X$ 是指由一个定向紧曲面（可以不连通）Σ，以及映射 $f:\ \Sigma \to X$ 和 $\partial f:\ \partial\Sigma \to \coprod S^1$组成的数据，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \partial\Sigma & \xrightarrow{\ \iota\ } & \Sigma \\ {\scriptstyle \partial f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \coprod S^1 & \xrightarrow{\ \gamma\ } & X \end{array}$$

其中 $\iota:\ \partial\Sigma, \to \Sigma$ 是包含映射。这样的容许曲面记作$f:(\Sigma,\ \partial\Sigma) \to (X,\ \gamma)$。

令 Σ_ι 为包含映射 $\iota:\partial\Sigma, \to \Sigma$的映射柱：

$$\Sigma_\iota := (\Sigma \amalg (\partial\Sigma \times [0,1]))/\sim,$$

其中，$\sim$ 是由 $(u,\ 0) \sim \iota(u)$（$u \in \partial\Sigma$）生成的等价关系。因此，存在一个自然的对映射

$$f_\# : (\Sigma_\iota, \partial\Sigma\times\{1\}) \to \left(X_\gamma, \coprod S^1\right)$$

定义为 f和 ∂f——定义见 §2.c 偶$\left(X_\gamma,\ \coprod S^1\right)$。由于偶 $(\Sigma_\iota,\ \partial\Sigma\times\{1\})$ 变形收缩至 $(\Sigma,\ \partial\Sigma)$，映射 $f_\#$ 诱导出一个态射

$$f_* : H_*(\Sigma,\partial\Sigma) \to H_*(X,\gamma).$$

特别是，f表示一个上同调类 $f_*[\Sigma] \in H_2(X,\gamma)$，其中 $[\Sigma] \in H_2(\Sigma,\partial\Sigma)$ 是 Σ 的（整数、有理或实）基本类。

[2]这由 Gromov 映射定理 [22, 推论 5.1.1], 以及 ℓ^1-同调与有界上同调之间的对偶原理 [22, 推论 6.2]共同得到。

紧曲面 Σ 的拓扑复杂度将由其约化欧拉示性数衡量，定义为 $\chi^-(\Sigma) = \sum_K \min\{0, \chi(K)\}$，其中求和遍历 Σ的所有连通分支 K。

命题 2.18（格罗莫夫半范数的拓扑解释）。设 X 是一个拓扑空间，且 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$。若 $\alpha \in H_2(X,\gamma;\mathbb{Q})$ 是一个有理类，则有如下等式

$$\|\alpha\|_1 = \inf_{f,\Sigma} \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{n(\Sigma)},$$

下确界取遍所有容许曲面 $f\colon (\Sigma,\partial\Sigma) \to (X,\gamma)$，使得对于某个 $n(\Sigma) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，有 $f_*[\Sigma] = n(\Sigma)\alpha$。

证明。首先考虑一个容许曲面 $f\colon (\Sigma,\partial\Sigma) \to (X,\gamma)$，满足 $f_*[\Sigma] = n(\Sigma)\alpha$。于是我们可以估计

$$\|\alpha\|_1 = \frac{\|f_*[\Sigma]\|_1}{n(\Sigma)} \leq \frac{\|[\Sigma]\|_1}{n(\Sigma)}.$$

但是 ℓ^1-半范数 $[\Sigma]$ 被称为单纯体积 Σ，且等于 $-2\chi^-(\Sigma)$ [22,推论 7。5]。这就证明了命题中的不等式 $(\leq)$。

对于反向不等式，我们遵循 Calegari 证明 稳定交换子长度 不大于 Gersten 边界范数时所采用的相同思路 [8, 引理 2。69], 该证明基于 Bavard 的一个论证 [1, 命题 3。2]设 $a \in Z_2(X_\gamma, \coprod S^1; \mathbb{Q})$是表示 α的有理相对 2-链 $a_0 \in C_2(X_\gamma; \mathbb{Q})$，并设 2-链映射到 a。根据引理 2.17，在这类 $\|a_0\|_1$ 上的下确界 a_0 等于 $\|\alpha\|_1$。

由于 a_0 是有理的，存在 $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 使得 qa_0 是整数；我们可以写作 $qa_0 = \sum_j \varepsilon_j \sigma_j$，其中 $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ 以及 $\sigma_j\colon \Delta^2 \to X_\gamma$ 一个奇异 2-单形。我们可以假设，在上述表达式中，没有奇异 2-单形以相反的符号出现两次，因此

$$\|qa_0\|_1 = \sum_j |\varepsilon_j|.$$

由于 a 是一个相对 2-链，这意味着 da_0 的支集包含于 $\coprod S^1$。因此，我们可以在单形 σ_j 的边上构造一个部分配对，使得配对边在 X_γ中的像相同，而未配对的边都映射到 $\coprod S^1$。接着，我们取一族$\{\Delta_j^2\}_j$ 个 2-单形，并沿此配对将它们粘合，从而构造一个二维单纯复形 Σ。由此构造的单纯复形Σ 是一个带边界曲面，而奇异单形 σ_j 定义了一个映射 $f\colon \Sigma \to X_\gamma$，由 $f_{|\Delta_j^2} = \sigma_j$给出，其中 $f(\partial\Sigma) \subseteq \coprod S_1$。将 $f(\Sigma)$ 同伦变形至 X_γ中 X 的像，并将 $f(\partial\Sigma)$ 同伦变形至 $\gamma(\coprod S^1)$之后，这便诱导出一个容许曲面 $f\colon (\Sigma,\partial\Sigma) \to (X,\gamma)$，以及 $H_2(X,\gamma;\mathbb{R})$ 中的 $f_*[\Sigma] = q\alpha$。如上所述，$-2\chi^-(\Sigma)$ 是 Σ [22, 推论 7.5]的单纯体积 $\|[\Sigma]\|_1$；另一方面，我们将 Σ 三角剖分为单形 Δ_j^2，由此得到其单纯体积的一个上界：

$$\|a_0\|_1 = \frac{\|qa_0\|_1}{q} = \frac{1}{q}\sum_j |\varepsilon_j| \geq \frac{\|[\Sigma]\|_1}{q} = \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{q}.$$

对所有表示 α 的 a_0 取下确界，即得到不等式 $(\geq)$。 □

$\|\cdot\|_1$ 的拓扑解释将其与稳定交换子长度联系起来：

命题 A（格罗莫夫半范数与稳定交换子长度）。设 X 是道路连通拓扑空间，并设 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(\pi_1 X;\mathbb{Z})$ 是由映射 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X$ 表示的整数共轭类。那么

$$\mathrm{scl}_{\pi_1 X}([c]) = \frac{1}{4}\inf\left\{\|\alpha\|_1 \,\middle|\, \alpha \in H_2(X,\gamma;\mathbb{Q}),\ \partial\alpha = \left[\coprod S^1\right]\right\},$$

其中 $\partial\colon\ H_2(X,\ \gamma;\ \mathbb{Q})\ \to\ H_1\left(\coprod S^1;\ \mathbb{Q}\right)$ 是对偶（X，γ）的长正合列中的边界映射（见命题 2.9）。

证明。这由 $\|\cdot\|_1$（命题2.18）以及 稳定交换子长度 [8,命题2。74] 得出。□

关于链上 [8, §2。6] 稳定交换子长度 的通常代数定义，请参阅 Calegari 的著作 。就我们的目的而言，命题A 可以作为定义。

2.g. **容许曲面的简单性与不可压缩性**。我们将需要具有额外性质的容许曲面：

定义 2.19。设 X 是一个道路连通拓扑空间，且 $\gamma\colon\ \coprod S^1 \to X$。我们称容许曲面 $f\colon\ (\Sigma,\ \partial\Sigma)\ \to\ (X,\ \gamma)$ 为

- 不可压缩的，如果 Σ 中每条像在 X 中零伦的简单闭曲线，在 Σ 中也零伦，
- 简单，即 Σ 不存在两个边界分支，使得它们在f 下的像在 $\pi_1 X$中表示同一个共轭类的幂。

引理 2.20（简单性与不可压缩性）。设 X 是一个拓扑空间，且$\gamma\colon\ \coprod S^1 \to X$。那么，对于每个有理类 $\alpha \in H_2(X,\gamma;\ \mathbb{Q})$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个简单、不可压缩的容许曲面 $f\colon (\Sigma,\partial\Sigma)\ \to\ (X,\gamma)$，使得$f_*[\Sigma] = n(\Sigma)\,\alpha$，其中某个 $n(\Sigma) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$满足上述条件，并且

$$\|\alpha\|_1 \leq \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{n(\Sigma)} \leq \|\alpha\|_1 + \varepsilon. \tag{‡}$$

证明。命题 2.18 蕴含存在一个容许曲面 $f\colon\ (\Sigma,\ \partial\Sigma)\ \to (X,\ \gamma)$ 满足（‡），且 $f_*[\Sigma] = n(\Sigma)\,\alpha$ 其中某个 $n(\Sigma) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。

若 f 不是简单的，那么我们可以找到 Σ的两个边界分支 ∂_1 和 ∂_2，它们在 f 下的像在 $\pi_1 X$中表示同一个共轭类的幂。因此，我们可以在 ∂_1 和 ∂_2之间粘接一个 1-把手 H，并令 H 映到一条连接 $f\circ\partial_1$ 与 $f\circ\partial_2$各自基点的路径上。这不会改变 $f_*[\Sigma]$，但会使 $-\chi^-(\Sigma)$ 增加 1。为了控制 $-\chi^-(\Sigma)/n(\Sigma)$，我们只在先将 Σ 替换为一个保持边界分支数量不变、次数足够大的有限覆盖 N 之后，才进行这一操作。因此，量 $-\chi^-(\Sigma)/n(\Sigma)$只会增加 $1/N$（这是渐近提升论证的一个简单情形，改编自 [8, 命题 2.10] ——类似论证见 [14, §4] 和 [34, §4.d] ）。由于这一操作会使Σ 的边界分支数量减少 1，经过有限次迭代后，我们便得到一个简单容许曲面。

现在，若 f 是可压缩的，则存在一条简单闭曲线 β 位于 Σ 中，它不是零伦的，但 $f\circ\beta$ 却是零伦的。在这种情况下，可以沿着 Σ 切开 β，并在由此产生的边界分支上各粘上一张圆盘；由于假设 $f\circ f$ 是零伦的，映射 β 便可延拓到新圆盘上。这不会改变 $f_*[\Sigma]$，并会使 $-\chi^-(\Sigma)$ 减小，因此 (‡) 仍然成立；此外，f是简单的这一性质也得以保留。因此，有限次执行这一操作后，我们便可得到 f 是简单且不可压缩的。□

3. 相对格罗莫夫半范数的巴瓦尔对偶

Bavard [1] 证明，稳定交换子长度半范数在 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{R})$ 上的对偶空间可以用拟态来解释。这可以视为一种ℓ^1–ℓ^∞ 对偶，并广泛应用于给出稳定交换子长度 [2, 11, 16, 21, 28]的下界。我们先介绍经典巴瓦尔对偶和有界上同调的一些背景，然后说明如何为相对格罗莫夫半范数得到一个类似于巴瓦尔定理的结果。

3.a. 关于 scl 的巴瓦尔对偶。 群 G 上的拟同态是一个映射 $\phi\colon G\to\mathbb{R}$，满足

$$\sup_{g,h\in G}|\phi(gh)-\phi(g)-\phi(h)|<\infty.$$

上述上确界称为 ϕ 的缺陷，记作 $D(\phi)$。此外，如果对于所有 $g\in G$ 和 $n\in\mathbb{Z}$ 都有 $\phi(g^n)=n\phi(g)$，则称 ϕ 是齐次的。

我们用 $Q(G)$ 表示 $\mathbb{R}$-向量空间，即 G 上的齐次拟同态空间。缺陷定义了一个半范数 $D\colon Q(G)\to[0,\infty)$，它恰好在子空间 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})\subseteq Q(G)$ 上为零；该子空间由取值于 $\mathbb{R}$ 的同态组成。特别地，缺陷下降为商空间 $Q(G)/\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ 上的真正范数。

如果 $\phi\colon G\to\mathbb{R}$ 是一个齐次拟同态，那么 ϕ 延拓为一个 $\mathbb{Z}$-线性映射 $C_1(G;\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$。该延拓满足

$$\left|\phi\left(w-w^t\right)\right|=\frac{1}{n}\left|\phi\left(w^n-t^{-1}w^nt\right)\right|\le\frac{2D(\phi)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

对所有 w、$t\in G$ 均成立。由此可知，ϕ 在 $C_1(G;\mathbb{Z})$ 的子-$\mathbb{Z}$-模 $K(G;\mathbb{Z})$ 上为零；该子模由 §2.a 中所述形如 $(w-w^t)$ 的元素张成。因此，ϕ 下降为一个 $\mathbb{Z}$-线性映射 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$，继而延拓为一个 $\mathbb{R}$-线性映射 $C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$。

经典巴瓦尔对偶指出，（半）范数向量空间 $(Q(G)\ D)$[3] 与 $\left(C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{R}),\mathrm{scl}\right)$ 对偶：

定理 3.1 (巴瓦尔 [1])。设 G 是一个可数群，且 $[c]\in C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{R})$。则有如下等式

$$\mathrm{scl}_G([c])=\sup\left\{\frac{\phi([c])}{2D(\phi)}\;\middle|\;\phi\in Q(G)\smallsetminus\mathrm{Hom}(G;\mathbb{R})\right\}.$$

3.b. 拓扑空间的有界上同调。 我们关于相对格罗莫夫半范数的巴瓦尔对偶类比将以有界上同调为基础，下面回顾其定义。有关更为详尽的论述，请参阅 Frigerio 的著作 [22]。

设 X 是一个拓扑空间。回顾一下，X 的奇异上同调（实系数）是奇异上链复形 $C^*_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$ 的上同调，该复形定义为

$$C^n_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R}):=\mathrm{Hom}_R\left(C^{\mathrm{sg}}_n(X;\mathbb{R}),R\right).$$

由于第 n 个链群 $C^{\mathrm{sg}}_n(X;\mathbb{R})$ 是以奇异n-单形 $\sigma\colon\Delta^n\to X$ 的集合 $\mathcal{S}_n$ 为基的自由 R-模，因此第 n 个上链群 $C^n_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$ 等价地可定义为所有映射 $\mathcal{S}_n\to\mathbb{R}$ 的集合。上链 $\psi\in C^n_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})=\mathbb{R}^{\mathcal{S}_n}$ 的 ℓ^∞-范数 为

$$\|\psi\|_\infty:=\sup_{\sigma\in\mathcal{S}_n}|\psi(\sigma)|\in[0,+\infty].$$

现在，X 在系数取为 R 时的有界上链复形是 $C^*_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$的子上链复形 $C^*_b(X;\mathbb{R})$，由所有有界映射$\mathcal{S}_n\to\mathbb{R}$组成：

$$C^n_b(X;\mathbb{R}):=\left\{\psi\in C^n_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})\;\middle|\;\|\psi\|_\infty<\infty\right\}\subseteq C^n_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R}),$$

其余边界由 $C^*_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$的余边界诱导。$X$ 的有界上同调是此上链复形的上同调：

$$H^*_b(X;\mathbb{R}):=H^*\left(C^*_b(X;\mathbb{R})\right).$$

ℓ^∞-范数诱导出一个半范数（仍记作 $\|\cdot\|_\infty$），定义在 $H^*_b(X;\mathbb{R})$上。

对我们而言，有界上同调始终指以实数为系数的有界上同调，并且我们可能会在记号中省略 $\mathbb{R}$。

[3]或 $Q(G)/\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$，其中 D 定义了一个真正的范数。

事实证明，当 X 是一个可数 CW 复形时， $\|\cdot\|_\infty$ 在二次维度上定义了一个真正的范数：

定理 3.2 (Matsumoto–Morita–Ivanov [30, 36])。 设 X 是一个可数 *CW* 复形。那么 $\|u\|_\infty > 0$ 对于每个 $u \in H_b^2(X;\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$。

有界上同调上的 ℓ^∞-范数与奇异同调上的 ℓ^1-范数之间的对偶性在本文中起着核心作用。它源自自然配对

$$\langle -,- \rangle : C_b^*(X;\mathbb{R}) \times C_*^{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R}) \to R$$

这是由对偶配对 $C_{\mathrm{sg}}^*(X;\mathbb{R}) \times C_*^{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R}) \to R$ 限制得到的，该配对定义为 $\langle \psi, c\rangle := \psi(c)$，其中 $\psi \in C_{\mathrm{sg}}^n(X;\mathbb{R})$ 和 $c \in C_n^{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$。这进一步诱导出一个配对。

$$\langle -,- \rangle : H_b^*(X;\mathbb{R}) \times H_*(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

这称为 *Kronecker* 积。在此配对下，巴拿赫空间 $H_b^n(X;\mathbb{R})$ 是半范数空间 $H_n(X;\mathbb{R})$ 的对偶：

命题 3.3 (ℓ^1–ℓ^∞ 有界上同调中的对偶 [22, 引理 6。1])。 设 X是一个拓扑空间，且 $\alpha \in H_n(X;\mathbb{R})$。那么， α 的 ℓ^1-半范数满足

$$\|\alpha\|_1 = \sup\left\{ \frac{\langle u, \alpha\rangle}{\|u\|_\infty} \;\middle|\; u \in H_b^n(X;\mathbb{R}),\ \|u\|_\infty > 0 \right\}.$$

3.c. **群的有界上同调**。 由 Gromov 的映射定理 [22, 推论 5.11] 可知，对于任意在可数道路连通 CW 复形之间的连续映射 $f\colon X \to Y$，若其在基本群上诱导同构，则诱导映射 $f^*\colon H_b^*(Y;\mathbb{R}) \to H_b^*(X;\mathbb{R})$ 是等距同构（等距表示它保持 ℓ^∞-半范数）。

因此，给定一个可数群 G，可以将 G的有界上同调 定义为任意满足 $\pi_1 X = G$: 的可数道路连通 CW 复形 X的有界上同调

$$H_b^*(G;\mathbb{R}) := H_b^*(X;\mathbb{R}).$$

这样的空间 X 总是存在——例如，可以取 X 为 G 的一个（可能无限的）表示复形。由于对于上述任意两种 X， X'的选取，都存在等距同构 $H_b^*(X;\mathbb{R}) \cong H_b^*(X';\mathbb{R})$，因此在 $H_b^*(G;\mathbb{R})$ 上有一个良定义的 ℓ^∞-半范数。

不过，群的有界上同调还可以作如下更具代数性的解释。 G 的实系数巴尔上链复形 定义为

$$C^n(G;\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{G^n},$$

其中 $\mathbb{R}^{G^n}$ 是所有映射 $G^n \to \mathbb{R}$ 构成的空间。余边界映射 $d^n\colon C^{n-1}(G;\mathbb{R}) \to C^n(G;\mathbb{R})$ 定义为

$$\begin{aligned} d^n\psi(g_1,\dots,g_n) := {} & \psi(g_2,\dots,g_n) - \psi(g_1g_2, g_3,\dots,g_n) + \psi(g_1, g_2g_3,\dots,g_n) \\ & - \cdots + (-1)^{n-1}\psi(g_1,\dots,g_{n-2}, g_{n-1}g_n) + (-1)^n\psi(g_1,\dots,g_{n-1}). \end{aligned}$$

这是链复形 $C_*(G;\mathbb{R})$ 在 §2.a中引入的对偶。

给定一个上链 $\psi \in C^n(G;\mathbb{R})$，其 ℓ^∞-范数为

$$\|\psi\|_\infty := \sup_{(g_1,\dots,g_n)\in G^n} |\psi(g_1,\dots,g_n)| \in [0,+\infty].$$

这个有界上链复形属于 G 是

$$C_b^*(G;\mathbb{R}) := \{\psi \in C^n(G;\mathbb{R}) \mid \|\psi\|_\infty < \infty\}.$$

事实证明， G 的有界上同调可以定义为$C_b^*(G;\mathbb{R})$的上同调，下面我们将说明如何写出这两者之间的一个显式同构

上同调与空间的有界上同调 X 其基本群为 G如§3.b中所定义。

设 X 是一个可数的道路连通 CW 复形，带有固定基点 ω，且满足 $\pi_1(X,\omega) = G$。G 中的每个元素 g 都可以表示为一个以 ω 为基点的环路 γ_g：$S^1 \to X$，也可以描述为映射 σ_g：$\Delta^1 \to X$，其中 Δ^1 是一个 1-单形（即一条线段），且 σ_g 将 Δ^1 的两个端点都映射到 ω。对于所有 g_1、$g_2 \in G$，拼接 $\sigma_{g_1} \cdot \sigma_{g_2}$ 与 $\sigma_{g_1 g_2}$（在端点固定的条件下）同伦，并且可以构造一个映射 σ_{g_1,g_2}：$\Delta^2 \to X$（其中 Δ^2 是一个 2-单形），使得 σ_{g_1,g_2} 在它的三个面的限制分别为 σ_{g_2}、$\sigma_{g_1 g_2}^{-1}$ 和 σ_{g_1}（其中 σ^{-1} 是奇异单形 σ 的反向定向），如图 1 所示。我们可以

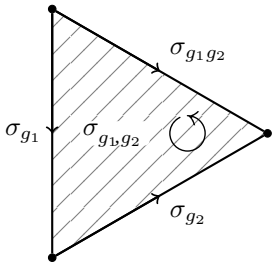

图 1。链映射 h_* 的构造：$C_*(G;\mathbb{R}) \to C_*^{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$。

迭代这一构造，并为每个 n-元组 $(g_1,\dots,g_n) \in G^n$，选取一个奇异单形 $\sigma_{g_1,\dots,g_n}$，使其在第 i 个面的限制为 $\sigma^{\varepsilon_i}_{g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_n}$（分别对于 $i=0$ 为 $\sigma^{\varepsilon_0}_{g_2,\dots,g_n}$，以及对于 $i=n$ 为 $\sigma^{\varepsilon_n}_{g_1,\dots,g_{n-1}}$），其中 $\varepsilon_i = (-1)^i$。

如果 X 是一个 $K(G,1)$ 空间，那么映射 h：$(g_1,\dots,g_n) \mapsto \sigma_{g_1,\dots,g_n}$ 诱导出一个链同伦等价 h_*：$C_*(G;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} C_*^{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$ [4, §I.4] 因此也诱导出一个上链同伦等价

$$h^* : C^*_{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} C^*(G;\mathbb{R}),$$

它诱导一个同构

$$H^*(C^*(G;\mathbb{R})) \cong H^*(X;\mathbb{R}).$$

h^* 下有界上链复形 $C_b^*(X;\mathbb{R})$ 的像是 $C_b^*(G;\mathbb{R})$。由此可知，h 还诱导一个上链同伦等价 h^*：$C_b^*(X;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} C_b^*(G;\mathbb{R})$，它诱导一个同构

$$H^*(C_b^*(G;\mathbb{R})) \cong H_b^*(X;\mathbb{R}),$$

事实上，这是一个等距同构 [22, 定理 5.9]。我们将此上同调记为 $H_b^*(G;\mathbb{R})$，并从这两种视角来理解它。

注 3.4. 拟同态与有界上同调之间存在联系：拟同态 ϕ：$G \to \mathbb{R}$ 可视为 $C^1(G;\mathbb{R})$ 的一个元素，而其余边界 $d^2\phi$ 由下式给出

$$d^2\phi(g,h) = \phi(g) - \phi(gh) + \phi(h).$$

因此，拟同态条件恰好意味着 $d^2\phi$ 是一个有界上链，事实上还是一个有界余循环。因此，它定义了一个上同调类 $[d^2\phi] \in H_b^2(G;\mathbb{R})$。这给出了一个态射 $[d^2-]$：$Q(G) \to H_b^2(G;\mathbb{R})$，其核是 $Q(G)$ 的子空间 $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$，由取值于 $\mathbb{R}$ 的同态组成。事实上，这可以扩展为一个正合列 [8, 定理 2.50]

$$0 \to \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}) \to Q(G) \xrightarrow{[d^2-]} H_b^2(G;\mathbb{R}) \to H^2(G;\mathbb{R}),$$

其中，$H_b^2(G;\mathbb{R}) \to H^2(G;\mathbb{R})$ 是由包含映射 $C_b^*(G;\mathbb{R}) \to C^*(G;\mathbb{R})$ 诱导的映射。

3.d. **相对格罗莫夫半范数的巴瓦尔对偶。** 我们的目标现在是利用有界上同调，得出一个类似于巴瓦尔对偶（定理 3.1）的结论，适用于 $H_2(X,\gamma)$上的相对格罗莫夫半范数，其中 $\gamma: \coprod S^1 \to X$是道路连通拓扑空间 X中的一组环路。

相对有界上同调有一种定义，由此可得到一个长正合列，情况与奇异上同调类似——关于定义，请参阅 Frigerio 的著作 [22, §5.7] 。对偶原理 [22, 引理 6.1] 随即表明，$H_b^2(X,\gamma) := H_b^2\left(X_\gamma, \coprod S^1\right)$（配备 ℓ^∞-半范数）是 $H_2(X,\gamma)$（配备 ℓ^1-半范数）的对偶。但由于 $\pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$ 是可迁的，$H_b^*\left(\coprod S^1\right)$ 消失[22, 定理 3.6]，而 $\left(X_\gamma, \coprod S^1\right)$ 的长正合列给出一个自然同构

$$H_b^2(X,\gamma;\mathbb{R}) \cong H_b^2(X;\mathbb{R}).$$

这一同构与 Kronecker 积 $H_b^2(X,\gamma) \times H_2(X,\gamma) \to \mathbb{R}$（它是 §3.b 中引入的绝对 Kronecker 积的相对类比）共同定义了一个配对

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : H_b^2(X;\mathbb{R}) \times H_2(X,\gamma;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

事实证明，ℓ^∞-半范数（根据定理 3.2，其在次数 3.2下实际上是一个范数）在以下配对关系下与 ℓ^1-半范数互为对偶：

定理 B (相对格罗莫夫半范数的巴瓦尔对偶)**.** 设 X 为可数 *CW* 复形，且 $\gamma: \coprod S^1 \to X$。给定一个实上同调类 $\alpha \in H_2(X,\gamma;\mathbb{R})$，$\alpha$ 的相对格罗莫夫半范数为

$$\|\alpha\|_1 = \sup\left\{ \frac{\langle u,\alpha\rangle}{\|u\|_\infty} \,\middle|\, u \in H_b^2(X;\mathbb{R};\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \right\}.$$

<escape>证明。 ……之间的对偶 ℓ^1-同调与有界上同调 [22, 引理 6。1]意味着 </escape>

$$\|\alpha\|_1 = \sup\left\{ \frac{\langle u,\alpha\rangle}{\|u\|_\infty} \,\middle|\, u \in H_b^2(X,\gamma;\mathbb{R}),\ \|u\|_\infty \neq 0 \right\}.$$

此外，Bucher 等人独立证明的一个结果 [5, 定理 1。2] 以及 Kim 和 Kuessner 证明的结果 [31, 定理 1。2] 表明同构 $H_b^2(X,\gamma) \cong H_b^2(X)$ 对于 ℓ^∞-范数是等距的。结合 $\|u\|_\infty = 0$ 当且仅当 $u = 0$ 在 $H_b^2(X)$（定理 3.2）中这一事实，即可得到该结果。□

我们称上同调类 $u \in H_b^2(X;\mathbb{R})$ 是关于 $\alpha \in H_2(X,\gamma;\mathbb{R})$ 的极值类，如果它在定理 B 中实现了上确界。注意，根据哈恩–巴拿赫定理，对于所有$\alpha \in H_2(X,\gamma;\mathbb{R})$，极值类均存在。

4. 群图中的稳定交换子长度应用

本节旨在给出一个群图背景下的示例，其中定理 B 可用于理解相对格罗莫夫半范数，进而计算稳定交换子长度。

4.a. **稳定交换子长度的等距嵌入失效。**群图理论中的一个基本事实是，顶点群嵌入到群图的基本群中。起初，自然会尝试使这一包含映射保持稳定交换子长度不变，但遗憾的是，这通常行不通，即使边群是可驯的（因此其稳定交换子长度为零 [8, 命题 265]）：

例4.1. 设 S 是一个闭的、亏格为 3 的曲面，并设 β 是 S中的一条非分离简单闭曲线。考虑 $\pi_1 S = \pi_1 T *_{\mathbb{Z}}$，它是沿 S 切割 β得到的 HNN 分裂，其中 T 是一个亏格为 2 且有两个边界分支的曲面，而 HNN 扩张将 T 的两个边界分支识别起来——见图2。那么嵌入 $\pi_1 T$，$\to \pi_1 S$ 并不保 稳定交换子长度。为此，考虑

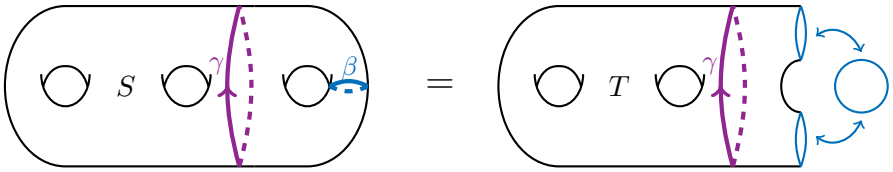

图2. 闭亏格为3的曲面的 HNN 分裂。

图中所示的环路 γ。注意， T 是一个边界非空的曲面，而 γ 界定了一个带有一个边界分支的浸入（事实上是嵌入）亏格为2 曲面，且该曲面位于 T中，因此根据 Calegari 的结果 [8, 引理 462]（也可由下文的定理 E 推出），可得稳定交换子长度$\pi_1 T([\gamma]) = \frac{3}{2}$。然而，在 S 中， γ界定了一个带有一个边界分支的亏格为 1 曲面，因此稳定交换子长度$\pi_1 S([\gamma]) \leq \frac{1}{2}$。这表明该态射

$$\pi_1 T \hookrightarrow \pi_1 T *_{\mathbb{Z}}$$

不保 scl

4.b. **相对格罗莫夫半范数的等距嵌入**。例4.1表明，群图中顶点群的包含映射可能不保 scl。不过，利用定理 B，我们能够将 Bucher 等人关于有界上同调的等距嵌入结果 [5] 转化为如下结论：若边群是可平均的，则包含映射保相对格罗莫夫半范数：

定理 C (ℓ^1-群图中顶点群的等距嵌入)。设 $\mathcal{G}$ 是一个群图，其底层图 Γ 有限，顶点群 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$可数，边群 $\{G_e\}_{e\in E(\Gamma)}$可均。固定一个顶点 v，考虑包含映射 $i_v : G_v \hookrightarrow \pi_1 \mathcal{G}$。那么对于每个上同调类 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G_v; \mathbb{Z})$，嵌入

$$i_{v*} : H_2(G_v, [c]; \mathbb{R}) \hookrightarrow H_2(\pi_1 \mathcal{G}, [i_v(c)]; \mathbb{R}).$$

关于 $\|\cdot\|_1$ 是等距的。

证明。根据 [5, 定理 1，1], 存在一个等距嵌入

$$\Theta : \bigoplus_v H_b^2(G_v; \mathbb{R}) \hookrightarrow H_b^2(\pi_1 \mathcal{G}; \mathbb{R}),$$

它是.....的右逆

$$\bigoplus_v i_v^* : H_b^2(\pi_1 \mathcal{G}; \mathbb{R}) \twoheadrightarrow \bigoplus_v H_b^2(G_v; \mathbb{R}).$$

现在令 $[c] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G_v; \mathbb{Z})$ 以及 $\alpha \in H_2(G_v, [c]; \mathbb{R})$。巴瓦尔对偶 $\|\cdot\|_1$(定理 B) 表明

$$\|\alpha\|_1 = \sup\left\{ \frac{\langle u, \alpha\rangle}{\|u\|_\infty} \,\middle|\, u \in H_b^2(G_v; \mathbb{R}) \right\}.$$

由于对于所有 $u \in H_b^2(G_v; \mathbb{R})$ 都有 $i_v^* \Theta u = u$，且由于 Θ 保持 $\|\cdot\|_\infty$ 不变，因此

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_1 &= \sup\left\{ \frac{\langle i_v^* \Theta u, \alpha\rangle}{\|\Theta u\|_\infty} \,\middle|\, u \in H_b^2(G_v; \mathbb{R}) \right\} = \sup\left\{ \frac{\langle \Theta u, i_{v*}\alpha\rangle}{\|\Theta u\|_\infty} \,\middle|\, u \in H_b^2(G_v; \mathbb{R}) \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \frac{\langle u', i_{v*}\alpha\rangle}{\|u'\|_\infty} \,\middle|\, u' \in H_b^2(\pi_1 \mathcal{G}; \mathbb{R}) \right\} = \|i_{v*}\alpha\|_1 .\end{aligned}$$

这证明了 $\|\alpha\|_1 \leq \|i_{v*}\alpha\|_1$，而反向不等式则由群同态是 $\|\cdot\|_1$-不增的这一事实得到。□

在增加一个同调条件后，我们可以推导出关于稳定交换子长度的等距嵌入结果：

推论 4.2 (稳定交换子长度-群图中顶点群的等距嵌入)。 设 $\mathcal{G}$ 是一个群图，其底层图 Γ 是有限的，顶点群 $\{G_v\}_{v\in V(\Gamma)}$ 可数，且边群 $\{G_e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 可均。固定一个顶点 v，并假设包含诱导映射 $i_{v*}\colon H_2(G_v;\mathbb{Q}) \to H_2(\pi_1\mathcal{G};\mathbb{Q})$ 是满射。那么对每个 $[c] \in B_1^{\mathrm{conj}}(G_v;\mathbb{Z})$,

$$\mathrm{scl}_{\pi_1\mathcal{G}}([i_v(c)]) = \mathrm{scl}_{G_v}([c]).$$

证明。 固定每个顶点 v 的一个 $K(G_v,1)$ 空间 X_v，以及每条边 e 的一个 $K(G_e,1)$ 空间 X_e，并构造相应的空间图 $\mathcal{X}$，它是一个 $K(\pi_1\mathcal{G},1)$。令 $j_v\colon X_v, \to \mathcal{X}$ 为包含映射，使得 $i_v = j_{v*}\colon G_v \to \pi_1\mathcal{G}$。

给定一个映射 $\gamma\colon \coprod S^1 \to X_v$ 表示一个共轭类 $[c] \in B_1^{\mathrm{conj}}(G_v;\mathbb{Z})$，映射 $\gamma_*\colon H_1(\coprod S^1) \to H_1(X_v)$ 为零，而命题 2.9 给出一个正合行构成的交换图（省略了 $\mathbb{Q}$-系数）：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(X_v) & \longrightarrow & H_2(X_v,\gamma) & \xrightarrow{\partial} & H_1\left(\coprod S^1\right) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle j_{v*}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{v*}} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & H_2(\mathcal{X}) & \longrightarrow & H_2(\mathcal{X}, j_v\gamma) & \xrightarrow{\partial} & H_1\left(\coprod S_1\right) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

根据假设，映射 $j_{v*}\colon H_2(X_v) \to H_2(\mathcal{X})$ 是满射，因此由五引理可知，$j_{v*}\colon H_2(X_v,\gamma) \to H_2(\mathcal{X}, j_v\gamma)$ 是满射。于是，给定一个上同调类 $\beta \in H_2(\mathcal{X}, j_v\gamma;\mathbb{Q})$，满足 $\partial\beta = \left[\coprod S^1\right]$，存在 $\alpha \in H_2(X_v,\gamma;\mathbb{Q})$，使得$j_{v*}\alpha = \beta$。由于该图交换，我们有 $\partial\alpha = \partial\beta = \left[\coprod S^1\right]$。因此，命题 A 和定理 C 得出

$$\mathrm{scl}_{G_v}([c]) \leq \frac{1}{4}\|\alpha\|_1 = \frac{1}{4}\|j_{v*}\alpha\|_1 = \frac{1}{4}\|\beta\|_1.$$

对 β 取下确界，得到 $\mathrm{scl}_{G_v}([c]) \leq \mathrm{scl}_{\pi_1\mathcal{G}}([i_v(c)])$。反向不等式由群同态不会增大 scl 的一般事实得出。□

注意，定理 C 和推论 4.2 重新得到了 [34] 关于相对格罗莫夫半范数下曲面等距嵌入的主要定理：事实上，给定一个定向、紧致、连通的曲面 S 和一个 π_1-单射子曲面 T，其基本群 $\pi_1 S$ 分解为一个群图，其中顶点群为$\pi_1 T$ 以及 $S \smallsetminus T$ 的所有连通分支的基本群，边群则同构于 $\mathbb{Z}$ ——对应于沿简单闭曲线切割 S。

4.c. **HNN 扩张中的谱隙**。 推论 4.2例如可用于估计某些 HNN 扩张中 稳定交换子长度的谱隙：

例 4.3 (Dyck 曲面)。 令 Δ 为由图 3的边配对给出的非定向曲面，因此 $\pi_1\Delta = \langle a, b, c \mid [a,b] = c^2\rangle$。戴克定理 [20]断言 $\Delta \cong \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$。

那么对于所有 $g \in \pi_1\Delta \smallsetminus \{1\}$，都有如下不等式

$$\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([g]) \geq \frac{1}{4}.$$

此外，这一界是精确的：稳定交换子长度$_{\pi_1\Delta}([c]) = \frac{1}{4}$。

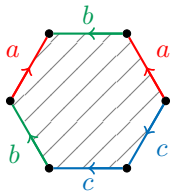

图 3. Dyck 曲面的边配对 Δ.

证明。 群 $\pi_1\Delta$ 分解为 HNN 扩张 $\pi_1\Delta = G*_{\mathbb{Z}}$，其中

$$G = \langle a_1, a_2, c \mid a_1 a_2 = c^2 \rangle ,$$

and the HNN extension is given by the isomorphism $\langle a_1 \rangle \to \langle a_2 \rangle$ sending a_1 to a_2. 注意，G 是一个自由群，而 $\{a_1, c\}$ 和 $\{a_2, c\}$ 都是 G 的自由基。因此，a_1 和 a_2 在 G 中是左相对凸的，这意味着 G-集 G/a_1 和 G/a_2 具有 G-不变序。这使我们能够应用 Chen 和 Heuer 关于群图中谱隙的结果 [15] 。

对于 $g \in \pi_1\Delta \smallsetminus \{1\}$，有两种情况：

- 若 g 在 HNN 分裂 $G*_{\mathbb{Z}}$ 下是双曲的，那么由于 $\langle a_1 \rangle$ 和 $\langle a_2 \rangle$ 在 G 中是左相对凸的，根据 [15, 定理 5.19] 可知，$\pi_1\Delta([g]) \geq \frac{1}{2}$。
- 如果 g 是椭圆的，那么 g 共轭于一个非平凡元素 g_0，该元素属于 G。由于 G 是自由群，Duncan–Howie 定理 [19] 推出 稳定交换子长度$_G([g_0]) \geq 1\,2$。现在推论 4.2 推出，只要 $[g_0]$ 的某个倍数属于 $B_{\text{共轭}\,1}(G;\mathbb{Z})$，就有稳定交换子长度$_{\pi_1\Delta}([g]) =$ 稳定交换子长度$_G([g_0]) \geq \frac{1}{2}$。

现在可以得出，任何满足 $\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([g]) < \frac{1}{2}$ 的 $g \in \pi_1\Delta$ 都必定与某个 $g_0 \in G$ 共轭，而该元素在 $H_1(G;\mathbb{Q})$ 中的像属于 $\mathrm{Ker}\,(H_1(G;\mathbb{Q}) \to H_1(\pi_1\Delta;\mathbb{Q}))$（因为 $[g_0]$ 具有有限 scl 当且仅当 $[g_0]$ 的某个倍数属于 $B_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$，这又当且仅当 $[g_0]$ 在 $H_1(G;\mathbb{Q})$ 中的像为零——参见注记 2.3）。但是我们有

$$H_1(G;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}a_1 \oplus \mathbb{Q}c \xrightarrow[c\mapsto 0]{a_1\mapsto a} \mathbb{Q}a \oplus \mathbb{Q}b = H_1(\pi_1\Delta;\mathbb{Q}) ,$$

因此 $\mathrm{Ker}\,(H_1(G;\mathbb{Q}) \to H_1(\pi_1\Delta;\mathbb{Q})) = \mathbb{Q}c$。所以，任何满足 $\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([g]) < \frac{1}{2}$ 的 $\pi_1\Delta$ 中的元素 g，都必须共轭到 $\langle c \rangle$ 中。

现在 $\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([c]) = \frac{1}{2}\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([[a,b]])$，因为 $c^2 = [a,b]$。但 $\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([[a,b]]) \geq \frac{1}{2}$，因为 $[a,b]$ 在 $G*_{\mathbb{Z}}$ 中是双曲的，而且交换子的 scl 至多为 1 2 是一个普遍事实（因为任意交换子都由一个带有一个边界分支的亏格为1的曲面所界定，另见 [17, 示例 2.6]），所以 $\mathrm{scl}_{\pi_1\Delta}([c]) = \frac{1}{4}$，正如所需。□

特别是，Duncan–Howie 定理 [19] 蕴含 $\pi_1\Delta$ 不是遗传自由群（这也可由 Lyndon 的一个结果推出 [32, 33]）。此外，由 Heuer 的一个定理可知 [28] (另见 [35])， $\pi_1\Delta$ 不是任何右角 Artin 群的子群，因此也不是特殊群[4]，这里的“特殊”取 Haglund 和 Wise [26]的意义。不过请注意， $\pi_1\Delta$ 是虚拟特殊的，因为其定向双覆盖是一个亏格为 2 的可定向闭曲面。

5. 霍普夫式的代数解释

现在我们证明霍普夫公式的一个相对版本，并说明如何利用它为定理 B 提供纯代数的诠释。我们着重讨论群相对于某个元素的共轭类的同调这一特殊情形，

[4]更准确地说， $\pi_1\Delta$ 并非 A-特殊的 按照 [26]的术语。

而非相对于一条链的同调。一般情形下也可以给出类似的霍普夫公式，但记号会变得繁琐。

5.a. **一个相对霍普夫公式。** 回顾一下，经典霍普夫公式用于计算$H_2(G)$ 当 G 是一个由表示给出的群时（参见 [4, 定理 II.5。3]）：

定理 5.1 (霍普夫公式 [29]). 设 F 为一个自由群， $R \trianglelefteq F$，且 $G = F/R$。那么存在一个同构

$$H_2(G;\mathbb{Z}) \cong R \cap [F,F]/[F,R].$$

在与定理 5.1 相同的设定下，我们的目标是计算 $H_2(G,[w];\mathbb{Z})$，其中 $[w] \in C_1^{\mathrm{conj}}(G;\mathbb{Z})$ 是一个由元素$w \in G$ 表示的整数共轭类（关于链的共轭类与元素的共轭类之间的关系，参见注释 2.6(i) ）。以下定理给出了这一结果；我们的证明采用拓扑方法，并受到 [8, §1.1.6] 和 [39] 的启发。

定理 5.2 （相对霍普夫公式）。 设 F 是一个自由群， $R \trianglelefteq F$，且 $G = F/R$。设 w 是 G中的一个无限阶元素，并设 $\bar{w} \in F$ 是 w在 $F \overset{p}{\twoheadrightarrow} F/R$下的一个原像。那么存在一个同构

$$H_2(G,[w];\mathbb{Z}) \cong \langle \bar{w} \rangle\, R \cap [F,F]/[F,R].$$

证明。 设 X 是一个 $K(G,1)$，其带有固定基点 x_0，并设 $\gamma:\ S^1 \to X$ 是一个以 x_0 为基点、表示 w的环路。于是 $H_2(G,[w]) = H_2(X,\gamma)$（见定义 2.11），我们构造一个态射

$$\Phi : \langle \bar{w} \rangle\, R \cap [F,F] \to H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$$

如下。令 $\bar{g} \in \langle \bar{w} \rangle\, R \cap [F,F]$。由于 $\bar{g} \in [F,F]$，可以写成

$$\bar{g} = [\bar{a}_1,\bar{b}_1]\cdots[\bar{a}_k,\bar{b}_k],$$

其中 $\bar{a}_i$、$\bar{b}_i \in F$。令 $a_i = p(\bar{a}_i) \in G$、 $b_i = p(\bar{b}_i) \in G$ 以及 $g = p(\bar{g}) \in G$。 $\bar{g} \in \bar{w}R$ 在 F中的假设意味着 $g \in w$ 在 G中，因此对于某个 $n \in \mathbb{Z}$，可以写成$g = w^n$ 。此外，由于 w 具有无限阶，整数 n由 $\bar{g}$唯一确定。令 Σ_k，1 为具有一个边界分支的亏格-k 曲面。曲面 Σ_k，1 具有一个胞腔结构：一个 0-胞腔 $\bullet$、$(2k+1)$ 个带有标签 α_1、β_1、……、α_k、β_k、δ 的 1-胞腔，以及一个沿着单词 $\delta^{-1}[\alpha_1,\beta_1]\cdots[\alpha_k,\beta_k]$ 粘合的 2-胞腔——见图 4。

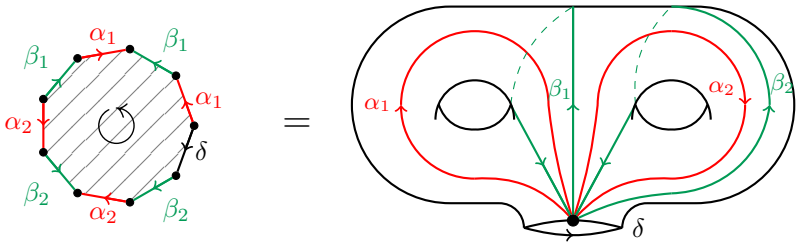

图 4。$\Sigma_{k,\,1}$ 上的胞腔结构（其中有 $k=2$）。

首先选取一个度为 n 的映射 $\partial f : \partial\Sigma_{k,1} \to S^1$。然后定义映射 $f^{(1)}:\ \Sigma_k^{(1)},_1 \to X$，在 Σ_k 的 1-骨架上取值如下：将 $\bullet$ 送到 X 的基点 x_0，将每个 1-胞腔 α_i 送到一个表示 a_i 的环路，该环路位于 $\pi_1(X,x_0) = G$ 中；将每个 β_i 送到一个表示 b_i 的环路；并在 δ 上定义 $f(1)$ 为 $f(1)^{|\delta} = \gamma \circ \partial f$；特别地， δ 被映射到一个表示 $g = w^n$ 的环路。由于 $g = [a_1,b_1]\cdots[a_k,b_k]$ 属于 $G = \pi_1(X,x_0)$，映射 $f^{(1)}:\ \Sigma_k^{(1)},_1 \to X$

可以延拓到从 $\Sigma_{k,1}$ 到 f 的 2-胞腔上：$\Sigma_{k,1}\to X$。现在，f 和 ∂f 的数据定义了一个容许曲面。

$$f:(\Sigma_{k,1},\partial\Sigma_{k,1})\to(X,\gamma).$$

此外请注意，f 和 ∂f 的同伦类型由表达式 $[\bar a_1,\bar b_1]\cdots[\bar a_k,\bar b_k]$ 的选择唯一确定；如果 w 带有挠元，这一点将不成立，因为在这种情况下，整数 n 并不唯一——见下文注5.3(ii) 。

现在我们通过以下方式定义 $\Phi(\bar g)$:

$$\Phi(\bar g):=f_*\left[\Sigma_{k,1}\right]\in H_2\left(X,\gamma;\mathbb{Z}\right),$$

其中，$[\Sigma_{k,1}]\in H_2(\Sigma_{k,1},\partial\Sigma_{k,1};\mathbb{Z})$ 是 $\Sigma_{k,1}$ 的整数基本类（注意，$\Sigma_{k,1}$ 的选取带有一个定向）。

上述对 $\Phi(\bar g)$ 的构造先验地取决于表达式 $\bar g=[\bar a_1,\bar b_1]\cdots[\bar a_k,\bar b_k]$ 的选择，而该表达式可能并不唯一。目前，我们将Φ 视为定义在幺半群 Θ 上的映射，其中该幺半群由所有形式表达式 $[\bar a_1,\bar b_1]\cdots[\bar a_k,\bar b_k]$ 组成，这些形式表达式在 F中的像属于 $\langle\bar w\rangle R$；我们将证明，这会在 $\langle\bar w\rangle R\cap[F,F]$ 上诱导出一个定义良好的映射。

断言。映射 $\Phi:\Theta\to H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$ 是幺半群同态。

断言的证明。考虑 Θ 中的两个形式表达式 $\theta=[\bar a_1,\bar b_1]\cdots[\bar a_k,\bar b_k]$ 和 $\theta'=[\bar a'_1,\bar b'_1]\cdots[\bar a'_\ell,\bar b'_\ell]$。如上所述，这会产生容许曲面 $f:(\Sigma_{k,1},\partial\Sigma_{k,1})\to(X,\gamma)$ 和 $f':(\Sigma_{\ell,1},\partial\Sigma_{\ell,1})\to(X,\gamma)$，并且我们有 $\Phi(\theta)=f_*[\Sigma_{k,1}]$ 以及 $\Phi(\theta')=f'_*[\Sigma_{\ell,1}]$。考虑楔和

$$\Sigma_\vee:=\Sigma_{k,1}\vee\Sigma_{\ell,1}.$$

映射 f 和 f' 自然诱导出 $f_\vee:\Sigma_\vee\to X$，而 $\Sigma_{k,1}$ 和 $\Sigma_{\ell,1}$ 的基本类相加得到一个类 $[\Sigma_\vee]\in H_2(\Sigma_\vee,\partial\Sigma_\vee;\mathbb{Z})$，其中我们定义 $\partial\Sigma_\vee=\partial\Sigma_{k,1}\vee\partial\Sigma_{\ell,1}\subseteq\Sigma_\vee$。因此，

$$\Phi(\theta_1)+\Phi(\theta_2)=(f_\vee)_*[\Sigma_\vee].$$

现在存在一个同伦等价 $(\Sigma_\vee,\partial\Sigma_\vee)\simeq(\Sigma_{k+\ell,1},\partial\Sigma_{k+\ell,1})$，如图 图5所示。这得到一个容许曲面 $(\Sigma_{k+\ell,1},\partial\Sigma_{k+\ell,1})\to(X,\gamma)$ 表示-

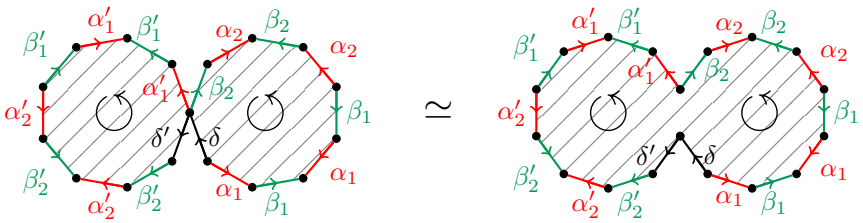

图5。该同伦等价 $\Sigma_{k,1}\vee\Sigma_{\ell,1}\simeq\Sigma_{k+\ell,1}$ （此处$k=\ell=2$）。

着在 $H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$ 中将类 $\Phi(\theta)+\Phi(\theta')$ 表示出来。但请注意，当将上述构造应用于 $\theta\theta'$ 时，所得的这个容许曲面正好就是该构造得到的曲面。这证明了 $\Phi(\theta)+\Phi(\theta')=\Phi(\theta\theta')$，因此 Φ 是幺半群同态。□

利用该断言，我们现在证明 Φ 在 $\langle\bar w\rangle R\cap[F,F]$ 上诱导出良定义的映射。考虑两个定义 $\langle\bar w\rangle R\cap[F,F]$ 中同一元素的形式表达式 $\theta,\theta'\in\Theta$。写作 $\theta=[\bar a_1,\bar b_1]\cdots[\bar a_k,\bar b_k]$，并考虑其形式逆元 $\theta^{-1}=[\bar b_k,\bar a_k]\cdots[\bar b_1,\bar a_1]\in\Theta$（尽管我们选择了这种记号，它并不是幺半群 Θ中 θ 的逆元！）。那么形式表达式 $\theta^{-1}\theta'$ 表示平凡元素。

F。这意味着，对于形式表达式 $\theta^{-1}\theta'$，当 $K(G,1)$ 空间 X 被 $K(F,1)$ 空间 X_F替换时，上述构造实际上仍然可以进行。换言之，与$\theta^{-1}\theta'$ 相关联的容许曲面 $f\colon(\Sigma_{k,1},\partial\Sigma_{k,1})\to(X,\gamma)$ 通过由 $F\to G$ 诱导的映射 $X_F\to X$ 分解。此外，$\partial\Sigma_{k,1}$ 的像在 X_F 中是零伦的，由此可得

$$f_*\left[\Sigma_{k,1}\right]\in H_2\left(X_F;\mathbb{Z}\right)\subseteq H_2\left(X_F,\bar{\gamma};\mathbb{Z}\right),$$

其中，$\bar{\gamma}\colon S^1\to X_F$是 $\bar{w}\in F$的一个代表元。但是，由于 F是一个自由群，因此 $H_2(X_F;\mathbb{Z})=H_2(F;\mathbb{Z})=0$，所以 $[\Sigma_{k,1}]$ 在 $H_2(X_F,\bar{\gamma};\mathbb{Z})$中映射为零，进而在$H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$中也映射为零。因此，由该断言可得，

$$0=\Phi\left(\theta^{-1}\theta'\right)=\Phi\left(\theta^{-1}\right)+\Phi\left(\theta'\right),$$

且由构造可清楚看出 $\Phi\left(\theta^{-1}\right)=-\Phi(\theta)$，因此 $\Phi(\theta)=\Phi(\theta')$，正如所需。这证明了 Φ 诱导出一个良定义的映射

$$\Phi:\langle\bar{w}\rangle R\cap[F,F]\to H_2\left(X,\gamma;\mathbb{Z}\right),$$

根据该断言，这是一个群同态。

同态 Φ是满射，因为 $H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$中的每个元素都可以由一个具有一个边界分支的可定向紧致连通曲面到该空间的映射来表示——这可由命题2.18 和引理 2.20推出。

剩下要证明以下结论：

断言。$\operatorname{Ker}\Phi=[F,R]$。

断言的证明。要证明 $[F,R]\subseteq\operatorname{Ker}\Phi$，只需证明对任意$\bar{g}\in F$和 $\bar{r}\in R$，都有 $[\bar{g},\bar{r}]\in\operatorname{Ker}\Phi$。但是 $\Phi([\bar{g},\bar{r}])=f_*\left[\Sigma_{1,1}\right]$，其中$\Sigma_{1,1}$是一个带有一个边界分支的环面，其赤道映射到 $\bar{g}$，子午线映射到 $\bar{r}$。由于 $\bar{r}$ 在 G 中的像是平凡的，我们可以沿子午线切开$\Sigma_{1,1}$，并将所得的两个圆盘填上，从而得到映射 $f_1:\left(D^2,\partial D^2\right)\to(X,\gamma)$。我们可以沿着 ∂D^2 以反向定向将 f_1 与自身粘合，得到$f_2:S^2\to X$。然而，假设 X 是一个 $K(G,1)$，因此它是非球面的，并且 f_2 是零伦的。因此，f_1 也是零伦的，且 $f_*\left[\Sigma_{1,1}\right]=(f_1)_*\left[D^2\right]=0$。这证明了 $\Phi([\bar{g},\bar{r}])=0$，所以 $[F,R]\subseteq\operatorname{Ker}\Phi$。

反过来，设 $\bar{g}\in\operatorname{Ker}\Phi$。令 $f\colon(\Sigma,\partial\Sigma)\to(X,\gamma)$ 为上述构造中与将 $\bar{g}$ 表示为交换子的乘积相对应的容许曲面，且 $\Sigma=\Sigma_{k,1}$。假设 $\bar{g}\in\operatorname{Ker}\Phi$ 意味着 $f_*[\Sigma]=0$，因此映射 $f_*\colon H_2(\Sigma,\partial\Sigma;\mathbb{Z})\to H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$ 为零。偶的长正合列给出一个具有正合行的交换图（省略 $\mathbb{Z}$-系数）：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & H_2(\Sigma,\partial\Sigma) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\partial\Sigma) & \longrightarrow & H_1(\Sigma) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\
0 & \longrightarrow & H_2(X) & \longrightarrow & H_2(X,\gamma) & \xrightarrow{\partial} & H_1(S_1) & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

如果 $f_*:H_1(\partial\Sigma)\to H_1\left(S^1\right)$ 非零，那么由于 $H_1(\partial\Sigma)\cong H_1\left(S^1\right)\cong\mathbb{Z}$，映射 $f_*:H_1(\partial\Sigma)\to H_1\left(S^1\right)$ 实际上将是单射。但 $f_*\circ\partial=0$，所以映射$\partial:H_2(\Sigma,\partial\Sigma)\to H_1(\partial\Sigma)$ 将为零，由正合性可知 $H_1(\partial\Sigma)=0$，因为 $H_1(\partial\Sigma)\to H_1(\Sigma)$ 为零。这是矛盾，因此映射

$$f_*:H_1(\partial\Sigma)\to H_1\left(S^1\right)$$

为零。因此，f 到 $\partial\Sigma$ 的限制是零伦的，这特别意味着 $\bar{g}$在 G中的像是平凡的，即 $\bar{g}\in R\cap[F,F]$。因此，我们归结为经典霍普夫公式（定理 5.1）的情形，即 $\bar{g}\in R\cap[F,F]$且 $\Phi(\bar{g})=1$在 $H_2(X;\mathbb{Z})$中。由于 Φ与给出经典霍普夫公式的态射一致（例如参见 [39]），因此可得 $\bar{g}\in[F,R]$。 □

我们构造了一个满射群同态 $\Phi:\langle \bar{w}\rangle\, R\cap[F,F] \to H_2(X,\gamma;\mathbb{Z})$，其核为 $\Phi=[F,R]$，因此 Φ 诱导出所需的同构。□

注 5.3。 **(i)** 在定理 5.2的证明中，假设 X 是一个$K(G,1)$ 至关重要。这就是为什么——与本文其他部分不同——我们用群的相对同调而非拓扑空间来表述该定理。

(ii) 如果 5.2 中的定理在 w 于 q 中具有有限阶 G时就不成立。事实上，绝对霍普夫公式（定理 5.1）表明 $H_2(G;\mathbb{Z})$ 同构于 $R\cap[F,F]/[F,R]$，而后者在定理右侧 $\langle \bar{w}\rangle\, R\cap[F,F]/[F,R]$ 中具有有限指数5.2 当 w 具有有限阶时。但我们从例2.10(iv)知道

$$H_2(G,[w];\mathbb{Z}) \cong H_2(G;\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z},$$

因此， $H_2(G;\mathbb{Z})$ 在 $H_2(G,[w];\mathbb{Z})$ 中必定具有无限指数！

我们简要说明一下缺失的同调类在哪里。取一个环路 $\gamma: S^1\to X$，它在 $x_0\in X$ 处并表示 w。那么， $H_2(G,[w];\mathbb{Z})$ 的 $\mathbb{Z}$ 直和项中对应于整数 $n\in\mathbb{Z}$ 的同调类，由一个容许曲面 $f:\left(D^2,\partial D^2\right)\to(X,\gamma)$ 表示，其中 D^2 是圆盘， $\partial f:\partial D^2\to S^1$ 是度为 nq 的映射，而 $f: D^2\to X$ 是将 $\gamma\circ\partial f$ 延拓到圆盘的延拓（由于 γ^{nq} 是零伦，这样的延拓存在）。

注意，表示这些“缺失上同调类”的容许曲面的底层映射 $f: D^2\to X$ 是零伦的，因为圆盘是可缩的。这凸显了将容许曲面定义为映射 f 与 ∂f 两者的数据的重要性。

(iii) 通过观察我们的证明中的同构，可以从我们的证明中恢复经典霍普夫公式（定理 5.1）。

$$\langle \bar{w}\rangle\, R\cap[F,F]/[F,R] \xrightarrow{\cong} H_2(G,[w];\mathbb{Z})$$

将 $R\cap[F,F]/[F,R]$ 发送至 $H_2(G;\mathbb{Z})\subseteq H_2(G,[w];\mathbb{Z})$。换言之，当且仅当 $\bar{g}$ 在 G 中的像为平凡元素时，我们的构造才会将元素 $\bar{g}\in\langle \bar{w}\rangle\, R\cap[F,F]$ 映射为一个绝对同调类。

5.b. **通过霍普夫公式的视角理解巴瓦尔对偶**。 接下来，我们将解释如何利用相对霍普夫公式（定理 B ）对定理 5.2进行代数化改述。

回顾第3.c 节中有界上链复形的定义 $C_b^*(G;\mathbb{R})$。我们用 $Z_b^2(G;\mathbb{R})$ 表示 $C_b^2(G;\mathbb{R})$ 中由以下元素构成的子空间：有界 2-余循环 在G上，即满足以下条件的有界映射 $\psi: G^2\to\mathbb{R}$： </style}

$$\psi(g_2,g_3)-\psi(g_1g_2,g_3)+\psi(g_1,g_2g_3)-\psi(g_1,g_2)=0$$

对所有 g_1， g_2， $g_3\in G$。

定理 D （通过霍普夫公式的巴瓦尔对偶）。 设 F 是一个（可数）自由群，$R\trianglelefteq F$，且 $G=F/R$。令 $w\in G$，并令 $\bar{w}\in F$ 为 w 在 $F\xrightarrow{p}G$ 下的原像。

设 $\alpha\in H_2$（G、$[w]$；$\mathbb{Z}$），并令

$$\left[\bar{a}_1,\bar{b}_1\right]\cdots\left[\bar{a}_k,\bar{b}_k\right]\in\langle \bar{w}\rangle\, R\cap[F,F],$$

是 $\Psi(\alpha)$ 的一个代表元，其中 Ψ： $H_2(G,[w];\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong}\langle \bar{w}\rangle\, R\cap[F,F]/[F,R]$ 是定理 5.2的同构。令 $a_i=p(\bar{a}_i)\in G$ 以及 $b_i=p\left(\bar{b}_i\right)\in G$。

Then

$$\|\iota\alpha\|_1 = \sup\left\{ \frac{1}{\|\psi\|_\infty} \left(\psi(a_1,b_1) + \psi\left(a_1b_1,a_1^{-1}\right) + \psi\left(a_1b_1a_1^{-1},b_1^{-1}\right) \right.\right.$$
$$+ \psi([a_1,b_1],a_2) + \psi([a_1,b_1]\,a_2,b_2) + \psi\left([a_1,b_1]\,a_2b_2,a_2^{-1}\right) + \cdots$$
$$\left.\left. + \psi\left([a_1,b_1]\cdots[a_{k-1},b_{k-1}]\,a_kb_ka_k^{-1},b_k^{-1}\right)\right) \;\middle|\; \psi \in Z_b^2(G;\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \right\},$$

其中 $\iota\colon H_2(G,[w];\mathbb{Z}) \to H_2(G,[w];\mathbb{Q})$ 是系数变换映射。

证明。令 X 为一个 $K(G,1)$，并令 $\gamma : S^1 \to X$ 表示 w。回顾一下，同构 $\Psi\colon H_2(G,[w];\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \bar{w}R\cap[F,F]/[F,R]$ 是在定理 5.2 的证明中构造的：从 $\bar{w}R\cap[F,F]$中的 k 个交换子的乘积开始，用这些交换子标记紧曲面 $\Sigma_{k,1}$ 的胞腔分解中的边，将 $\Sigma_{k,1}$ 映射到 X，并考虑基本类 $[\Sigma_{k,1}]$ 在 $H_2(X,\gamma) = H_2(G,[w])$ 中的像。现在我们将更具体地说明映射 $\Sigma_{k,1} \to X$的选择。我们首先按照 §3.c 中的方式（特别参见图 1），为每个 n-元组 $(g_1,\dots,g_n) \in G^n$ 选取奇异单形 $\sigma_{g_1,\dots,g_n}$：$\Delta^n \to X$，使得映射 $(g_1,\dots,g_n)\mapsto\sigma_{g_1,\dots,g_n}$ 诱导出一个链同伦等价 $C_*(G;\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} C_*^{\mathrm{sg}}(X;\mathbb{R})$。取 $\Sigma_{k,1}$ 的一个单顶点三角剖分，如图 6 所示。我们可以显式地构造映射 $f:\Sigma_{k,1}\to X$，方法是

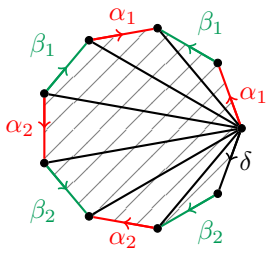

图 6. $\Sigma_{k,1}$单顶点三角剖分。

将 $\Sigma_{k,1}$ 的每个三角形映射到 σ_{g_1,g_2}'s 中对应的奇异 2-单形。特别地，我们得到

$$(\S)\quad \alpha = f_*[\Sigma_{k,1}] = \left[\sigma_{a_1,b_1} + \sigma_{a_1b_1,a_1^{-1}} + \sigma_{a_1b_1a_1^{-1},b_1^{-1}} + \sigma_{[a_1,b_1],a_2}\right.$$
$$\left. + \sigma_{[a_1,b_1]a_2,b_2} + \cdots + \sigma_{[a_1,b_1]\cdots[a_{k-1},b_{k-1}]a_kb_ka_k^{-1},b_k^{-1}}\right] \in H_2(X,\gamma;\mathbb{Z}).$$

现在，关于 $H_2(X,\gamma)$ (定理 B) 的巴瓦尔对偶给出

$$\|\iota\alpha\|_1 = \sup\left\{ \frac{\langle u,\alpha\rangle}{\|u\|_\infty} \;\middle|\; u \in H_b^2(X;\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\} \right\}.$$

取某个 $u \in H_b^2(X;\mathbb{R}) \cong H_b^2(G;\mathbb{R})$，并令 $\psi \in Z_b^2(G;\mathbb{R})$ 为满足 $u=[\psi]$的 2-余循环。链同伦等价 $(g_1,\dots,g_n)\mapsto\sigma_{g_1,\dots,g_n}$ 说明了如何计算由 σ_{g_1,g_2}'s 在 $C_2(X;\mathbb{R})$ 中张成的奇异（相对）2-循环上的 ψ：存在等式

$$\langle\psi,\sigma_{g_1,g_2}\rangle = \psi(g_1,g_2).$$

因此（§）意味着 Kronecker 积 $\langle u,\alpha\rangle$ 由下式给出

$$\langle u,\alpha\rangle = \psi(a_1,b_1) + \psi\left(a_1b_1,a_1^{-1}\right) + \psi\left(a_1b_1a_1^{-1},b_1^{-1}\right) + \psi([a_1,b_1],a_2)$$
$$+ \psi([a_1,b_1]\,a_2,b_2) + \cdots + \psi\left([a_1,b_1]\cdots[a_{k-1},b_{k-1}]\,a_kb_ka_k^{-1},b_k^{-1}\right).$$

该结果随即得出，记住 $\|u\|_\infty = \inf\{\|\psi\|_\infty \mid [\psi]=u\}$。 □

注 5.4。 拟同态 $\phi \in Q(G)$ 定义了一个有界的 2-余循环 $d^2\phi \in Z_b^2(G;\ \mathbb{R})$ 如注 3.4中所述。给定一个整系数类 $\alpha \in H_2(G,\ [w];\ \mathbb{Z})$，满足 $\partial\alpha = n\left[S^1\right]$，可以使用定理 D 中的公式得到

$$\left\langle \left[d^2\phi\right], \alpha \right\rangle = n \cdot \phi(w).$$

利用定理 $\|\cdot\|_1$ 给出的下界 D 以及 稳定交换子长度 与 $\|\cdot\|_1$ 之间的联系（命题A），可得

$$\operatorname{scl}([w]) \geq \frac{1}{2} \sup_{\phi \in Q(G)} \frac{\phi(w)}{2\left\|d^2\phi\right\|_\infty}.$$

另一方面，经典巴瓦尔对偶（定理 3.1）表明

$$\text{稳定交换子长度}([w]) = \sup_{\phi \in Q(G)} \frac{\phi(w)}{2\left\|d^2\phi\right\|_\infty}.$$

将拟态代入定理 D 得到了 稳定交换子长度 的一个非最优下界。其原因在于余循环 $\psi \in Z_b^2$（$G;\ \mathbb{R}$）与其上同调类 $[\psi] \in H_b^2$（$G;\ \mathbb{R}$）之间的差异：给定 $\phi \in Q$（G），根据不等式 [8, 引理 2。58]

$$\frac{1}{2}\left\|d^2\phi\right\|_\infty \leq \left\|\left[d^2\phi\right]\right\|_\infty \leq \left\|d^2\phi\right\|_\infty,$$

而且 $\left\|\left[d^2\phi\right]\right\|_\infty$ 可能无法表示为某个拟同态的余边界。

6. 有界欧拉类

Calegari [7] 揭示了旋转拟态射、面积与紧致双曲曲面（带非空边界）的基本群中的稳定交换子长度之间的联系。我们将说明，这一结果如何推广为关于可能闭合的双曲曲面群的相对格罗莫夫半范数的结论。

6.a. 等变（有界）上同调。

为了定义有界欧拉类，我们将使用等变上同调的语言。

给定一个集合 X，其上有一个群 G的作用，一个次数为n 齐次 G上链（取实系数）是一个映射 $\psi\colon\ X^{n+1} \to \mathbb{R}$，它在 X^{n+1}上的 G 对角作用下保持不变，也就是说，

$$\psi(x_0, \ldots, x_n) = \psi(gx_0, \ldots, gx_n)$$

对所有 $x_0, \ldots, x_n \in X$ 和 $g \in G$。我们将这类上链构成的 $\mathbb{R}$-向量空间记为 $C^n(G \curvearrowright X;\ \mathbb{R})$；它们构成一个上链复形 $C^*(G \curvearrowright X; \mathbb{R})$，其余边界映射 $d^n\colon\ C^{n-1}(G \curvearrowright X; \mathbb{R}) \to C^n($ $G \curvearrowright X;\ \mathbb{R})$ 定义为

$$d^n\psi(x_0, \ldots, x_n) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \psi(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n),$$

其中帽子表示省略。 $C^*(G \curvearrowright X; \mathbb{R})$ 的上同调记为 $H^*(G \curvearrowright X; \mathbb{R})$。

注 6.1。 (i) 若 G 通过（左）乘法作用于自身，则存在一个同构

$$H^*(G \curvearrowright G; \mathbb{R}) \cong H^*(G; \mathbb{R}),$$

该同构由映射 $\theta\colon\ C^*(G; \mathbb{R}) \to C^*(G \curvearrowright G; \mathbb{R})$ 诱导，其中映射定义为

$$(\theta\psi)(g_0, \ldots, g_n) \coloneqq \psi\left(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2, \ldots, g_{n-1}^{-1}g_n\right)$$

<escape>对于 $\psi \in C^n(G;\ \mathbb{R})$（参见第 §3.c 节，了解我们对 $C^*(G;\ \mathbb{R})$的定义）。
</escape>

(ii) 给定一个 G-集合 X 中的基点 x，存在一个态射

$$H^*(G \curvearrowright X;\mathbb{R}) \to H^*(G \curvearrowright G;\mathbb{R})$$

由映射 $\varpi_x\colon\ C^*(G \curvearrowright X;\mathbb{R}) \to C^*(G \curvearrowright G;\mathbb{R})$ 给出的

$$(\varpi_x\psi)(g_0,\dots,g_n) = \psi(g_0x,\dots,g_nx)$$

对于 $\psi \in C^n(G \curvearrowright X;\ \mathbb{R})$。事实上，这个态射与 x 的选择无关。结合 (i)，我们得到一个态射

$$\eta : H^*(G \curvearrowright X;\mathbb{R}) \to H^*(G;\mathbb{R}).$$

类似于空间和群的有界上同调定义（见 §3.b 和 §3.c），存在等变上同调的有界版本：复形 $C_b^*(G \curvearrowright X;\ \mathbb{R})$ 有界齐次 G-上链构成了$C^*(G \curvearrowright X;\ \mathbb{R})$ 的子复形，其中包含有界 G-等变映射 $X^{n+1} \to \mathbb{R}$。相应的上同调记作 $H_b^*(G \curvearrowright X;\ \mathbb{R})$，并且存在一个态射

$$H_b^*(G \curvearrowright X;\mathbb{R}) \to H_b^*(G;\mathbb{R})$$

如备注 6.1(ii) 中所述。我们请读者参阅 [6, §3。1] 以了解有关等变上同调的更多详细信息。

6.b. 圆周作用的有界欧拉类。 在连通曲面 S 上选取双曲结构，定义了 $\pi_1 S$ 在双曲平面 $\mathbb{H}^2$上的作用。这会诱导出 $\mathbb{H}^2$边界上的作用，而该边界同胚于圆 S^1。一般而言，群 G 在圆上的作用的动力学由有界欧拉类编码；它是 $H_b^2(G)$中的一个上同调类，由 Ghys [24]引入，作为庞加莱旋转数 [37, 38]的推广。

有界欧拉类有若干种等价定义 [6]，，就我们的目的而言，从定向余循环的角度来定义它会很有帮助。

考虑保定向圆周同胚群 $\mathsf{Homeo}^+(S^1)$ 在 S^1上的作用。定向余循环 是有界 2-余链 $\mathsf{Or} \in C_b^2\left(\mathsf{Homeo}^+(S^1) \curvearrowright S^1;\mathbb{R}\right)$，定义如下：

$$\mathrm{Or}(x,y,z) = \begin{cases} +1 & \text{if the triple } (x,y,z) \in (S^1)^3 \text{ is positively oriented} \\ -1 & \text{if the triple } (x,y,z) \in (S^1)^3 \text{ is negatively oriented} \\ 0 & \text{if the triple } (x,y,z) \in (S^1)^3 \text{ is degenerate} \end{cases}.$$

事实证明这是一个余循环，因此它定义了 $[\mathsf{Or}] \in H_b^2\left(\mathsf{Homeo}^+(S^1) \curvearrowright S^1;\mathbb{R}\right)$。

定义 6.2. 圆周作用的通用实有界欧拉类 为

$$\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}} = -\frac{1}{2}\eta[\mathrm{Or}] \in H_b^2\left(\mathsf{Homeo}^+(S^1);\mathbb{R}\right),$$

其中 $\eta\colon\ H_b^2\left(\mathsf{Homeo}^+(S^1) \curvearrowright S^1\right) \to H_b^2\left(\mathsf{Homeo}^+(S^1)\right)$ 是备注 6.1(ii)中描述的态射。

给定群在圆上的一个作用 $\rho\colon G \to \mathsf{Homeo}^+(S^1)$，该作用的（实）有界欧拉类 为

$$\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(\rho) = \rho^*\,\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}} \in H_b^2(G;\mathbb{R}).$$

这衡量了 ρ 偏离其在 S^1 [22, 推论 10。27]。根据定义，$\left\|\text{欧拉}_b^{\mathbb{R}}(\rho)\right\|_\infty \le \left\|\text{欧拉}_b^{\mathbb{R}}\right\|_\infty \le \frac{1}{2}\|\text{或者}\|_\infty = \frac{1}{2}$。关于有界欧拉类的更多详细信息，请参见 [6, 25]。

6.c. 相对 2-类的面积。在 [7], Calegari 定义了一个面积概念，用于定向、连通、边界非空的双曲曲面S 中的同调平凡 $\gamma\colon \coprod S^1 \to S$。在他的定义中，$S$ 具有非空边界这一点至关重要，因为这样 $H_2(S) = 0$，因此映射 $\partial\colon H_2(S,\gamma) \to H_1\left(\coprod S^1\right)$ 是单射，并且存在唯一的类 $\alpha \in \partial^{-1}\left(\left[\coprod S^1\right]\right)$。现在我们通过定义 $H_2(S,\gamma;\mathbb{R})$ 中一个类的面积，来说明如何将 Calegari 的面积概念推广到 S 是闭曲面的情形。

设 S 是一条具有（可能为空的）测地边界的双曲曲面。令 $\gamma\colon \coprod S^1 \to S$ 是 S 中一组测地环路，并令 $\alpha \in H_2(S,\ \gamma;\ \mathbb{R})$。根据定义，$H_2(S,\ \gamma;\ \mathbb{R}) = H_2\left(S_\gamma,\ \coprod S^1;\ \mathbb{R}\right)$。映射柱 S_γ 没有可用于测量面积的几何结构，但存在一个通过压缩柱体定义的对映射$\left(S_\gamma,\ \coprod S^1\right) \to \left(S,\ \gamma\left(\coprod S^1\right)\right)$。这诱导出一个态射

$$H_2\left(S,\gamma;\mathbb{R}\right) \to H_2\left(S,\gamma\left(\coprod S^1\right);\mathbb{R}\right),$$

我们将在像中测量 α 的面积。我们选取 S 上的一个胞腔结构，使得

- S 的 0-骨架包含 γ 的所有多重点（即所有满足存在 $s \neq t \in \coprod S^1$ 使得 $p = \gamma(s) = \gamma(t)$ 的点 $p \in S$），
- S 的1-骨架包含 $\gamma\left(\coprod S^1\right)$，且
- 每个2-胞腔均为正定向（相对于从 S继承的定向）。

可以选取一个胞腔相对2-循环 c，其表示 α 在同调 $H_2\left(S\text{中的像}\,\gamma\left(\coprod S^1\right);\ \mathbb{R}\right)$，事实上 c是唯一的，因为$C_3^{\mathrm{cell}}(S)$和$C_2^{\mathrm{cell}}\left(\gamma\left(\coprod S^1\right)\right)$ 都为零。

定义6.3。设 γ 是双曲曲面 S中的一组测地环路。给定 $\alpha \in H_2(S,\ \gamma;\ \mathbb{R})$，$\alpha$的面积定义为

$$\operatorname{area}(\alpha) = \sum \lambda_\sigma \operatorname{area}(\sigma),$$

其中，$\sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \in Z_2^{\mathrm{cell}}\left(S,\ \gamma\left(\coprod S^1\right);\ \mathbb{R}\right)$（对每个2-胞腔 σ，$\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$）是唯一的胞腔相对2-循环，表示 α在 $H_2\left(S\text{中}\,\gamma\left(\coprod S^1\right);\ \mathbb{R}\right)$的像。

注 6.4. 设 $f\colon (\Sigma, \partial\Sigma) \to (S,\gamma)$ 是一个容许曲面。假设 Σ配备了一个双曲结构，且映射 $f\colon \Sigma \to S$ 是局部等距嵌入。则有等式

$$\operatorname{area}\left(f_*[\Sigma]\right) = \operatorname{area}(\Sigma),$$

其中，$f_*[\Sigma]$ 被视为 $H_2(S,\gamma;\mathbb{R})$ 中的一个上同调类。

6.d. **褶皱曲面**。为了对双曲曲面 S 的格罗莫夫半范数作出良好的估计，采用一种特殊的容许曲面来度量它会很有帮助，这种曲面称为褶皱曲面。褶皱曲面背后的直观思路如下：若 Σ 是一个可定向紧致连通曲面，那么它的单纯体积为 $\|[\Sigma]\|_1 = -2\chi^-(\Sigma)$；然而，并不存在能实现这一等式的 Σ 三角剖分。相反，单纯体积是由一种理想三角剖分实现的。因此，我们的思路是给容许曲面 Σ 配备理想三角剖分，使之与 S 上的双曲结构相容。

由 Thurston [41, §8.8], 引入的褶皱曲面将实现这一点。

双曲曲面 Σ 中的测地线叶状结构 Λ 是 Σ 的一个闭子集，它分解为互不相交的完备嵌入测地线的并。每条这样的测地线都称为 Λ的一条叶。

定义 6.5. 设 M 是一个双曲流形。M 中的一个折叠曲面 是一个映射$f\colon \Sigma \to M$，其中 Σ 是有限面积双曲曲面，并满足：

(i) f 将 Σ 中的每条弧映射为 M中长度相同的弧；(ii) 存在一个测地叶层 $\Lambda \subseteq \Sigma$，使得 f 将 Λ 的每个叶映射为 M中的测地线，并且 f 在 $\Sigma \smallsetminus \Lambda$上是全测地的（即将每条测地线映射为测地线）；(iii) 若 Σ 是非紧的，则 f 将 Σ 每个尖点的一个小邻域映射为 M中某个尖点的一个小邻域。

T测地层理 Λ 被称为 f的褶皱轨迹。

关于双曲流形中褶皱曲面的更详细介绍，请参阅 [3, 12, 23]。

现在我们遵循 Calegari [8, §3.1.3], 的做法，说明如何获得褶皱容许曲面。为此所需的基本工具是 Thurston 的旋转构造：

引理 6.6 （Thurston [41, §8。10]）。设 P 是一个裤子曲面（即一个亏格为0 且具有三个边界分支的紧双曲曲面），并设 M 是一个紧双曲曲面或闭双曲流形。给定一个映射 f：$P \to M$，则以下两者之一成立：

（i） $\pi_1 P$ 在 f_* 下的像是 $\pi_1 M$的一个循环子群，或（ii）映射 f 可以通过同伦变形为一个褶皱曲面。

证明。考虑提升 f： $P \to M$ 到万有覆盖空间 f。注意， M 是双曲 n空间 $\mathbb{H}^n$中的一个凸子集，而 $\tilde{P}$ 是 $\mathbb{H}^2$中的一个凸子集。在 P 中取一个测地三角形 Δ，使其每个顶点分别位于一个边界分支上。它提升为 $\tilde{P} \subseteq \mathbb{H}^2$基本域中的一个测地三角形 $\tilde{\Delta}$。

现在的旋转构造是将顶点沿着它们移动到边界 $\partial\mathbb{H}^2$。见图7。这一构造

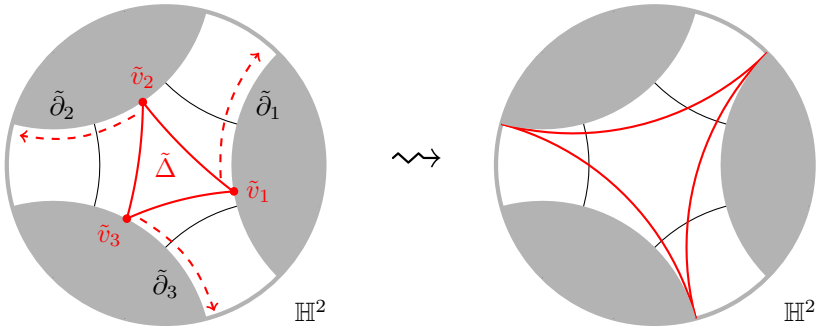

图 7。Thurston 的旋转构造。

称为旋转，因为在 P中，三角形 Δ 已绕着 P的边界分支旋转。由此得到 P 上的测地叶状结构 Λ，它有三条叶，其补集由两个开理想三角形组成。

有两种情况：

(i) 如果 $f(\Lambda)$ 是退化的（即 Λ 的三条叶子的像在 M 中具有相同的轴），那么 $f_*(\pi_1 P)$ 生成 $\pi_1 M$ 的一个循环子群。(ii) 否则，按如下方式构造一个与 f 同伦的映射 f'： $P \to M$。对于 P 的每个边界分支 ∂_i，我们定义 $f'(\partial_i)$ 为 $f(\partial_i)$ 的同伦类中唯一的闭测地线。Λ 的每条叶子 λ_i 在 f 下都映射为 M 中的一条拟测地线，该拟测地线可拉直为一条测地线 γ_i。令 $f'(\lambda_i) = \gamma_i$。最后，$P \smallsetminus \Lambda$ 的每个分支都是一个开理想三角形，并且由于它在 M 中的像非退化，因此存在一个将 f' 延拓到该三角形上的唯一全测地延拓。□

利用 Thurston 的旋转构造，我们可以得到褶皱容许曲面。这是对 Calegari 的一个引理的改编 [8, 引理 3。7]:

引理 6.7 (褶皱容许曲面)。 设 M 为紧双曲曲面或闭双曲流形。设 $\gamma:\coprod S^1 \to M$ 为 M中的一组测地环路，其中任意两个分支在 M中的像都不相同。则对于每个有理类 $\alpha \in H_2(M,\gamma;\mathbb{Q})$ 以及每个 $\varepsilon>0$，存在一个褶皱容许曲面 $f:(\Sigma,\partial\Sigma)\to(M,\gamma)$，使得 $f_*[\Sigma]=n(\Sigma)\alpha$，其中某个 $n(\Sigma)\in\mathbb{N}_{\geq 1}$，并且

$$\|\alpha\|_1 \leq \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{n(\Sigma)} \leq \|\alpha\|_1+\varepsilon. \tag{¶}$$

证明。根据引理 2.20，存在一个简单的、不可压缩的容许曲面 $f:(\Sigma,\partial\Sigma)\to(M,\gamma)$，满足 (¶)，且对于某个 $n(\Sigma)\in\mathbb{N}_{\geq 1}$，有 $f_*[\Sigma]=n(\Sigma)\alpha$。现在，按照图 8，取 Σ的一个裤子分解 $\{P_i\}_i$。其基本思路是对每个 P_i 应用旋转构造（引理 6.6）。我们可以分别在 Σ的每个连通分支上进行该构造；因此，为简化记号，我们假设 Σ 是连通的。裤子分解中有三种类型的分支。

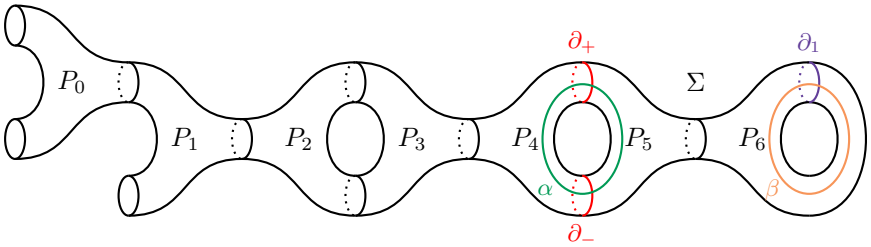

图 8。 Σ的裤子分解。

分解

(i) 作为二孔环面一部分的裤子曲面（例如 P_2、……、P_5 在图 8中），(ii) 自身粘合形成单孔环面的裤子曲面（例如 P_6 在图 8中），(iii) 不属于类型 (i) 或 (ii) 的裤子曲面（例如 P_0、P_1 在图 8中）。

固定一个裤子分支 P_i。我们想将引理 6.6 应用于限制$f_{|P_i}$：$P_i\to M$；我们需要确保 $f_*(\pi_1 P_i)$ 是非循环的。我们根据 P_i 的类型区分三种情形。

我们首先证明，若 P_i 属于类型 (iii)，则 $f_*(\pi_1 P_i)$ 不可能是循环的。回顾 §2.a，γ 表示 $[c]=\left[\sum_j w_j\right]\in C_1^{\mathrm{conj}}(\pi_1 M;\mathbb{Z})$，其中任意两个 w_j 都不共轭，也不会生成 $\pi_1 M$ 的循环子群（这是由对 γ 的假设得出的）。由于 f 是一个容许曲面，Σ 的每个边界分支都映射到某个 w_j 的幂，而单纯性意味着 Σ 的任意两个边界分支都不会映射到同一个 w_j 的幂。我们可以假设，类型 (iii) 的分支 $\{P_i\}_i$ 按 $\{P_0,\dots,P_k\}$ 的顺序排列，使得 P_0 在 $\partial\Sigma$ 上有两个边界分支，且每个 P_i 都沿一个边界分支与 P_{i-1} 粘合，并在 $\partial\Sigma$ 上有一个边界分支（这与图 8 的记号一致，其中 $k=1$）。采用这些记号，我们可以对各个 w_j 排序，使得 $f_*(\pi_1 P_0)=w_0,w_1$；每个 P_i 都有一个边界分支与 P_{i-1} 粘合，其像表示 $w_0,\dots,w_i$ 中的一个元素；另一个边界分支位于 $\partial\Sigma$ 上，其像表示 w_{i+1} 的幂。特别地，由此可知，对于任意类型 (iii) 的 P_i，$f_*(\pi_1 P_i)$ 都不是循环的。

现在假设 P_i 属于(i)类型。两个边界分支 ∂_+ 和∂_- 在 P_i 中是一个二孔环面里的子午线（$\partial_\pm$ 在图8 中为$P_i=P_4$所示）。设 α 为这个二孔环面的赤道，并令 $\delta_\alpha:\Sigma\to\Sigma$

表示沿 α 的 Dehn 扭转。如果 $f_*(\pi_1 P_i) = \langle f_*(\partial_+)\ f_*(\partial_-)\rangle$ 是循环的，那么用 $\delta_\alpha\partial_\pm$ 替换 $\partial_\pm$；这相当于为 Σ定义一个新的裤子分解。对于这个裤子分解，$\langle f_*(\partial_+)\ f_*(\partial_-)\rangle$ 不是循环的，因为根据不可压缩性，$f_*\alpha$ 和 $f_*\partial_\pm$不交换（否则，$[\alpha, \partial_\pm]$ 可由 Σ 中的一条简单闭曲线表示，且其像在 M中零伦）。修改后，同一个二孔环面中的相邻裤子 P_j 的像或许是循环的。在这种情况下，再沿 δ_α 做一次 Dehn 扭转。

最后假设 P_i 属于类型 (ii)。然后将 P_i 与自身粘合，形成一个单孔环面。将 ∂_1 记为 P_i 的两个边界分支之一，该边界分支被粘合后在单孔环面中形成一条子午线，并将 β 记为赤道（∂_1 和 β 在图 8 中为 $P_i = P_6$ 描绘）。于是 $f_*(\pi_1 P_i) = \left\langle f_*(\partial_1)\ f_*(\partial_1)^{f_*(\beta)}\right\rangle$，其中指数表示共轭。如果 $f_*(\pi_1 P_i)$ 是循环的，则存在 $w \in \pi_1 M$ 和 $k, \ell \in \mathbb{Z}$，使得

$$f_*(\partial_1) = w^k = f_*(\beta) w^\ell f_*(\beta)^{-1}.$$

但是 $\pi_1 M$ 是 Gromov-双曲的，因此已知它是一个 *CSA* 群，其含义是所有极大阿贝尔子群都是自共轭不交的——参见 [18, 例 10]。因此，$\langle w\rangle$ 是自共轭不交的（必要时，可将 w 替换为包含它的极大阿贝尔子群的一个生成元），并且 $f_*(\partial_1) \in \langle w\rangle \cap \langle w\rangle^{f_*(\beta)} \smallsetminus \{1\}$，因此 $f_*(\beta) \in \langle w\rangle$。特别地，$f_*[\partial_1, \beta] = 1$，这与不可压缩性相矛盾。这证明了 $f_*(\pi_1 P_i)$ 不可能是循环的。

因此，经过上述修改后，我们得到 Σ 的一组裤分解，满足 $f_*(\pi_1 P_i)$ 不可能是 $\pi_1 M$ 的循环子群。由引理6.6可知，f 在每个 P_i 上的限制都可以同伦变形为折叠映射。此外，这些同伦变形可以同时进行，因为裤子的每个边界分支的像都同伦变形为其同伦类中唯一的测地线。因此，我们得到一个与 f 同伦的折叠映射，它仍是一个容许曲面，并满足（¶）。□

备注 6.8。事实上，我们不需要引理 ¶ 中关于格罗莫夫半范数的估计（6.7）：只要知道每个有理类都由一个褶皱容许曲面表示，就足够了。

6.e. 有界欧拉类与面积。曲面 S 上的双曲结构在双曲平面的边界上诱导出 $\pi_1 S$ 的作用，而该边界是一个圆。因此，我们得到一个圆周作用 $\rho : \pi_1 S \to \mathrm{Homeo}^+(S^1)$，如 §6.b 所述，它定义了一个有界欧拉类 $\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(\rho) \in H_b^2(\pi_1 S; \mathbb{R})$。我们称之为 S 的有界欧拉类，并记作 $\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S)$。它也可视为 $H_b^2(S; \mathbb{R})$ 的一个元素——见 §3.c。

以下内容隐含于 Calegari 的著作中 [8, 引理 4。68]:

引理 6.9 (有界欧拉类与面积). 设 $\gamma : \coprod S^1 \to S$ 是紧双曲曲面 S 上的一组测地环路。设 $\alpha \in H_2(S, \gamma; \mathbb{Q})$ 为一个有理类。那么

$$\mathrm{area}(\alpha) = -2\pi \left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S), \alpha \right\rangle.$$

证明。引理 6.7 给出了一个褶皱容许曲面 $f : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (S, \gamma)$ 满足$f_*[\Sigma] = n(\Sigma)\alpha$，其中 $n(\Sigma) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。因此，

$$\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S), \alpha \right\rangle = \frac{1}{n(\Sigma)} \left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S), f_*[\Sigma] \right\rangle.$$

回顾 §6.b，$\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}$被定义为 $-\frac{1}{2}[\mathrm{Or}]$ 在 $H_b^2\left(\mathrm{Homeo}^+\left(S^1\right)\right)$中的像。上的褶皱结构定义了一个理想三角剖分，因此 Kronecker 乘积 $\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S)\ f_*[\Sigma]\right\rangle$ 由下式给出

$$\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S), f_*[\Sigma]\right\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\mathrm{Or}\left(f(\sigma)\right),$$

其中求和遍及该理想三角剖分中的所有三角形 σ，且若 $f(\sigma)$ 定向为正，则 $\mathrm{Or}\left(f(\sigma)\right)$ 为 $+1$；若 $f(\sigma)$ 定向为负，则为 -1；若 $f(\sigma)$ 退化，则为 0。不过，每个 $f(\sigma)$ 都是 S 中的一个理想三角形，并根据高斯–博内定理，对面积 $\left(\sum_\sigma f(\sigma)\right)$ 的贡献为 $\pi\,\mathrm{Or}\left(f(\sigma)\right)$。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{area}(\alpha) &= \frac{1}{n(\Sigma)}\,\mathrm{area}\left(f_*[\Sigma]\right) = \frac{1}{n(\Sigma)}\,\mathrm{area}\left(\sum_\sigma f(\sigma)\right)\\ &= \frac{\pi}{n(\Sigma)}\sum_\sigma \mathrm{Or}\left(f(\sigma)\right) = -\frac{2\pi}{n(\Sigma)}\left\langle \mathrm{eu}_{\mathbb{R}}^b(S), f_*[\Sigma]\right\rangle\\ &= -2\pi\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S), \alpha\right\rangle.\end{aligned}$$

□

若存在一个容许曲面 $f:(\Sigma,\ \partial\Sigma)\to(S,\ \gamma)$，使得对于某个 $n(\Sigma)\in\mathbb{N}_{\geq 1}$，有 $f_*[\Sigma]=n(\Sigma)\ \alpha$，且 f 是一个保定向浸入，则称上同调类 $\alpha\in H_2(S,\ \gamma;\mathbb{R})$ 可由正浸入射影表示。

下面的结论是对 Calegari 一项结果的直接推广[8,引理 4。62]:

定理E（有界欧拉类的极值性）。设 $\gamma:\ \coprod S^1\to S$ 是紧双曲曲面 S中的一组测地环路。设 $\alpha\in H_2(S,\gamma;\ \mathbb{Q})$ 由正浸入 $f:\ (\Sigma,\partial\Sigma)\looparrowright(S,\gamma)$ 作射影表示。那么

$$\|\alpha\|_1 = \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{n(\Sigma)} = -2\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S),\alpha\right\rangle.$$

换言之，f 是极值曲面，$-\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S)$ 是 α的极值类。特别地，$\|\alpha\|_1\in\mathbb{Q}$。

证明。注意到 Σ 继承了来自 S 的双曲结构，在该结构下 f 是局部等距嵌入，并且 面积$(\Sigma)=n$（Σ）面积(α)（参见备注 6.4）。由高斯–博内定理，

$$-2\pi\chi^-(\Sigma) = -2\pi\chi(\Sigma) = \mathrm{area}(\Sigma) = n(\Sigma)\,\mathrm{area}(\alpha).$$

因此（利用 $\|\cdot\|_1$ 的拓扑解释——参见命题 2.18），

$$\|\alpha\|_1 \leq \frac{-2\chi^-(\Sigma)}{n(\Sigma)} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{area}(\alpha) = -2\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S),\alpha\right\rangle,$$

其中，最后一个等式由引理 6.9 得出。我们有 $\left\|\text{欧拉类}_b^{\mathbb{R}}(S)\right\|_\infty\leq\frac{1}{2}$，因此关于 $\|\cdot\|_1$（定理B）的巴瓦尔对偶给出

$$-2\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S),\alpha\right\rangle \leq \frac{\left\langle -\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S),\alpha\right\rangle}{\left\|\mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S)\right\|_\infty}\leq\|\alpha\|_1.$$

□

注 6.10。在 S 边界非空的情况下，定理 E 的逆命题成立：若 $\|\alpha\|_1=-2\left\langle \mathrm{eu}_b^{\mathbb{R}}(S)\ \alpha\right\rangle$，则 α可由一个正浸入作射影表示 [8, 引理 4。62]。然而，这依赖于 $\|\alpha\|_1$ 存在极值曲面（参见 [8, 注 4。65]）；若 S 是闭的，则目前尚不知道是否存在这样的曲面。

参考文献

[1] Christophe Bavard, 《交换子的稳定长度》, Enseign. Math. (2 2, 109 37 1991 1 150 1115747) ( ), 第 - 期, 页 – 。MR[2] Mladen Bestvina 、 Ken Bromberg 和 Koji Fujiwara, 《映射类群上的稳定交换子长度》, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 66 (2016), 第 3 期, 871–898。MR3494163[3] Francis Bonahon, 《曲面上的测地层》, 《动力系统、几何与拓扑中的层与叶状结构》（纽约州石溪,
1998 2001, 1 37 1810534 ）, 页 – 。MR Kenneth [4]
S. Brown, 《群上同调》, 《数学研究生教材》第 87 卷, Springer-Verlag, 纽约,
1994 1982 1324339 。原版的校订重印本。MR [5]
M. Bucher、M. Burger、R. Frigerio、A. Iozzi、C. Pagliantini 和 M. B. Pozzetti, 《有界上同调中的等距嵌入》, J. Topol. Anal. 6 (2014), 第 1 期, 1–25。MR3190136[6] Michele Bucher、Roberto Frigerio 和 Tobias Hartnick, 《关于圆周作用半共轭的一则注记》, Enseign. Math.
62 2016 3 4, 317 360 3692890 ( ), 第 - 期, 页 – 。MR Danny [7]
Calegari, 《稳定交换子长度范数球的面》, Geom. Topol. (2009), 第 3 期, 1313–1336。MR2496047 **13**
[8] ———, 20, 2009 2527432 《稳定交换 [9] ,
子长度》, MSJ Memoirs, 第 Mathematical Society of Japan 卷, 东京, 。MR《自由群中的稳定交换子长度是 **22** 2009
有理数》, J. Amer. Math. Soc. ( ), 第 4 期, 941–961。MR2525776[10] ,《稳定交换子长度、帆与手术》, J. Topol. 4 (2011), 第 2 期, 305–326。MR2805993[11] Danny Calegari 和 Koji Fujiwara, 《字双曲群中的稳定交换子长度》, Groups Geom. Dyn. **4** 2010 1, 59 90 2566301 ( ), 第 – 期。MR R. D. Canary、D. B. A. Epstein [12] 和 P. Green, 《Thurston 笔记之笔记》, 《双曲空间的分析与几何方面》（考文垂/达勒姆,
1984 1987, 3 92 903850 ）, 页 – 。
[13] ——— **18** 2018 6, 3279 3313
MR Lvzhou Chen, 《自由积中的稳定交换子长度》, Algebr. Geom. Topol. ( ), 第 – 期。MR3868221
[14] ,《群图中的稳定交换子长度》, Invent. Math. 221 (2020), 第 2 期, 329–396。MR4121154[15] Lvzhou Chen 和 Nicolaus Heuer, 《群图与三维流形中的稳定交换子长度谱隙》, 2019。预印本见 arXiv:1910.14146。[16] Matt Clay、Max Forester 和 Joel Louwsma, 《Baumslag-Solitar 群中的稳定交换子长度及树作用的拟态》, Trans. Amer. Math. Soc. 368 7, 4751 2016 4785 3456160 ( ), 第 – 期。MR[17] Marc Culler, 《利用曲面求解自由群中的方程》, Topology 20 2, 133 1981 145 605653 ( ), 第 – 期。MR[18] Pierre de la Harpe 和 Claude Weber, 《自共轭不交子群与 Frobenius 群：基础与例子》, Confluentes Math. 6 (2014), 第 1 期, 65–76。附录由 Denis Osin 撰写。MR3266885[19] Andrew J. Duncan 和 James Howie, 《局部可示群的单关系子群积的亏格问题》, Math. Z.
208 1991 2, 225 237 1128707 ( ), 第 – 期。MR Walther Dyck, [20]
《位置分析论文》, Math. Ann. ( ), 第 4 期, 457–512。MR1510522[21] Talia Fernós、Max Forester 和 Jing Tao, 《直角阿廷群上的有效拟态》, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 69 (2019), 第 4 期, 1575–1626。MR4010865[22] Roberto Frigerio, 《离散群的有界上同调》, 《数学调查与专著》, 第
227, 2017 3726870 卷, 美国数学会, [23]
罗得岛州普罗维登斯, 。MR David Futer 和 Saul Schleimer, 《纤维化 - 流形的尖点几何》, Amer. J. Math. 136 (2014), 第 2 期, 309–356。MR3188063[24] Étienne Ghys, 《圆周同胚群与有界上同调》, 《勒夫谢茨百年纪念会议》第 III 部分（墨西哥城,
1984 1987, 81 106 893858 ）, 页 – 。MR《作用 [25] ,
于圆周的群》, Enseign. Math. ( ) ( ), 第 -4 期, 329–407。MR1876932[26] Frédéric Haglund 和 Daniel T. Wise, 《特殊立方复形》, Geom. Funct. Anal. 17 (2008), 第 5, 1551 1620 2377497 – 期。MR [27]
Allen Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002。MR1867354[28] Nicolaus Heuer, 《融合自由积和直角阿廷群中的稳定交换子长度间隙》, Geom. Funct. Anal.
29 2019 1, 198 237 3925108 ( ), 第 – 期。MR Heinz Hopf, 《基本群与第二贝蒂群》, [29]
Comment. Math. Helv. 14 (1942 257 309 6510), –。MR N. V. Ivanov, 《第二有界上同调群》, [30]
Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 167 (1988), 117–120, 191。MR964260[31] Sungwoon Kim 和 Thilo Kuessner, 《具有可均边界的紧流形的单纯体积》, J. Topol. Anal. 7 (2015), 第 1 期, 23–46。MR3284388

[32] R. C. Lyndon, 《自由群中的方程 $a^2b^2 = c^2$ 》, Michigan Math. J. 6 (1959), 89–95. MR103218[33] R. C. Lyndon 和 M. P. Schützenberger, 《自由群中的方程 $a^M = b^N c^P$ 》, Michigan Math. J. **9** 1962 289 298 162838 ( ), – . MR Alexis Marchand, 《稳定交换子长度的曲面等距嵌入》, Groups Geom. Dyn. (2023). 即将出版。[35] [34], 《从字母拟同态到角结构和稳定交换子长度的谱隙》, 2024。预印本见 arXiv:2402.13856。[36] Shigenori Matsumoto 和 Shigeyuki Morita, 《某些同胚群的有界上同调》, Proc. Amer. Math. Soc. **94** 1985 3, 539 544 787909 ( ), no. – . MR [37] Henri Poincaré, 《关于由微分方程定义的曲线的回忆录》, Resal J. (3) 7 (1881), 375–422（法文）。[38] , 《关于由微分方程定义的曲线的回忆录》, Resal J. (3) 8 (1882), 251–296（法文）。[39] Andrew Putman, 《通过几何学证明霍普夫定理》。未发表笔记，见作者网站。[40] Tim Susse, 《融合自由积中的稳定交换子长度》, J. Topol. Anal. 7 (2015), no. 4, 693–717. MR3400127[41] William P. Thurston, 《三维流形的几何与拓扑》, 1979。普林斯顿大学讲座笔记，可从 MSRI 获取。[42] Alden Walker, 《循环群自由积中的稳定交换子长度》, Exp. Math. 22 (2013 3, 282 298 3171093), no. – . MR Charles A. Weibel, 《同调代数导论》, [43] Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324

DPMMS，数学科学中心，Wilberforce Road，剑桥 CB3 0WB，英国电子邮箱地址: aptm3@cam.ac.uk