arXiv:2305.02152v1 [math-ph] 3 May 2023

基于递归公式的三维偏差分解法导论

Anja Barz 计算机科学系
莱比锡大学 德国

Chiara Hergl
软件技术研究所，
德国航空航天中心（DLR），科隆
德国

Gerik Scheuermann 莱
比锡大学计算机科学系 德国

2023年5月4日

摘要

高阶张量广泛存在于力学、物理学、医学以及地球科学等多个领域。由于这些张量具有高度复杂性，大多数张量尚未得到充分理解。因此，其分析与可视化过程是一项极具挑战性的任务。为了解决这一问题，我们需要一种适用于任意张量的合适的张量分解方法。由于许多现实世界中的示例都是在三维空间中描述的，因此本文也将重点关注这一空间。零阶和一阶张量已得到充分理解，而对于二阶张量，则存在众所周知的谱分解方法。然而，对于阶数高于二阶的张量，目前尚无标准的分解方法。本文将重点总结有关偏张量分解的相关知识，并介绍其递归计算方法。该方法能够将任意阶张量分解为一组正交的不可约部分之和，即这些部分彼此正交且在旋转下保持不变。这些不可约部分基于所谓的偏张量。偏张量分解的计算方法及其结果尚未在工程学界得到广泛理解。为了改变这一现状，本文收集了来自多种文献资料的有关该分解方法的信息，并对其进行总结和阐释，以便开展进一步的分析。此外，本文还将介绍常用物理张量的不同应用及示例。本文的目标是使其他研究人员也有机会运用这些知识。

关键词 张量 · 高阶 · 偏张量分解 · 耦合张量 · 刚度张量

1 引言

张量是数学对象，广泛应用于物理学、医学或地球科学。然而，含有 3^n 个分量的一般 n 阶张量，其求值相当困难，因为分量数很快就会变得非常庞大。最好将张量拆分成更小的部分，以便更有效地理解和分析。对于某些可用矩阵表示的二阶张量，谱分解是一种实用的方法。不过，对于阶数高于二且不具备特定对称类型的张量，目前还没有多少广为人知的方法。

本文的重点是汇集有关一般 n 阶张量的正交不可约分解的信息：将其分解为特定数量的相互独立的全对称无迹张量，称为偏张量。这种偏张量分解具有显著优势。不仅分解结果唯一，而且各不可约部分彼此正交，且在旋转下保持不变。此外，这种分解还可以递归计算。另一项重要优势

与偏张量有关。它们可以由一组唯一的向量和一个标量表示，但允许偶数个符号发生变化。例如，Hergl 等人 [1] 概述了这种分解，Hergl [2]则对其作了进一步分析。

偏张量分解这一数学概念背后的基本思想基于群论，Backus [3]对此进行了总结。Hamermesh [4]也探讨了群论与张量之间联系的更深入理解。随后，Zou 等人 [5] 提出了一种基于低阶张量的递归公式，无需群论背景即可计算这种分解。得益于 Zheng 等人 [6]所做的一些初步研究，这种递归计算才得以建立。本文旨在总结这种强大分解方法中最重要的事实，并深入考察若干命题的证明。本文结构安排如下。首先概述所用的张量代数，定义本文中使用的重要性质，并解释相关符号。第 3 章对属于空间 $\mathcal{V}\otimes\mathcal{D}^{(n)}$ 的张量进行一些初步研究。这些 $n+1$ 阶张量关于指标 $i_1\cdots i_n$也完全对称且无迹。对于后续研究，找出该空间中张量的一种合适分解至关重要。找到这种分解的关键在于分析某些置换的线性组合。利用 n 个指标的无迹性，即可得到最终形式。第 4 章验证本文的主要结果。首先通过数学归纳法证明偏张量分解的存在性。在归纳步骤中，递归这一重要特征便显现出来。接下来，精确计算 J_s^n，它表示分解中所包含的偏张量数量。随后证明这些偏张量彼此独立，即它们不能相互表示为线性组合。最后证明该分解是不可约且正交的。本文最后给出若干示例。首先，使用递归公式求出最高至 4 阶的一般张量的不可约且正交的偏张量分解。然后，借助 Hergl [2], 所做的计算，给出三阶耦合张量分解的精确计算。最后，展示四阶刚度张量偏张量分解的计算过程。

本文不会提供有关偏张量分解的新事实，而是着重于总结已知结果，并更详细地解释其推导过程。

2 张量代数

N 维　　n 阶张量 $T^{(n)}$ 可定义为一个将 n 个向量映射到实数上的多重线性映射　　rs

$$\mathbb{T}^{(n)}:(\mathcal{V}_N)^n\to\mathbb{R}.$$

除非另有说明，本文假设 $N=3$。在 $\mathcal{V}_N$ 中固定一组标准正交基，例如 $\{e_i\}$，张量可用其系数描述为

$$\mathbb{T}^{(n)}(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_n})=T_{i_1\cdots i_n}.$$

这种形式称为张量的分量形式。任意 n 阶张量均记为 $T^{(n)}$。不过，零阶张量可表示为标量，因此用小写希腊字母表示，例如 α。一阶张量可表示为向量，因此用小写粗体字母表示，例如 v，除非另有说明。

在这项工作中，需要定义一些张量运算。一种众所周知的张量运算是张量积或外积。n 阶张量 $A^{(n)}$ 和 m 阶张量 $B^{(m)}$ 的张量积得到一个 $(n+m)$ 阶张量 $C^{(n+m)}$，定义为

$$C_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_m}=\mathbb{A}^{(n)}\otimes\mathbb{B}^{(m)}=A_{i_1\ldots i_n}B_{j_1\ldots j_m}.$$

另一种众所周知的张量运算称为张量缩并。张量缩并是对确定数量的指标进行求和。单次缩并 $C^{(n+m-2)}=A^{(n)}\cdot B^{(m)}$ 是张量 $A^{(n)}$和 $B^{(m)}$ 对一个指标进行求和

$$C_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}j_2\ldots j_m}=\mathbb{A}^{(n)}\cdot\mathbb{B}^{(m)}=\sum_{k=1}^{N}A_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}k}B_{kj_2\ldots j_m}.$$

为减少张量公式的繁琐程度，可以使用爱因斯坦求和约定。此处，对重复指标进行隐式求和：

$$\mathbb{A}^{(n)}\cdot\mathbb{B}^{(m)}=A_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}k}B_{kj_2\ldots j_m}.$$

双重缩并 $\mathrm{A}^{(n)} : \mathrm{B}^{(n)}$ 类似地定义为对两个指标求和 s

$$C_{i_1 i_2 \ldots i_{n-2} j_3 \ldots j_m} = \mathbb{A}^{(n)} : \mathbb{B}^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-2} k l} B_{k l j_3 \ldots j_m}$$
$$= A_{i_1 i_2 \ldots i_{n-2} k l} B_{k l j_3 \ldots j_m}.$$

本文采用以下约定，对维数均为 N 的 n 阶张量 $\mathrm{A}^{(n)}$ 与 m 阶张量 $\mathrm{B}^{(m)}$ 进行完全缩并，其中 $\mathrm{m} < \mathrm{n}$。

$$\mathbb{A}^{(n)}[\mathbb{B}^{(m)}] = A_{i_1 \ldots i_m i_{m+1} \cdots i_n} \left[B_{i_1 \ldots i_m}\right]$$
$$= \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_m=1}^{N} A_{i_1 \ldots i_m i_{m+1} \cdots i_n} B_{i_1 \ldots i_m}.$$

本文的主要内容是将张量分解为不可约的正交部分。正交是指正交部分经过旋转后，整体张量也发生相同的旋转；不可约是指这些部分无法进一步分解为旋转不变部分。

这些部分都可以表示为所谓的偏张量，即全对称无迹张量。子空间 $\mathcal{D}^{(n)} \in (\mathcal{V}_N)^n$ 表示所有 n 阶偏张量组成的空间。如果一个张量在所有指标置换下保持不变，则称其为全对称张量。每个张量都可以进行对称化。一般张量 $\mathrm{T}^{(n)}$ 的对称化得到其全对称部分 $\mathrm{sT}^{(n)}$，其表示为

$$\mathbf{s}\mathbb{T}^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \pi \mathbb{T}^{(n)}$$

其中，$\mathcal{S}_n$ 是所有指标置换的集合。

本文中使用的另一个概念是对 n 阶张量 $\mathrm{T}^{(n)}$ 在指标的某一部分（例如 $(\mathrm{i1}, \cdots, \mathrm{i}_m)$，$\mathrm{m} < \mathrm{n}$）上进行对称化，记为 $\mathrm{T}_{\hat{i_1} \ldots \hat{} i m i m+1 \cdots i n}$，如 [5] 所示。其定义为：将 $\mathrm{T}_{i_1 \cdots i m i m+1 \cdots i n)}$ 中关于 $(\mathrm{i}_1 \cdots \mathrm{i}_m)$ 的所有 m! 种置换求和，再除以 m!。

$$T_{\hat{i_1} \cdots \hat{i_m} i_{m+1} \cdots i_n} = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} \pi \mathbb{T}^{(n)}.$$

如果指的不是对称化，而只是对某一组指标进行置换，则使用记号 $\pi(\mathrm{i1}, \cdots, \mathrm{i}_n)$，其中 $\pi \in \mathcal{S}_n$。任意 n 阶张量 $\mathrm{T}^{(n)}$ 的迹取决于所选的特定指标对。例如，$\mathrm{T}^{(n)}$ 的 (1, 2)-迹（对第一和第二个指标取迹）定义为如下的 $\mathrm{n} - 2$ 阶张量 $\mathrm{tr}^{1,2}(\mathrm{T}^{(n)})$：

$$\mathrm{tr}_{1,2}(\mathbb{T}^{(n)}) := \sum_{s=1}^{N} T^{(n)}_{ssi_3 \cdots i_n}$$

在完全对称的情况下，张量 $\mathrm{S}^{(n)}$ 的所有迹都相同 [4]。因此，在本文中，完全对称张量的迹定义为 (1,2)-迹。

$$\mathrm{tr}\ (\mathbb{S}) = \mathrm{tr}_{1,2}(\mathbb{S}) = \sum_{s=1}^{N} S_{ssi_3 i_4 \ldots i_n}.$$

根据迹的这一定义，如果所有迹都为零，则称张量是无迹的（在完全对称的情况下，即该唯一的迹为零）。

在定义不可约正交部分时，会用到半旋张量，即相对于正交群保持不变的张量。为了定义它们，还要用到另外两个非常重要的张量。这两个张量是二阶恒等张量 1，它由克罗内克δ表示

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

以及三阶置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j,k) \in [(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)], \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \in [(1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)], \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Zou 等人 [5]这意味着“每个半旋张量都可以表示为以下形式的张量的线性组合。 m

$$\mathrm{per}(\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}) \tag{1}$$
$$\mathrm{per}(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}) \tag{2}$$

其中 per 是一种置换运算。(1) 用于偶数阶半旋张量，而 (2) 用于奇数阶半旋张量。在本文中，$\mathrm{H}^{(n)}$ 将用于表示 n 阶半各向同性张量。

3 $\mathcal{V}\otimes\mathcal{D}^{(n)}$ 中张量的偏张量分解

It w稍后将会看到，任意 \(n\) 阶张量 $\mathrm{T}^{(n)}$ 的偏张量分解具有如下形式。

$$\mathbb{T}^{(n)}=\sum_{J=1}^{J_0^n}\alpha_J\mathbb{H}_J^{(n)}+\sum_{J=1}^{J_1^n}\mathbb{H}_J^{(n+1)}[\mathbf{v}_J]+\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbb{D}_J^{(s)}] \tag{3}$$

其中，\(J_{\{v_1\},\{v_2\}}^{s}\{v_3\}_n\) 表示 \(s\) 阶偏张量的独立个数。

为了证明任意阶数 n 的张量 $\mathrm{T}^{(n)}$ 均存在偏张量分解，还需要进一步了解一种特殊张量类型。这些特殊张量 $\mathrm{G}^{(n+1)}$ 属于空间 $\mathcal{V}\otimes\mathcal{D}^{(n)}$。

关于 Zou 等人 [5] 的结果，对于任意 $\mathrm{v}=\sum_{k=1}^{3}\mathrm{a}_k\mathrm{e}_k\in\mathcal{V}$，$\mathrm{a}_k\in\mathbb{R}$ 可得：

$$\mathbb{G}^{(n+1)}=\mathbf{v}\otimes\mathbb{D}^{(n)}=(\sum_{k=1}^{3}a_k\mathbf{e}_k)\otimes\mathbb{D}^{(n)}=\sum_{k=1}^{3}(\mathbf{e}_k\otimes a_k\mathbb{D}^{(n)})=:\sum_{k=1}^{3}(\mathbf{e}_k\otimes\mathbb{D}_k^{(n)})$$

定义 $\mathrm{D}^{(n)}{}_k:=\mathrm{a}_k\mathrm{D}^{(n)}$，或 $\mathrm{D}^{k}_{i_1\cdots i_n}=\mathrm{a}_k\mathrm{D}_{i_1\cdots i_n}$，可知 $\mathrm{G}^{(n+1)}$ 的分量可计算为

$$G_{ki_1\cdots i_n}=D^k_{i_1\cdots i_n}. \tag{4}$$

因此，$\mathrm{G}^{(n+1)}$ 关于指标 $(\mathrm{i}_1\cdots\mathrm{i}_n)$ 完全对称且无迹。

Zheng 等人 [6] 详细证明了，对于任意整数 $\mathrm{n}>1$，$\mathrm{G}^{(n)}$ 的不可约分解 (3) 仅包含三个偏张量 $\mathrm{D}^{(n-1)}$、$\mathrm{D}^{(n)}$ 和 $\mathrm{D}^{(n+1)}$。因此，还需要分别规定相应的半旋张量 $\mathrm{H}^{(2n)}$、$\mathrm{H}^{(2n+1)}$ 和 $\mathrm{H}^{(2n+2)}$。下一部分将分别分析每个不可约部分。

$\mathrm{H}^{(\mathbf{2n})}[\mathrm{D}^{(\mathbf{n-1})}]$的分析

半旋张量的阶数必须为 2n，因为它与 $(\mathrm{n}-1)$ 阶偏张量完全缩并后，结果的阶数必须为 $(\mathrm{n}+1)$。由于任意 n 的 2n 都是偶数，$\mathrm{H}^{(2n)}$ 必须是 $\mathrm{per}(\mathbb{1}\otimes\ldots\otimes\mathbb{1})$ 的线性组合，或 $\delta_{\pi(i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\ldots\delta_{i_{n-1}j_{n-1}}\delta_{i_nk)}$，见 (1)。$(\mathrm{i}_1\mathrm{j}_1\mathrm{i}_2\mathrm{j}_2\cdots\mathrm{i}_{n-1}\mathrm{j}_{n-1}\mathrm{i}_n\mathrm{k})$ 的不同置换会影响各个张量的指标，因此，必须仔细考察线性组合中的每个求和项。

设 $\mathrm{x}1,\cdots,\mathrm{x}_{n-1}\in\{1,\cdots,\mathrm{n}-1\}$和 $\mathrm{y}1,\cdots,\mathrm{y}_n\in\{1,\ldots,\mathrm{n}\}$。如果线性组合中的某个求和项至少包含一个 $\delta_{j_{x_1}j_{x2}}$，则整个项等于零，因为 $\mathrm{D}^{(n-1)}$ 是偏张量，因而是无迹的，因此，

$$\delta_{j_{x_1}j_{x_2}}D_{j_{x_1}j_{x_2}\pi(j_3\cdots j_{n-1})}=0$$

假设某个求和项不包含任何 $\delta_{j_{x_1}j_{x2}}$，那么对于其他可能情况，有：

情况 1：该求和项为 $\delta_{\pi(i_{y_n}j_{x_1}}\delta_{i_{y_2}j_{x_2}}\cdots\delta_{i_{y_{n-1}}j_{xn-1)}}\delta_{i_{y_1}k}$。那么，与 $\mathrm{D}^{(n-1)}$ 的张量缩并除以下情况外均为零：$\delta_{i_{y_n}j_{x_1}}\delta_{i_{y_2}j_{x_2}}\cdots\delta_{i_{y_{n-1}}j_{xn-1}}\delta_{i_{y_1}k}\delta_{i_{y_a}j_{xa}}$，其中 $\mathrm{i}^{y_1}=\mathrm{k}$、$\mathrm{i}_{y_n}=\mathrm{j}_{x_1}$、$\mathrm{i}_{y_2}=\mathrm{j}_{x_2}\cdots$、$\mathrm{i}_{y_{n-1}}=\mathrm{j}_{x_{n-1}}$。于是，张量缩并可简化为以下乘法：

$$\delta_{ki_{y_1}}D_{i_{y_2}\cdots i_{y_n}}.$$

情况 2：求和项为 $\delta_{\pi(i_{y_2}j_{x_2}}\cdots\delta_{i_{y_{n-1}}j_{xn-1}}\delta_{i_{y_1}i_{yn})}\delta_{j_{x_1}k}$。然后，与 $\mathrm{D}^{(n-1)}$的张量缩并为零，除非出现以下情况：$\delta_{i_{y_n}j_{x_2}}\delta_{i_{y_3}j_{x_3}}\ldots\delta_{i_{y_1}i_{y_2}}\delta_{j_{x_1}k}\delta_{i_{y_a}j_{xa}}$，其中 $\mathrm{j}_{x_1}=\mathrm{k}$，$\mathrm{i}_{y_1}=\mathrm{i}_{y_2}$，$\mathrm{i}_{y_n}=\mathrm{j}_{x_2}$，$\mathrm{i}_{y_3}=\mathrm{j}_{x_3}\cdots$，$\mathrm{i}_{y_{n-1}}=\mathrm{j}_{x_{n-1}}$。于是，张量缩并可简化为以下乘法：

$$\delta_{i_{y_1}i_{y_2}}D_{i_{y_3}\cdots i_{y_n}k}.$$

因此，缩并中只包含 $(n+1)!$ 个求和项 $\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_nk)}$，其中 $\pi\in S^{(n+1)}$。因此，它可以表示为 $\mathrm{per}\left(\mathbb{1}\otimes D^{(n-1)}\right)$ 的线性组合。

1 和 $D^{(n-1)}$ 均完全对称。因此，求和项有两种类型：两个求和项的形式为$\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)}$，而（$n-1$）个求和项的形式为 $\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k}$，其中 $\pi\in S_n$。
可总结如下：

$$\begin{aligned}
H_{i_1\cdots i_nkj_1\cdots j_{n-1}}[D_{j_1\cdots j_{n-1}}] &= \Big(\sum_{\lambda=1,\pi\in S_{2n}}^{(2n)!} c_\lambda \delta_{\pi(i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_{n-1}j_{n-1}}\delta_{i_nk)}\Big)[D_{j_1\cdots j_{n-1}}] \\
&= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_{n+1}}^{(n+1)!} c_\lambda \delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_nk)} \\
&= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}\sum_{\mu=1}^{2} c_{\lambda_\mu}\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)} + \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}\sum_{\mu=3}^{n+1} c_{\lambda_\mu}\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k} \\
&= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)} + \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k}
\end{aligned}$$

其中 $a=\sum_{\mu=1}^{2}c_{\lambda_\mu}$，$b=\sum_{\mu=3}^{n+1}c_{\lambda_\mu}$。由此得到一个含有两个未知变量 a、b 的方程 $\in\mathbb{R}$。

$H^{(2n+1)}[D^{(n)}]$ 的分析

半旋张量的阶数必须为 $(2n+1)$，因为与 n 阶偏张量完全缩并后，结果必须为 $(n+1)$ 阶。由于对于任意 n，$2n+1$ 均为奇数，$H^{(2n+1)}$ 必须是 $\mathrm{per}(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\mathbb{1}\otimes$ 的线性组合
$\cdots\otimes\mathbb{1})$，或 $\varepsilon_{\pi\,(i_1j_1k}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_nj_n)}$，参见 (2)。同样，(i1 j1i2 $j_2\cdots i_nj_nk$) 的不同置换会影响各个 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的指标，因此，仔细考察线性组合中的每个求和项非常重要。
设 $x1,\cdots,x_n\in\{1,\cdots,n\}$和 $y1,\cdots,y_n\in\{1,\cdots,n\}$。和之前一样，如果线性组合中的某个求和项至少包含一个 $\delta_{j_{x_1}j_{x2}}$，那么整个求和项等于零，因为 $D^{(n)}$ 是偏差张量，因而是无迹的，因此

$$\delta_{j_{x_1}j_{x_2}}D_{j_{x_1}j_{x_2}\pi(j_3\cdots j_n)}=0.$$

假设某个求和项不包含任何 $\delta_{j_{x_1}j_{x2}}$。那么，其他可能的求和项为：

情况 1：该求和项为 $\delta_{\pi(i_{y_4}j_{x_4}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn}}\delta_{i_{y_1}i_{y_2}}\delta_{i_{y_3}k)}\varepsilon_{j_{x_1}j_{x2}j_{x3}}$。无论后续项是否包含任何 δ，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $D^{(n)}$ 的以下张量缩并都会得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{j_{x_1}j_{x_2}j_{x_3}}D_{j_{x_1}j_{x_2}j_{x_3}j_{x_4}\ldots j_{x_n}} &= \varepsilon_{111}D_{111j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{222}D_{222j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{333}D_{333j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&+ \varepsilon_{123}D_{123j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{132}D_{123j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&+ \varepsilon_{213}D_{213j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{231}D_{231j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&+ \varepsilon_{312}D_{312j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{321}D_{321j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

情况 2：求和项为 $\delta_{\pi(i_{y_3}j_{x_3}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn}}\delta_{i_{y_1}i_{y_2}}\delta_{i_{y_2}k)}\varepsilon_{j_{x_1}j_{x2}i_{y1}}$。与后续项无关，包含任意 δ，以下 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $D^{(n)}$ 的张量缩并结果为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{j_{x_1}j_{x_2}i_{y_1}}D_{j_{x_1}j_{x_2}i_{y_1}j_{x_4}\ldots j_{x_n}} &= \varepsilon_{11i_{y_1}}D_{11i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{22i_{y_1}}D_{22i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{33i_{y_1}}D_{33i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&+ \varepsilon_{12i_{y_1}}D_{12i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{21i_{y_1}}D_{21i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&+ \varepsilon_{13i_{y_1}}D_{13i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{31i_{y_1}}D_{31i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&+ \varepsilon_{23i_{y_1}}D_{23i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{32i_{y_1}}D_{32i_{y_1}j_{x_4}\cdots j_{x_n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

情况 3：求和项为 $\delta_{\pi(i_{y_3}j_{x_3}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn}}\,\delta_{i_{y_1}i_{y2})}\,\varepsilon_{j_{x_1}j_{x2}k}$。与后续包含任意δ的项无关，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 与 $\mathbf{D}^{(n)}$ 的以下张量缩并结果为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{j_{x_1}j_{x_2}k}D_{j_{x_1}j_{x_2}kj_{x_4}\cdots j_{x_n}} &= \varepsilon_{11k}D_{11kj_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{22k}D_{22kj_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{33k}D_{33kj_{x_4}\cdots j_{x_n}}\\ &+ \varepsilon_{12k}D_{12kj_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{21k}D_{21kj_{x_4}\cdots j_{x_n}}\\ &+ \varepsilon_{13k}D_{13kj_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{31k}D_{31kj_{x_4}\cdots j_{x_n}}\\ &+ \varepsilon_{23k}D_{23kj_{x_4}\cdots j_{x_n}} + \varepsilon_{32k}D_{32kj_{x_4}\cdots j_{x_n}}\\ &= 0\end{aligned}$$

情况 4：求和项由 $\delta_{\pi(i_{y_3}j_{x_3}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn}}\delta_{j_{x2}k)}\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}i_{y2}}$ 给出。然后，与 $\mathbf{D}^{(n)}$ 的张量缩并为零，除非满足以下情况：$\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}i_{y_2}}\delta_{i_{y_3}j_{x_3}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn}}\delta_{j_{x2}j_k}$。

其中 $\delta_{i_{y_a}j_{xa}}$ 满足 $\mathrm{j}_{x_2}=\mathrm{k}$、$\mathrm{i}_{y_2}=\mathrm{j}_{x_2}$、$\cdots$、$\mathrm{i}_{y_n}=\mathrm{j}_{x_n}$ 以及 $\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}i_{y2}}$ 满足 $\mathrm{j}_{x_1}\neq\mathrm{i}_{y_1}\neq\mathrm{i}_{y_2}$。随后，张量缩并可以简化为单次缩并：

$$\varepsilon_{j_{x_1}i_{y_1}i_{y_2}}D_{j_{x_1}ki_{y_3}\cdots i_{y_n}}$$

情况 5：求和项为 $\delta_{\pi(i_{y_2}j_{x_2}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn})}\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}k}$。然后，与 $\mathbf{D}^{(n)}$ 的张量缩并为零，但以下情况除外：$\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}k}\delta_{i_{y_2}j_{x_2}}\cdots\delta_{i_{y_n}j_{xn}}$。

其中 $\delta_{i_{y_a}j_{xa}}$，其中 $\mathrm{i}_{y_1}=\mathrm{j}_{x_1}$、$\cdots$、$\mathrm{i}_{y_n}=\mathrm{j}_{x_n}$ 和 $\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}k}$，其中 $\mathrm{j}_{x_1}\neq\mathrm{i}_{y_1}\neq\mathrm{k}$。随后，张量缩并可以简化为单次缩并：

$$\varepsilon_{j_{x_1}i_{y_1}k}D_{j_{x_1}i_{y_2}\cdots i_{y_n}}$$

最终的线性组合将包含所有形如 $\varepsilon_{jx1\,iy1iy2}\mathbf{D}_{\,jx1ki_{y_3}\cdots i_{yn}}$ 以及 $\varepsilon_{j_{x_1}i_{y1}k}\mathbf{D}_{\,jx1\,i_{y_2}\cdots i_{yn}}$ 的求和项。因此，它可以表示为 $(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{D}^{(n-1)})$ 的置换的线性组合。

下一步将更仔细地考察指标变量 k 和用于缩并的指标变量 j_{x_a} 的位置。

- 该线性组合将包含所有仅有用于缩并的指标 j_{x_a} 发生变化的求和项。注意，根据缩并的定义，每个缩并指标 $\mathrm{j}_{i_1},\cdots,\mathrm{j}_{i_n}$ 都会产生相同的项。因此，该求和项与 $\mathrm{j}_{i_1},\cdots,\mathrm{j}_{i_n}$ 的选择无关，所以下文将使用 s 来表示缩并指标。
- 收缩变量 s 在 $\mathbf{D}_{(n-1)}$ 中的位置会得到相同的项，因此可以设定其位置。
- 收缩变量 s 在 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 中的位置会得到相同的项，但会与 1 或 -1 相乘。因此，也可以设定其位置。符号的变化将在该线性组合的标量中予以注明。

这些事实可以概括如下：

$$\begin{aligned}H_{i_1\cdots i_n kj_1\cdots j_n}D_{j_1\cdots j_n} &= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_{2n+1}}^{(2n+1)!} c_\lambda\varepsilon_{\pi(i_1j_1k}\delta_{i_2j_2}\cdots\delta_{i_nj_n)}D_{j_1\cdots j_n}\\ &= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} d\varepsilon_{s\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)ks} + e\varepsilon_{ks\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)s} \qquad (5)\\ &= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} e\varepsilon_{ks\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)s}.\end{aligned}$$

计算式（5）会使形如 $\mathrm{d}\varepsilon_{s\pi(i_1i_2}\mathbf{D}_{i_3\cdots i_n)ks}$ 的所有求和项消失，这是由于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的反对称性。因此，得到一个含一个未知变量 $\mathrm{e}\in\mathbb{R}$ 的方程。

$\mathrm{H}^{(2n+2)}[\mathrm{D}^{(n+1)}]$ 分析

半旋张量的阶数必须为 $(2n+2)$，因为与 $(n+1)$ 阶偏离张量完全缩并后，结果必须为 $(n+1)$ 阶。由于对任意 n，$2n+2$ 都是偶数，$\mathrm{H}^{(2n+2)}$ 必须是 $\mathrm{per}(\mathbb{1}\otimes\ldots\otimes\mathbb{1})$ 的线性组合，或 $\delta_{\pi(i_1j_1}\delta_{i_2j_2}\ldots\delta_{i_nj_n}\delta_{i_{n+1}k)}$，见式（1）。

设 $x1,\cdots、x_{n+1}\in\{1,\cdots,n+1\}$ 和 $y1,\cdots、y_n\in\{1,\ldots,n\}$。如果求和项中至少包含一个 δ_{jx1jx2} 或 $\delta_{j_{x_1}k}$，则整个项等于零，因为 $\mathrm{D}^{(n+1)}$ 是偏差的，因此是无迹的，所以，

$$\delta_{j_{x_1}j_{x_2}}D_{j_{x_1}j_{x_2}\pi(j_3\cdots j_n)k}=0$$

or

$$\delta_{j_{x_1}k}D_{j_{x_1}k\pi(j_2\cdots j_n)}=0.$$

假设一个求和项不包含任何 $\delta_{j_{x_1}jx2}$ 或 $\delta_{j_{x_1}k}$。那么对于其他可能性，求和项只能表示为

$$\delta_{j_{x_1}i_{y_1}}\ldots\delta_{j_{x_n}i_{y_n}}\delta_{ki_{y_{n+1}}}.$$

然后，除 $j_{x_1}=i_{y_1},\ldots,j_{x_n}=i_{y_n},k=i_{x_{n+1}}$ 的情况外，与 $\mathrm{D}^{(n+1)}$ 的张量缩并均为零。由于 $\mathrm{D}^{(n+1)}$ 的对称性，最终的张量缩并具有以下形式:

$$H_{ki_1\ldots i_{n+1}j_1\ldots j_n}D_{kj_1\ldots j_n}=\sum_{\lambda=1}^{(n+1)!}c_\lambda D_{ki_1\ldots i_n}=fD_{ki_1\ldots i_n}.$$

迹的计算

根据前面所有的事实，得到了关于 $\mathrm{G}^{(n+1)}$ 的以下方程:

$$G_{ki_1\ldots i_n}=\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)}+\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k}+\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}d\varepsilon_{ks\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)s}+fD_{ki_1\ldots i_n}\tag{6}$$

由 (4) 可知，$\mathrm{G}^{(n+1)}$ 关于指标 $(i_1\cdots i_n)$ 完全对称且无迹。

由于对称化，表示 (6) 关于 $(i_1\cdots i_n)$ 完全对称。它也无迹这一事实可用于求出 a、b、d 和 f 的解。由此可得

$$0=\delta_{i_1i_2}[\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)}+\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k}+\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}d\varepsilon_{ks\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)s}+fD_{ki_1\ldots i_n}].$$

由于 $\mathrm{D}^{(n)}$ 和 $\mathrm{D}^{(n+1)}$ 无迹，且 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 反对称，因此有

$$0=\delta_{i_1i_2}[fD_{ki_1\ldots i_n}]$$

and

$$0=\delta_{i_1i_2}[\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}d\varepsilon_{ks\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)s}].$$

因此，d 和 f 可任意选取为 $d=\frac{1}{n!}$ 和 $e=1$。

现在还需分析.....的条件

$$0=\delta_{i_1i_2}[\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)}+\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k}].$$

解这个方程的关键在于考察 i_1 和 i_2 在不同求和项中的所有可能位置。下面将逐一分析:

情况 1：求和项为 $\delta_{i_1i2}\mathrm{D}\pi(i_3\ldots i_n)k$。那么，

$$\begin{aligned}\delta_{i_1i_2}[\delta_{i_1i_2}D_{\pi(i_3\cdots i_n)k}]&=\delta_{11}D_{\pi(i_3\cdots i_n)k}+\delta_{22}D_{\pi(i_3\cdots i_n)k}+\delta_{33}D_{\pi(i_3\cdots i_n)k}\\&=3D_{\pi(i_3\cdots i_n)k}.\end{aligned}$$

对于 $\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!}\mathrm{a}\delta_{k\pi(i_1}\mathrm{D}_{i_2\cdots i_n)}$，这类求和项的数量为零。

这种求和项有两个，分别为 $\sum_{\lambda=1,\ \pi\in S_n}^{n!}\mathrm{b}\delta_{\pi(i_1i2}\mathrm{D}_{i_3\cdots i_n)k}$。

情况 2：求和项为 $\delta_{\pi(ki_3}D_{i_4\ldots in)i1i2}$。则它为

$$\delta_{i_1i_2}[\delta_{\pi(ki_3}D_{i_4\cdots i_n)i_1i_2}] = \delta_{\pi(ki_3}\mathrm{tr}_{n-1,n}\left(D_{i_4\ldots i_n)i_1i_2}\right) = 0$$

因为 $D^{(n-1)}$ 是无迹的。

对于 $\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots in)}$，这类求和项有 $(n-1)(n-2)$ 个。

这类求和项有 $(n-2)(n-3)$ 个，适用于 $\sum_{\lambda=1,\ \pi\in S_n}^{n!} b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots in)k}$。

情况 3：求和项由 $\delta_{i_1\pi(k}D_{\ \ i_3\ldots in)i_2}$给出。那么它是

$$\begin{aligned}\delta_{i_1i_2}[\delta_{ki_1}D_{i_2\pi(i_3\cdots i_n)}] &= \delta_{k1}D_{1\pi(i_3\cdots i_n} + \delta_{k2}D_{2\pi(i_3\cdots i_n)} + \delta_{k3}D_{3\pi(i_3\cdots i_n)}\\ &= D_{k\pi(i_3\cdots i_n)}\end{aligned}$$

有两个，分别是 And（与）和 Or（或）。

$$\begin{aligned}\delta_{i_1i_2}[\delta_{\pi(i_ni_1}D_{i_2\cdots i_{n-1})k}] &= \delta_{\pi(i_n1}D_{1\cdots i_{n-1})k} + \delta_{\pi(i_n2}D_{2\cdots i_{n-1})k} + \delta_{\pi(i_n3}D_{3\cdots i_{n-1})k}\\ &= D_{\pi(i_ni_3\cdots i_{n-1})k}.\end{aligned}$$

对于 $\sum_{\lambda=1,\ \pi\in S_n}^{n!} a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots in)}$，此类求和项共有 $2(n-1)$ 项。

对于 $\sum_{\lambda=1,\ \pi\in S_n}^{n!} b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots in)k}$，此类求和项共有 $4(n-2)$ 项。

综合以上事实，可得迹的如下方程：

$$\begin{aligned}0 &= \delta_{i_1i_2}[\sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} a\delta_{k\pi(i_1}D_{i_2\cdots i_n)} + \sum_{\lambda=1,\pi\in S_n}^{n!} b\delta_{\pi(i_1i_2}D_{i_3\cdots i_n)k}]\\ &= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_{n-2}}^{(n-2)!}(2(n-1)aD_{\pi(i_3\cdots i_n)k}) + \sum_{\lambda=1,\pi\in S_{n-2}}^{(n-2)!} b(6D_{\pi(i_3\cdots i_n)k} + 4(n-2)D_{\pi(i_3\cdots i_n)k})\\ &= \sum_{\lambda=1,\pi\in S_{n-2}}^{(n-2)!}((2n-2)a + (4n-2)b)D_{\pi(i_3\cdots i_n)k}\\ &= D_{i_3\cdots i_nk}\sum_{\lambda=1}^{(n-2)!}(2n-2)a + (4n-2)b\end{aligned} \tag{7}$$

若假设 $D_{i_3\ldots ink} \neq 0$ and $a \neq 0 \neq b$，则对于以下情况，等式 (7) 成立

$$\frac{n-1}{2n-1}a = -b \tag{8}$$

因此，一个可能的解为 $a = {}^{2}_{n-1}\,n!_{(n-1)}$，且 $b = \frac{-1}{}\,n!$。

综上所述，如 Zou 等人 [5]所述，可得 $G^{(n+1)}$ 的分量形式：

$$G_{ki_1\ldots i_n} = \frac{2n-1}{n-1}\delta_{k\hat{i}_1}D_{\hat{i}_2\ldots\hat{i}_n} - \delta_{\hat{i}_1\hat{i}_2}D_{\hat{i}_3\ldots\hat{i}_nk} + \varepsilon_{ks\hat{i}_1}D_{\hat{i}_2\ldots\hat{i}_ns} + D_{ki_1\ldots i_n} \tag{9}$$

从式（8）可以看出，式（9）在相差一个标量乘法的意义下并不唯一。

4 偏分解存在性的证明

本工作的主要目标是证明，三维空间中任意阶的张量都可以分解为偏张量的不可约正交和：

$$\mathbb{T}^{(n)} = \sum_{J=1}^{J_0^n} \alpha_J \mathbb{H}_J^{(n)} + \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)}[\mathbf{v}_J] + \sum_{s=2}^{n} \sum_{J=1}^{J_s^n} \mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbb{D}_J^{(s)}] \tag{10}$$

或者等价地

$$T_{i_1\cdots i_n} = \sum_{J=1}^{J_0^n} \alpha_J H^J_{i_1\cdots i_n} + \sum_{J=1}^{J_1^n} H^J_{i_1\cdots i_n j}[v^J_j] + \sum_{s=2}^{J_s^n} \sum_{J=1}^{J_0^n} H^J_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_s}[D^J_{j_1\cdots j_n}] \tag{11}$$

其中 $\mathrm{J}_s^n, 0 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{n}$ 表示独立的 s 阶偏张量的数量。
该命题可通过归纳法证明。众所周知，任意二阶张量 $\mathrm{T}^{(2)}$ 都可以分解为其对称部分与反对称部分之和，而对称部分还可以进一步分解为偏张量部分与静水压力部分之和 [5]。因此，二阶张量具有以下形式：

$$\mathbb{T}^{(2)} = \alpha \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v} + \mathbb{D}^{(n)} \tag{12}$$

至此，基础情形得证。对于归纳步骤，假设 (10) 对某个整数 n 成立。现在需要证明该命题对 $(\mathrm{n}+1)$ 也成立。

一般而言，任意一个（$\mathrm{n}+1$）阶张量都可以表示为任意向量 $\mathrm{v} = \mathrm{c}_k \mathrm{e}_k \in \mathcal{V}, \mathrm{c}_k \in \mathrm{R}$ 与一个 n 阶张量 $\mathrm{T}^{(n)}$ by 之间的张量积。

$$\mathbb{T}^{(n+1)} = \mathbf{v} \otimes \mathbb{T}^{(n)} = (c_k \mathbf{e}_k) \otimes \mathbb{T}^{(n)} = \mathbf{e}_k \otimes c_k \mathbb{T}^{(n)} =: \mathbf{e}_k \otimes \mathbb{T}_k^{(n)}.$$

因此，$\mathrm{T}^{(n+1)}$ 有两种表示，需要先识别它们，再检查它们是否相等：

1. $\mathrm{e}_k \otimes \mathrm{T}^{(n)}{}_k$ 使用（10）（表示 1）计算，

2. (10) 中使用 $(\mathrm{n}+1)$ 替代 (n)（表示 2）。

表示 1
假设一个 $(\mathrm{n}+1)$ 阶张量可以表示为 $\mathrm{T}^{(n+1)} = \mathrm{e}_k \otimes \mathrm{T}^{(n)}{}_k$。假设 $\mathrm{T}^{(n)}{}_k$ 的偏张量分解存在，则可以得到关于 $\mathrm{T}^{(n+1)}$ 的以下第一个结果。其表达式为

$$\mathbb{T}^{(n+1)} = \mathbf{e}_k \otimes \mathbb{T}_k^{(n)} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbb{T}_1^{(n)} + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbb{T}_2^{(n)} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbb{T}_3^{(n)}.$$

对 T_k 使用偏张量分解将产生一个很长的公式。因此，使用省略号作为不可约部分的占位符。在以下计算中，会先单独考察某些求和项，然后再将它们放入其中。

最终重新组合在一起。$\mathbf{T}^{(n+1)}$ 的偏斜分解通过以下方式计算：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}^{(n+1)} &= \mathbf{e}_1 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n}(\cdots) + \sum_{J=1}^{J_1^n}(\cdots) + \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}(\cdots)\Big) \\
&+ \mathbf{e}_2 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n}(\cdots) + \sum_{J=1}^{J_1^n}(\cdots) + \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}(\cdots)\Big) \\
&+ \mathbf{e}_3 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n}(\cdots) + \sum_{J=1}^{J_1^n}(\cdots) + \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}(\cdots)\Big) \\
&= \underbrace{\mathbf{e}_1 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n}(\cdots)\Big)}_{(a_1)} + \underbrace{\mathbf{e}_1 \otimes \sum_{J=1}^{J_1^n}(\cdots)}_{(b_1)} + \underbrace{\mathbf{e}_1 \otimes \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}(\cdots)}_{(c_1)} \\
&+ \underbrace{\mathbf{e}_2 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n}(\cdots)\Big)}_{(a_2)} + \underbrace{\mathbf{e}_2 \otimes \sum_{J=1}^{J_1^n}(\cdots)}_{(b_2)} + \underbrace{\mathbf{e}_2 \otimes \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}(\cdots)}_{(c_2)} \\
&+ \underbrace{\mathbf{e}_3 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n}(\cdots)\Big)}_{(a_3)} + \underbrace{\mathbf{e}_3 \otimes \sum_{J=1}^{J_1^n}(\cdots)}_{(b_3)} + \underbrace{\mathbf{e}_3 \otimes \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}(\cdots)}_{(c_3)}.
\end{aligned}
$$

假设 $(a_1)+(a_2)+(a_3)=(\alpha)$、$(b_1)+(b_2)+(b_3)=(\beta)$、$(c_1)+(c_2)+(c_3)=(\gamma)$，其中 (α)、(β) 和 (γ) 将是所得的和。

步骤 1：$(a_1)+(a_2)+(a_3)=(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n} \mathbb{H}_J^{(n)} \alpha_{1J}\Big) + \mathbf{e}_2 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n} \mathbb{H}_J^{(n)} \alpha_{2J}\Big) + \mathbf{e}_3 \otimes \Big(\sum_{J=1}^{J_0^n} \mathbb{H}_J^{(n)} \alpha_{3J}\Big) \\
&= \sum_{J=1}^{J_0^n} \mathbb{H}_J^{(n)} (\alpha_{1J}\mathbf{e}_1 + \alpha_{2J}\mathbf{e}_2 + \alpha_{3J}\mathbf{e}_3) \\
&= \sum_{J=1}^{J_0^n} \mathbb{H}_J^{(n)} \mathbf{v}_J
\end{aligned}
$$

步骤 2：$(b_1)+(b_2)+(b_3)=(\beta)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_1 \otimes \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)}[\mathbf{v}_{1J}] + \mathbf{e}_2 \otimes \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)}[\mathbf{v}_{2J}] + \mathbf{e}_3 \otimes \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)}[\mathbf{v}_{3J}] \\
&= \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{v}_{1J} + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{v}_{2J} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{v}_{3J}) \\
&= \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbb{D}_{kJ}^{(1)}) \\
&= \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)} (\mathbb{G}_J^{(2)}) \\
&= \sum_{J=1}^{J_1^n} \mathbb{H}_J^{(n+1)} (\alpha_J \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_J + \mathbb{D}_J^{(2)})
\end{aligned}
$$

请注意，此前为 $\mathrm{G}^{(2)}$ (9) 建立的分量形式无法在此处使用，因为它仅对 $\mathrm{n}>1$ 有效。因此，使用了基础情形中给出的适用于一般二阶张量的表示。

步骤 3：$(\mathrm{c}_1)+(\mathrm{c}_2)+(\mathrm{c}_3)=(\gamma)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e_1}\otimes\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbb{D}_{1J}^{(s)}]+\mathbf{e_2}\otimes\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbb{D}_{2J}^{(s)}]+\mathbf{e_3}\otimes\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbb{D}_{3J}^{(s)}]\\
&=\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbb{D}_{1J}^{(s)}+\mathbf{e}_2\otimes\mathbb{D}_{2J}^{(s)}+\mathbf{e}_3\otimes\mathbb{D}_{3J}^{(s)})\\
&=\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}(\mathbf{e}_k\otimes\mathbb{D}_k^{J^{(s)}})\\
&=\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}(\mathbb{G}_J^{(s+1)})\\
&=\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbf{L}[\mathbb{D}^{(s-1)}]+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbb{D}_J^{(s)}+\mathbb{D}^{(s+1)}]
\end{aligned}
$$

with

$$
L_{kj_1\cdots j_s l_1\cdots l_{s-1}}D_{l_1\cdots l_{s-1}}=\frac{2s-1}{s-1}\delta_{k\hat{j}_1}D_{\hat{j}_2\cdots\hat{j}_s}-\delta_{\hat{j}_1\hat{j}_2}D_{\hat{j}_3\cdots\hat{j}_s k} \tag{13}
$$

步骤 3 中使用了上一章的结果，更确切地说，是张量 $\mathrm{G}^{(n+1)}=\mathrm{e}_k\otimes\mathrm{D}^{(n+1)}{}_k$ 的分量形式。

因此，可以推导出：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}^{(n+1)}&=(\alpha)+(\beta)+(\gamma)\\
&=\sum_{J=1}^{J_0^n}\mathbb{H}_J^{(n)}\mathbf{v}_J+\sum_{J=1}^{J_1^n}\mathbb{H}_J^{(n+1)}[\alpha_J\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{v}_J+\mathbb{D}_J^{(2)}]+\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}\mathbb{H}_J^{(n+s)}[\mathbf{L}[\mathbb{D}_J^{(s-1)}]+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbb{D}_J^{(s)}+\mathbb{D}_J^{(s+1)}]
\end{aligned} \tag{14}
$$

或者等价地写成其分量形式

$$
T_{ki_1\cdots i_n}=\sum_{J=1}^{J_0^n}H^J_{i_1\cdots i_n}v_k^J+\sum_{J=1}^{J_1^n}H^J_{i_1\cdots i_n j}[\alpha^J\delta_{jk}+\varepsilon_{jkt}v_t^J+D^J_{jk}] \tag{15}
$$

$$
+\sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n}H^J_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_s}[L_{kj_1\cdots j_s l_1\cdots l_{s-1}}D_{l_1\cdots l_{s-1}}+\varepsilon_{kt\hat{j}_1}D^J_{\hat{j}_2\cdots\hat{j}_s t}+D_{kj_1\cdots j_s}] \tag{16}
$$

with

$$
L_{kj_1\cdots j_s l_1\cdots l_{s-1}}D_{l_1\cdots l_{s-1}}=\frac{2s-1}{s-1}\delta_{k\hat{j}_1}D_{\hat{j}_2\cdots\hat{j}_s}-\delta_{\hat{j}_1\hat{j}_2}D_{\hat{j}_3\cdots\hat{j}_s k}.
$$

$\mathrm{T}^{(n+1)}$ 的这一递归表示由 Zou 等人 [5] 建立。

表示 2

相比之下，可以通过偏张量分解得到 $\mathrm{T}^{(n+1)}$ 的另一种表示：用 $(\mathrm{n}+1)$ 代替 n，得到

$$
\mathbb{T}^{(n+1)}=\sum_{J=1}^{J_0^{n+1}}\alpha_J\mathbb{H}_J^{(n+1)}+\sum_{J=1}^{J_1^{n+1}}\mathbb{H}_J^{((n+1)+1)}[\mathbf{v}_J]+\sum_{s=2}^{n+1}\sum_{J=1}^{J_s^{n+1}}\mathbb{H}_J^{((n+1)+s)}[\mathbb{D}_J^{(s)}]. \tag{17}
$$

第 $\binom{n}{s}$ 阶独立偏张量 J 的数量计算

比较这两种表示（14）和（17）后显然可见，两者都是由相同的不可约部分求和而成，且都包含 sth 个偏张量，因为半旋张量 H 只是 1 和 **ε** 的张量积的线性组合。因此，如果两种表示中的 sth 阶偏张量 J_s^n 的数量相同，那么这两种表示就是相同的。

通过计算表示 1 中同阶偏张量的数量，可得到关于数量 J_s^{n+1} 的以下性质，做法如 Zou 等人 [5] 所示。

$$J_s^{(n+1)} = \begin{cases} J_{s-1}^n + J_s^n + J_{s+1}^n & ,1 \le s \le n \\ J_1^n & ,s = 0 \\ J_n^n & ,s = n+1 \end{cases}$$

根据 Zou 等人 [5]，可以反复利用这一性质和表示 1 的递归形式，求出数量 $J_s^n, 0 \le s \le n$ 的计算式:

$$J_s^n = \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ s+1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

其中，$\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}, 0 \le s \le n$ 表示展开式 $(1 + x + \frac{1}{x})^n$ 中 x^s 的三项式系数。该命题可用归纳法证明。关于三项式系数的这些性质，例如其递归计算，

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ s+1 \end{bmatrix}, n \ge 0 \tag{19}$$

将会用到。注意，$J_0^0 = 1$ 的基础情形显然成立。假设命题 (18) 对某个整数 n 成立，现在证明该命题对 $n+1$ 也成立。由于计算 J_s^{n+1} 有三种情形，归纳步骤也将包含三种情形。

- **s = 0**

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = J_0^{n+1} = J_1^n = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 的 **=n+1**

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+1 \\ n+2 \end{bmatrix} = J_{n+1}^{n+1} = J_n^n = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ n+1 \end{bmatrix}$$

- **1** $\le s \le n$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+1 \\ s+1 \end{bmatrix} = J_s^{n+1} = J_{s-1}^n + J_s^n + J_{s-1}^n = \begin{bmatrix} n \\ s-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ s+2 \end{bmatrix}$$

应用三项式系数（19）的递归计算，即可证明该结论 .

总而言之，可以说 ，表示 1 和 2 相同，当且仅当数目 $J_s^n, 0 \le s \le n$ 被计算 d
如式（18）所示。一个关于数量 J_s^n（截至 $n = 6$）的示例见表1。

接下来，需要证明式 (10) 中的偏张量彼此独立，因此它们之间不存在相互的线性组合。沿用 Zou 等人 [5], 的思路，只要满足以下条件，这一结论便成立:

$$3^n = \sum_{s=0}^{n} (1+2s) J_s^n.$$

n	J_0^n	J_1^n	J_2^n	J_3^n	J_4^n	J_5^n	J_6^n
0	1						
1	0	1					
2	1	1	1				
3	1	3	2	1			
4	3	6	6	3	1		
5	6	15	15	10	4	1	
6	15	36	40	29	15	5	1

表1：数量　　三维一般张量不可约分解中的独立偏张量集合。

这一结论也将通过归纳法证明。由于 $\mathrm{J}_0^0 = 1 = 3^0$，基础情形显然成立。归纳步骤如下：

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{n+1}(1+2s)J_s^{n+1} &= (2n+3)J_{n+1}^{n+1} + J_0^{n+1} + \sum_{s=1}^{n}(1+2s)J_s^{n+1} \\
&= (2n+3)J_n^n + J_1^n + \sum_{s=1}^{n}(1+2s)(J_{s-1}^n + J_s^n + J_{s+1}^n) \\
&= (2n+3)J_n^n + J_1^n + \sum_{s=1}^{n}(1+2s)J_{s-1}^n + \sum_{s=1}^{n}(1+2s)J_s^n + \sum_{s=1}^{n}(1+2s)J_{s+1}^n \\
&= (2n+3)J_n^n + J_1^n + \sum_{s=0}^{n-1}(1+2(s+1))J_s^n + \sum_{s=1}^{n}(1+2s)J_s^n + \sum_{s=2}^{n+1}(1+2(s-1))J_s^n \\
&= (2n+3)J_n^n + J_1^n + (\sum_{s=0}^{n}(1+2(s+1))J_s^n) - (2n+3)J_n^n \\
&\quad + (\sum_{s=0}^{n}(1+2s)J_s^n) - J_0^n + (\sum_{s=0}^{n}(1+2(s-1))J_s^n) - J_1^n + J_0^n \\
&= 3\sum_{s=0}^{n}(1+2s)J_s^n \\
&= 3\cdot 3^n \\
&= 3^{n+1}
\end{aligned}
$$

因此，(10) 中的所有偏张量都是相互独立的。

仍需证明分解 (10) 是正交的。如果对于不同的 (s,J) 组合，所有 $\mathrm{D}^{(s)} \in \mathcal{D}^{(s)}$ 对应的 $\mathrm{H}_J^{n+s}[\mathrm{D}^{(s)}]$ 集合都相互正交，那么该分解就是正交的。在他们的论文中，Zou 等人 [5] 详细解释了如何用归纳法证明这一结论（针对二维情形）。如他们所述，三维情形下也可以类似地推导出正交性。

5 示例

5.1 一般张量

以下给出递归公式

$$
\begin{aligned}
T_{ki_1\cdots i_n} &= \sum_{J=1}^{J_0^n} H_{i_1\cdots i_n}^J v_k^J + \sum_{J=1}^{J_1^n} H_{i_1\cdots i_n j}^J [\alpha^J \delta_{jk} + \varepsilon_{jkt} v_t^J + D_{jk}^J] \\
&\quad + \sum_{s=2}^{n}\sum_{J=1}^{J_s^n} H_{i_1\cdots i_n j_1\cdots j_s}^J [L_{kj_1\cdots j_s l_1\cdots l_{s-1}} D_{l_1\cdots l_{s-1}}^J + \varepsilon_{kt\hat{j}_1} D_{\hat{j}_2\cdots\hat{j}_s t}^J + D_{kj_1\cdots j_s}^J]
\end{aligned}
$$

with

$$L_{kj_1\cdots j_s l_1\cdots l_{s-1}} D_{l_1\cdots l_{s-1}} = \frac{2s-1}{s-1}\delta_{k\hat{j}_1} D_{\hat{j}_2\cdots\hat{j}_s} - \delta_{\hat{j}_1\hat{j}_2} D_{\hat{j}_3\cdots\hat{j}_s k} \tag{20}$$

将用于求出 t 基于 wel 的任意三阶和四阶张量的偏张量分解 l-
已知分解 二阶张量的 (12)。

有必要对下文中使用的某些记号作出说明。

- 如果一个 n 阶张量的分量形式为 $T_{i_1\cdots i_n}$，那么递归公式表明，$(n+1)$ 阶张量会获得一个新的指标变量 k，并将其置于指标前面。因此，$(n+1)$ 阶张量的分量形式将为 $T_{ki_1\cdots i_n}$。在下文中，通过递归公式添加的“新指标”始终记为 i。这样，示例的分量形式便可以写成 T_{ij}、T_{ijk} 和 T_{ijkl}，而不是 T_{ki}、T_{kij} 和 T_{kijl}。
- 由于递归公式的定义，求和式 $\sum_{J_{ns}J=1}, 1 \le s \le n$ 表明，存在多个具有相同指标 J 的偏张量。例如：由于每个求和式都从 $J=1$ 开始，因此当 $n=4$ 时，将存在 3 个一阶偏张量 $v^1{}_k$。正如上一节所证明的，所有偏张量都是相互独立的，因此彼此不相等。这使得我们可以在下文中对指标 J 的计数进行适当调整。因此，不再将它们表示为 $v^1{}_k$、$v^{1'}{}_k$ 和 $v^{1''}{}_k$，而是分别记为 $v^1{}_k$、$v^2{}_k$ 和 $v^3{}_k$。
- 最终形式的计算将按以下方式进行。首先，针对给定的 n 写出递归公式。接下来，代入在第 $(n-1)$ 种情况下推导出的半各向同性张量。之后，按照偏张量的阶数对各加项进行排序。最后调整缩并变量，以便在最终形式中不会使用过多不同的指标变量。
- 此处给出的最终形式与 Zou 等人 [5] 给出的结果在不可约部分中存在某些指标置换。需要注意的是，这只会导致线性组合不同，因此两种结果都是正确的。
- 根据 Zou 等人 [5] 的定义，张量 $L_{ij\cdots k}$ 由第 (20) 行给出的张量缩并定义。因此，对于 L_{ijkl}，可得

$$L_{ijkl} = \frac{3}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - \delta_{il}\delta_{jk}$$

nnn = 2 如 (12) 中所述，偏张量分解为：

$$T_{ij} = \alpha\delta_{ij} + \varepsilon_{ijs}v_s + D_{ij}.$$

对于独立的 s 阶偏张量的数量 $J_s^n, 0 \le s \le n$，可得：

$$J_0^2 = 1, \quad J_1^2 = 1, \quad J_2^2 = 1.$$

因此，半各向同性张量可表示为：

- $H^1_{jk} = \delta_{jk}$
- $H^1_{jks} = \varepsilon_{jks}$
- $H^1_{jkst} = \delta_{js}\delta_{kt}$

nnn = 3 利用递归公式：

$$\begin{aligned}
T_{ijk} &= \sum_{J=1}^{J_0^{n-1}=J_0^2=1} H^J_{jk} v^J_i \\
&\quad + \sum_{J=1}^{J_1^{n-1}=J_1^2=1} H^J_{jks}[\alpha^J\delta_{si} + \varepsilon_{sit}v^J_t + D^J_{si}] \\
&\quad + \sum_{J=1}^{J_2^{n-1}=J_2^2=1} H_{ijst}[L_{istu}D^J_u + \varepsilon_{iv\hat{s}}D^J_{\hat{t}v} + D^J_{ist}] \\
&= \delta_{jk}v^1_i + \alpha\delta_{si}\varepsilon_{jks} + \varepsilon_{jks}\varepsilon_{sit}v^2_t + \varepsilon_{jks}D^1_{si} + \delta_{js}\delta_{kt}L_{istu}v^3_u + \delta_{js}\delta_{kt}\varepsilon_{iv\hat{s}}D^2_{\hat{t}v} + \delta_{js}\delta_{kt}D_{ist} \\
&= \varepsilon_{jki}\alpha + \{\delta_{jk}v^1_i + \varepsilon_{jks}\varepsilon_{sit}v^2_t + L_{ijku}v^3_u\} + \{\varepsilon_{jks}D^1_{si} + \varepsilon_{iv\hat{j}}D^2_{\hat{k}v}\} + D_{ijk} \\
&= \varepsilon_{jki}\alpha + \{\delta_{jk}v^1_i + \varepsilon_{jkt}\varepsilon_{tis}v^2_s + L_{ijks}v^3_s\} + \{\varepsilon_{jks}D^1_{si} + \varepsilon_{is\hat{j}}D^2_{\hat{k}s}\} + D_{ijk}
\end{aligned}$$

对于独立的第 s 阶偏张量的数量 $\mathrm{J}_s^n, 0 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{n}$，可得：

$$J_0^3 = 1, \quad J_1^3 = 3, \quad J_2^3 = 2, \quad J_3^3 = 1$$

因此，半各向同性张量可描述为

- $H_{jkl}^1 = \varepsilon_{klj}$
- $H_{jkls}^1 = \delta_{sj}\delta_{kl}$
- $H_{jkls}^2 = \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs}$
- $H_{jkls}^3 = L_{jkls}$
- $H_{jklst}^1 = \delta_{jt}\varepsilon_{kls}$
- $H_{jklst}^2 = \delta_{\hat{l}t}\varepsilon_{js\hat{k}}$
- $H_{jklstu}^1 = \delta_{js}\delta_{kt}\delta_{lu}$

$\mathrm{nnn} = \mathbf{4}$ 使用递归公式：

$$\begin{aligned}
T_{ijkl} = & \sum_{J=1}^{J_0^{n-1}=J_0^3=1} H_{jkl}^J v_i^J \\
& + \sum_{J=1}^{J_1^{n-1}=J_1^3=3} H_{jkls}^J [\alpha^J \delta_{si} + \varepsilon_{sit} v_t^J + D_{si}^J] \\
& + \sum_{J=1}^{J_2^{n-1}=J_2^3=2} H_{jklst}^J [L_{istx_1} v_{x_1}^J + \varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{t}v}^J + D_{ist}^J] \\
& + \sum_{J=1}^{J_3^{n-1}=J_3^3=1} H_{jklstu}^J [L_{istux_1x_2} D_{x_1x_2}^J + \varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{t}\hat{u}v}^J + D_{istu}^J] \\
= & \varepsilon_{klj} v_i^1 \\
& + \delta_{sj}\delta_{kl}\alpha^1\delta_{si} + \delta_{sj}\delta_{kl}\varepsilon_{sit} v_t^2 + \delta_{sj}\delta_{kl} D_{si}^1 \\
& + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs}\alpha^2\delta_{si} + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs}\varepsilon_{sit} v_t^3 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs} D_{si}^2 \\
& + L_{jkls}\alpha^3\delta_{si} + L_{jkls}\varepsilon_{sit} v_t^4 + L_{jkls} D_{si}^3 \\
& + \delta_{jt}\varepsilon_{kls} L_{istx_1} v_{x_1}^5 + \delta_{jt}\varepsilon_{kls}\varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{t}v}^4 + \delta_{jt}\varepsilon_{kls} D_{ist}^1 \\
& + \delta_{\hat{l}t}\varepsilon_{js\hat{k}} L_{istx_1} v_{x_1}^6 + \delta_{\hat{l}t}\varepsilon_{js\hat{k}}\varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{t}v}^5 + \delta_{\hat{l}t}\varepsilon_{js\hat{k}} D_{ist}^2 \\
& + \delta_{js}\delta_{kt}\delta_{lu} L_{istux_1x_2} D_{x_1x_2}^6 + \delta_{js}\delta_{kt}\delta_{lu}\varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{t}\hat{u}v}^3 + \delta_{js}\delta_{kt}\delta_{lu} D_{istu}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \{\delta_{ij}\delta_{kl}\alpha^1 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tji}\alpha^2 + L_{jkli}\alpha^3\} \\
& + \{\varepsilon_{klj} v_i^1 + \delta_{kl}\varepsilon_{jit} v_t^2 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs}\varepsilon_{sit} v_t^3 + L_{jkls}\varepsilon_{sit} v_t^4 + \varepsilon_{kls} L_{isjx_1} v_{x_1}^5 + \varepsilon_{js\hat{k}} L_{is\hat{l}x_1} v_{x_1}^6\} \\
& + \{\delta_{kl} D_{ji}^1 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs} D_{si}^2 + L_{jkls} D_{si}^3 + \varepsilon_{kls}\varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{j}v}^4 + \varepsilon_{js\hat{k}}\varepsilon_{iv\hat{s}} D_{\hat{l}v}^5 + L_{ijklx_1x_2} D_{x_1x_2}^6\} \\
& + \{\varepsilon_{kls} D_{isj}^1 + \varepsilon_{js\hat{k}} D_{is\hat{l}}^2 + \varepsilon_{iv\hat{j}} D_{\hat{k}\hat{l}v}^3\} \\
& + D_{ijkl}^1 \\
= & \{\delta_{ij}\delta_{kl}\alpha^1 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tji}\alpha^2 + L_{jkli}\alpha^3\} \\
& + \{\varepsilon_{klj} v_i^1 + \delta_{kl}\varepsilon_{jis} v_s^2 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs}\varepsilon_{sit} v_t^3 + L_{jkls}\varepsilon_{sit} v_t^4 + \varepsilon_{kls} L_{isjt} v_t^5 + \varepsilon_{js\hat{k}} L_{is\hat{l}t} v_t^6\} \\
& + \{\delta_{kl} D_{ji}^1 + \varepsilon_{klt}\varepsilon_{tjs} D_{si}^2 + L_{jkls} D_{si}^3 + \varepsilon_{kls}\varepsilon_{it\hat{s}} D_{\hat{j}t}^4 + \varepsilon_{js\hat{k}}\varepsilon_{it\hat{s}} D_{\hat{l}t}^5 + L_{ijklst} D_{st}^6\} \\
& + \{\varepsilon_{kls} D_{isj}^1 + \varepsilon_{js\hat{k}} D_{is\hat{l}}^2 + \varepsilon_{isj} D_{\hat{k}\hat{l}s}^3\} \\
& + D_{ijkl}^1
\end{aligned}$$

第 s 阶独立偏张量的数量 $\mathrm{J}_s^n, 0 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{n}$ 为：

$$J_0^4 = 3, \quad J_1^4 = 6, \quad J_2^4 = 6, \quad J_4^4 = 3, \quad J_4^4 = 1$$

按照相同的步骤，可以推导出任意 n 阶张量的偏张量分解。Zou 等人 [5]给出了最高至 5 阶的偏张量分解。

5.2 三阶耦合张量

三阶耦合张量 $\mathrm{H}^{(3)}$ 定义为一个三维三阶张量，它表示 Piola-Kirchhoff 型应力张量 $\mathrm{S}^{(2)}$ 对电场向量 $\mathrm{E}^{(1)}$的敏感性。它具有以下对称性

$$H_{ijk} = H_{jik}.$$

请注意，本章中的 $\mathrm{H}^{(3)}$或 H_{ijk}表示耦合张量，而不是如前几节所述的半旋张量。Hergl [2] 给出了一种具体的计算方法，用于确定偏张量的分量形式。她使用递归公式确定一般三阶张量的偏张量分解，正如本文所示。在列出 T_{iii}、T_{ijj}、T_{iij}、T_{iji}和 T_{ijk}的分量形式后，她通过与二阶恒等张量 δ_{ij} 或置换张量 ε_{ijk}进行双重缩并，建立方程组以计算偏张量的方程。应用耦合张量的上述对称性后，她得到了以下结果。

对于零阶偏张量 α、一阶偏张量 v^1，和二阶偏张量 D^2_{ij} it is

$$\alpha = 0, \quad \mathbf{v}^1 = \frac{5}{2}\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^2, \quad D^2_{ij} = -\frac{2}{3}D^1_{ij}.$$

因此，零阶偏张量消失，并且一个一阶偏张量和一个二阶偏张量依赖于其他偏张量。这意味着，耦合张量可以由四个偏张量表示：两个一阶偏张量、一个二阶偏张量和一个三阶偏张量。对于偏张量的相关系数，有：

对于一阶 阶偏张量 v^2 和 v^3, 、二阶偏张量 D^1_{ij}，以及三阶偏张量 D_{ijk}，它 i s

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^2 &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} H_{221} - H_{122} + H_{331} - H_{133} \\ H_{112} - H_{121} + H_{332} - H_{233} \\ H_{133} - H_{131} + H_{223} - H_{232} \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}^3 &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 4H_{111} + H_{122} + H_{133} + 3H_{221} + 3H_{331} \\ 4H_{222} + H_{121} + H_{233} + 3H_{112} + 3H_{332} \\ 4H_{333} + H_{131} + H_{232} + 3H_{113} + 3H_{223} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{21}$$

and

$$\begin{aligned}
D^1_{11} &= \frac{1}{2}(H_{123} - H_{132}) \\
D^1_{22} &= \frac{1}{2}(H_{231} - H_{123}) \\
D^1_{33} &= \frac{1}{2}(H_{132} - H_{231}) \\
D^1_{12} &= \frac{1}{4}(-H_{113} + H_{131} + H_{223} - H_{232}) \\
D^1_{13} &= \frac{1}{4}(H_{112} - H_{121} + H_{233} - H_{332}) \\
D^1_{23} &= \frac{1}{4}(H_{122} - H_{221} - H_{133} + H_{331})
\end{aligned} \tag{22}$$

and

$$
\begin{aligned}
D_{111} &= \frac{2}{5}H_{111} - \frac{2}{5}H_{122} - \frac{2}{5}H_{133} - \frac{1}{5}H_{221} - \frac{1}{5}H_{331} \\
D_{222} &= \frac{2}{5}H_{222} - \frac{2}{5}H_{211} - \frac{2}{5}H_{233} - \frac{1}{5}H_{112} - \frac{1}{5}H_{332} \\
D_{333} &= \frac{2}{5}H_{333} - \frac{2}{5}H_{322} - \frac{2}{5}H_{311} - \frac{1}{5}H_{113} - \frac{1}{5}H_{223} \\
D_{122} &= \frac{8}{15}H_{122} - \frac{1}{5}H_{111} - \frac{2}{15}H_{133} + \frac{4}{15}H_{221} - \frac{1}{15}H_{331} \\
D_{133} &= \frac{8}{15}H_{133} - \frac{1}{5}H_{111} - \frac{1}{15}H_{221} + \frac{4}{15}H_{331} - \frac{2}{15}H_{212} \\
D_{211} &= \frac{8}{15}H_{211} - \frac{1}{5}H_{222} - \frac{2}{15}H_{233} + \frac{4}{15}H_{112} - \frac{1}{15}H_{332} \\
D_{233} &= \frac{8}{15}H_{233} - \frac{2}{15}H_{211} - \frac{1}{5}H_{222} - \frac{1}{15}H_{112} + \frac{4}{15}H_{332} \\
D_{311} &= \frac{8}{15}H_{311} - \frac{2}{15}H_{322} - \frac{1}{5}H_{333} + \frac{4}{15}H_{113} - \frac{1}{15}H_{223} \\
D_{322} &= \frac{8}{15}H_{322} - \frac{2}{15}H_{311} - \frac{1}{5}H_{333} - \frac{1}{15}H_{113} + \frac{4}{15}H_{223} \\
D_{123} &= \frac{1}{3}H_{123} + \frac{1}{3}H_{132} + \frac{1}{3}H_{231}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

因此，三阶耦合张量的正交不可约分解可表示为

$$
\begin{aligned}
H_{ijk} = &\{\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{tis}v_s^2 - \delta_{jk}v_i^2 + \frac{5}{2}\delta_{jk}v_i^3 + [\frac{3}{2}(\delta_{ij}\delta_{ks} + \delta_{ik}\delta_{js}) - \delta_{is}\delta_{jk}]v_s^3\} \\
&+ \{\varepsilon_{jks}D_{si}^1 - \frac{1}{3}(\varepsilon_{isj}D_{ks}^1 + \varepsilon_{isk}D_{js}^1)\} + D_{ijk}
\end{aligned}
$$

5.3 四阶刚度张量

刚度张量 $\mathsf{C}^{(4)}$ 被定义为一个三维四阶张量，用于描述应力与应变变化之间的关系。它具有两种对称性，即所谓的小对称性。

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$$

以及所谓的大对称性

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

由于这一事实，与涉及置换张量$\boldsymbol{\varepsilon}$ 的半旋张量进行缩并的偏张量在分解中会消失。因此，刚度张量可以表示为两个零阶偏量、两个二阶偏量和一个四阶偏量。在各种文献资料 [1, 2, 5, 7]中均可找到以下针对刚度张量的不可约偏张量分解。在这种形式下，零阶偏量即所谓的拉梅系数，这些系数在工程学界广为人知。然而，以这种形式表示时，该分解并非递归公式的直接结果，而是其线性组合。因此，它失去了包含标量的两个不可约部分之间的正交性，以及包含二阶偏张量的两个不可约部分之间的正交性。

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl} = &\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\
&+ \{\delta_{ij}D_{kl}^1 + \delta_{kl}D_{ij}^1\} + \{\delta_{ik}D_{jl}^2 + \delta_{il}D_{jk}^2 + \delta_{jk}D_{il}^2 + \delta_{jl}D_{ik}^2\} \\
&+ D_{ijkl}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Zou 等人 [7] 阐述了所涉及偏张量系数的明确计算方法 s

$$\lambda = \frac{1}{15}(2C_{iikk} - C_{ikik})$$
$$\mu = \frac{1}{30}(3C_{ikik} - C_{iikk})$$
$$D^1_{ij} = \frac{5}{7}(C_{kkij} - \frac{1}{3}C_{kkll}\delta_{ij}) - \frac{4}{7}(C_{kikj} - \frac{1}{3}C_{klkl}\delta_{ij})$$
$$D^2_{ij} = \frac{3}{7}(C_{kikj} - \frac{1}{3}C_{klkl}\delta_{ij}) - \frac{2}{7}(C_{kkij} - \frac{1}{3}C_{kkll}\delta_{ij})$$
$$D_{ijkl} = C_{ijkl} - (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \{\delta_{ij}D^1_{kl} + \delta_{kl}D^1_{ij}\} + \{\delta_{ik}D^2_{jl} + \delta_{il}D^2_{jk} + \delta_{jk}D^2_{il} + \delta_{jl}D^2_{ik}\})$$

6 结论

本研究的主要目标是汇集关于三维中任意 n 阶张量的偏张量分解的大量信息，并核实所得结论的细节。

为证明偏张量分解的存在性，采用了数学归纳法。研究发现，关键在于考察张量 $G^{(n+1)} \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{D}^{(n)}$ 的偏张量分解。通过分析某些线性组合，得到了 $G^{(n+1)}$ 的分量形式。有了这些知识，便可以给出 $T^{(n+1)}$ 的两种表示。通过比较这两种表示，得出了 $J^n_s, 0 \leq s \leq n$ 的计算结果，从而完成了归纳证明。在最后一章中，利用递归公式给出了最高至 4 阶任意张量的偏张量分解公式。随后利用这些公式描述了三阶耦合张量和四阶刚度张量的分解。此外，还给出了相关偏张量系数的计算方法。

尤其是，偏张量分解的递归表示是一种强有力的工具，其重要性值得强调，意义也有待进一步探究。

偏张量还可以进一步分解为多极子，这一点影响重大，例如有助于发现并分析特定材料的对称类型。根据 Zou 等人， [7] 通过分析各偏张量对称平面的交集，可以确定刚度张量的各向异性类型。这些对称平面可以通过多极分解计算得出。

显然，关于这种分解，还有许多细节尚未在本文中讨论，甚至尚未被发现。我们希望能够激励该领域的其他研究人员，探索这种分解及多极子的意义，因为它是一种强大的方法，可以在三维空间中分解任意 n 阶张量，而无需预设任何特定的对称类型。

参考文献

[1] Chiara Hergl、Thomas Nagel 和 Gerik Scheuermann。《三维偏张量分解及其多极表示简介》。arXiv 预印本 arXiv:2009.11723，2020。[2] Chiara Hergl。《高阶张量的分析与可视化》。[3] George Backus。《各向异性弹性张量的几何图像》。《地球物理学评论》，8(3):633–671，1970。[4] Morton Hamermesh。《群论及其在物理问题中的应用》。Courier Corporation，2012。[5] W-N Zou、Q-S Zheng、D-X Du 和 J Rychlewski。《高阶张量的正交不可约分解》。《固体数学与力学》，6(3):249–267，2001。[6] Q-S Zheng 和 W-N Zou。《高阶物理张量的不可约分解》。《工程数学杂志》，37:273–288，2000。[7] W-N Zou、C-X Tang 和 W-H Lee。《在任意定向坐标系中识别线弹性刚度张量的对称类型》。《国际固体与结构杂志》，50(14-15):2457–2467，2013。