arXiv:2305.02157v1 [math.AG] 3 May 2023

Demailly–Peternell–Schneider 猜想在正特征下成立

SHO EJIRI 和 ZSOLT PATAKFALVI

ABSTRACT. 我们证明了正特征下的 Demailly–Peternell–Schneider 猜想：设 X 是代数闭域上特征为 $p>0$ 的光滑射影簇，且 $-K_X$ 数值有效，则 Albanese 态射 $a\colon X\to A$ 是满射。我们还证明了更强的结论，包括允许 X 存在温和奇点，或证明 a 具有更特殊的性质。

上述关于紧 K¨ahler 流形的结论最初由 Demailly、Peternell 和 Schneider 于 1993年提出猜想；对于零特征下的光滑射影簇，Zhang 于 1996年证明了这一结论。在正特征下，此前所有结果都要求对上同调或 a 的一般纤维的奇点作出温和性假设。本文的主要特点是发展了一套技术，从而避免了这些假设。

1. Introduction

本文始终在 k 这个正特征的代数闭域上进行研究。

几何学的多个分支中已有许多研究表明，一个“处处非双曲”的紧致几何空间 X 具有非常特殊的 Albanese 态射 $a\colon X\to A$。这里，“处处”一词是“在所有方向上”的同义词。

这类论述的出发点是以下基本原则：

- “处处非双曲”空间的像是“非双曲”的，并且
- 阿贝尔簇的子空间是“双曲”的，除非它们是阿贝尔子簇（或者按解析学中的术语，等价地说，是线性的）。

例如，利用 $a(X)$ 不是 A 的阿贝尔子簇，上述两条基本原则便会导出这样的矛盾：除非 $a\colon X\to A$ 是满射，否则 $a(X)$ 将同时既是双曲的又是非双曲的。

要将上述关于 Albanese 态射 $a\colon X\to A$ 特殊结构的一般思想转化为精确的定理或猜想，就必须确定：

- 几何的分支（所列引文仅仅是该领域浩瀚文献中的一些例子）：最常见的是复几何，具有各种不同程度的解析或 K¨ahler 风格 [Bog74, Kaw81, Bea83, CPZ03, Dem15, Cao15, CH17, Mat22]，或者零特征下的几何 [Zha96, Zha05, CH01, LTZZ10, Wan22]，或者正特征下的代数几何[HP16, HPZ19, Eji19b, Eji19c, Wan22, Bau23]；叶层理论也有相应的变体 [Dru21]，
- “一致非双曲”的含义（这里仍然只列举了例子）：这可能指某种正曲率条件[Dem15]，$K_X\equiv 0$ [Bea83]，

$-K_X$ 是数值有效的[Dem15，Eji19c]，$\kappa(X) \leq 0$，$\kappa_S(X) \leq 0$ [HPZ19]，$\kappa(X) = 0$[CH01]，或 $\kappa_S(X) = 0$ [HP16]。

- 所要求/证明的 a结构：$X \to A$：通常要尽可能接近局部平凡纤维丛，之后可能需要根据具体情形放宽要求。例如，可能需要允许双有理变换。有时，所能证明的最好结果是 a 为满射。

我们的主定理聚焦于正特征情形，其中会出现一个特殊问题：a 的一般纤维可能非常奇异。它的奇点与一个光滑点同胚，但其代数结构可能与光滑点大不相同。这使大多数技术失效，因此以往所有结果都假设存在具有良好奇点的一般纤维，例如[Eji19b、Eji19c]，，或作出某种普通性假设，而这也暗中假设了一般纤维具有良好的性质 [HP16、HPZ19、Bau23]。

1.1. 我们主结果的光滑情形。Demailly、Peternell 和 Schneider 猜想，一个紧致 K¨ahler 流形 X 若具有 $-K_X$ 数值有效性，则其 Albanese 映射是满射[DPS93，猜想 2]。我们的主要结果是这一猜想在正特征情形下的对应版本。特别地，我们的主定理不涉及上一段所述的任何类型的假设，而这在正特征情形下尤其难以实现。

定理 1.1 (Smooth case of Theorem 1.3)。若 X 是一个 $-K_X$ 数值有效的光滑射影簇，则 Albanese 态射 $a : X \to A$ 是满射。

定理 1.1 在零特征下由 Zhang 于 [Zha96，定理 1]中证明。因此，定理 1.1如今对任意代数闭域都成立。事实上，利用 Albanese 态射与基变换的相容性，该定理甚至对非闭域也成立。

关于正特征、零特征以及解析情形下早期结果的更多参考文献，请参阅引言中第 1.1 节之前的部分。

Theo理 1.1 还推出了一个关于阿贝尔簇刻画的推论 s:

推论 1.2。设 X 是一个带有数值有效 $-K_X$ 的光滑射影簇，并令 $b_1 = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_l)$。那么：

(a) $b_1 \leq 2$ 维数 X，且 (b) $b_1 = 2$ 维数 X 当且仅当 X 是阿贝尔簇。

1.2. Albanese 的奇点与结构。主要结果的一般情形如下。此版本允许 X 存在奇点和边界除子，并进一步讨论了 Albanese 态射的结构：

定理 1.3. 设 (X, Δ) 是一个射影、强 F-正则对，且存在一个不能被 p 整除的整数 $i > 0$，使得 $-i(K_X + \Delta)$ 数值有效且为卡蒂埃除子。那么有以下结论：

(a) Surjectivity. X 的 Albanese 态射 $a : X \to A$ 是满射。(b) Weak flatness. 不存在 a-例外除子；也就是说，对于 X 上的每个素因子 E，$f(\mathrm{Supp}(E))$ 的余维至多为一。

(c) FIBRATION UP TO UNIVERSAL HOMEOMORPHISM. 令 $a : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} A$ 为 a 的 Stein 分解。那么 g 是纯不可分的。(d) FIBRATION. 如果 f 可分，那么 a 构成一个代数纤维空间，即 g 是同构。

为稳妥起见，我们提一下，本文中对偶中的除子总是有效的，而 Cartier 除子总是具有 $\mathbb{Z}$系数。因此，定理 $i(K_X+\Delta)$中为 Cartier 除子意味着1.3 是 Δ一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-除子。

如上所述，定理1.3 的主要特点是，它处理 Albanese 映射的一般纤维中任意奇异的情形 G 。事实上，当（G， $\Delta|_G$）具有 F-纯奇点时，定理 [Eji19c，定理 1.1] 已证明了定理1.3 （甚至定理1.1）所适用、但早期结果不适用的簇的例子包括准双椭圆曲面，以及 $-K_X$ 数值有效且G 在[PZ19第 14]节中非约化的簇。更多内容见备注6.1 。

我们指出，在某些特殊情形下，可以对定理 1.3 的结论稍作改进：

推论 1.4. 设 (X,Δ) 是一个强 F-正则射影曲面对，且$-i(K_X+\Delta)$ 是一个 Cartier 数值有效除子，其中整数 $i>0$ 不能被 p整除。那么， X 的 Albanese 态射构成一个代数纤维空间。

推论 1.5. 假设 $p \geq 5$。设 X 是一个具有强 F-正则奇点的正规射影簇，且 iK_X 是一个数值平凡的 Cartier 除子，其中整数 $i>0$ 不能被 p整除。设 a： $X \to A$ 是X的 Albanese 态射，并设 a： $X \to Y \to A$ 是 a的 Stein 分解。若 $\dim Y = \dim X - 1$，则 a 构成一个代数纤维空间。

1.3. 局部平凡性。 证明定理 1.3之后，人们或许会想知道 f 在经过适当的基变换后是否实际上是平凡的。零特征下已有此类结论，例如 [Cao16] 或 [PZ19，附录]。事实证明，在我们的情形中，若底空间是一条曲线，答案也为肯定。不过，只有在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上才能取有限基变换。

定理 1.6. 设 (X,Δ) 是一个射影强 F-正则对，且 $K_X+\Delta$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子；设 a： $X \to A$ 是 X 的 Albanese 态射，满足 $\dim a(X) = 1$。此外，假设以下情形之一成立：

(a) $-(K_X+\Delta)$ *is semi-ample or*
(b) $-(K_X+\Delta)$ *is nef and* $k=\overline{\mathbb{F}}_p$.

那么 a： $X \to A$ 是一个代数纤维空间（特别地， A 是一条椭圆曲线），并且对于不同的闭纤维 F，对 $(F,\Delta|_F)$ 彼此同构。

此外，如果 $k=\overline{\mathbb{F}}_p$ （情形 （b）），则存在一个有限态射 $E \to A$，其源自一条椭圆曲线 E，使得 （X， Δ） $\times_A E \cong$ （F， $\Delta|_F$） $\times_k E$，其中 F是 a的任意一个闭纤维。

在上述陈述中，到 Δ、到 E 或到 F的基变换，均取作一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$几乎 Cartier 除子，如 [Har94] 中所述。

下一个例子表明，在定理1.6 中，一般而言，不能在 $\mathbb{F}_p$ 的情形之外进行基变换：

例 1.7. 取 $k \neq \overline{\mathbb{F}}_p$。设 E 为一条椭圆曲线，并设 $\mathcal{L}$ 为 E 上一个次数为零的非挠线丛。令 $X := \mathbb{P}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_E)$。则 $-K_X$ 是数值有效的。然而，对于任意有限态射 $\pi : E' \to E$，其中 E' 是一条椭圆曲线，$\pi^*\mathcal{L}$ 也不是挠线丛，因此 $X \times_E E' \to E'$ 不分裂。

1.4. 当 $-K_X$ 丰沛时的 Albanese 态射。有人可能会想，在 1.3 的情形下，能否给出比定理$-K_X - \Delta$ 丰沛时更精确的陈述。当 X 光滑时，已知在这种情形下，X 是有理链连通的（RCC）[KMM92],，因此 Albanese 簇的维数为 0。然而，众所周知，对于奇异的 X，其 RCC 性质尚未得到证明，因此 Albanese 簇平凡这一点也尚不清楚。我们在此证明：

定理 1.8. 设 (X, Δ) 为一个射影对，满足 $K_X + \Delta$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃。假设以下条件之一成立：

(a) $-(K_X + \Delta)$ 丰沛，且 (X, Δ) 是 F-纯的；或 (b) $-(K_X + \Delta)$ 数值有效且大，且 (X, Δ) 强 F-正则。

那么，X 的 Albanese 态射是一个常值映射。

有趣的是，据我们所知，这一代数证明是唯一一个能够证明以下拓扑消失性结论的证明，而该结论是利用 1.8 定理直接得到的，参见 [PZ19，命题 2。7]。

推论 1.9. 在 *1.8* 的情形下，$H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_l) = 0$ 对于 $l \neq p$。

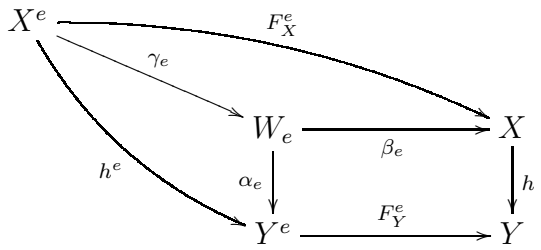
1.5. 论证概要。考虑定理 1.3中的情形，并令 Y为 $a(X)$ 的正规化。记 h: $X \to Y$ 为诱导态射。为简单起见，我们假设证明中出现的每个空间都是光滑的，并且$\Delta = 0$。特别地，证明中出现的所有典范除子都是卡蒂埃除子。

定理 1.3 的证明首先将其归结为命题 ω_Y^*是弱正的这一论断，见命题 3.2。与本概要一样，我们假设所有簇都是光滑的，因此 Y也光滑；这里则将其归结为论断 $-K_Y$是伪有效的（见定义 2.2）。

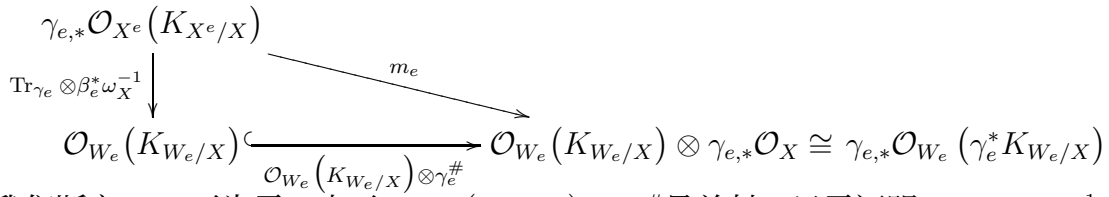
命题 3.2 的证明包含多个步骤，既用到了若干先前的结果，也利用了该情形的一些特殊性质。我们更愿意请读者参阅原证明，而不是在此详述这些不同部分。

因此，我们已经得出，只需证明 $-K_Y$ 是伪有效的，或者等价地，证明 $-h^*K_Y$ 是伪有效的。要说明这一证明背后的主要思路，需要稍微涉及一些技术细节。首先，对每个 $e \geq 0$，考虑以下交换图，其中

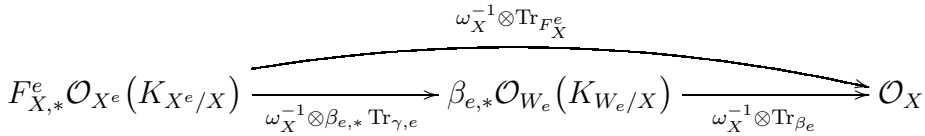
- $X^e = X$ 和 $Y^e = Y$，上标仅用于区分 e次迭代弗罗贝尼乌斯态射的源与靶，
- $h^e = h$ 通过上一点中的同一性，
- W_e 是 $X \times_Y Y^e$的约化子概形的正规化，并且
- α_e、β_e 和 γ_e 是诱导态射：



进一步考虑下图中定义的“魔法映射” m_e



我们断言 m_e 不为零。由于 $\mathcal{O}_{W_e}\left(K_{W_e/X}\right)\otimes\gamma_e^{\#}$是单射，只需证明 $\mathbf{Tr}_{\gamma_e}\otimes\beta_e^*\omega_X^{-1}$ 非零；为此，只需证明其沿 β_e 的推前非零即可。后一个非零性结论由下面的交换图推出，同时注意到该复合映射由于 X 的光滑性而为满射（这里为简便起见作了这一假设，但定理 F中一般的强 1.3 -正则假设也允许采用相同的论证）：



说明了 m_e 非零之后，我们接下来解释为什么 m_e 是我们证明的关键。基本原因是，它能够将正性从源端传递到目标端。为了解释原因，我们需要计算 m_e两端的典范除子。对于源端，这很简单。我们有：

$$K_{X^e/X}=K_{X^e}-F^{e,*}K_X=(1-p^e)K_X, \tag{1}$$

其中在最后一个等式中，我们使用了恒等式 $X=X^e$。

对于 m_e 的目标，这个计算稍长一些。首先，令 $r>0$ 为使 α_r 的一般纤维几何正规所需的最小整数。由此可知，对于任意整数 $e\geq r$， $W_e\to W_r\times_{Y^r}Y^e$ 沿着 α_e 的一般纤维是一个同构，因此对于任意这样的 e，我们有

$$\gamma_e^*K_{W_e/X}=F_X^{e-r,*}\gamma_r^*K_{W_r/X}+\gamma_e^*K_{W_e/W_r}\leq F_X^{e-r,*}\gamma_r^*K_{W_r/X}+h^*(1-p^{e-r})K_Y, \tag{2}$$

最后一个不等式在下一行推导如下：

$$K_{W_e/W_r}\leq K_{W_r\times_{Y^r}Y^e/W_r}=\alpha_e^*K_{Y^e/Y^r}=\alpha_e^*(1-p^{e-r})K_Y$$

结合（1）和（2），我们得到 m_e 是一个非零的 $\mathcal{O}_{W_e}$-线性同态

$$m_e:\gamma_{e,*}\mathcal{O}_X((1-p^e)K_X)\to F_X^{e-r,*}\gamma_r^*K_{W_r/X}+h^*(1-p^{e-r})K_Y \tag{3}$$

定理1.3 的证明的基本思路是，某种形式的 $H^0(W_e,m_e)$ 应当能够将定理 $-K_X$1.3 中假设的正性转移为正性

的 $-h^*K_Y$。从直观层面看，式（3）清楚地揭示了这一思路背后的数学原理，尤其是在忽略 $F^{e-r}{}_X^*\gamma_r^*K_{W_r/X}$这一项时。然而，要将其转化为严谨的证明，技术上颇为复杂，因为必须解决以下问题（详情请参见定理5.3 的证明）：

(a) $H^0(W_e, m_e)$ 是否非零？我们能证明的最好结果是，$H^0\big(m_e \otimes \mathcal{O}_{W_e}(\beta_e^* B)\big)$非零，其中 B 是 X上的整体生成的丰沛除子。（参见定理 5.3证明中的步骤4；为与其中的记号相符，需要将X 替换为 U，并将 Y 替换为 V。）事实上，通过考察证明，我们甚至可以允许在 W_e上的任意数值有效除子 N 进行扭曲。也就是说，对于每个这样的 N，$H^0\big(m_e \otimes \mathcal{O}_{W_e}(N + \beta_e^* B)\big)$ 非零。利用几个投影公式以及(3)中 m_e 的表达式，我们得到一个非零映射

$$\begin{aligned} m_{e,B,N}\colon \quad & H^0(X, (1-p^e)K_X + p^e B + \gamma_e^* N) \\ & \to H^0(X, h^*(1-p^{e-r})K_Y + F_X^{e-r,*}\gamma_r^* K_{W_r/X} + p^e B + \gamma_e^* N) \end{aligned} \tag{4}$$

(b) 首先，我们暂且不考虑（4）中的项 $F^{e-r}{}_X^*\gamma_r^*K_{W_r/X}$。稍后我们会说明如何处理这一项。于是，$m_{e,B,N}$ 就变成非零的 k-线性映射

$$H^0(X, (1-p^e)K_X + p^e B + \gamma_e^* N) \to H^0(X, h^*(1-p^{e-r})K_Y + p^e B + \gamma_e^* N). \tag{5}$$

问题在于，即使使用这一简化版本的$m_{e,\ B,\ N}$，也不清楚如何直接得到定理1.1 。其主要原因是，当 e趋于无穷时，$-K_X$ 和 B 在（5）的源中的系数是相同的。然而，为了证明我们的定理，我们需要能够从 $B - aK_X$ 的截面诱导出 $B - h^*aK_Y$的截面，其中任意整数 $a > 0$均可。

（c）我们对上一点中所述问题的解决方法，是逐步进行截面的构造。在这一点中，我们所解释的一切都是关于 e 的渐近结论，也就是说，在取极限 $e \to \infty$ 之后。利用这一简化，假设我们知道 $0 \neq H^0(X, B - h^*aK_Y)$，我们使用 m_e 来证明 $0 \neq H^0\left(X, B - h^*\left(a + \frac{1}{p^r}\right)K_Y\right)$。反复迭代可知，对于 $a \to \infty$，$B - ah^*K_Y$ 是有效的，因此 $-h^*K_Y$ 是伪有效的。

主要问题在于，在这一论证过程中，我们最终需要对m_e 张量形如 $-a'h^*K_Y$的层进行扭曲，而这些层未必是数值有效的。因此，我们无法直接证明对 m_e 的扭曲会在截面上诱导出非零映射。我们转而证明，对 m_e 作适当扭曲后，其推前非零。接着，我们证明这些映射的源是弱正层，并且具有受控的一般点整体生成性质。特别是，它们在非零映射下在无挠层中的像也有非零截面。这些论证的关键，在于第一作者最近在 [Eji19a]中证明的半正性结论。本文所用的版本陈述于命题5.1中，并在命题5.2中作了更精确的表述。除“魔法映射” m_e的发现之外，这也是使本文论证成为可能的近期主要技术进展。

我们指出，这一论证要求对设定以及总体框架都作非常细致的调整。因此，定理5.3 的证明确实颇具技术性。要在提纲的框架下进一步解释这些设定上的细微调整并不容易。因此，对于这些精确的微调，我们请读者参阅定理5.3 的具体证明，尤其是其中的步骤1 。

(d) 接下来我们简要说明为何可以舍弃项 $F^{e-r}{}_{,X}{}^{*}\gamma_r^* K_{W_r/X}$。原因是可以证明该项是反有效的。证明的关键是利用叶状结构写出$K_{W_i/W_{i-1}}$ 的典范丛公式，见第4节，以及定理5.3证明中的第2 步。要点是， $\alpha_i^*\Omega_Y \to \Omega_{W_i}$饱和像的行列式的相反数会出现在论证中；由于 $\mathcal{O}^{\oplus \text{维数}_A}{}^{A}|_Y \cong \Omega_A|_Y \to \Omega_Y$ 是一般满射，因此该项是反有效的。

证明中最微妙的部分，是(c)点所阐述的极限论证。c据第二作者所知，最早包含极限论证并反复使用Kawamata-Viehweg消失定理的双有理几何论证见 [HM10，定理6。3], 而最早采用极限论证并反复使用半正性结论的文章是[Pat14，定理3。10]。

我们注意到，上述所有考虑都汇集在定理 3 的证明步骤 5.3中。这得出定理5.3，由此只需几行便可得到定理 1.3 中除平坦性陈述之外的所有结论。参见定理1.3的证明。平坦性陈述也在同一证明中得到证明，并对[PZ19第 4], 节的论证稍作修改后移植而来，而该论证又是对[LTZZ10定理]稍作修改后移植而来。主要区别在于，其中的半正性假设由定理 5.3的陈述取代。由于论证相当简短，我们请读者参阅实际证明。

定理1.6 的证明比定理1.3的证明简单得多。它基本上沿用了[PZ19], 中主要结论的证明，只在必要之处作了修改。修改主要体现在以下两点：

- 其中使用的半正性引擎 [PZ19] 被不假设一般纤维具有良好奇点的新引擎所取代。
- 通过椭圆曲线上的向量丛分类，避免了 Frobenius 拉回[Oda71], 这是必要的，因为如果一般纤维高度奇异，Frobenius 拉回会消除奇点。

致谢。第一作者的部分研究工作得到了文部科学省特色联合研究中心计划 JPMXP0619217849 的资助。第二作者获得了瑞士国家科学基金会项目 200020B/192035 以及 ERC启动基金 804334 的资助。

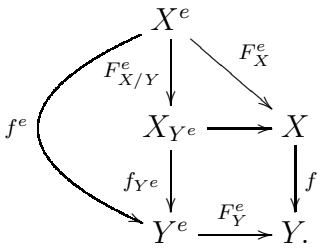
2. 记号与定义

本文始终在特征为 $p > 0$ 的代数闭域 k 上工作。所谓 k-概形，是指 k 上的有限型分离概形。簇是整的 k-概形。曲线（分别地，曲面）是维数为一（分别地，二维）的簇。

设 $\phi\colon\ S \to T$ 和 $T' \to T$ 是 k-概形之间的态射。我们将 S 与 T' 在 T 上的纤维积 $S \times_T T'$ 记为 $S_{T'}$。由 ϕ 诱导的态射 $S_{T'} \to T'$ 记为 $\phi_{T'}$。

设 X 是一个 k-概形。设 $e \geq 1$ 是一个数。我们用 $F_X^e\colon X^e \to X$ 表示 X 迭代 e 次后的绝对 Frobenius 态射。注意，为了与 F_X^e 的目标区分， F_X^e 的源记作 X^e。

设 $f\colon X \to Y$ 是 k-概形之间的态射。当我们将 X 和 Y视为 X^e 和 Y^e时，用 $f\colon X \to Y$ 表示 $f^e\colon X^e \to Y^e$。我们将态射$F_{X/Y}^e\colon X^e \to X_{Y^e} = X \times_Y Y^e$定义为 $F_{X/Y}^e\colon = F_X^e \times_Y f^e$:



设 X 是一个正规簇。 X 上的 $\mathbb{Q}$-Weil 除子（分别为 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Weil 除子）是 Weil(X) $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$（分别为 Weil($X$) $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$）中的一个元素，其中 Weil($X$) 是 X上 Weil 除子的加法群。若 $\mathbb{Q}$-Weil 除子 Δ 满足对某个整数 $i > 0$ （分别为某个不能被 p整除的整数 $i > 0$），$i\Delta$ 是 Cartier 除子，则称其为 $\mathbb{Q}$-Cartier（分别为$\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier）。

对 (X, Δ) 是正规簇 X ，并带有定义在 X 上的有效 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃 Weil 除子 Δ 。若 X 是仿射（分别为射影）的，则对 (X, Δ) 称为仿射（分别为射影）

接下来，我们汇集几个用于证明主定理的概念。

定义 2.1. 设 (X, Δ) 是一个仿射对。

(a)[HR76, HW02] 我们称 (X, Δ) 是 F-纯 ，如果以下复合映射

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{F_X^{e\sharp}} F_{X*}^e \mathcal{O}_X \hookrightarrow F_{X*}^e \mathcal{O}_X (\lfloor (p^e - 1)\Delta \rfloor)$$

对每个 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，都分裂为一个 $\mathcal{O}_X$-模同态。

(b) [HH89, HW02] 我们称 (X, Δ) 是 强 F-正则 ，如果对每个有效 Weil 除子 D ，定义在 X上，都存在一个 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ ，使得以下复合映射

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{F_X^{e\sharp}} F_{X*}^e \mathcal{O}_X \hookrightarrow F_{X*}^e \mathcal{O}_X (\lceil (p^e - 1)\Delta + D \rceil)$$

分裂为 $\mathcal{O}_X$-模同态。

我们称对 (X, Δ) 是 F-纯的（分别为强 F-正则的），如果存在 $\{U_i\}$ X 的仿射开覆盖，使得每个 $(U_i, \Delta|_{U_i})$ 都是 F-纯的（分别为强F-正则的）。

定义 2.2. 设 Y 是一个正规拟射影簇，并且设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是 Y 上的凝聚层。

(a) 如果诱导态射 $\varphi_\eta\colon \mathcal{F}_\eta \to \mathcal{G}_\eta$ 在 Y 的泛点 η 处的茎之间是满射（分别地，是同构），我们就称态射 $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 一般满射（分别地，一般同构）。

(b) 如果 $\mathcal{F}$ 由其全局截面一般生成，我们就称之为一般生成，其自然态射

$$H^0(Y,\mathcal{F})\otimes_{\operatorname{Spec} k}\mathcal{O}_Y\to\mathcal{F}$$

是一般满射。

(c) ([Vie83，定义 3.1]) 我们称 $\mathcal{G}$ 为 弱正，如果对于每个丰沛线丛 $\mathcal{H}$ 和每个数 $\alpha\geq 1$，存在一个数 $\beta\geq 1$使得

$$\left(\operatorname{Sym}^{\alpha\beta}(\mathcal{F})\right)^{**}\otimes\mathcal{H}^{\beta}$$

由其全局截面一般生成。这里， $\mathcal{G}^{**}$ 表示 $\mathcal{G}$的双对偶。

3. Varieties of maximal Albanese dimension with weakly positive anti-canonical

在证明中，命题 3.2 起着重要作用。为证明命题 3.2，我们需要以下命题。

命题 3.1 ([HPZ19，命题 1。4])。 设 Y 是一个正规射影簇，满足 维数 $H^0\left(Y,\omega_Y^{[n]}\right)\leq 1$ 对每个 $n\geq 1$。若 Albanese 态射 $a:\ Y\to A$一般有限，则 a 是可分的。

命题 3.2。设 Y 是一个具有极大 Albanese 维数的正规射影簇，且 ω_Y^* 是弱正的。则 Y 是一个阿贝尔簇。

证明。我们将证明分为六个步骤。

步骤 1。 我们证明维数 $H^0\left(Y,\omega_Y^{[n]}\right)\leq 1$ 对每个 $n\geq 1$。假设存在一个有效 Weil 除子 $C\sim_{\mathbb{Z}} nK_Y$ 对于某个 $n\geq 1$。由于根据假设， $\mathcal{O}_Y(-K_Y)$ 是弱正的，我们看到 $\mathcal{O}_Y(-C)$ 也是弱正的，因此 [Eji19c，引理 4.4] 表明 $C=0$。这意味着维数 $H^0\left(Y,\omega_Y^{[n]}\right)\leq 1$ 对每个$n\geq 1$。

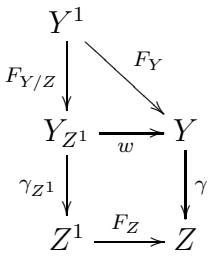
步骤 2。我们证明 $K_Y=0$。令 $g:Y\to A$ 表示 Y 的 Albanese 态射。令 Z 为 g 的像。令 $\gamma:\ Y\to Z$ 为诱导态射。由步骤 1 和命题 3.1 可知， γ 可分，因此存在一般满射态射 $g^*\Omega_A^1\to\Omega_Y^1$。由于 Ω_A^1 是平凡向量丛，我们得出 Ω_Y^1 由其全局截面一般生成，这意味着 $K_Y\geq 0$。由于 $\mathcal{O}_Y(-K_Y)$ 弱正， [Eji19c，引理 4.4] 告诉我们 $K_Y=0$。

步骤 3。 令 $\mathcal{D}:=(\det(F_{Y*}\mathcal{O}_Y))^{**}$. 我们证明 $\mathcal{D}^*\cong\mathcal{D}$。我们不妨假设 Y 光滑。由 $\omega_Y\cong\mathcal{O}_Y$ 步骤 2，根据 Grothendieck 对偶可得

$$\mathcal{H}om\left(F_{Y*}\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_Y\right)\cong F_{Y*}\mathcal{H}om\left(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_Y\right)\cong F_{Y*}\mathcal{O}_Y,$$

因此 $\mathcal{D}^*\cong\det\left((F_{Y*}\mathcal{O}_Y)^*\right)\cong\det\left(F_{Y*}\mathcal{O}_Y\right)=\mathcal{D}.$

步骤4. 我们证明 Y 是光滑的。我们采用下图中的记号 :



然后，我们有以下态射:

$$\gamma^*\left(F_{Z*}\mathcal{O}_Z\right) \to w_*\mathcal{O}_{Y_{Z^1}} \xrightarrow{w_*\left(F_{Y/Z}{}^\sharp\right)} w_*F_{Y/Z}{}_*\mathcal{O}_Y = F_{Y*}\mathcal{O}_Y.$$

该复合态射一般满射，因为 γ 由命题 3.1 可知是一般有限可分满射态射。结合 $g^*\delta$: $g^*(F_{A*}\mathcal{O}_A) \twoheadrightarrow \gamma^*(F_{Z*}\mathcal{O}_Z)$，其中 δ: $F_{A*}\mathcal{O}_A \twoheadrightarrow F_{A*}\mathcal{O}_Z \cong F_{Z*}\mathcal{O}_Z$是由自然态射 $\mathcal{O}_A \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Z$ 经 F_A取直接像得到的，我们得到一般满射态射

$$\epsilon : g^*\left(F_{A*}\mathcal{O}_A\right) \to F_{Y*}\mathcal{O}_Y.$$

感谢 [Oda71，推论 1。7], 我们可以看出$F_{A*}\mathcal{O}_A$ 是一个齐性向量丛，因此存在一个滤过

$$0 = \mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}'_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}'_{p^{\dim A}-1} \subset \mathcal{E}'_{p^{\dim A}} = g^*\left(F_{A*}\mathcal{O}_A\right)$$

其中每个商 $\mathcal{E}'_{i+1}/\mathcal{E}'_i$都是代数等价于零的线丛。对于每个 $0 \leq j < p^{\dim Y}$，令 i_j为使得 $\epsilon\left(\mathcal{E}'_{i_j}\right)$的秩为 j的最大数。令 $\mathcal{E}_j$为 $\epsilon(\mathcal{E}'_{i_j})$ 在 $F_{Y*}\mathcal{O}_Y$中的饱和化。于是我们得到滤过

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{p^{\dim Y}-1} \subset \mathcal{E}_{p^{\dim Y}} = F_{Y*}\mathcal{O}_Y$$

使得对每个 $0 \leq j < p^{\dim Y}$,

- $\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j$ 是秩为一的无挠相干层，且
- 存在一个代数等价于零的线丛 $\mathcal{L}_j$ ，以及一个单射态射ι_j: $\mathcal{L}_j \hookrightarrow \mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j$，对每个 $0 \leq j < p$维数Y。

注意，由于 $F_{Y*}\mathcal{O}_Y$是无挠的，因此 $\mathcal{E}_0 = 0$。设 $V \subseteq Y$为一个光滑开子集，使得 codim$_Y(Y \setminus V) \geq 2$，且每个 $(\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j)|_V$都是线丛。设 $C \subseteq V$为一条一般的射影曲线。于是

$$\bigotimes_{j=0}^{p^{\dim Y}-1} \mathcal{L}_j|_C \xrightarrow{\otimes \iota_j|_C} \bigotimes_{j=0}^{p^{\dim Y}-1} \left(\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j\right)|_C \cong \det\left(F_{V*}\mathcal{O}_V\right)|_C.$$

由于每个 $\mathcal{L}_j|_C$和 $\det\left(F_{V*}\mathcal{O}_V\right)|_C = \mathcal{D}|_C$根据步骤 3都是次数为零的线丛，我们可知每个 $\iota_j|_C$ 都是同构，这意味着 $\mathcal{L}_j|_V \overset{\iota_j|_V}{\hookrightarrow} (\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j)|_V$ 也为同构。因此，以下复合映射

$$\mathcal{L}_j \overset{\iota_j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j \hookrightarrow (\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j)^{**}$$

是一个同构，因此 ι_j 也是同构。特别地， $\mathcal{E}_{j+1}/\mathcal{E}_j$ 是一个线丛。这意味着 $F_{Y*}\mathcal{O}_Y$ 是局部自由的，因此根据 Kunz定理， Y 是光滑的。

步骤5。我们证明 Ω^1_Y 是一个平凡向量丛。正如我们在步骤2中所见，Ω^1_Y由其全局截面一般生成，因此存在一个一般为同构的态射 $\lambda\colon \bigoplus^{\dim Y}\mathcal{O}_Y \to \Omega^1_Y$。取行列式，得到一般为同构的态射 $\det(\lambda)\colon \mathcal{O}_Y \to \omega_Y$。于是由步骤2可知，$\det(\lambda)$ 是一个同构，这意味着 λ 也是一个同构。

步骤 6. 我们证明该断言。根据 [MS87，引理 (1.3)],态射

$$g^* : H^0(A, \Omega^1_A) \to H^0(Y, \Omega^1_Y)$$

是单射。这是一个同构，因为

$$\dim A = \dim H^0(A, \Omega^1_A) \leq \dim H^0(Y, \Omega^1_Y) = \dim Y$$

且维数为Y $\leq$维数 A由假设可知。考虑到步骤 5，可得$g^*\Omega^1_A \to \Omega^1_Y$ 是一个同构，这意味着 g 是 ´étale的，因此 Y 根据 [Mum70第18节，定理]是一个阿贝尔簇。

□

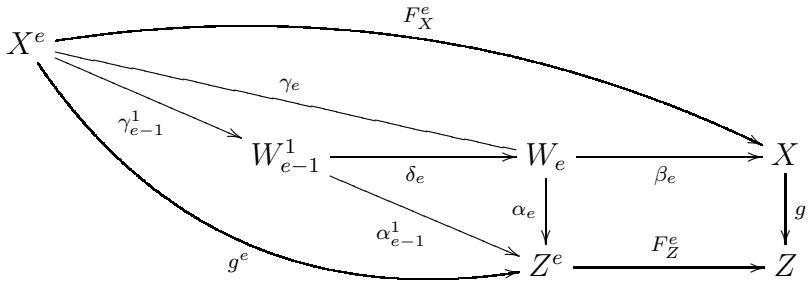
注记 3.3。 上述证明中的步骤 [5 和 6可以通过使用 [HPZ19，定理 0。3], 来省略，该定理表明，若 X 是一个满足 $\kappa(X) = 0$的光滑射影簇，且 Albanese 态射 $a\colon X \to A$ 一般有限，则 a 是双有理的。

4. 与纤维化相关的叶层结构

下面我们定义一些与满射纤维化相关的叶状结构。这些叶状结构将在定理 5.3 的证明中使用，主要是因为在其中一种情形下，并未假设 f 是可分的。事实上，在可分的 f 情形下，定理 5.3 的证明无需使用引理 4.2。

记号 4.1. 设 $g : X \to Z$ 是正规簇之间的满射态射。设 W_e 是 $X \times_Z Z^e$ 的约化子概形的正规化，并为诱导态射引入以下名称：

(6)



注意，对于 p-叶状结构 $W_e = W^1_{e-1}/\mathcal{F}^e$

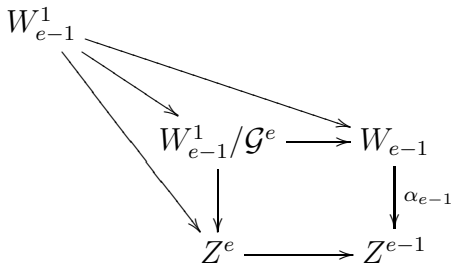
$$\mathcal{T}_{W^1_{e-1}} \supseteq \mathcal{F}^e = \big(\operatorname{coker}(d\delta_e)\big)^*,$$

其中 $d\delta_e\colon \delta_e^*\Omega_{W_e} \to \Omega^{W^1_{e-1}}$ 是由 δ_e 诱导的微分上的同态。于是令

$$\mathcal{G}^e \stackrel{\text{def}}{=} \big(\operatorname{coker}(d\alpha^1_{e-1})\big)^*.$$

引理 4.2。 使用记号 *4.1*，我们有 $\mathcal{F}^e = \mathcal{G}^e$，因此 $W_e = W^1_{e-1}/\mathcal{G}^e$。

证明。 由（6），我们有 $\alpha^1_{e-1} = \alpha_e \circ \delta_e$，因此 $\mathcal{F}^e \subseteq \mathcal{G}^e$。若 $W^1_{e-1}/\mathcal{G}^e$到 Z^e 和 W_{e-1} 均有诱导态射，并且这些态射构成如下交换图，那么根据纤维积的约化子概形的正规化的极小性，我们必有 $\mathcal{G}^e = \mathcal{F}^e$:



事实上，要证明这一点，只需证明 $\mathcal{G}^e$ 会消去 W_{e-1} 和 Z^e任意仿射开集上的所有局部函数:

- 对于 W_{e-1}，这仅仅是因为 $\mathcal{G}^e$ 是一个 p-叶丛；而
- 对于 Z^e，取两个仿射开集 Spec $A \subseteq Z^e$和 Spec $B \subseteq W^1_{e-1}$，使得α^1_{e-1} (Spec B) $\subseteq$Spec A。再固定 $D \in \Gamma$(Spec $B, \mathcal{G}^e$)，并根据我们将其作用于环元素还是微分，将它视为 B 上的导子或 $\Omega^{B/k}$ 上的线性泛函。这两种观点之间的联系由 $D(b) = D(db)$给出，对任意 $b \in B$均成立。我们需要证明，对任意 $a \in A$， $D(a) = 0$ 。然而，根据 $\mathcal{G}^e$的定义，我们有 $D(da) = 0$; 再由这两种观点之间的联系可得 $D(a) = D(da) = 0$。

□

5. The main technical theorem

接下来，我们证明命题 5.2，它是定理 1.3 证明中的关键。命题 5.2 是以下正性结果的一个应用:

命题 5.1 ([Eji19a，推论 6.5、引理 5.4 和例 5。8])。 设 (U, Δ)是一个对，带有一个满射射影态射 $h\colon U \to V$ 到一个正规拟射影簇。令 U_η 表示 h的一般纤维。假设

- $(U, \Delta|_{U_\eta})$ 是 F-纯的，
- $i(K_U + \Delta)|_{U_\eta}$ 是一个丰卡蒂埃除子，其中某个整数 $i > 0$ 不能被 p 整除，并且
- 存在一个从 V 到阿贝尔簇 A的稠密开子集的闭子集的一般有限射影满射态射。

对于每个 $m \geq 1$（满足 $i|m$），设 $\mathcal{F}_m := h_*\mathcal{O}_U(m(K_U + \Delta))$。此外，固定 A 上的一个对称丰沛除子 H' （即 $(-1)^*_A H' = H'$），其中 $|H'|$ 是自由的，并令 H 为 $(\dim V + 1)H'$ 在 V 上的拉回。

那么，存在一个整数 $m_0 \geq 1$ 使得以下条件成立:
(a) 集合 $\mathbb{B}_-(\mathcal{F}_m)$ 对每个 $m \geq m_0$满足 $i|m$ (关于 $\mathbb{B}_-$的定义，参见 [Eji19a,§4]) 都包含于 V 的一个真闭集内。(b) 对每个 $m \geq m_0$ 满足 $i|m$，相干层 $\mathcal{F}_m(H)$ 由其全局截面一般生成。

命题 5.2。考虑以下簇和态射：

- 设 (X, Δ) 是一个正规射影对，其中 Δ 是一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Weil 除子。
- 设 $f : X \to Y$ 是到一个最大阿尔巴内塞维数的正规射影簇 Y 的满射态射。
- 设 V 是 Y 的一个稠密开子集，并令 $U := f^{-1}(V)$ 和 $h := f|_U \colon U \to V$。

此外，考虑上述簇上具有以下性质的除子：

- 设 B 是 X 上的一个丰沛 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃除子。
- 设 D 是定义在 X 上的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Weil 除子，且 $D - (K_X + \Delta)$ 是一个数值有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子。
- 设 $E \geq 0$ 是定义在 U 上的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Weil 除子。
- 假设
  - $\left(X_\eta, \Delta|_{X_\eta}\right)$ 是强 F-正则的，其中 X_η 是 f 的一般纤维，并且
  - $D|_{X_\eta}$ 且 $E|_{X_\eta}$ 是数值有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子。
- 取一个 Cartier 除子 H，定义在 V 上，如命题5.1所述。

那么，存在正整数 c 和 d 使得

- $p \nmid c$ 和 $p \nmid d$,
- cB、cD 和 cE 是整数，并且
- 存在一个整数 $m_0 \geq 1$ 使得

$$\left(h_* \mathcal{O}_U(cm(B|_U + dD|_U + E))\right) \otimes \mathcal{O}_V(H)$$

对每个 $m \geq m_0$，它都由其全局截面一般生成。

证明。由于 $\left(X_\eta, \Delta|_{X_\eta}\right)$ 是强 F-正则的，存在一个 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 满足 $p \nmid d$，使得

$$\left(X_\eta, \left(\Delta + \frac{1}{d}E\right)\Big|_{X_\eta}\right)$$

是 F-纯的。由于 B 是丰沛的，且 $D - (K_X + \Delta)$ 是数值有效的，因此存在一个 $c \in \mathbb{Z}_{>0}$，使得 that

- $p \nmid c$,
- $c(K_X + \Delta)$、cB、cD 和 cE 是整数，并且
- $c(B + dD - d(K_X + \Delta))$ 是一个非常丰 Cartier 除子 .

根据 [SW13，推论 6。10], 我们可以找到一个有效卡蒂埃除子

$$G \sim_{\mathbb{Z}} c(B + dD - d(K_X + \Delta))$$

使得

$$\left(U, \Delta' := \Delta|_U + \frac{1}{d}E + \frac{1}{cd}G|_U\right)$$

沿着 X_η 是 F-纯的。因此，我们有

$$\begin{aligned} cd(K_U + \Delta') &= cd(K_U + \Delta|_U) + cE + G|_U \\ &\sim_{\mathbb{Z}} cd(K_U + \Delta|_U) + cE + cB|_U + cdD|_U - cd(K_U + \Delta|_U) \\ &= c(B|_U + dD|_U + E), \end{aligned}$$

因此

$$h_* \mathcal{O}_U(cdm(K_U + \Delta')) \cong h_* \mathcal{O}_U(cm(B|_U + dD|_U + E))$$

对于每个 $m > 0$。由于 $B|_{X_\eta}$ 是丰沛的，且 $D|_{X_\eta}$ 和 $E|_{X_\eta}$ 是数值有效的，（$K_U + \Delta'$）$|_{X_\eta}$ 是丰沛的。因此，该断言由命题 5.1（b）得出。□

定理 5.3。考虑以下簇与态射：

- 设 (X, Δ) 是一个射影对，其中 Δ 是一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-除子，
- 设 $f\colon X \to Y$ 是到一个具有最大阿尔巴内塞维数的正规射影簇的满射态射，且一般纤维 $\left(X_\eta, \Delta|_{X_\eta}\right)$ 是强 F-正则的。
- 设 V 是 Y 的一个开子集，使得
  - $Y \setminus V$ 的余维至少为二，
  - V 是正则的，并且
  - $h := f|_U\colon U \to V$ 是平坦的，其中 $U := f^{-1}(V)$。
- 假设以下条件之一成立：(a) f 是可分的；或 (b) Y 的 Albanese 态射 $a_Y\colon Y \to A_Y$ 在其像上是可分的。

此外，考虑上述簇上的以下除子及其性质：

- 设 D 是 X 上的一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Weil 除子，使得
  - $D - (K_X + \Delta)$ 是一个数值有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子，
  - $D \geq 0$，以及
  - $D|_{X_\eta} = 0$.
- 令 $U_0 := U \setminus \mathrm{Supp}(D)$。

然后 $\mathcal{O}_{U_0}(-h^* K_V|_{U_0})$ 是弱正的。

我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} U_0 & \hookrightarrow & U & \hookrightarrow & X \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & V & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

证明。证明分为多个步骤。每个步骤要么以一个设置开始，在其中我们定义必要的记号；要么以该步骤目标的精确表述开始。在前一种情况下，我们也会在设置之后立即陈述精确目标。

步骤1：设置：令 H 为 V 上的 Cartier 除子，其定义如命题5.1所述。取 B 上的一个丰沛 Cartier 除子 X，使得

- $B =$ (维数 $X + 1$)B' 对于 X上的某个非常丰 Cartier 除子 B'，
- $f_* \mathcal{O}_X(B)$是整体生成的，
- $h^* H \leq B|_U$，并且
- 自然态射

$$f_* \mathcal{O}_X(B) \otimes f_* \mathcal{O}_X(B + N) \to f_* \mathcal{O}_X(2B + N)$$

对于每个满足 $N|_{X_\eta}$ 数值有效的 Cartier 除子 N （位于 X 上），该映射一般满射。

我们可以利用 Keeler 相对 Fujita 消失定理 B 找到这样一个[Kee03，定理 1。5]以及相对 Castelnuovo–Mumford 正则性 [Laz04，例 1.8。24]。注意，如果 B 满足上述条件，那么 lB 对每个 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$也满足。令

$$T := \left\{ t \in \mathbb{Z}_{(p)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{there is a } \lambda_t \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ and a } \mathbb{Z}_{(p)}\text{-Weil divisor } E_t \geq 0 \text{ on } U \\ \text{such that } B|_U + \lambda_t D|_U - th^*K_V \sim_{\mathbb{Z}_{(p)}} E_t \end{array} \right\}.$$

然后 $0 \in T \neq \emptyset$。固定一个 $t \in T$。那么我们有 $\lambda_t \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且

$$0 \leq E_t \sim_{\mathbb{Z}_{(p)}} B|_U + \lambda_t D|_U - th^*K_V.$$

取一个 $\delta \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0,1)$。令 $B_\delta := \delta B + D - (K_X + \Delta)$。则 B_δ 是一个丰沛的$\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子。设 $e_{\delta,t} > 0$ 为一个整数，使得

- $(p^{e_{\delta,t}} - 1)(1-\delta)t$，$(p^{e_{\delta,t}} - 1)(1-\delta)\lambda_t, \in \mathbb{Z}$,
- $(p^{e_{\delta,t}} - 1)(1-\delta)E_t$ 和 $(p^{e_{\delta,t}} - 1)(K_X + \Delta)$ 是整数,
- $(p^{e_{\delta,t}} - 1)B_\delta$ 是卡蒂埃除子，且
- $(p^{e_{\delta,t}} - 1)(1-\delta)(B|_U + \lambda_t D|_U - th^*K_V) \sim_{\mathbb{Z}} (p^{e_{\delta,t}} - 1)(1-\delta)E_t$.

注意到，对于 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，相同的条件也成立，其中 $e_{\delta,t}|e$。根据命题 5.2，我们可以假设存在一个 $d_{\delta,t} \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得

$$h_*\mathcal{O}_U\big((p^e - 1)(B_\delta|_U + d_{\delta,t}D|_U + (1-\delta)E_t)\big) \otimes \mathcal{O}_V(H)$$

对于每个满足 $e_{\delta,t}|e$ 的 $e \in \mathbb{Z}_{>0}$，它都是一般整体生成的。

这一步的目标：我们证明

$$\mathcal{F}_{e,\delta,t} := h_*\mathcal{O}_U\big((1-p^e)(K_U + \Delta|_U) + p^e B|_U + \mu_e D|_U + h^*\left(-\nu_e t K_V + H\right)\big)$$

对于满足 $e_{\delta,t}|e$ 的 $e \gg 0$，它由全局截面一般生成，其中

$$\mu_e := p^e(1 + d_{\delta,t} + \lambda_t) \quad \text{and} \quad \nu_e := (p^e - 1)(1-\delta).$$

注意，$\nu_e t \in \mathbb{Z}$。现在我们有

$$\begin{aligned}
&(1-p^e)(K_U + \Delta|_U) + p^e B|_U + \mu_e D|_U + h^*\left(-\nu_e t K_V + H\right) \\
&\geq (1-p^e)(K_U + \Delta|_U) + p^e B|_U + (p^e - 1)(1 + d_{\delta,t} + (1-\delta)\lambda_t)D|_U \\
&\qquad\qquad + h^*\left(-\nu_e t K_V + H\right) \\
&= B|_U + (p^e - 1)(\delta B|_U + D|_U - (K_U + \Delta|_U)) + (p^e - 1)d_{\delta,t}D|_U \\
&\qquad\qquad + \nu_e(B|_U + \lambda_t D|_U - th^*K_V) + h^*H \\
&\qquad\qquad \text{(note that } p^e = 1 + (p^e - 1)\delta + \nu_e\text{)} \\
&\sim_{\mathbb{Z}} B|_U + (p^e - 1)B_\delta|_U + (p^e - 1)d_{\delta,t}D|_U + \nu_e E_t + h^*H \\
&= B|_U + (p^e - 1)(B_\delta|_U + d_{\delta,t}D|_U + (1-\delta)E_t) + h^*H,
\end{aligned}$$

因此存在单射态射

$$\mathcal{F}'_{e,\delta,t} := h_*\mathcal{O}_U\big(B|_U + (p^e - 1)(B_\delta|_U + d_{\delta,t}D|_U + (1-\delta)E_t) + h^*H)\big) \hookrightarrow \mathcal{F}_{e,\delta,t},$$

其在一般点处同构于 $D|_{X_\eta} = 0$。只需证明 $\mathcal{F}'_{e,\delta,t}$ 是一般生成的整体生成对象。考虑以下态射:

$$\begin{aligned}
&(f_*\mathcal{O}_X(B))|_V \otimes h_*\mathcal{O}_U\big((p^e - 1)(B_\delta|_U + d_{\delta,t}D|_U + (1-\delta)E_t)\big) \otimes \mathcal{O}_V(H) \\
\cong &h_*\mathcal{O}_X(B|_U) \otimes h_*\mathcal{O}_U\big((p^e - 1)(B_\delta|_U + d_{\delta,t}D|_U + (1-\delta)E_t) + h^*H\big) \\
\xrightarrow{\varphi} &h_*\mathcal{O}_U\big(B|_U + (p^e - 1)(B_\delta|_U + d_{\delta,t}D|_U + (1-\delta)E_t) + h^*H\big) = \mathcal{F}'_{e,\delta,t}.
\end{aligned}$$

这里，第一个同构由投影公式得到，而 φ 是自然态射。如上所述，

$$h_*\mathcal{O}_U\big((p^e-1)(B_\delta|_U+d_{\delta,t}D|_U+(1-\delta)E_t)\big)\otimes\mathcal{O}_V(H)$$

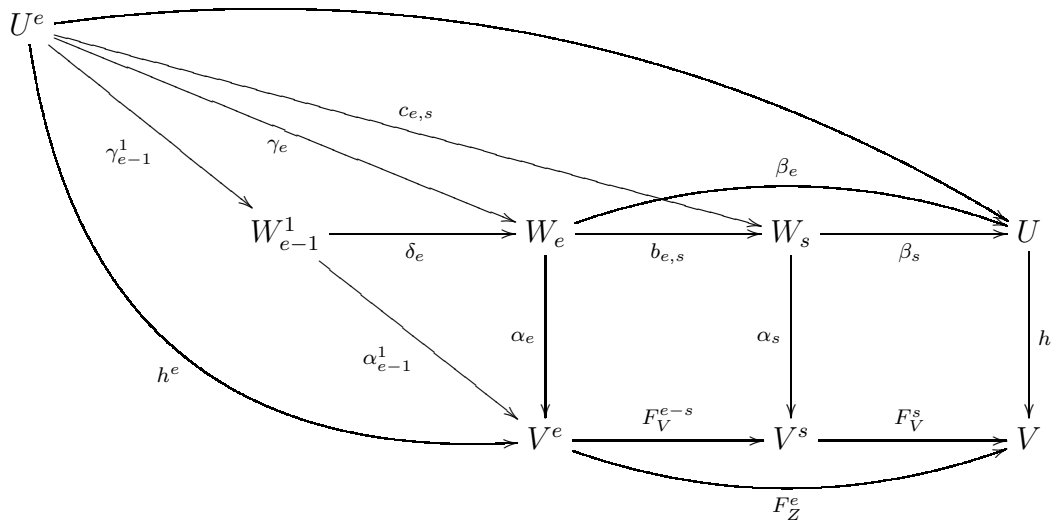
由其全局截面一般生成。此外，通过选择 B，$(f_*\mathcal{O}_X(B))|_V$ 是全局生成的。因此，只需证明 φ 一般满射。现在我们有

$$\begin{aligned}
&(p^e-1)(B_\delta|_U+d_{\delta,t}D|_U+(1-\delta)E_t)+h^*H\\
\sim_{\mathbb{Z}}&(p^e-1)\big(\delta B|_U+D|_U-(K_X+\Delta)|_U+d_{\delta,t}D|_U+(1-\delta)(B|_U+\lambda_tD|_U-th^*K_V)\big)\\
&+h^*H\\
=&(p^e-1)(B+D-(K_X+\Delta))|_U+(p^e-1)(d_{\delta,t}+(1-\delta)\lambda_t)D|_U\\
&+h^*(-(p^e-1)(1-\delta)tK_V+H).
\end{aligned}$$

由于 $D-(K_X+\Delta)$ 数值有效且 $D|_{X_\eta}=0$，由 B 的选择可知 φ 一般点处满射性成立。

将 $e_{\delta,t}$ 替换为其倍数后，我们可以假设，对于每个满足 $e_{\delta,t}|e$ 的整数 $e>0$，层 $\mathcal{F}_{e,\delta,t}$ 都由其全局截面一般生成。

步骤 2. 设置：令 W_e 为 $U\times_V V^e$ 的约化子概形的正规化，并为以下诱导态射引入记号：



令 $W_0:=U$。令 r 为使 $\alpha_r\colon W_r\to V^r$ 可分的最小非负整数。

本步骤的目标：我们证明 $\gamma_r^*K_{W_r/U}\le 0$。注意，当 f 是可分的（情形（a））时，则 $r=0$ 且 $\gamma_r^*K_{W_r/U}=0$。因此，我们可以假设 $a_Y\colon Y\to A_Y$在其像上是可分的（情形（b））。令

$$\mathcal{H}^e=\mathrm{imSat}\left(\alpha_{e-1}^{1,*}\Omega_{V^e}\to\Omega_{W^1_{e-1}}\right)$$

其中 imSat 表示饱和像。于是，由引理 4.2以及高度 1 纯不可分态射的典范丛公式，可得

$$\begin{aligned}\delta_e^* K_{W_e/W_{e-1}} &= K_{W^1_{e-1}/W_{e-1}} + (p-1)\det\left(\Omega_{W^1_{e-1}}\Big/\mathcal{H}^e\right)\\ &= (1-p)K_{W^1_{e-1}} + (p-1)K_{W^1_{e-1}} + (1-p)\det\mathcal{H}^e = (1-p)\det\mathcal{H}^e\end{aligned}$$

根据引理4.2。因此，我们得到

$$\gamma_r^* K_{W_r/U} = \sum_{s=1}^{r} F_U^{r-s,*}\gamma_{s-1}^{1,*}(1-p)\det\mathcal{H}^s.$$

由于 $Y \to a_Y(Y)$ 是可分的，同态

$$d(a_Y) : \mathcal{O}_Y^{\oplus \dim A} \cong a_Y^*\Omega_A \to \Omega_Y$$

是一般满射。因此， $\mathcal{H}^e$ 是一般整体生成的，所以 $\det\ \mathcal{H}^e \geq 0$，进而 $\gamma_r^* K_{W_r/U} \leq 0$。

步骤3。本步骤的目标：我们证明集合 T （在步骤1 中定义）没有上界。对于每个 $e \geq r$，概形 $W_r \times_{V^r} V^e$ 由 r的选取可知是约化的，因此我们有 $K_{W_e} \leq d_e^* K_{W_r \times_{V^r} V^e}$，其中 $d_e\colon\ W_e \to W_r \times_{V^r} V^e$ 是诱导态射。于是

$$\begin{aligned}K_{W_e/U} \leq d_e^* K_{W_r\times_{V^r}V^e/U} &= d_e^* K_{W_r\times_{V^r}V^e/W_r} + b_{e,r}^* K_{W_r/U}\\ &= \alpha_e^* K_{V^e/V^r} + b_{e,r}^* K_{W_r/U} = \alpha_e^*(1-p^{e-r})K_V + b_{e,r}^* K_{W_r/U},\end{aligned}$$

因此，根据步骤2，我们有

$$(*)\qquad \gamma_e^* K_{W_e/U} \leq h^{e,*}(1-p^{e-r})K_V + F_U^{e-r,*}\gamma_r^* K_{W_r/U} \leq h^{e,*}(1-p^{e-r})K_V.$$

固定一个 $t \in T$、一个 $\delta \in \mathbb{Z}_{(p)} \cap (0,1)$ 以及一个满足 $e_{\delta,t} | e$ 的整数 $e \gg r$。将 $\mathcal{H}om((?)\ \mathcal{O}_{W_e})$应用于以下映射的复合：

$$\mathcal{O}_{W_e} \to \gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e} \hookrightarrow \gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}((1-p^e)\Delta|_U),$$

我们得到一般满射态射

$$\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}((1-p^e)\Delta|_U + K_{U^e/W_e}) \to \mathcal{O}_{W_e}$$

根据 Grothendieck 对偶。结合这一点与 $\gamma_e^\sharp : \mathcal{O}_{W_e} \to \gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}$，我们得到非零同态

$$\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}((1-p^e)\Delta|_U + K_{U^e/W_e}) \to \gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}.$$

与 $\mathcal{O}_{W_e}(K_{W_e/U})$ 作反身张量积，得到

$$\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}((1-p^e)(K_U+\Delta|_U)) \to \gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}(\gamma_e^* K_{W_e/U}) \to \gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}(h^{e,*}(1-p^{e-r})K_Z),$$

其中，第二个同态用到了 $(*)$。令 u_e 表示上述同态的复合。设

$$M_e := \beta_e^*(B|_U + (1+d_{\delta,t}+\lambda_t)D|_U) + \alpha_e^*(t(1-p^e)(1-\delta)K_V + H).$$

将函子 $\alpha_{e,*}\left((?)\otimes\mathcal{O}_{W_e}(M_e)\right)^{**}$ 应用于 u_e，我们得到同态

$$v_e : h_*^e\mathcal{O}_{U^e}\left((1-p^e)(K_U+\Delta|_U) + \gamma_e^* M_e\right) \to h_*^e\mathcal{O}_{U^e}\left(h^{e,*}(1-p^{e-r})K_Z + \gamma_e^* M_e\right)$$

根据投影公式。我们将在 $v_e \neq 0$ 第 4 步中证明。我们假设$v_e \neq 0$。由于

$$\begin{aligned}
&(1-p^e)(K_U+\Delta|_U)+\gamma_e^* M_e\\
&=(1-p^e)(K_U+\Delta|_U)+p^e(B|_U+(1+d_{\delta,t}+\lambda_t)D|_U)\\
&\qquad\qquad +h^{e,*}\left(t(1-p^e)(1-\delta)K_V+H\right)\\
&=(1-p^e)(K_U+\Delta|_U)+p^eB|_U+\mu_eD|_U+h^{e,*}\left(-\nu_e tK_V+H\right),
\end{aligned}$$

我们看到， v_e 的源等于 $\mathcal{F}_{e,\ \delta,\ t}$，根据步骤 1，其一般点处整体生成，因此 $\mathrm{Im}(v_e) \neq 0$ 也如此。因此，我们得到

$$H^0\left(U^e, h^{e,*}(1-p^{e-r})K_Z+\gamma_e^*M_e\right)\neq 0,$$

因此，我们找到一个有效卡蒂埃除子 $E\sim_{\mathbb{Z}} h^{e,\ *}(1-p^{e-r})K_Z+\gamma_e^*M_e$。由于 $h^*H\leq B|_U$ 根据 B的选取，我们有

$$\begin{aligned}
0\leq E&\sim_{\mathbb{Z}} h^{e,*}(1-p^{e-r})K_Z+\gamma_e^*M_e\\
&=p^e(B|_U+(1+d_{\delta,t}+\lambda_t)D|_U)+h^{e,*}\left((t(1-p^e)(1-\delta)+1-p^{e-r})K_V+H\right)\\
&\leq (p^e+1)B|_U+\mu_eD|_U+h^{e,*}\left((t(1-p^e)(1-\delta)+1-p^{e-r})K_V\right),
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$B|_U+\left\lceil\frac{\mu_e}{p^e+1}\right\rceil D|_U+\frac{t(p^e-1)(1-\delta)+1-p^{e-r}}{p^e+1}h^*K_V\sim_{\mathbb{Z}_{(p)}} E'\geq 0$$

对于一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃除子 $E'\geq 0$，这意味着

$$T\ni\frac{t(p^e-1)(1-\delta)+1-p^{e-r}}{p^e+1}\xrightarrow{e\to+\infty,\ \delta\to 0}t+p^{-r}.$$

因此， T 不能有上界。

步骤4。本步骤的目标：我们证明 $v_e\neq 0$ 当 $e\gg 0$。由于 $D|_{X_\eta}=0$，我们可以忽略 D，因此不妨设 $D=0$。注意， $v_e\neq 0$ 当且仅当 $v_e\neq 0$在泛点处成立，因为目标是无挠的。基于同样的理由，我们假设 $K_V=H=0$。于是 $M_e=\beta_e^*B|_U$。现在， v_e是态射 α_e的推前

$$u'_e:\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}((1-p^e)(K_U+\Delta|_U)+p^eB|_U)\to\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{U^e}(p^eB|_U).$$

我们证明 $H^0(u'_e)$ 非零，这意味着 $v_e=\alpha_{e,*}u'_e\neq 0$。为证明这一点，我们证明 u'_e 的源是整体生成的。注意，根据构造， $u'_e\neq 0$ 。我们首先考虑 $U=X$ 的情形（即 $V=Y$）。回顾，对于 X 上的非常丰 Cartier 除子 B'， $B=(\dim X+1)B'$。由于 γ_e 是有限的，对于每个 $1\leq i\leq \dim X$，我们有

$$\begin{aligned}
&H^i\left(W_e,\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{X^e}((1-p^e)(K_X+\Delta)+p^eB)\otimes\mathcal{O}_{W_e}(-i\beta_e^*B')\right)\\
\cong&H^i\left(W_e,\gamma_{e,*}\mathcal{O}_{X^e}((1-p^e)(K_X+\Delta)+p^e(\dim X+1-i)B')\right)\\
\cong&H^i\left(X_e,\mathcal{O}_{X^e}((1-p^e)(K_X+\Delta)+p^e(\dim X+1-i)B')\right)\\
=&0
\end{aligned}$$

根据藤田消失定理，若 $e\gg 0$，则我们的结论由 Castelnuovo– Mumford 正则性 [Laz04，定理 1.8。5]。当 $U\neq X$ 时，我们可以证明该结论

通过采用相同的论证，并将 W_e 替换为 $X \times_Y Y^e$ 的约化部分的正规化（它是射影的），即可证明。

步骤 5。本步骤的目标：我们完成定理的证明。令

$$T_0 := \{t \in \mathbb{Q} | -h^*K_V|_{U_0} + tB|_{U_0} \sim_{\mathbb{Q}} E \text{ for a } \mathbb{Q}\text{-Weil divisor } E \geq 0 \text{ on } U_0.\}$$

那么，该断言等价于 $\mathbb{Q}_{>0} \subseteq T_0$。根据步骤3，容易验证 $\mathbb{Z}_{(p)} \cap [0, \infty) \subseteq T$。根据定义，若 $0 < t \in T$，则 $t^{-1} \in T_0$。因此，我们看到 $\mathbb{Q}_{>0} \subseteq T_0$。

□

6. Proof of Theorem 1.3

接下来，我们证明本文的主定理。

定理 1.3 的证明。首先，我们证明 (a)。令 Y 为 $a(X)$ 的正规化，并令 $f\colon X \to Y$ 为诱导态射。设 $D = 0$。令 V、U、$h\colon U \to V$ 如定理 5.3 中所述。由定理 5.3 可知，$\mathcal{O}_U(-h^*K_V)$ 是弱正的。根据 EG19，引理2.4 (2)，ω_V^{-1} 是弱正的，这等价于 ω_Y^* 是弱正的。因此，命题 3.2 告诉我们，Y 是一个阿贝尔簇，即 a 是满射。

我们证明 (c)。令 $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} A$ 为 a 的 Stein 分解。令 Y 为 A 在 $K(Y')/K(A)$ 的可分闭包中的正规化。令 D、V、U 和 $h\colon U \to V$ 如 (a) 的证明中所述。由 (a) 的证明中相同的论证可知，Y 是一个阿贝尔簇，因此 $Y = A$ 和 g 是纯不可分的。通过与 (a) 的证明类似的论证，我们可以证明 (d)。

接下来，我们证明（b）。假设存在一个素因子 E 上 X，使得 $a(\mathrm{Supp}(E))$ 的余维至少为二。令 A' 为 a 扁平化的正规化。令 X' 为 $X \times_A A'$ 主分支的正规化。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle a'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ A' & \xrightarrow[\tau]{} & A. \end{array}$$

由于 A光滑且 $K_A = 0$，我们有 $K_{A'} \geq 0$ 和 $a'^*K_{A'} \geq \sigma_*^{-1}E$。注意，由于 a' 等维，A' 上的 Weil 除子的 a' 拉回可以定义。因此 $\sigma_* a'^* K_{A'} \geq E$。我们证明 $\mathcal{O}_X(-\sigma_* a'^* K_{A'})$ 弱正。若此成立，则 $\mathcal{O}_X(-E)$ 也弱正，这意味着根据 [Eji19c，引理 4.4]，$E = 0$，与矛盾。由于 $K_X + \Delta$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃，且 σ 在 a'的一般纤维 X'_η 上同构，因此存在有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Weil 除子 Δ' 和 D，它们位于 X' 上，使得

$$K_{X'} + \Delta' = \sigma^*(K_X + \Delta) + D,$$

满足 D 为 σ-例外，且 $D|_{X'_\eta} = 0$。那么

- $\left(X'_\eta, \Delta'|_{X'_\eta}\right)$ is strongly F-regular, and
- $D - (K_{X'} + \Delta') = -\sigma^*(K_X + \Delta)$ is a nef $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier divisor.

设 V' 是 A' 的一个正则开子集，使得 $\operatorname{codim}(A' \setminus V') \geq 2$，且 $h' := a'|_{U'} : U' \to V'$ 是平坦的，其中 $U' := a'^{-1}(V')$。令 $U'_0 := U' \setminus \operatorname{Supp}(D)$。我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} U'_0 & \hookrightarrow & U' & \hookrightarrow & X' \\ & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle a'} \\ & & V' & \hookrightarrow & A' \end{array}$$

由定理 5.3，我们得到 $\mathcal{O}_{U'_0}\left(-h'^* K_{V'}|_{U'_0}\right)$ 是弱正的。由于 a'是等维的，且 D 是 σ-异常除子，因此我们看到 $\sigma(X' \setminus U'_0)$ 的余维至少为二。令 $U = X \setminus \sigma(X' \setminus U'_0)$。那么 $U \subseteq X$ 是一个开子集，使得 $U_0^\flat := \sigma^{-1} U \subseteq U'_0$，$\operatorname{codim}(X \setminus U) \geq 2$并且 $\sigma^\flat := \sigma|_{U_0^\flat} : U_0^\flat \to U$ 是一个同构。特别地，$\mathcal{O}_{U_0^\flat}\left(-h'^* K_{V'}|_{U_0^\flat}\right)$是弱正的，因此

$$\sigma^\flat_* \mathcal{O}_{U_0^\flat}\left(-h'^* K_{V'}|_{U_0^\flat}\right) \cong \mathcal{O}_U\left(-\sigma^\flat_* h'^* K_{V'}|_{U_0^\flat}\right) \cong \mathcal{O}_X\left(-\sigma_* a'^* K_{A'}\right)|_U$$

也具有弱正性。这意味着 $\mathcal{O}_X(-\sigma_* a'^* K_{A'})$ 具有弱正性，因为弱正性可以在补集余维数至少为二的任意开子集上判定。□

注 6.1. 在假设对 $(X_{\overline{\eta}}, \Delta|_{X_{\overline{\eta}}})$ 是 F-纯的条件下，定理 1.3 已经得到证明，其中 $X_{\overline{\eta}}$ 是 $X \to \operatorname{Im}(a)$ 的几何一般纤维（[Eji19c，定理 1.1]），但这一假设并不总是成立。例如，若X 是准双曲椭圆曲面（参见 [BM76，§2]），则 $-K_X$ 是数值有效的，且 a 构成一个代数纤维空间，但 $X_{\overline{\eta}}$ 有一个尖点，因而不是 F-纯的（参见 [GW77，定理 1.1]）

此外，$X_{\overline{\eta}}$ 甚至可以是非约化的，其示例可见于[PZ19第 14]节。

推论 *1.2* 的证明。 断言（a）直接由定理 1.1 得出，注意到 $2(\dim A) = b_1$ [PZ19，命题 2。6]。

对于断言（b），若 X 是阿贝尔簇，则 Albanese 态射是恒等映射，因此 $2(\dim X) = 2(\dim A) = b_1$。因此，只需证明反向结论。为此，假设 $b_1 = 2 \dim X$。再次利用 $2(\dim A) = b_1$，可得 $\dim X = \dim A$，于是 $a : X \to A$ 由定理 1.1 可知是一般有限的。然而，此时由定理 3.2 可得 X 是阿贝尔簇。□

推论 *1.4* 的证明。 设 $X \xrightarrow{f} Y \to A$ 是 a的 Stein 分解。若 $\dim Y = 0$，则 $Y = A$，故结论成立。若 $\dim Y = 1$，则 $f : X \to Y$ 是可分的，故由定理 1.3可得所述结论。若 $\dim Y = 2$，则 X 具有最大阿尔巴内塞维数，因此命题 3.2 完成证明。□

推论*1.5*的证明。 令 $X \xrightarrow{f} Y \to A$ 为 a的 Stein 分解。由于$p \geq 5$ 且 K_X 数值平凡，根据 [PW22，推论 1.8]，，我们可知 f 的一般纤维是光滑的。特别地，f 是可分的。因此，结论由定理 1.3得出。□

7. Algebraic fiber spaces over elliptic curves

定理 7.1 ([PZ19，定理 3.1])。 设 (X, Δ) 是一个满足以下条件的射影对：$K_X + \Delta$ 是 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier，设 $f: X \to Y$ 是到正规射影簇 Y上的满射态射，并设令 L 是一个定义在 $\mathbb{Q}$上的 -Cartier 除子 X。假设

- (X, Δ) 是 F-纯的，
- L 数值有效且 $K_X + \Delta + L$ 是 f-数值有效，并且
- Y 具有最大阿尔巴内塞维数。

那么 $K_X + \Delta + L$ 是伪有效的。此外，若 $\dim Y = 1$，则 $K_X + \Delta + L$ 是数值有效的。

证明。设 A是一个丰沛的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃除子，取在 X上。我们证明 $K_X + \Delta + L + A$是伪有效的。由于 $L + A$ 是丰沛的，根据[SW13，推论 6，10], 存在一个有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-除子 $\Gamma \sim_{\mathbb{Z}_{(p)}} L + A$，使得（$X$， $\Delta + \Gamma$）是 F-纯的。令 $\mathcal{F} := f_*\mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta + \Gamma))$，其中整数 m 充分大且充分可整除。由于

$$K_X + \Delta + \Gamma \equiv K_X + \Delta + L + A$$

是 f-丰沛的，我们可以应用命题5.1。（a）并得到 $\mathbb{B}_-(\mathcal{F}) \neq Y$。令 H为 Y上的一个丰沛 Cartier 除子。我们采用[Eji19a，§4]中的记号。于是有如下结果：

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_-(K_X + \Delta + \Gamma) =& \mathbb{B}_-(m(K_X + \Delta + \Gamma)) \\
\subseteq& \mathbb{B}_-^{f^*H}(m(K_X + \Delta + \Gamma)) && \text{by [Eji19a, Corollary 4.2]} \\
\subseteq& \mathbb{B}_-^{f^*H}(f^*\mathcal{F}) && \text{by } f^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta + \Gamma)) \\
\subseteq& f^{-1}(\mathbb{B}_-^H(\mathcal{F})) \neq X.
\end{aligned}$$

因此， $K_X + \Delta + \Gamma$ 是伪有效的。

接下来，我们证明当 $\dim Y = 1$ 时， $K_X + \Delta + \Gamma$ 是数值有效的。设 C 是 X 中的一条射影曲线。由于 $K_X + \Delta + \Gamma$ 是 f-丰的，我们只需考虑 $f(C) = Y$ 的情形。在此情形下，根据上述论证， C 与 $X \setminus B_-(K_X + \Delta + \Gamma)$ 相交，因此 $(K_X + \Delta + \Gamma \cdot C) \geq 0$。所以， $K_X + \Delta + \Gamma$ 是数值有效的，这意味着 $K_X + \Delta + L$ 也是如此。□

记号 7.2。设 (X, Δ) 是一个维数为 $d + 1$ 的射影对，使得 t

- (X, Δ) 是强 F-正则的，并且
- $-(K_X + \Delta)$ 是一个数值有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子。

˜设 $f: X \to T$ 是到椭圆曲线 T 的满射态射，设 L 是 X 上的一个非常丰 Cartier 除子，使得对每个 $i > 0$ 都有 $R^i f_*\mathcal{O}_X(\tilde{L}) = 0$，并设 G 是 f 的一般纤维。令 $L := n\tilde{L} - mG$，其中 $n := (d + 1)L^d \cdot G$ 且 $m := \tilde{L}^{d+1}$。

定理 7.3 （参见 [PZ19，定理 5。4]）。 在记号 7.2， L 是 ne f.

证明。 设 A 是一个丰沛的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子，定义在 T上。只需证明$L + f^*A$ 是数值有效的。根据 [PZ19中定理 5 的证明4], ，存在一个有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子 Γ 定义在 X 上，使得 $\Gamma \sim_{\mathbb{Z}_{(p)}} L + f^*A$。取一个 $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{(p)}$，使得（$X$， $\Delta + \varepsilon\Gamma$）是 F-纯的。由于

$$\varepsilon(L + f^*A) \equiv \varepsilon\Gamma \equiv K_X + (\Delta + \varepsilon\Gamma) + (-(K_X + \Delta))$$

且 $-(K_X+\Delta)$ 是数值有效的，由定理 7.1 可知 $L+f^*A$ 是数值有效的。 □

定理 7.4 （参见 [PZ19，定理 5。8]）。 在记号 7.2的情形下，对任意整数 $m \geq 1$，$(f_*\mathcal{O}_X(mL))^*$ 是数值有效的。

证明。假设 $(f_*\mathcal{O}_X(mL))^*$ 不是数值有效的。由椭圆曲线上的向量丛分类可知 [Oda71]，$f_*\mathcal{O}_X(mL)$ 有一个不可分解向量丛 $\mathcal{E}$，其次数 $\mathcal{E} > 0$ 是一个直和项。取 $\pi\colon T' \to T$ 为一个次数大于秩 $\mathcal{E}$的 ´étale 覆盖。将 $f\colon X \to T$替换为 $f_{T'}\colon X'_T \to T'$后，我们可以假设次数 $\mathcal{E} >$秩 $\mathcal{E}$。注意，由于 π是平坦的，$\pi^* f_*\mathcal{O}_X(L) \cong (f_{T'})_*\mathcal{O}_{X_{T'}}(L_{T'})$。取一个闭点 $t \in T$。那么 $\deg \mathcal{E}(-t) = \deg \mathcal{E} - \operatorname{rank} \mathcal{E} > 0$，因此我们有

$$\begin{aligned} 0 \neq H^0(T, \mathcal{E}(-t)) &\subseteq H^0\big(T, (f_*\mathcal{O}_X(mL))(-t)\big) \\ &= H^0(T, f_*\mathcal{O}_X(mL-G)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(mL-G)), \end{aligned}$$

其中，G 是 f 在 t上的一个纤维。因此，我们可以找到一个 $\Gamma \in |mL-G|$。取 $\varepsilon \in \mathbb{Z}_{(p)}$，使得（$X$，$\Delta+\varepsilon\Gamma$）是强 F-正则的。由于 Γ 是 f-丰沛的，并且

$$\varepsilon\Gamma \equiv K_X + (\Delta+\varepsilon\Gamma) + (-(K_X+\Delta)),$$

我们可以应用定理 7.1 并得到 Γ 是数值有效的。然而，我们有

$$\Gamma^{d+1} = (mL-G)^{d+1} = -m^d L^d \cdot G < 0,$$

这就产生了矛盾。因此，$(f_*\mathcal{O}_X(mL))^*$ 是数值有效的。 □

回顾一下，若向量丛 $\mathcal{E}$ 满足 $\mathcal{E}$ 且 $\mathcal{E}^*$ 是数值有效的，则称其为数值平坦。

定理 7.5 (参见 [PZ19，定理 5.10])。 在记号 7.2 所描述的情形下，存在一个整数 $m_0 \geq 1$ 使得 $f_*\mathcal{O}_X(mL)$ 对每个 $m \geq m_0$ 都是数值平坦的。

证明。由于 (X,Δ) 是 F-纯的，且 L是 f-丰沛的，因此存在一个整数 $m_0 \geq 1$使得

$$S^0 f_*(\sigma(X,\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(mL)) = f_*\mathcal{O}_X(mL)$$

对于每个 $m \geq m_0$（关于 $S^0 f_*(\sigma(X,\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(mL))$ 的定义，见 [HX15，定义 2.14]）。固定一个整数 $m \geq m_0$。令 $\mathcal{E} := f_*\mathcal{O}_X(mL)$。我们证明 $\mathcal{E}$ 是数值有效的。取一个满足 $p \nmid n$的整数 $n \geq 1$。令 $\pi\colon T \to T$ 为将 t映射到 nt的态射。对于每个整数 $l \geq 1$，令 $f_l\colon X_l \to T$ 表示由 $\pi^l\colon T \to T$对 $f\colon X \to T$ 作基变换得到的态射。由于 π 是 ´étale 的，我们可以轻易验证

$$\begin{aligned} \pi^{l*}\mathcal{E} &= \pi^{l*} S^0 f_*(\sigma(X,\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(mL)) \\ &\cong S^0 f_{l*}(\sigma(X_l,\Delta_l) \otimes \mathcal{O}_{X_l}(mL_l)), \end{aligned}$$

其中，Δ_l 和 L_l 分别是 Δ 和 L 到 X_l的拉回。设 T 上有一个丰线丛 $\mathcal{A}$，且 $|\mathcal{A}|$ 自由。由于 $mL_l - (K_{X_l}+\Delta_l)$是数值有效且 f_l-丰沛的，其中Δ_l 是 Δ 到 X_l的拉回，根据[Eji22，定理 1.2]，可知 $\pi^{l*}\mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^2$ 整体生成。假设 $\mathcal{E}$ 不是数值有效的。根据椭圆曲线上的向量丛分类，$\mathcal{E}$ 有一个次数为负的直和项 $\mathcal{G}$。若 $l \gg 0$，则 $\pi^{l*}\mathcal{G} \otimes \mathcal{A}^2$ 的次数为负，这与 $\pi^{l*}\mathcal{E} \otimes \mathcal{A}^2$整体生成相矛盾。□

命题 7.6。 在记号 7.2 的情形下，还假设 $k=\overline{\mathbb{F}}_p$。那么，存在一个基变换 $T'\to T$，来自椭圆曲线 T'，以及一个关于 T' 的带极化对同构：

$$(X,\Delta;L)\times_T T'\cong (F,\Delta|_F;L|_F)\times_k T',$$

其中 F 是 f的任意纤维。注意，在此同构中的除子（基变换之前的 Δ除外）都是 $\mathbb{Z}_p$-AC ($\mathbb{Z}_p$-几乎卡蒂埃) 除子，其含义见[Har94]。

证明。 设 L 如记号 7.2中所述。则 $f_*\mathcal{O}_X(mL)$ 对每个$m\gg 0$都是数值平坦的。不妨设 $f_*\mathcal{O}_X(L)$ 也具有此性质，以 L 替换 mL。根据椭圆曲线上的向量丛分类 [Oda71], ，我们得到

$$f_*\mathcal{O}_X(L)\cong\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{E}_{r_i,0}\otimes\mathcal{L}_i,$$

其中每个 $\mathcal{E}_{r_i,\,0}$ 都是秩为 r_i 、具有非零全局截面的不可约向量丛，而每个 $\mathcal{L}_i$ 都是次数为零的线丛。由于 $k=\overline{\mathbb{F}_p}$，每个 $\mathcal{L}_i$ 都是挠线丛，因此存在一个有限态射 $\pi\colon T'\to T$，其源自椭圆曲线T'，使得

$$f_{T'*}\mathcal{O}_{X_{T'}}(L_{T'})\cong\pi^*f_*\mathcal{O}_X(L)\cong\bigoplus\mathcal{O}_{T'}.$$

那么乘法映射

$$\bigoplus\mathcal{O}_{T'}\cong S^m(f_{T'*}\mathcal{O}_{X_{T'}}(L_{T'}))\twoheadrightarrow f_{T'*}\mathcal{O}_{X_{T'}}(mL_{T'})$$

表明 $f_{T'*}\mathcal{O}_{X_{T'}}(mL_{T'})$ 是整体生成的。结合 $f_{T'*}\mathcal{O}_{X_{T'}}(mL_{T'})$ 的数值平坦性，可以很容易看出它也是一个平凡向量丛。因此，相对截面环 $\bigoplus_{m\geq 0}f_{T'*}\mathcal{O}_{X_{T'}}(mL)$ 来自 Spec k，这意味着态射 $f_{T'}\colon X_{T'}\to T'$ 分裂，即 $X_{T'}\cong G\times_k T'$，其中 G 是 f 的一个纤维。令 $\Delta_{T'}$ 为 Δ 在 $G\times_k T'$ 上的拉回。注意，由于 G 满足 S_2 和 G_1，且 $\pi_X\colon G\times_k T'\to X$ 是平坦的，我们可以将 $\Delta_{T'}$ 定义为一个有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-AC 除子。我们证明 $\Delta_{T'}=\mathrm{pr}_1^*(\Delta|_G)$。由于

$$\pi_X^*K_X=\pi_X^*K_{X/T}\sim K_{G\times_k T'/T'},$$

我们有 $-\pi_X^*(K_X+\Delta)\sim -(K_{G\times_k T'/T'}+\Delta_{T'})$ 是数值有效的，因此结论由引理7.7得出。 □

引理 7.7 (参见 [PZ19，引理 8。4])。 设 G 是满足 S_2 和G_1的射影簇。设 T 是正规射影簇。设 Δ 是一个有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-AC 除子，定义在$G\times_k T$上。假设 $-(K_{G\times_k T/T}+\Delta)$ 是数值有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃除子。那么，对于闭点 $\Delta=\mathrm{pr}_1^*(\Delta|_{G\times_k t})$ $t\in T$。

证明。令 $h\colon G\times_k T\to G$ 表示第一投影 pr_1。将 G 的射影性放宽为拟射影性，并将数值有效性假设替换为 h-数值有效性后，我们可以将 G 缩小到其 Gorenstein轨迹。换言之，我们可以假设G 是 Gorenstein 的。于是 $K_{G\times_k T/T}\sim h^*K_G$ 是 Cartier 除子，且为 h-数值有效。根据假设， $-h^*K_G-\Delta$ 是一个 h-数值有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子，因此 $-\Delta$也如此。因此，对于任意被 h收缩的射影曲线 $C\subseteq G\times_k T$，若 C 与 Supp(Δ) 相交，则 $C\subseteq$ Supp(Δ)。这意味着 h^{-1}(h(Supp(Δ))) =Supp(Δ)。由此结论成立。□

定理 *1.6* 的证明。由于 $a(X)$ 是一条曲线， $a\colon X \to A$ 的 Stein 分解的第一部分是可分的，因此定理 1.3 推出 $a\colon X \to A$ 构成一个代数纤维空间，且 $\dim A = 1$。令 $T := A$。情形（b）已在命题 7.6 中证明。因此，我们只需证明所有纤维都同构，并且可以假设$-(K_X + \Delta)$ 是半丰沛的。取一点 $Q \in T$、一个有限生成的 $\mathbb{F}_p$ 代数$A \subseteq k$ 以及模型

$$(X_A, \Delta_A) \xrightarrow{f_A} T_A \overset{\sigma_A}{\longrightarrow} \operatorname{Spec} A$$

$f\colon X \to T \ni Q$ 在 A上。也就是说，$(f_A)_k = f$、$(\Delta_A)_k = \Delta$ 和$(\sigma_A)_k$ 对应于Q。我们还假设 X_A 上存在一个非常丰沛线丛 L_A ，使得$(L_A)_k = L$，并且还假设

- f_A 是平坦的,
- $\operatorname{Spec} A$ 是正则的
- f_A 的所有纤维，因此 X_A 也是正规的,
- $K_{X_A} + \Delta_A$ 是 $\mathbb{Z}_p$-卡蒂埃,
- (F, Δ_F) 对 f_A 的所有纤维 F 都是强 F-正则的，其中 $\Delta_F = \Delta_A|_F$（这一限制是有意义的，因为所有纤维都是正规的），并且
- $-K_F - \Delta_F$ 对 f_A 的所有纤维 F 都是半丰沛的。

由于上述条件都是在一般纤维上成立的开性质（因为它们在 k上成立），因此我们能够得到这样的一个模型。记 Q_A 为 σ_A的像，它是 $T_A \to \operatorname{Spec} A$的一个截面，并令 $F_A = (f_A)^{-1}Q_A$。于是，我们将Δ_{F_A} 和 L_{F_A}分别记为在 F_A上的相应限制。现在考虑以下 Isom 概形[PZ19，第 7 节，命题 7。8],

$$I = \operatorname{Isom}_{T_A}\Big(\big(F_A, \Delta_{F_A}; L_{F_A}\big) \times_{\sigma,A} T_A, \big(X_A, \Delta_A; L_A\big)\Big).$$

根据命题 7.6 以及 Isom 的函子性 [PZ19，命题 7.8.(1)]， I 在 T_R 对任意 $R \in T_A(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 都是满射。因此，它一般而言也是满射。再次利用 Isom 的函子性 [PZ19，命题 7.8.(1)], 我们便得到定理的结论。□

8. Case when anti-canonical divisor is ample

定理 1.8 的证明。我们首先证明情形 (a)。设 $X \xrightarrow{f} Y \to A$ 是 Albanese 态射 a 的 Stein 分解： $X \to A$ of X。设 L 是 Y 上的一个丰沛 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子，使得 $-(K_X + \Delta) - f^*L$ 是丰沛的。根据 [SW13，推论 6.10], ，存在一个有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-Cartier 除子 $D \sim_{\mathbb{Z}_{(p)}} -(K_X + \Delta) - f^*L$，使得 $(X, \Delta + D)$ 是 F-纯的。由命题 5.1，我们得到

$$f_*\mathcal{O}_X(m(K_X + \Delta + D)) \otimes \mathcal{O}_Y(H) \cong f_*\mathcal{O}_X(-mf^*L) \otimes \mathcal{O}_Y(H) \cong \mathcal{O}_Y(H - mL)$$

对每个 m 足够大且可整除时都是整体生成的，其中 H 按照命题 5.1 中的方式选取。因此， $-L$ 是伪有效的，这意味着 $\dim\ Y = 0$，从而 $\dim A = 0$。

接下来，我们证明情形（b）。在这种情形下，我们可以找到一个有效的 $\mathbb{Z}_{(p)}$-卡蒂埃除子，使得 X满足X， $\Delta + E$）是 F-纯的，且 $-(K_X + \Delta + E)$ 是丰沛的。因此，结论由情形（a）得出。□

References

[Bau23] Jefferson Baudin. 关于 Frobenius 稳定 Kodaira 维数为零的簇的 Albanese 态射。手稿，2023年。[Bea83] Arnaud Beauville. 第一陈类为零的 Kähler 簇。J. Differential Geom., 18(4):755–782 (1984), 1983年。[BM76] Enrico Bombieri and David Mumford. 特征 p 下曲面的 Enriques 分类，III. Invent. Math., 35:197–232, 1976年12月。[Bog74] F. A. Bogomolov. 典范类平凡的 Kähler 流形的分解。Mat. Sb. (N.S.), 93(135):573–575, 630, 1974年。[Cao15] Junyan Cao. 曲面上的代数纤维空间的 Kodaira 维数。2015年。在线可查 arXiv:1511.07048。[Cao16] Junyan Cao. 反典范丛数值有效的射影流形的 Albanese 映射。´在线可查 arXiv:1612.05921，即将在 Ann. Sci. École Norm. Sup. 发表，2016年。[CH01] Jungkai A. Chen and Christopher D. Hacon. 阿贝尔簇的刻画。Invent. Math., 143(2):435–447, 2001年。[CH17] Junyan Cao and Andreas Høring. 反典范丛数值有效的射影流形的分解定理。arXiv 预印本 arXiv:1706.08814，即将在 J. Algebraic Geom. 发表，2017年。[CPZ03] F. Campana, T. Peternell, and Qi Zhang. 紧 Kähler 流形的 Albanese 映射。Proc. Amer. Math. Soc., 131(2):549–553, 2003年。[Dem15] Jean-Pierre Demailly. 反典范丛数值有效的紧 Kähler 流形的结构定理。载于 Complex analysis and geometry, Springer Proc. Math. Stat. 第144卷，第119–133页。Springer, Tokyo, 2015年。[DPS93] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Ricci 类数值有效的 Kähler 流形。Compositio Math., 89(2):217–240, 1993年。[Dru21] St´ephane Druel. 奇异空间上典范类数值平凡的余维 1 叶状结构。Duke Math. J., 170(1):95–203, 2021年。[EG19] Sho Ejiri and Yoshinori Gongyo. 反典范除子与有理连通纤维化的数值有效性。Compos. Math., 155(7):1444–1456, 2019年。[Eji19a] Sho Ejiri. 多重典范丛的直接像与一般纤维的 Frobenius 稳定典范环。arXiv 预印本 arXiv:1909.07000, 2019年。[Eji19b] Sho Ejiri. 反典范除子的正性与 F-纯纤维。Algebra Number Theory, 13(9):2057–2080, 2019年。[Eji19c] Sho Ejiri. 在正特征下，何时 Albanese 态射是代数纤维空间? Manuscripta Math., 160:239–264, 2019年9月。[Eji22] Sho Ejiri. 关于 Frobenius 稳定直接像的笔记。arXiv 预印本 arXiv:2210.12923，2022年。[GW77] Shiro Goto and Keiichi Watanabe. 一维 F-纯环的结构。J. Algebra, 49(2):415–421, 1977年。[Har94] Robin Hartshorne. Gorenstein 概形上的广义除子。K-theory, 8(3):287–339, 1994年。[HH89] Melvin Hochster and Craig Huneke. 紧闭与强 F-正则性。M´em. Soc. Math. Fr., 38(2):119–133, 1989年。[HM10] Christopher D. Hacon and James McKernan. 对数一般型簇的极小模型的存在性，II. J. Amer. Math. Soc., 23(2):469–490, 2010年。[HP16] Christopher D. Hacon and Zsolt Patakfalvi. 特征 $p > 0$下的泛消失与普通阿贝尔簇的刻画。Amer. J. Math., 138(4):963–998, 2016年。[HPZ19] Christopher D Hacon, Zsolt Patakfalvi, and Lei Zhang. 特征 $p > 0$下阿贝尔簇与普通阿贝尔簇的双有理刻画。Duke Math. J., 168(9):1723–1736, 2019年。[HR76] Melvin Hochster and Joel L Roberts. Frobenius 的纯性与局部上同调。Adv. Math., 21(2):117–172, 1976年。

[HW02] Nobuo Hara 和 Kei-ichi Watanabe. F-正则环与 F-纯环 vs. 对数终端奇点与对数典范奇点。J. Algebraic Geom., 11(2):363–392, 2002.[HX15] Christopher D. Hacon 和 Chenyang Xu. 关于正特征下的三维极小模型纲领。J. Amer. Math. Soc., 28:711–744, 2015.[Kaw81] Yujiro Kawamata. 阿贝尔簇的刻画。Compos. Math., 43(2):253–276, 1981.[Kee03] Dennis S Keeler. 可逆层的丰沛滤子。J. Algebra, 259(1):243–283, 2003.[KMM92] J´anos Koll´ar, Yoichi Miyaoka 和 Shigefumi Mori. Fano 流形的有理连通性与有界性。J. Differential Geom., 36(3):765–779, 1992.[Laz04] Robert K Lazarsfeld. 代数几何中的正性 I，数学及其边缘领域成果丛书第 49 卷。Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.[LTZZ10] Steven Lu, Yuping Tu, Qi Zhang 和 Quan Zheng. 关于 Albanese 映射的半稳定性。Manuscripta Math., 131(3):531–535, 2010.[Mat22] Shin-ichi Matsumura. 关于具有半正全纯截面曲率的射影流形。Amer. J. Math., 144(3):747–777, 2022.[MS87] Vikram B Mehta 和 V Srinivas. 正特征下切丛平凡的簇。Compos. Math., 64(2):191–212, 1987.[Mum70] David Mumford. 阿贝尔簇。Oxford university press, 1970.[Oda71] Tadao Oda. 椭圆曲线上的向量丛。Nagoya Math. J., 43:41–72, 1971.[Pat14] Zsolt Patakfalvi. 正特征下的半正性。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup, 47(5):991–1025, 2014.[PW22] Zsolt Patakfalvi 和 Joe Waldron. 一般纤维的奇点与 LMMP。Amer. J. Math., 144(2):505–540, 2022.[PZ19] Zsolt Patakfalvi 和 Maciej Zdanowicz. 关于特征 $p \geq 0$下的 Beauville–Bogomolov 分解。arXiv 预印本 arXiv:1912.12742, 2019.[SW13] Karl Schwede 和 Zhang Wenliang. 关于 F-奇点的 Bertini 定理。Proc. Lond. Math. Soc., 107(4):851–874, 2013.[Vie83] Eckart Viehweg. 弱正性与 Kodaira 维数的可加性 II：局部 Torelli 映射。载于《代数与解析流形分类》，Katata 1982，数学进展丛书第 39 卷，第 567–589 页。Birkh¨auser, 1983.[Wan22] Yuan Wang. 关于零特征和正特征下对数对的阿贝尔簇刻画。Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 72(6):2515–2539, 2022.[Zha96] Qi Zhang. 关于典范除子数值有效的射影流形。J. Reine Angew. Math., 478:57–60, 1996.[Zha05] Qi Zhang. 关于典范除子数值有效的射影簇。Math. Ann., 332(3):697–703, 2005.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University, Osaka City, Osaka 558-8585, Japan电子邮箱：shoejiri.math@gmail.com

EPFL SB MATH CAG MA C3 635 Station 8, CH-1015, Lausanne电子邮箱：zsolt.patakfalvi@epfl.ch