arXiv:2305.02173v1 [math.AT] 3 May 2023

实环谱在高阶同伦意义下的唯一性

Jack Morgan Davies*

2023年5月4日

摘要

我们讨论一种在 n-同伦意义下的唯一性概念，并研究稳定同伦论中的一些例子。特别地，我们证明，从椭圆上同调到拓扑 K-理论的 q-展开映射在远离素数 2 时，在 3-同伦意义下是唯一的；取 p-完备化和 $\mathbb{F}_p^\times$-同伦不动点后，该映射在 $(2p-3)$-同伦意义下是唯一确定的。利用这一点，我们证明了连通可对偶拓扑模形式上的 Adams 运算之间的新关系——其他应用，包括在远离 $2N$ 时构造 Behrens 的 $Q(N)$ 谱的连通模型，将在其他地方探讨。促成这一唯一性的技术工具是针对实谱的 Goerss–Hopkins 障碍理论的一种变体；该理论适用于各种具有平凡复共轭作用的椭圆上同调和拓扑 K-理论，以及它们的一些同伦不动点。

目录

引言 **2**

1 定义与记号 51.1 在 n-同伦意义下的唯一性.51.2 K(1)-局部同调理论与余模.6

2 实谱及其 Goerss–Hopkins 障碍理论 **8**
2.1 实 ψ-模与 $\bar{\psi}$-模组.8
2.2 实谱及其 Goerss–Hopkins 谱序列（定理 E）. 10

3 唯一 实E_∞-环之间的映射的唯一性 11
3.1 实椭圆上同调与 K-理论.11 3.2 p-进拓扑 q-展开映射的唯一性（定理 A 和 B） . . . . . 17 3.3 椭圆 Adams 运算的高阶函子性（定理 C 和 D ） 19

参考文献 **23**

*davies@math.uni-bonn.de

引言

在 1-范畴 $\mathcal{C}$ 中，具有泛性质的对象在唯一同构意义下是唯一的，也就是说，任意两个这样的对象之间的映射集合都只含一个元素。若 $\mathcal{C} = \mathrm{h}_1\mathcal{D}$ 是 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 的同伦 1-范畴，那么 $\mathcal{C}$ 中的唯一同构性就对应于 $\mathcal{D}$ 中的 1-同伦唯一性。更一般地，若 $\mathcal{D}$ 中的对象具有性质 P，我们称其在 n-同伦意义下唯一，当且仅当任意两个具有此性质 P 的对象之间的映射空间都是 $(n-1)$-连通的，也就是说，它们的同伦群 π_d 在 $0 \leq d \leq n-1$ 次上均为零。从理论上说，研究对象在 n-同伦意义下的唯一性，对于 $n = \infty$ 而言最为优雅；然而在实践中，∞-范畴中有许多值得关注的对象，却没有显而易见或可行的泛性质。

本文关注低色高度的 E_∞-环，例如椭圆上同调和拓扑 K-理论。我们的目标是证明，对于某些有限 n，这类 E_∞-环之间的某些态射在 n-同伦意义下唯一。为陈述第一个定理，记 tmf 为连通拓扑模形式的 E_∞-环，$\mathrm{KO}[\![q]\!]$ 为实 Tate$K$-理论；这些定义将在 §1.2 中回顾。

定理 A. E_∞-环之间的映射 $\mathrm{tmf} \to \mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]$ 由其在对 0 次复 K-理论同调施加作用后的效果唯一确定，且在 3-同伦意义下唯一。[1]

例如，拓扑 q-展开映射 $\mathrm{tmf} \to \mathrm{KO}[\![q]\!]$本身是 E_∞-环之间的映射，在素数 2 以外由 3-同伦唯一确定。[2] 该定理推广了通常的结论：这类态射在这些 E_∞-环的 K(1)-局部化之间，在 1-同伦意义下唯一；例如参见 [HL16, Pr.A.6] 。我们还证明，在奇素数处完成后，上述定理可推广到一大类椭圆上同调和拓扑 K-理论，例如 Tmf、$\mathrm{TMF}_0(N)$ 和 KO；参见定理 3.12。另一方面，如果在素数 p处完成，并将 tmf^p 和 $\mathrm{KO}[\![q]\!]_p$ 替换为它们关于非平凡有限子群 $G \leq \mathrm{F}_p^\times$的$G$-同伦不动点，其中 $\mathrm{F}_p^\times$ 通过稳定的 p-进 Adams 运算作用于这些 E_∞-环，那么我们将得到一个更强的唯一性陈述，其强弱取决于 G的阶。

定理 B. 设 p 是一个奇素数，$G \leq \mathrm{Z}_p^\times$是一个阶为 g的非平凡有限子群。E_∞-环之间的映射 $\mathrm{tmf}_p^{hG} \to \mathrm{K}[\![q]\!]_p^{hG}$由其对零次 p-进复 K-理论同调群的作用唯一确定，精确到 $(2g-1)$-同伦。

当 $G = \{\pm 1\}$ 时，这是 Th.A 的一个 p-完备版本。另一方面，若 $G = \mathrm{F}_p^\times$ 是极大有限子群，我们便得到一个关于 $(2p-3)$-同伦的唯一性陈述。在后一种情况下，E_∞-环 $\mathrm{K}[\![q]\!]_p^{hG}$ 是 Tate K-理论中 Adams 直和项 $\mathrm{L} = \mathrm{K}^{h\mathbf{F}_p^\times}$ 的类似物，而 $\mathrm{tmf}_p^{h\mathbf{F}_p^\times}$ 是 [Dav21, §3.1] 的高度 2 Adams 直和项。

[1]正如我们将在定理 A 的证明中看到的，定理 A 中的 tmf 可以替换为 TMF（但用我们的方法不能替换为 Tmf；见注 3.21），而 $\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]$ 可以替换为 $\mathrm{KO}((q))[\frac{1}{2}]$ 或 $\mathrm{KO}[\frac{1}{2}]$；关于更多 p-进推广，见定理 3.12。[2]本文中避开素数 2 至关重要。归根结底，这是因为 KO_2 的同伦群并非仅支撑在 4 的倍数次上；见注 3.14。

定理 A 和 B 都是在考虑应用的背景下证明的。事实上，对于局部化映射 Tmf $\to$TMF，我们几乎将这些定理视作一个“n-同伦扩张性质”，无论是在远离 2 的情形下，还是在奇素数处完备化的情形下。更准确地说，我们利用上述结论证明，存在一族同伦，将来自 [Dav21, 定理 A] 的稳定 Adams 运算 ψ^k 作用在 tmf 上：

$$\psi^k\psi^\ell \simeq \psi^{k\ell}\colon \operatorname{tmf}[\frac{1}{k\ell}] \to \operatorname{tmf}[\frac{1}{k\ell}]$$

此外，这族 E_∞-环态射的 1-同伦可以选取得在 2-同伦意义下满足结合律和单位律。以下结果简明地概括了这一点。

定理 C. 存在一个 E_∞-环态射的同伦 $\psi^{-1} \simeq \mathrm{id} : \mathrm{tmf}[\frac{1}{2}] \to \mathrm{tmf}[\frac{1}{2}]$，它在 2-同伦意义下满足结合律。更一般地，固定一个整数 n，存在一个函子

$$\Psi^n\colon B(\prod_{p|n} \mathbf{N}) \to \mathrm{h}_2\,\mathrm{CAlg}$$

它将 $B(\prod_{p|n}\mathrm{N})$ 中的唯一点映至 $\mathrm{tmf}[\frac{1}{2n}]$，并将 $(p_1^{e_1},\dots,p_r^{e_r})$ 映至 $\psi^{\prod_i p_i^{e_i}}$，其中 $\mathrm{h}_2\,\mathrm{CAlg}$ 表示 E_∞-环的同伦 2-范畴。

运用 [Dav21]，中构造运算 ψ^k 的技术，并不能明确得出 $\psi^{-1} \simeq$id，更不用说类似于 Ψ^n 的函子是否存在于 E_∞-环的同伦 1-范畴中。如果我们“反转 Δ”，并以周期拓扑模形式谱 TMF 取代 tmf，那么 Adams 运算的相应论述可见于 [Dav22b, 定理 D]—— 事实上，这些关于 TMF 的结果对我们证明定理 C 至关重要。定理 A 的其他应用包括构造 Behrens 的 $Q(N)$ 谱的连通模型，以及其上的运算；这项工作目前仍在进行中。此类构造正是本文最初的灵感来源。

当然，也存在一个依赖于 $G \leq \mathrm{Z}_p^\times$ 的 p-进版本的定理 C。

定理 D。固定一个奇素数 p，并取 $G \leq \mathrm{Z}_p^\times$ 为一个阶为 g 的非平凡有限子群。那么存在一个函子

$$\Psi_{p,G}\colon B\mathbf{Z}_p^\times/G \to \mathrm{h}_{2g-2}\,\mathrm{CAlg}$$

将 $B\mathrm{Z}_p^\times/G$ 中唯一的点映到 tmf_p^{hG}，并将 $\overline{k} \in \mathrm{Z}_p^\times/G$ 映到 ψ^k。

令 $G = \mathrm{F}_p^\times$，使得 $g = p-1$，这个定理与定理 B 支持这样一种观点：稳定同伦论，尤其是色同伦论，会随着素数 p 增大而变得更加稀疏。

为证明上述所有定理，我们在奇素数处使用一种 Goerss–Hopkins 障碍理论的变体 p。经典做法是使用 p-完备复 K-理论作为基底上同调理论，来计算 K(1)-局部 E_∞-环范畴中的障碍群。若采用这种做法，我们只能得到定理 A 中的唯一性，且仅在 1-同伦意义下成立；这一点众所周知，而且我们其余的应用也会因此受阻。为解决这一问题，我们采用 Goerss–Hopkins 障碍理论的一种变体，其基于 K^{hG}，其中取非平凡有限子群 $G \leq \mathrm{Z}_p^\times$，沿用 Behrens 在素数 $p = 2$处的一个想法。以下结果是附录 [DFHH14 第 12.A 节结果的类比；实 E_∞-环的定义见定义 2.4。

定理 E. 固定一个奇素数 p、一个非平凡有限子群 $G \leq \mathbb{Z}_p^\times$，以及两个 p-完备实 E_∞-环 A, B ，其中 B 是 K(1)-局部的。另记 $\mathrm{K}^{hG} = \mathrm{L}$。那么对任意 E_∞-环映射 $f\colon A \to B$ ，存在一个收敛到$\pi_{t-s}(\mathrm{CAlg}(A, B)\ f)$ 的第二象限谱序列，其 E_2-页为

$$E_2^{0,0} = \mathrm{Alg}^{\bar{\theta}}_{\mathrm{L}_*}(\mathrm{L}_*^\wedge A, \mathrm{L}_*^\wedge B)$$

$$E_2^{s,t} = H^s_{\bar{\theta}}(\mathrm{L}_*^\wedge A/\mathrm{L}_*, \Omega^t \mathrm{L}_*^\wedge B) \qquad t \geq 1$$

其他位置均为零。

TMF 和 $\mathrm{KO}[\![q]\!]$ 都是实的，这一事实本质上是因为 Adams 运算 ψ^{-1} 在这些谱上平凡作用。结合一个消失性结论，我们可以利用上述定理证明 Th.A 的 p-进版本。更一般地，我们使用一种代数几何判据来说明，我们许多钟爱的椭圆上同调理论和拓扑 K-理论都是实的；见定理 3.5。

提纲

本文分为三个部分：背景介绍、利用 realθ-代数和实谱构造障碍理论，以及该障碍理论在定理 A 和定理 C 中的应用。具体而言：

- 在 §1.1 中，将正式定义并讨论我们所采用意义下的关于 n-同伦的唯一性概念。

- 在 §1.2 中，我们回顾 K(1)-局部稳定同伦论中的定义，例如 K(1)-局部同调理论、 θ-代数及其约化变体。

- 在 §2.1 中，我们定义并讨论实 θ-代数和实约化 θ-代数，并将它们称为¯实 θ-代数。特别地，我们证明分次实 θ-代数范畴与¯分次实 θ-代数范畴等价，并比较它们的 Andr´e–Quillen 上同调。

- 在 §2.2 中，我们引入实谱的概念，并借此证明定理 E。

- 在 §3.1 中，我们讨论一个代数几何条件，该条件意味着相应的椭圆上同调或拓扑 K-理论是实的，也就是说是 $\{\pm 1\}$-实的。随后，我们还运用这些技巧证明其他若干 G-同伦不动点谱是实的。_

- 在 §3.2 中，我们证明了 θ-代数的 Andr´e–Quillen 上同调的一个消失结论。结合这一消失结论与定理 E，我们进一步推论得出定理 A 的一个推广，并证明定理 B。

- 在第 3.3 节中，E_∞-环 Tmf 被分解为周期谱 TMF 和 $\mathrm{KO}[\![q]\!]$，二者沿 $\mathrm{KO}((q))$ 胶合在一起。随后，利用定理 B，将 TMF 与 $\mathrm{KO}[\![q]\!]$ 上 Adams 运算之间的 1-同伦和 2-同伦（使用它们的模描述）在 $\mathrm{KO}((q))$ 上胶合起来，由此得到定理 D。然后，我们进一步胶合一些有理信息，从而得到定理 C。

记号

在本文中，p 将是一个奇[3] 素数，G 将表示 $\mathbb{Z}_p^\times$ 的一个非平凡有限子群，我们通常将其视为提升群 $\mathbb{F}_p^\times \leq \mathbb{Z}_p^\times$ 的子群，而 $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times/G$将表示商群。我们还将使用 g 表示 G的阶。设 K 为（p-完备的）周期性复 K理论的 $\mathbb{E}_\infty$-环，并记 $\mathrm{L} = \mathrm{K}^{hG}$ 为 K 关于稳定 p-进 Adams 运算的 G-同伦不动点。特别地，当$G = \{\pm 1\}$ 时，我们有 $\mathrm{L} = \mathrm{KO}$；当 $G = \mathbb{F}_p^\times$时，这就是经典的周期性 Adams 直和项。K 和 L 分别具有由这些 Adams 运算给出的 $\mathbb{Z}_p^\times$ 和 $\mathbb{Z}_p^\times/G = \Gamma$的 $\mathbb{E}_\infty$-作用 ψ^k；例如，参见 [Dav20，第 5 节5] 。

致谢

感谢 Venkata Sai Narayana Bavisetty 就 $Q(N)$ 展开富有启发性的讨论，这些讨论最终促成了本项目。我也要感谢 Tommy Lundemo 和 Lennart Meier 与我进行的富有启发性的交流并提出的反馈。

1 定义与记号

我们将自由运用 ∞-范畴的语言来构建我们的同伦论。

1.1 唯一性：直到 n-同伦

这里对同伦理论中唯一性的研究将相当浅显，并且范围有限，以使我们的讨论保持基础。

定义 1.1. 设 $f\colon X \to Y$是一个空间映射，且 y是 Y中的一个点。记 $M_y = X \times_Y \{y\}$ 为 y的提升模空间。对于 y的一个提升 x，即一个元素 $x \in M_y$，若 M_y 是连通的，也就是说，$\pi_0 M_y$ 是单元素集 $\{x\}$，则称 x 在 1-同伦意义下唯一。对于 $2 \leq n \leq \infty$，若 y 的一个在 1-同伦意义下唯一的提升 x 在 n-同伦意义下唯一，即对所有 $0 < k < n$，群 $\pi_k(M_y, x)$ 都为零，则称其在 n-同伦意义下唯一。[4]

上述定义源于一个简单的观察：假设我们有一个在 1-同伦意义下唯一的 x到 y 的提升，并设 x' 是 y 的另一个提升。这种唯一性给出一个同伦 $h\colon \Delta^1 \to M_y$，从 x 到 x'。为了量化这个体现 x 唯一性的同伦 h 是否在 2-同伦意义下唯一，我们再取另一个同伦 $h'\colon \Delta^1 \to M_y$，从 x 到 x'。复合路径 $h' \star h^{-1}\colon \Delta^1 \to M_y$ 确定了 M_y 中以 x为基点的一个环路 γ。如果 x 在 2-同伦意义下唯一，那么 $\pi_1(M_y, x)$ 消失，这个环路 γ 就可以通过一个 2-同伦 $H\colon \Delta^2 \to M_y$收缩为以 x 为基点的常值环路。这个 2-同伦 H 也可以看作 h 与 h'之间的一个 2-同伦，表明体现 x 唯一性的同伦是

[3]本文中的许多结论对 $p = 2$也成立；然而，$p = 2$ 处的消失结论命题 3.13 必须作出修改，以反映 KO 的 2-局部同伦群；参见 [DFHH14，定理 12.7。13]这一修改会使引言中所有结果的素数 2 版本不再成立。鉴于此，以及许多论证在奇素数处更为简洁，且 Behrens 已在 $p = 2$ 给出了本文许多结论的相关内容（见 [DFHH14，§12.7 和 §12.A]），本文将完全限于奇素数 p。[4]若 x 在 ∞-同伦意义下唯一，通常称 x 是 *unique up to contractible choice*。

同伦的。这个过程还会继续：在 n-同伦意义下的唯一性意味着，可能不同的 $(n-1)$-同伦可以拼接起来，形成映射 $\partial\Delta^{n+1} \to M_y$；如果 $\pi_n(M_y, x)$ 消失，该映射就可以提升为来自 Δ^{n+1} 的映射。

读者不妨思考如下例子：对各种 n，带基点空间 $S^n \to S^n$ 中识别出 π_n 上乘以 2 的映射的唯一性。对于一个与本文也相关的更复杂例子，[Dav22a, 定理 A] 证明了，定义 Tmf 的层 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}$ defin- ing 由这样一个事实唯一确定（相差 1-同伦）：它在 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 的小仿射 ´etale site 上定义了自然的椭圆上同调理论。[5]

下面给出一个计算同伦唯一性的简单判据。

命题 1.2. 设 $f\colon X \to Y$ 是一个空间映射，且 y 是 Y 的一个元素，并满足 y 的连通分支是可缩的；例如，当 Y 本身是离散的时即满足该条件。那么，y 的一个提升 x 在相差 1-同伦的意义下唯一，当且仅当 $\pi_k(X, x)$ 对于 $0 < k < n$ 消失。

证明。记 Y_y 为 y 和 $X_y = X \times_Y Y_y$ 的连通分支，注意到由笛卡尔图表的粘贴引理可得一个自然的空间等价 $M_f \simeq X_y \times_{Y_y} \{y\}$。由此得到纤维化 $M_y \to X_y \to Y_y$，其基底为点 y，现在将其视为 Y_y 中的一个元素。所需结果由上述纤维化的长正合序列立即得出。 □

1.2 K(1)-局部同调理论与余模

固定一个奇素数 p，并默认在 K(1)-局部范畴中工作。特别地，我们的代数将在素数 p 处完成，因此张量积将在 $\mathbb{Z}_p$ 上取 p-进完成。我们还将带下标 $\mathbb{Z}_p$ 的层叠记作与形式层叠 $\mathrm{Spf}\,\mathbb{Z}_p$ 的笛卡尔积（而非 $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}_p$）。

定义 1.3。设 E 和 X 为谱。按如下公式定义 X 的（K(1)-局部）E-同调：

$$E^\wedge_* X = \pi_* L(E \otimes X)$$

其中 L 是对第一个 Morava K-理论 K(1) 的局部化。

这并非经典意义上的同调理论，因为它不保持无限直和；然而，在 K(1)-局部稳定同伦范畴中工作时，它是恰当的替代品；参见 [HS99, §9]。对于满足 $\mathrm{K}^\wedge_* X$ 无挠的谱 X，可知 $\mathrm{K}^\wedge_* X$ 虽然先验上仅为 L-完备，实际上却是 p-完备的。由于我们常常会作出这一无挠假设，因此有时会将 $\mathrm{K}^\wedge_* X$ 称为 X的 p-进 K 同调。

The n K-同调群和 L-同调群的自然归属是以下代数范畴 .

[5]我们相信，结合 [Dav22a] 的思路与定理 A，可以证明 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}[\frac{1}{2}]$ 由这一性质唯一确定，且在 3-同伦意义下唯一。

定义 1.4. 分次 Morava 模或分次 ψ-模是一个 Z-分次 K_*-模 M_*，其中每个 M_n 都是 L-完备的，并带有连续的 $\mathbb{Z}_p^\times$-作用，我们将其记为 Adams 运算 ψ^k （对于 $k \in \mathbb{Z}_p^\times$），使得对于所有 $a \in K_*$ 和 $m \in M_*$，都有 $\psi^k(am) = \psi^k(a)\psi^k(m)$，对所有 $k \in \mathbb{Z}_p^\times$均成立。在 $\mathbb{Z}_p$上还有一种相关的非分次概念，其中 $\mathbb{Z}_p$ 上的 $\mathbb{Z}_p^\times$ 作用是平凡的。将 ψ-模（分别为分次 ψ-模）的范畴记为 $\mathrm{Mod}^{\psi}_{\mathbb{Z}_p}$（分别为 $\mathrm{Mod}^{\psi}_{K_*}$）。对于固定的非平凡有限子群 $G \leq \mathbb{Z}_p^\times$，约化分次 Morava 模 $^-$或分次 ψ-模是一个 Z-分次 L-完备 L_*-模 M_*，带有连续的 Γ作用，并具有与 ψ-模相同的相容性，只是以 L 替代 K。在 $\mathbb{Z}_p$上也有显然的非分次 $\bar{\psi}$-模概念。将这些 $\bar{\psi}$-模范畴记为 $\mathrm{Mod}^{\bar{\psi}}_{\mathbb{Z}_p}$ 和 $\mathrm{Mod}^{\bar{\psi}}_{L_*}$。

这些范畴中恰当的乘法对象是 θ-代数。

定义 1.5. θ-代数是一个 $\mathbb{Z}_p$-代数 A_0，它带有 ψ-模结构以及一个 $\mathbb{Z}_p^\times$-等变齐次算子 θ，满足 $\theta(1) = 0$，并且对所有 x、$y \in A_0$，以下两个条件都成立：

1. $\theta(xy) = x^p\theta(y) + \theta(x)y^p + p\theta(x)\theta(y)$
2. $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y) - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}x^i y^{p-i}$

我们也有一个分次版本。由于本文中所见的所有分次θ-代数都具有 $K_* \otimes A_0$ 的形式，其定义便留给读者，不会有问题。用 $\mathrm{Alg}^{\theta}_{K_*}$ 和 $\mathrm{Alg}^{\theta}_{\mathbb{Z}_p}$ 分别表示分次和非分次 θ-代数的范畴。约化分次 θ-代数是一个 Z-分次$^-L_*$-代数 A_*，它带有 ψ-模结构以及一个 Γ-等变运算 θ^-，满足上述相同的公理。也定义 $\mathbb{Z}_p$ 上的非分次 θ-代数，并用 $\mathrm{Alg}^{\bar{\theta}}_{L_*}$ 和 $\mathrm{Alg}^{\bar{\theta}}_{\mathbb{Z}_p}$ 分别表示分次和非分次 $\bar{\theta}$-代数的范畴。

下面这个关键定理将这些代数概念与同伦论联系起来。

定理 1.6. 设 X 是一个谱， A 是一个 E_∞-环。那么，$K^\wedge_* X$ 是一个 ψ-模，$K^\wedge_* A$ 是一个 θ-代数，$L^\wedge_* X$ 是一个 $\bar{\psi}$-模，而 $L^\wedge_* A$ 是一个 $\bar{\theta}$-代数。

证明. 关于前两个结论，请参阅 [GH05，命题 2.2.2 和定理 2.2.4] ；后两个结论则由以下事实推出：对于任意谱 Y，$L^\wedge_* Y$ 都可通过 K(1)-局部互反性以及一个塌缩的 G-同伦不动点谱序列，计算为 $(K \otimes Y)^{hG}$ 的同伦群，其中 $|G||\mathbb{F}_p^\times| = p-1$ 是可逆的。事实上，正如 [DFHH14，引理 12.7.8]（其中引用了 [Kuh04，定理 1.5] ）所述，互反性指出自然映射

$$Z_{hG} \xrightarrow{\simeq} Z^{hG}$$

对于所有带有 G 作用的谱 Z，都是 K(1) 等价，从而得到以下等价链

$$L \otimes Y \xleftarrow{\simeq} K_{hG} \otimes Y \xleftarrow{\simeq} (K \otimes Y)_{hG} \xrightarrow{\simeq} (K \otimes Y)^{hG}$$

利用磨积在每个变量上都是余连续这一事实。 □

从 θ-代数到 ψ-模的遗忘函子有一个左伴随，记作 P_θ。对于分次情形的类似函子，我们也记作 $\mathrm{P}_{\theta,\,*}$；对于约化情形，则分别记作 $\mathrm{P}_{\bar\theta}$ 和 $\mathrm{P}_{\bar\theta,\,*}$。现在可以利用这种“自由函子”构造单纯形分解，并定义 Andr´e–Quillen 上同调群；参见 [GH04，第 4] 节，或 [GH05，第 2.4] 节。对我们而言，给定一个分次 θ-代数 A_* 和一个ψ-模 M_*，我们将 $H^s_\theta(A_*/\mathrm{K}_*, M_*)$ 定义为与余单纯形对象相关联的上链复形的上同调

$$\mathrm{Alg}^\theta_{\mathrm{K}_*/A_*}(P_\bullet, A_* \ltimes M_*)$$

其中，$P_\bullet \to A_*$ 是由自由分次 θ代数构成的 A_* 的单纯分解，这些代数建立在 ψ模之上，且¯作为 K_*模是投射的。对于 θ代数也同样如此。

2 实谱及其 Goerss–Hopkins 障碍理论

实谱这一概念对我们很有用，因为这一强条件将使我们能够同时把许多关于 L 同调的论述化简为关于 K 同调的论述。当 $G = \{\pm 1\} \le \mathbb{Z}_p^\times$时，我们将在 §3.1 中看到，我们许多喜爱的椭圆上同调和拓扑 K理论（例如 KO）相对于 $G = \{\pm 1\}$都是实的。

固定一个奇素数 p、一个非平凡有限子群 $G \le \mathbb{Z}_p^\times$，并默认将所有对象局部化于 K(1)。

¯2.1 实 ψ模与 ψ模

以下关于实 θ代数和谱的概念，显然是仿照 Behrens 的定义 [DFHH14，第 12.7 定义。10]

定义 2.1. 给定一个分次 ψ-模 M_*，若自然映射 ψ-模的 $\mathrm{K}_* \otimes M_0 \to M_*$ 是一个同构，且 G 在 M_0 上的作用是平凡的，则称 M_* 为实。给定一个 ¯ 分次 ψ- 模 N_*，若自然映射 $\mathrm{L}_* \otimes N_0 \to N_*$ 是一个等价，则称 N_* 为实。若需明确形容词“实”指的是哪个 G，我们将写作相对于 G 的实。

以下定理说明了此定义的合理性。首先注意，存在一个函子

$$F\colon \mathrm{Mod}^{\bar\psi}_{\mathrm{L}_*} \to \mathrm{Mod}^{\psi}_{\mathrm{K}_*} \qquad M_* \mapsto \mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{L}_*} M_*$$

其中，FM_* 上的 $\mathbb{Z}_p^\times$ 作用可通过注意到 $\mathrm{L} \to \mathrm{K}$ 是 $\mathbb{Z}_p^\times$-等变的来描述，而 L 上的作用是从其自然的 Γ 作用限制而来。

定理 2.2. 固定一个奇素数 p 和一个非平凡有限子群 $G \le \mathbb{Z}_p^\times$。函子 s

$$F\colon \mathrm{Mod}^{\bar\psi}_{\mathrm{L}_*} \to \mathrm{Mod}^{\psi}_{\mathrm{K}_*} \qquad M_* \mapsto \mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{L}_*} M_* = LM_*$$

$$\{\pm 1\}\colon \mathrm{Mod}^{\psi}_{\mathrm{K}_*} \to \mathrm{Mod}^{\bar\psi}_{\mathrm{L}_*} \qquad N_* \mapsto N_*^{\{\pm 1\}}$$

¯限制为实 ψ-模与实 ψ-模之间的等价。此外，这两个函子都通过显然的遗忘函子提升到 $\mathrm{Alg}^{\bar\theta}_{\mathrm{L}_*}$ 和 $\mathrm{Alg}^{\theta}_{\mathrm{L}_*}$，因此也限制为实 θ-代数与实 θ-代数之间的等价。

证明。自然同构

$$(\mathrm{K}_*\otimes_{\mathrm{L}_*}M_*)^G\simeq(\mathrm{K}_*\otimes M_0)^G\simeq\mathrm{L}_*\otimes M_0\simeq M_*$$
$$\mathrm{K}_*\otimes_{\mathrm{L}_*}N_*^G\simeq\mathrm{K}_*\otimes_{\mathrm{L}_*}(\mathrm{K}_*\otimes N_0)^G\simeq\mathrm{K}_*\otimes_{\mathrm{L}_*}(\mathrm{L}_*\otimes N_0)\simeq N_*$$

证明将这些函子限制在实模上时互为逆函子。上文用到了 G-不动点与 p-完备张量积可交换这一性质；这是因为从余不变元到不变元的加性范数 $X_G\to X^G$ 是同构，而 G的阶根据整除关系 $|G||\mathbb{F}_p^\times|=p-1$是可逆的。 □

一个之后会多次用到的关键观察是：给定一个实谱 X，则 $\mathrm{L}^\wedge_*X$ 或 $\mathrm{K}^\wedge_*X$ 中的任一个都能确定另一个——这直接推论自 Pr.2.5 和上面的定理。上述结果的另一个推论是，我们可以将实 θ-代数 A_* 的 Andr´e–Quillen 上同调¯计算为 LA_* 作为 θ-代数时的 Andr´e–Quillen 上同调。

¯ ¯推论 2.3。给定一个分次实 θ-代数 A_* 和一个分次实 ψ-模 M_*，则函子 F 诱导出阿贝尔群的一个同构

$$H^s_{\bar\theta}(A_*/\mathrm{L}_*,M_*)\simeq H^s_\theta(FA_*/\mathrm{K}_*,FM_*),\qquad s\geq 0.$$

证明。 A_* 为实数的假设给出 $A_*=\mathrm{L}_*\otimes A_0$，因此我们选择一个自由分解_$P_\bullet$，将 A_* 作为分次 θ-代数分解为 $P_\bullet=\mathrm{L}_*\otimes P'_\bullet$，其中 $P'_\bullet\to A_0$ 是一个自由单纯_θ-代数分解。让我们更仔细地选择 $P'_\bullet$。正如 Behrens' 在素数 $p=2$ 下于 [DFHH14, §12.A]（公式 (A.2) 上方的页面）中所解释的，我们可以选择拓扑¯生成元 $\{x_\alpha\}$，使其作为 θ-代数生成 A_0，并且还可以进一步要求每个 x_α 在 $\Gamma=\mathbb{Z}_p^\times/G$ 中具有开各向同性子群，否则我们就选择其他生成元。因此，对于每个 α，存在一个 $j\geq 1$，使得生成元 x_α 定义了一个 θ-代数映射

$$x_\alpha\colon \mathbf{P}_{\bar\theta}\left(\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/p^j\mathbf{Z})^\times/G]\right)\to A_0$$

¯使得 θ-代数的映射

$$P'_0=\mathbf{P}_{\bar\theta}\left(\bigoplus_\alpha\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/p^j\mathbf{Z})^\times/G]\right)\to A_0$$

由所有生成元定义，其中上面的直和隐含地取了 L完备化，是¯满射的。将上述 θ-代数上的 Γ 作用沿着群商 $\mathbb{Z}_p^\times\to\Gamma$限制为 $\mathbb{Z}_p^\times$作用，我们看到，P'_0 现在是作为 θ-代数的 A_0 的自由单纯分解的起点。事实上，两个自由函子 P_θ 或 $\mathrm{P}_{\bar\theta}$ 都只是添加一个自由算子 θ，使其与 $\mathbb{Z}_p^\times$-或 Γ-作用交换，并满足 Df.1.5 的公理。当 G 平凡作用时，这些算子一致，正如其在 P'_0上的作用一样。类似地，分析 $P'_0\to A_0$的核会得到 $P'_1\to P'_0$，并且归纳地得到 A_0的整个自由单纯分解 $P'_\bullet$；重要的是，它既是 θ-代数，也是¯ θ-代数。特别地，由于 F不会改变零次，我们看到，$FP_\bullet\to FA_*$是作为分次 θ-代数的 A_* 的自由单纯分解。这导出了余单纯对象的同构

$$\mathrm{Alg}^{\bar\theta}_{\mathrm{L}_*/A_*}(P_\bullet,A_*\ltimes M_*)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Alg}^{\theta}_{\mathrm{K}_*/FA_*}(FP_\bullet,FA_*\ltimes FM_*)$$

对其取相应的上链复形并取上同调后，即可得到所需的同构。 □

2.2 实谱及其 Goerss–Hopkins 谱序列（定理 E)

¯我们对实 ψ-模和 ψ-模的兴趣源于我们对实谱这一类的兴趣。

定义 2.4. 对于给定的非平凡有限子群 $G \leq \mathrm{Z}_p^\times$，我们称谱 X 为实谱，若 $\mathrm{K}^\wedge_* X$ 无挠、集中于偶数次，并且诱导的零次 G-作用是平凡的。

当 $G = \{\pm 1\}$ 时，正是我们采用这一记号的动机——相对于 $\{\pm 1\}$ 的实谱 X，其不动点的包含映射 $\mathrm{KO}^\wedge_0 X \to \mathrm{K}^\wedge_0 X$ 是由复共轭作用给出的同构，正如我们很快将看到的那样。

对于固定的（奇）素数 p，此定义只取决于 X 的 K(1)-局部化——本文不会用到可能的整体定义。实谱应当被视为“具有平凡 ψ^γ 作用的优良谱 $\gamma \in G$”。例如，利用例 3.2 和定理 3.5，我们将看到 tmf、$\mathrm{TMF}_0(N)$、KO 和 $\mathrm{KO}[\![q]\!]$ 都是实谱。反例包括 K，因为经典计算

$$\mathrm{K}^\wedge_0 \mathrm{K} \simeq \mathrm{Cont}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathbf{Z}_p)$$

这表明，左侧的 $\{\pm 1\}$ 作用转换为右侧的共轭作用后是非平凡的。细心的读者也可以类似地证明，对于 $N \geq 3$ 和 $G = \{\pm 1\}$，$\mathrm{TMF}_1(N)$ 不是实的：利用命题 3.7，并证明其中的 $\{\pm 1\}$ 作用是非平凡的。此外，对于 $G \neq \{\pm 1\}$，也可以再次利用命题 3.7 验证 Tmf 本身不是实的。

很容易推出，实 E_∞-环的 L-同调是实的。

命题 2.5. 设 X 是一个谱，使得 $\mathrm{K}^\wedge_* X$ 无挠且集中于偶数次。则 X 是实的，当且仅当映射

$$\mathrm{L}^\wedge_0 X \to \mathrm{K}^\wedge_0 X \tag{2.6}$$

由不动点 L $\to$K 的包含映射诱导，是一个同构。若 X 是实谱，则自然映射

$$\mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}^\wedge_0 X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}^\wedge_* X \qquad\qquad \mathrm{L}_* \otimes \mathrm{L}^\wedge_0 X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{L}^\wedge_* X \tag{2.7}$$

都是同构。特别地，ψ-模 $\mathrm{K}^\wedge_* X$ 和 $\bar{\psi}$-模 $\mathrm{L}^\wedge_* X$ 在各自的范畴中都是实的。

条件 (2.6) 是一个同构，这是 Behrens 对实（他称之为关于 $G = \{\pm 1\}$ 且在 $p = 2$ 处 Bott 周期的）的原始定义，因此上述内容也可以进一步视为我们两种定义之间的调和。

证明。首先注意到，$\mathrm{K}^\wedge_* X$ 无挠且集中于偶数次的事实意味着自然映射

$$\mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}^\wedge_0 X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{K}^\wedge_* X \tag{2.8}$$

是分次 θ-模的同构。另请注意，对于任意谱Y，自然映射 L $\otimes Y \to$ K$\otimes Y$是 $\{\pm 1\}$-同伦不动点的包含映射，由

K(1)-局部互反性；我们在定理 1.6 的证明中也用到了这一事实。特别地，我们现在可以考虑以下 G-同伦不动点谱序列（HFPSS）：

$$E_2^{s,t} \simeq H^s(G, \mathrm{K}_t^\wedge X) \simeq H^s(G, \mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}_0^\wedge X) \Longrightarrow \mathrm{L}_{t-s}^\wedge X \tag{2.9}$$

上述谱序列立即坍缩，因为群 $\mathrm{K}_*^\wedge X$ 是 p-完备的，对于奇素数 p而言，因此 G 的阶可逆，且边缘映射

$$\mathrm{L}_*^\wedge X \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{K}_*^\wedge X)^G \tag{2.10}$$

是一个同构。在零次，上述映射就是所需的不动点包含映射 (2.6)；现在显然，该映射是同构当且仅当 G在 $\mathrm{K}_0^\wedge X$上的作用是平凡的。

对同伦不动点谱序列 (2.9) 的 E_∞-页的计算可以概括为：存在一个分次约化 θ-模的自然同构

$$\mathrm{L}_* \otimes \mathrm{K}_0^\wedge X \xrightarrow{\simeq} \mathrm{L}_*^\wedge X$$

它 与 (2.6) 结合后给出 (2.7) 的第二个同构；第一个同构是 (2.8)。 □

基本上，作为上述对“实性”研究的推论，我们可以证明定理 E

定理 E 的证明。根据 [GH05，定理 2.4，14], 我们的假设给出了一个谱序列，它收敛到以 f 为基点的空间交换代数(A, B) 的同伦群，因此我们只需计算第 E_2 页。利用 Pr.2.5，我们看到如果 X 是实的，那么 $\mathrm{K}_*^\wedge X$ 和 $\mathrm{L}_*^\wedge X$ 都是实的，因此这对 $X = A$、B 都适用。对于 $s = t = 0$，给定的第 E_2 页具有如下形式

$$E_2^{0,0} = \mathrm{Alg}_{\mathrm{K}_*}^{\theta}(\mathrm{K}_*^\wedge A, \mathrm{K}_*^\wedge B) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathrm{L}_*}^{\bar{\theta}}(\mathrm{L}_*^\wedge A, \mathrm{L}_*^\wedge B)$$

使用定理 2.2，并且对于 $t \geq 1$

$$E_2^{s,t} = H_\theta^s(\mathrm{K}_*^\wedge A/\,\mathrm{K}_*, \mathrm{K}_*^\wedge B) \simeq H_{\bar{\theta}}^s(\mathrm{L}_*^\wedge A/\mathrm{L}_*, \mathrm{L}_*^\wedge B)$$

使用推论 2.3，得证。 □

3 实 E_∞-环之间映射的唯一性

在本节中，我们将定理 E 的障碍理论应用于某些 E_∞-环之间的态射。

3.1 实椭圆上同调与 K-理论

G 对 $\mathrm{K}_0^\wedge X$ 的作用平凡这一条件自然地可能难以判定，因此要证明各种谱是实谱可能会很困难。如果 X 是椭圆上同调理论，或是 K 理论的一种形式，并且 $G = \{\pm 1\}$，那么我们还有一些希望。记 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 为椭圆曲线的紧化模叠，即对广义椭圆曲线进行分类的层叠；参见 [DR73]。

定义 3.1. 设 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 是由 $\mathfrak{X}$ 上的广义椭圆曲线 C 决定的形式 Deligne–Mumford 叠之间的一个态射。将 f 视为切片 2-范畴 $\mathrm{fDM}/\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 中的一个对象。在这个 2-范畴中，由二元组 $(\mathrm{id}_{\mathfrak{X}}, [-1])$ 定义了 f 的一个对合 τ，其中 $[-1]\colon C \to C$ 是广义椭圆曲线 C 上的取逆同构。我们称 f 为逆不动的，如果存在 τ 的一个平凡化，即在 $\mathrm{fDM}/\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 中从 τ 到恒等态射的一个 2-态射。

乍看之下，以下评论可能显得有些同义反复，因此建议读者同时阅读下面的例子和非例子。

例 3.2. 考虑 $\mathfrak{X} = \mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\mathbf{Z}_p} = \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}} \times$ 形式谱 Z_p。在这种情况下，$\mathrm{fDM}/\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 中存在一个由 $[-1]\colon (\mathrm{id}, \mathrm{id}) \to (\mathrm{id}\ [-1]) = \tau$ 给出的 2-态射。在 $\mathfrak{X} = \mathcal{M}_0^{\mathrm{sm}}(n)_{\mathbf{Z}_p}$ 的情形下，事情则不那么显而易见。这里，$\mathcal{M}_0^{\mathrm{sm}}(n)$ 是由配备了一个阶为 n 的循环子群的光滑椭圆曲线所构成的模叠，其中 n 是一个不能被 p 整除的正整数；参见 [KM85, §5]。在这种情况下，我们也可以定义一个 2-态射 $[-1]\colon (\mathrm{id}, \mathrm{id}) \to (\mathrm{id}\ [-1])$，因为椭圆曲线的 $[-1]$-作用保持所选循环子群不变。这些层在上述层叠上的截面分别为 Tmf_p 和 $\mathrm{TMF}_0(N)_p$。同一个 2-态射也适用于 $\mathfrak{X} = \mathcal{M}_{\mathrm{Tate},\mathbf{Z}_p}$，其中 $\mathcal{M}_{\mathrm{Tate}}$ 是 Tate 模叠；它也适用于光滑 Tate 模叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{Tate}}^{\mathrm{sm}}$，以及由 G_m 的形式构成的模叠 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}_m}$；参见 [HL16, §3.5] 或 [Dav21, Dfs.1.1-2]。与这些层叠相关联的 E_∞-环分别为 $\mathrm{KO}[\![q]\!]_p$、$\mathrm{KO}((q))_p$ 和 KO_p。

反例 3.3。模叠 $\mathfrak{X} = \mathcal{M}_1^{\mathrm{sm}}(n)_{\mathbf{Z}_p}$ 对于 $n \geq 3$ 并非逆不动。这里，$\mathcal{M}_1^{\mathrm{sm}}(n)$ 是由具有一个 n 阶选定点的光滑椭圆曲线构成的模叠，其中 n 是某个不能被 p 整除的正整数。为了证明它不是逆不动的，可以利用定理 3.5 的逆命题，并通过命题 3.7 显式验证 $\mathrm{TMF}_1(n)_p$ 并非实的。此外，例 3.2 中的 2-态射在这里并不适用，因为只要满足 $n \geq 3$，$[-1]$ 就会在 n 阶点 p 上产生非平凡作用。对于 $\mathcal{M}_{\mathrm{Tate},\mathbf{Z}_p}$ 和 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}_m,\mathbf{Z}_p}$ 的二重覆盖，情况也相同，因此分别对应形式谱 $\mathrm{Z}_p[\![q]\!]$ 和形式谱 Z_p，因为它们关联的 E_∞-环分别为 $\mathrm{K}[\![q]\!]_p$ 和 K_p，而它们都不是实的。

让我们阐明上述这些自然族 E_∞-环的起源。

定义 3.4。固定一个奇素数 p。根据 [DFHH14，第 §12] 或 [HL16, 节，在 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$, $\mathbf{Z}_p$ 的小 ´etale 网站上存在一个 E_∞-环的层 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}$；由其仿射截面带有椭圆上同调理论的自然结构这一事实，该层被唯一确定（差一个 1-同伦）；参见 [Dav22a]。特别地，给定一个形式 Deligne–Mumford 叠 $\mathfrak{X}$及一个 ´etale 映射 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$, $\mathbf{Z}_p$ 便有一个相应的 E_∞-环 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}(\mathfrak{X})$。此外，正如 [LN14，第 §A] 节和 [HL16，第 §5], 节中分别所讨论的（或参见 [Dav21，命题 1.11 和 1.18]），在模叠 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}_m}$, $\mathbf{Z}_p$ 和$\mathcal{M}_{\mathrm{Tate}}$, $\mathbf{Z}_p$上也有类似定义的 E_∞-环的层 $\mathcal{O}^{\mathrm{mult}}$ 和 $\mathcal{O}^{\mathrm{Tate}}$。

上述层的截面的例子包括熟悉的（并且根据定理 3.5 也是实的）E_∞-环

$$\mathcal{O}^{\mathrm{top}}(\mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\mathbf{Z}_p}) = \mathrm{Tmf}_p \qquad \mathcal{O}^{\mathrm{top}}(\mathcal{M}_0^{\mathrm{sm}}(n)_{\mathbf{Z}_p}) = \mathrm{TMF}_0(n)_p$$

$$\mathcal{O}^{\mathrm{Tate}}(\mathcal{M}_{\mathrm{Tate},\mathbf{Z}_p}) = \mathrm{KO}[\![q]\!]_p \qquad \mathcal{O}^{\mathrm{Tate}}(\mathcal{M}_{\mathrm{Tate},\mathbf{Z}_p}^{\mathrm{sm}}) = \mathrm{KO}(\!(q)\!)_p \qquad \mathcal{O}^{\mathrm{mult}}(\mathcal{M}_{\mathbf{G}_m,\mathbf{Z}_p}) = \mathrm{KO}_p$$

其中 $\mathcal{M}_0^{\mathrm{sm}}(n)$ 表示配备了一个阶为 n的循环子群的光滑椭圆曲线的模空间。

定理 3.5. 假设 $\mathfrak{X}$ 是一个形式 Deligne–Mumford 叠，并且给定一个仿射态射 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\, \mathbf{Z}_p}$。再作出以下四种附加假设之一：

1. 假设 $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf} R$ 是仿射的，且 f 是平坦的，由此得到一个与 f相关联的 Landweber 精确同伦交换椭圆上同调理论 E。 2. 假设 f 是 ´étale 的，由此得到一个 E_∞-环 $E = \mathcal{O}^{\mathrm{top}}(\mathfrak{X})$。 3. 假设 f 有一个经过 $\mathcal{M}_{\mathrm{Tate}}$ 的 ´étale 分解，由此得到一个 E_∞- 环 $\mathcal{O}^{\mathrm{Tate}}(\mathfrak{X})$。 4. 假设 f 有一个经过 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}_m}$的 ´étale 分解，由此得到一个 E_∞-环$\mathcal{O}^{\mathrm{mult}}(\mathfrak{X})$。

如果 f 是逆不动的，那么相对于群 $\{\pm 1\}$， E 是实的。

上述定理是我们应用定理 E 的关键，而这最终归结为一个 K-理论计算。以下定义见 [DFHH14, §12.1 & 12.5]。

定义 3.6。记 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}$ 为在 p-完备环上具有普通约化的广义椭圆曲线的模叠，记 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p^\infty)$ 为由对 (C, α) 构成的、定义在 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}$ 上的连续 $\mathbf{Z}_p^\times$-挠子，其中 C 是在一个 p-完备 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 环 R 上具有普通约化的广义椭圆曲线，而 $\alpha\colon C \simeq \mathbf{G}_m$ 是 R 上形式群的同构。根据 [DFHH14, 引理 12.5.1]，证明之后的引理，模叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p^\infty)$ 是仿射的，其整体截面为 Katz 的 p-进模形式环 V。

命题 3.7. 设 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\, \mathbf{Z}_p}$ 和 E 满足定理 3.5 的假设 1-4（这里我们不假设 f 是逆不动）。记 $f_{\mathrm{ord}}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}$ 为 f 在 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\, \mathbf{Z}_p}$ 上的基变换。那么 E 的零阶 K(1)-局部 K 理论适合于如下形式叠的笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spf} \mathrm{K}_0^\wedge E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{ord}}} & \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}} \end{array} \tag{3.8}$$

此外，分次 θ-代数 $\mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}_0^\wedge E \to \mathrm{K}_*^\wedge E$ 的自然映射是同构。

Th上述内容是将 [DFHH14, Pr.12.6.1] 从仿射概形推广到一般 $\mathfrak{X}$ 的结果。 .

证明。在假设 1 下，这正是 [DFHH14，命题 12.6.1]。现在继续在假设 2–4 下进行，记 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p)$ 为由下列笛卡尔图定义的形式 Deligne–Mumford 叠

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{ord}}} & \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}} \end{array}$$

其中 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p)$ 是 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}$表示带有有限群概形 $\mu_p \simeq C[p]$ 同构选择的普通广义椭圆曲线曲线的 $\mathrm{F}_p^\times$-´étale 扭子（见 [DFHH14，引理 12.5.1]）。由 [DFHH14，引理 12.5.2], 可知，层叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p)$ 是仿射的；而 f^{ord} 由基变换可知也是仿射的，因此 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p)$ 是一个仿射形式 Deligne–Mumford 叠 $\mathrm{Spf}\ W$。在 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p)$ 上计算 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}{}_{\mathrm{K}(1)}$ 或 $\mathcal{O}^{\mathrm{Tate}}_{\mathrm{K}(1)}$，可得到一个 E_∞-环 $E(p)$；再由这些 ´étale 层的下降理论，可得 E_∞-环 $E \to E(p)$ 的一个 $\mathrm{F}_p^\times$-伽罗瓦扩张。特别地，此映射诱导出一个等价$E \simeq E(p)^{h\mathbf{F}_p^\times}$。由 [DFHH14，命题 12.6.1], 可知，该命题对 $E(p)$ 成立，因此我们现在特别得到形式 Deligne–Mumford 叠的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spf}\,\mathrm{K}_0^\wedge E(p) & \xrightarrow{\pi'} & \mathrm{Spf}\,\mathrm{K}_0^\wedge E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}(p^\infty) \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma(p)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow \\
\mathrm{Spf}\,W = \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}
\end{array}$$

此时我们已知外侧矩形是笛卡尔的。要证明右侧方块是笛卡尔的并完成证明，只需证明映射 γ 是映射 $\gamma(p)$ 的 $\mathrm{F}_p^\times$ 商。我们知道 π 是一个 $\mathrm{F}_p^\times$-商，因为它是通过基变换一个 $\mathrm{F}_p^\times$-扭子构造出来的；因此，由竖直映射的自然性，只需证明 π' 也是一个 $\mathrm{F}_p^\times$-商，换言之，$\mathrm{K}_0^\wedge E \to \mathrm{K}_0^\wedge E(p)$ 是 $\mathrm{F}_p^\times$- 不动点的包含映射。为此，考虑以下一串自然同构:

$$\mathrm{K}_*^\wedge E \xrightarrow{\simeq} \pi_*(\mathrm{K} \otimes E(p)^{h\mathbf{F}_p^\times}) \xleftarrow{\simeq} \pi_*((\mathrm{K} \otimes E(p))^{h\mathbf{F}_p^\times} \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{K}_*^\wedge E(p))^{\mathbf{F}_p^\times}$$

第一步成立，因为 $E \to E(p)$ 是一个 $\mathrm{F}_p^\times$-伽罗瓦扩张；第二步成立，因为 K(1)-局部的双陪伴性自然地将同伦不动点与同伦轨道等同起来，因此同伦不动点与对一个变量作张量积可交换；第三步成立，因为 $\mathrm{K} \otimes E(p)$ 的 $\mathrm{F}_p^\times$-同伦不动点谱序列的 E_2 页集中在零行，这是因为 $|\mathrm{F}_p^\times| = p - 1$ 可逆。

对于“此外”这一陈述，上述内容表明，θ-代数图表中的垂直态射

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}_0^\wedge E & \longrightarrow & \mathrm{K}_*^\wedge E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}_0^\wedge E(p) & \longrightarrow & \mathrm{K}_*^\wedge E(p)
\end{array}$$

是不动点 $\mathrm{F}_p^\times$ 的包含映射。我们所需的结论源于以下事实：上面的下方水平态射是同构，这是因为 $E(p)$ 是 Landwe- ber 精确的。

□

定理 3.5 的证明。要证明 E 是实的，注意到命题 3.7 表明 $\mathrm{K}_*^\wedge E$ 集中在偶数次。再者，K_* 无挠，且 $\mathrm{K}_0^\wedge E$ 在 $\mathrm{Spf}\,\mathrm{Z}_p$ 上平坦（因而在 Spec Z 上也平坦）；由于 (3.8) 中的所有映射都是平坦的，且 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}} \to \mathrm{Spf}\,\mathrm{Z}_p$ 是平坦的（因为 $\mathrm{Spf}\,V \to \mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}^{\mathrm{ord}}$ 是 $\mathrm{Z}_p^\times$-挠子，且 V 在 Z_p 上平坦），这些事实表明 $\mathrm{K}_*^\wedge E$ 无挠。接下来只需证明 $\mathrm{K}_0^\wedge E$ 的 $\{\pm 1\}$-作用平凡——这部分证明受到该证明的启发。

的 [DFHH14，引理 12.7。14] 以及 [Mei22，例 6。12]。命题 3.7 表明，形式谱 $\mathrm{K}^\wedge_0 E$ 表示如下的配对 (h,α)：其中 h 是从我们的测试层叠 T 出发的层叠映射 $h\colon T\to\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}$，而 α 是形式群 $\alpha\colon \mathrm{G}_m\simeq C_h$ 在 T 上的一个同构，其中 C_h 是由复合映射 $T\to\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}\to\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Ell}}$ 定义的椭圆曲线。这些 T-点上的 $\mathrm{Z}_p^\times$-作用通过对每个 p-进单位 k，将配对 (h,α) 映射为 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }(h,\alpha\circ[k])$ 来给出，其中 $[k]\colon \mathrm{G}_m\to\mathrm{G}_m$ 是 $\widehat{\ }\mathrm{G}_m$ 上的 k 重乘法映射。这就在 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 上的层叠切片 2- 范畴中定义了我们在 $\operatorname{Spf}\mathrm{K}^\wedge_0 E$ 上的 $\mathrm{Z}_p^\times$-作用。为了完成证明，只需证明 $\mathrm{K}^\wedge_0 E$ 上受限的 $\{\pm1\}$-作用是平凡的。

请注意，这个在 $\mathrm{K}^\wedge_0 E$ 上的受限 $\{\pm1\}$-作用，在 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$ 上层叠的切片 2-范畴中，同构于由 $\{\pm1\}$ 作用给出的作用：它在形式谱 $\mathrm{K}^\wedge_0 E$ 上是恒等映射，而在定义于形式谱 $\mathrm{K}^\wedge_0 E$ 上的广义椭圆曲线 C_K 上则是求逆映射 $[-1]$。这是因为，这个在 C_K 上的求逆映射的形式完备化，会在相应的形式 $\widehat{\ }$群 C_K 上诱导求逆映射；而同构 α 是形式群的同态，因此与这个逆映射交换。然而，我们假设 f，因此 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}\to\mathfrak{X}\to\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$，$\mathbf{z}_p$ 也同样是逆不动的，也就是说，这个 $\{\pm1\}$-作用是平凡的。这就完成了证明。 □

虽然定理 3.5 使我们能够抽象地将定理 E 应用于来自 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}$、$\mathcal{O}^{\mathrm{Tate}}$ 或 $\mathcal{O}^{\mathrm{mult}}$ 的 E_∞-环，并由此进行可行的计算（即证明某些消失结果），但为了得到这些 E_∞-环的 KO-同调的可用计算，我们需要了解以下陈述。

命题 3.9. 设 f、$\mathfrak{X}$ 和 E 如定理 3.5 第 2–4 部分所述，假设 f 是逆不动，并记 $\Gamma=\mathrm{Z}_p^\times/\{\pm1\}$。那么在零次，$\mathrm{KO}^\wedge_* E=A_*$ 是在其 Γ-不动点 A_0^0 上的 ind-´étale，A_0^0 是 Z_p 上一个形式光滑代数的 p-进完备化，并且连续Γ上同调群 $H^s_c(\Gamma,A_*)$ 在 $s\geq 1$ 时消失。

我们的证明本质上将归结为复 K-理论计算和已知事实。

证明。对于前两个陈述，注意到根据定理 3.5，E 相对于 $\{\pm1\}$ 是实的，复化映射

$$A_0=\mathrm{KO}^\wedge_0 E\xrightarrow{\simeq}\mathrm{K}^\wedge_0 E=B$$

根据 Pr.2.5，这是一个同构。这使我们只需证明 B 在其 $H=\mathrm{Z}_p^\times$-不动点 B^H 上是 ind-´étale 的，并且 B^H 是 Z_p 上某个形式光滑代数的 p-完备化。与命题 3.7 的证明一样，我们将层叠 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p)$ 定义为 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}$ 的 $\mathrm{F}_p^\times$-伽罗瓦扩张，其关联的 E_∞-环为 $E(p)$。根据命题 3.7，我们还得到 $E(p)$ 的零次复 K-理论，它是 B 的 $\mathrm{F}_p^\times$-伽罗瓦扩张，记为 $B(p)$。再一次应用命题 3.7，这次应用于 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$，其中 $\mathfrak{Y}$ 视我们所处的定理 3.5 的部分而定，可以是 $\mathcal{M}_{\mathrm{Ell}}$、$\mathcal{M}_{\mathrm{Tate}}$ 或 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}_m}$，由此得到形式 Deligne–Mumford 叠的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Spf} B(p) & \longrightarrow & \operatorname{Spf} B & \xrightarrow{f^{\mathrm{ord}}(p^\infty)} & \mathfrak{Y}^{\mathrm{ord}}(p^\infty) & \longrightarrow & \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Ell}}(p^\infty)=\operatorname{Spf} V\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{\mathrm{ord}} & \xrightarrow{f^{\mathrm{ord}}} & \mathfrak{Y}^{\mathrm{ord}} & \xrightarrow{\quad g\quad} & \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\mathrm{Ell}}
\end{array}\tag{3.10}$$

其中所有方块都是笛卡尔的；$\mathfrak{Y}^{\mathrm{ord}}(p^\infty)$ 的定义使得右侧方块是笛卡尔的。特别地，$\mathfrak{Y}^{\mathrm{ord}}(p^\infty)=$ 形式谱 W 是仿射的，因为 g 是仿射的。由此，我们得到交换图式。

p-进环的图示

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}_p & \longrightarrow & W^H & \longrightarrow & B^H & \longrightarrow & B(p)^H \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & W & \xrightarrow{f^{\mathrm{ord}}(p^\infty)} & B & \longrightarrow & B(p) \end{array}$$

其中，竖直态射是 H-不动点的包含，右侧水平态射是 $\mathrm{F}_p^\times$-不动点的包含。由于按照构造，$\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p)$ 是仿射的，并且根据 [LN12, Cor.5.8(2)]，我们有 $\mathfrak{X}^{\mathrm{ord}}(p) \simeq \mathrm{Spf}\ B(p)^H$，于是由 (3.10) 和基变换可得，$B(p)^H \to B$ 是 ind-étale 的。取 $\mathrm{F}_p^\times$-不动点后，可得 $B^H \to B$ 也是一个 ind-étale 扩张。类似地，为了说明 B^H 是一个形式光滑 Z_p-代数的 p-完备化，我们使用以下事实：$B \to B(p)$ 是一个 étale 覆盖，并且形式光滑这一性质在源上是 étale 局部的；参见 [Sta, 061K]。为了说明 $B(p)^H$ 是一个形式光滑 Z_p-代数的 p-完备化，我们援引 [LN12, Lm.5.5(3)]。

对于上同调消失，首先注意到以下 Γ-模同构

$$A_{4t} = \mathrm{KO}^\wedge_{4t} E \simeq \mathrm{KO}^\wedge_0 E(\chi_{2t}) = A_0(\chi_{2t})$$

其中 $\chi_t\colon\ \Gamma \to \Gamma$ 是满足 $k \mapsto k^t$ 的连续特征。这来自稳定 Adams 运算在 KO_* 上的作用，以及根据定理 3.5，E 是实的这一事实。现在我们使用一个一般事实：若 $R \to S$ 相对于 Γ 是归纳伽罗瓦扩张，则对于所有特征 $\chi\colon\ \Gamma \to \Gamma$，连续上同调群 $H^s_c(\Gamma, S(\chi))$ 都消失；[LN12, Lm.5.5]第 2 部分的证明对此有清晰的阐述。至此证明完成，因为我们知道 $A_0^0 \to A_0$ 是一个 Γ-伽罗瓦扩张，因此 $A_*^0 \to A_*$也是。 □

定理 3.5 和 Pr.3.9 都可推广到各种 E_∞-环的 G-同伦不动点。

推论 3.11. 设 G 是 $\mathrm{Z}_p^\times$的一个非平凡有限子群。那么 Tmf_p^{hG}、TMF_p^{hG}、$\mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG}$ 和 $\mathrm{KO}((q))_p^{hG}$ 都是实的，其中所有 G-作用均由 p-进稳定 Adams 运算诱导。此外，若 E 是这些 E_∞-环中的任意一个，则在零次，$\mathrm{L}^\wedge_* E = A_*$ 在其 Γ-不动点 A_0^0之上是归纳-étale 的；A_0^0 是 Z_p上的形式光滑代数的 p-进完备化；并且对于 $s \geq 1$，连续上同调群 $H^s_c(\Gamma, A_*)$ 消失。

证明。经典计算表明，$\mathrm{K}^\wedge_0 \mathrm{Tmf} \simeq V$和 $\mathrm{K}^\wedge_0 \mathrm{K}[\![q]\!] \simeq \mathrm{Cont}(\mathrm{Z}_p^\times, \mathrm{Z}_p)$，其中 V是 Katz 的分圆同余环的 p-完备化（[Beh20，§1.4]），给出以下等价关系

$$\mathrm{K}^\wedge_0 \mathrm{Tmf}^{hG} \simeq (\mathrm{K}^\wedge_0 \mathrm{Tmf})^G \simeq V^G \qquad \mathrm{K}^\wedge_0 \mathrm{K}[\![q]\!]^G \simeq \mathrm{Cont}(\mathbf{Z}_p^\times, \mathbf{Z}_p)^G = \mathrm{Cont}(\Gamma, \mathbf{Z}_p)$$

作为这些 E_∞-环上的 p-进 Adams 运算，因此 [Dav21, 定理 A]（对于 Tmf_p）和 [Dav20, §5.5]（对于其余情形）在上述群上诱导出 ψ-模 $\mathrm{Z}_p^\times$-作用。从上述描述可以清楚看出，G在上述群上的作用是平凡的；光滑情形也是如此，因此 TMF_p 和 $\mathrm{K}((q))_p$的情况类似。将此与计算结果

$$\mathrm{K}^\wedge_* E = \mathrm{K}^\wedge_* R^{hG} \simeq (\mathrm{K}^\wedge_* R)^G \simeq \mathrm{K}_* \otimes (\mathrm{K}^\wedge_0 R)^G \simeq \mathrm{K}_* \otimes \mathrm{K}^\wedge_0 E$$

对于上述任意一种情形的计算结合起来，可知这些 $\mathbb{E}_\infty$-环相对于 G是实的。至于“此外”的陈述，只需照搬 Pr.3.9 的证明，只需将 $\{\pm 1\}$替换为 G，并将 KO 替换为 L。

□

3.2 p进拓扑 q 展开映射的唯一性（定理 A 和 B）

本节中，我们证明定理 A 和 B。首先，我们有定理 A 的以下 p 进推广。

定理 3.12。设 p 为奇素数，f、E 如定理 3.5 第 2–4 部分所述，f'、E' 如定理 3.5 第 3–4 部分所述。假设 f 和 f' 都是逆不动的。那么，任意 $\mathbb{E}_\infty$-环映射 $f\colon E \to E'$，都由其对零阶 K(1) 局部 KO 同调（或 K 同调）群的作用唯一确定，差异至多为 3-同伦。

为证明上述定理，我们将使用定理 E，以及以下关于 Andr´e–Quillen 上同调群的消失陈述。

命题 3.13。取一个奇素数 p 和一个非平凡有限子群 $G \leq \mathbb{Z}_p^\times$。假设 A_* 是分次 $\bar{\theta}$-代数，且 M_* 是分次 $\bar{\theta}$-模。记 $A_*^0 = A_*^\Gamma$，其中 $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times / G$。假设满足以下条件：

1. A_* 和 M_* 相对于 G均无挠且为实。
2. A_0^0 在 $\mathbb{Z}_p$ 上形式光滑。
3. 连续群上同调群 $H_c^s(\Gamma, M_u)$ 在 $s > 0$ 以及每个 $u \in \mathbb{Z}$ 上均为零。
4. A_0 是A_0^0上的 ind-´étale。

然后 $H_{\bar{\theta}}^s(A_*/\mathrm{L}_*, M_*[t]) = 0$ 对于 $s \geq 2$ 以及所有不能被 $2g$ 整除的 t。

要证明这一消失结论，只需照搬 Lawson–Naumann 对[LN12, Lm.5.15], 的证明，将他们的 $\mathbb{Z}_p^\times$替换为我们的 Γ；另请参见 Behrens 对 [DFHH14, Lm.12.7.5 & Lm.12.7.13] 的证明，其中也有类似论证。为避免过多重复，我们就不再给出证明。对于 t 不能被 $2g$ 整除的情形，其消失是因为 M_* 是实的，所以 $L_* \otimes M_0 = M_*$，而L_* 只集中在 $2g$可整除的次数上。

定理 3.12 的证明。首先注意，关于 $\{\pm 1\}$ 的实谱的零次 KO-同调与 K 同调由 Pr.2.5 自然同构。

现在考虑基于 K 的经典 Goerss–Hopkins 障碍理论 [GH04, Cor.4.4] 。由定理 3.5 可知，此处涉及的谱都是实谱，而 Cor.2.3 指出，只需计算其 KO-同调的 Andr´e–Quillen 上同调。由 Pr.3.9 和命题 3.13（针对 $G = \{\pm 1\}$）可知，足够多的障碍群消失，因此可以得出结论：f 在 1-同伦意义下唯一确定——这一事实早已为人熟知。

根据命题 1.2，现在只需证明对于所有 $0 < k < 3$，群 π_k(交换代数(E, E') f) 都为零。注意，E 和 E' 都是 p-完备的，并且根据假设，E' 是 K(1)-局部的，而且

根据定理 3.5， E 和 E' 都是实对象。随后我们可以利用定理 E 得到一个收敛到所需同伦群的谱序列：

$$H_{\theta}^{s}(\mathrm{KO}_{*}^{\wedge}E/\,\mathrm{KO}_{*},\mathrm{KO}_{*}^{\wedge}E'[-t])\Longrightarrow\pi_{t-s}(\mathrm{CAlg}(E,E'),f)$$

结合 Pr.3.9 与命题 3.13 可知，当 $s\geq 2$ 和 t 不被 4 整除时，这些群消失。上述谱序列在 t 被 4 整除的次数中仅集中于 $s=0$ 行和 $s=1$ 行。这立即推出所需的 π_i 在 $0<i<3$ 时消失。 □

备注 3.14。在素数 2 处，上述所有论证都与奇素数情形相同；但素数 2 处的消失结果命题 3.13（见 [DFHH14，Lm.12.7.13]）并不能保证所需的障碍群消失。从本质上说，这是因为 $\pi_1\mathrm{KO}\neq 0$。

为证明定理 A，我们将一般的 p-进唯一性定理 3.12 与标准的有理稳定同伦论结合起来。

定理 A 的证明。考虑如下空间的笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]) & \longrightarrow & \mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\prod\mathrm{KO}[\![q]\!]_p)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\mathrm{KO}[\![q]\!]_{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & \mathrm{CAlg}\left(\mathrm{tmf},(\prod\mathrm{KO}[\![q]\!]_p)_{\mathbf{Q}}\right)\end{array}$$

由 $\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]$的算术裂解方块诱导，其中乘积遍历所有奇素数。应用函子 $\tau_{\leq 2}$ 通常不会与空间的极限交换；然而，根据纤维积在同伦群上导出的长正合序列，我们看到该图表

$$\begin{array}{ccc}\tau_{\leq 2}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]) & \longrightarrow & \tau_{\leq 2}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\prod_{p\neq 2}\mathrm{KO}[\![q]\!]_p)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \tau_{\leq 2}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\mathrm{KO}[\![q]\!]_{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & \tau_{\leq 2}\,\mathrm{CAlg}\left(\mathrm{tmf},\left(\prod_{p\neq 2}\mathrm{KO}[\![q]\!]_p\right)_{\mathbf{Q}}\right)\end{array}\tag{3.15}$$

当且仅当诱导映射为笛卡尔时，

$$\pi_3\,\mathrm{CAlg}\left(\mathrm{tmf},\left(\prod_{p\neq 2}\mathrm{KO}[\![q]\!]_p\right)_{\mathbf{Q}}\right)\to\pi_2\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf},\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}])$$

为零。我们断言，上述 π_3 消失，这将意味着 (3.15) 是笛卡尔的。要看出上述 π_3 消失，请注意一个经典事实：$\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}$ 是以两个变量 x 和 y为自由生成元的形式交换微分分次代数，其中 $|x|=8$ 和 $|y|=12$；参见 [HL16, Pr.4.47]。这意味着，对于有理 E_∞-环 R，映射空间 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}\ R)$自然等价于 $\Omega^8R\times\Omega^{12}R$。特别地，由于 $(\prod\mathrm{KO}[\![q]\!]_p)_{\mathbf{Q}}$ 的同伦群集中在可被 4 整除的次数上

我们看到上述 π_3 消失。

我们断言 (3.15) 中的所有空间都是离散的。若此断言成立，那么从 tmf 到 $\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]$ 的 E_∞-环态射，将由其对所有奇素数 p 的 p-完备化以及有理化后 3-同伦的综合作用唯一确定。利用上文提到的事实：$\mathrm{tmf}_{\mathbb{Q}}$ 是自由形式有理 cdga，且 $\mathrm{KO}[\![q]\!]_{\mathbb{Q}}$ 和 $(\prod \mathrm{KO}[\![q]\!]_p)_{\mathbb{Q}}$ 的同伦群仅支撑在 4 的倍数次度上，我们可知 (3.15) 中下方两个空间是离散的。此外，我们注意到，从 tmf 到 $\mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]$ 的 E_∞-环态射在有理同伦群上的作用，由其在零次有理 K-同调上的作用决定。事实上，这是因为在有理意义下，谱 $\mathrm{K}_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus \mathrm{S}_{\mathbb{Q}}[2n]$ 等价，并且上述所有有理 E_∞-环 R 的同伦群都支撑在偶数次度上，因此存在一个关于 R 自然的识别 $\pi_* R \simeq \mathrm{K}_0\, R$。

注意到 tmf $\to$Tmf 是一个 K(1)-局部等价（[Beh20，p.30]），由命题 1.2 和定理 3.12 可知，(3.15) 的右上空间是离散的，其中 $\mathfrak{X} = \mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\ \mathbf{z}_p}$ 和 $\mathfrak{Y} = \mathcal{M}_{\mathrm{Tate},\ \mathbf{z}_{p\circ}}$

总之，我们看到 (3.15) 中的所有空间都是离散的，并且 E_∞-环 tmf $\to \mathrm{KO}[\![q]\!][\frac{1}{2}]$ 的态射由其对所有奇素数 p 的零次 p-进 K 同调以及零次有理 K 同调的作用，在 3-同伦意义下唯一确定。由于所有这些同调群都是零次整数 K 同调群的完备化或局部化，我们可知此类 E_∞-环的态射由其对零次 K 同调的作用，在 3-同伦意义下唯一确定。

□

为了证明定理 B，我们遵循定理 3.12 的证明的一般思路。

定理 B 的证明。由于实谱的零阶 L 同调与 K 同调由命题 2.5 自然同构，因此经典的、基于 K 的 [GH04 中的 Goerss–Hopkins 障碍理论 Cor.4.4]，结合推论 2.3 和推论 3.11，表明我们只需计算 L 同调作为 θ-代数的 Andr´e–Quillen 上同调$^-$。由推论 3.11 和命题 3.13，足够多的障碍群消失，从而表明 f 在 1-同伦意义下唯一确定。

根据命题 1.2，现在只需证明对于所有 $0 < k < 2g-1$，群 π_k(交换代数($\mathrm{tmf}_p^{hG}, \mathrm{K}[\![q]\!]_p^{hG}$) f) 均为零。根据推论 3.11，我们看到这两个 E_∞-环都是实的，因此可以应用定理 E，得到一个以所需同伦群为极限的谱序列：

$$H_{\bar{\theta}}^{s}(\mathrm{L}_*^{\wedge}\mathrm{tmf}^{hG}/\mathrm{L}_*, \mathrm{L}_*^{\wedge}\mathrm{K}[\![q]\!]^{hG}[-t]) \Longrightarrow \pi_{t-s}(\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}^{hG}, \mathrm{K}[\![q]\!]^{hG}), f)$$

结合推论 3.11 和命题 3.13，我们看到当 $s \geq 2$ 和 t 都不能被 $2g$ 整除时，这些群消失，因此证明完成。 □

3.3 椭圆 Adams 运算的高阶函子性（定理 C 和 D）

在 [Dav21], 中，我们为每个整数 k 定义了 E_∞-环的态射 $\psi^k\colon \mathrm{tmf}[\frac{1}{k}] \to \mathrm{tmf}[\frac{1}{k}]$，并将其称为稳定 Adams 运算，这一名称源于它们的构造、对同伦群的作用，或与拓扑 K- 理论中的经典运算之间的关系。我们对这些运算的构造.....

这些运算采用了 Goerss–Hopkins 障碍理论，而这些技术的一个不幸后果是，未能证明不同 k 对应的这些运算之间存在任何关系。利用上一节中 q-展开映射在同伦意义下的唯一性，我们将看到，这些作用于 Tmf 上的 Adams 运算满足通常的关系 $\psi^{k\ell} \simeq \psi^k \psi^\ell$，且这些关系在 2-同伦意义下成立。

我们先来证明定理 D——实际上，我们会先证明一个针对可对偶拓扑模形式的稍强推广。

定理 3.16。设 p 为奇素数，$G \leq \mathbb{Z}_p^\times$ 为一个非平凡有限子群，其阶为 g。记 $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times / G$，则存在一个函子

$$\Psi_{p,G} \colon B\Gamma \to \mathrm{h}_{2g-2}\,\mathrm{CAlg}$$

它将 $B\Gamma$ 的唯一点映到 Tmf_p^{hG}，并将每个 p-进单位 $\overline{k}$ 映到 ψ^k。

上述论证并非要通过障碍理论证明 Adams 运算 ψ^k 在 Tmf_p 上存在且高度唯一；相反，我们利用 TMF_p 上 Adams 运算的模形式描述，取它们之间高度相干的同伦，再运用前面提到的障碍理论将这些同伦粘合起来。

证明。首先，我们来构造一个具有所需性质的函子 $\Psi_1 \colon B\Gamma \to \mathrm{h}_1$ 交换代数。等价地，这需要构造一个 E_1-幺半群态射 $\Gamma \to \tau_{\leq 0}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p, \mathrm{Tmf}_p)$。为此，考虑以下 E_∞-环的笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tmf}_p & \longrightarrow & \mathrm{KO}[\![q]\!]_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TMF}_p & \longrightarrow & \mathrm{KO}(\!(q)\!)_p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Tmf}_p^{hG} & \longrightarrow & \mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TMF}_p^{hG} & \longrightarrow & \mathrm{KO}(\!(q)\!)_p^{hG} \end{array}$$

通过取 [HL16, Df.5.10] 的整体截面，然后再取 G-同伦不动点，得到以下空间图表：

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\leq d}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}) & \longrightarrow & \tau_{\leq d}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\leq d}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) & \longrightarrow & \tau_{\leq d}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{KO}(\!(q)\!)_p^{hG}) \end{array} \tag{3.17}$$

如上文定理 A 的证明所示，如果我们能证明 $\pi_{d+1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{KO}(\!(q)\!)_p^{hG})$ 消失，那么上述方块就是笛卡尔的。现在将范围限制在 d 中 $0 \leq d \leq 2g-3$ 的情形。对于 $G = \{\pm 1\}$，由定理 3.12（当 $\mathfrak{X} = \mathcal{M}_{\mathrm{Ell},\,\mathbf{z}_p}$ 且 $\mathfrak{Y} = \mathcal{M}^{\mathrm{sm}}_{\mathrm{Tate},\,\mathbf{z}_p}$ 时）和命题 1.2 可知，所需的 π_{d+1} 消失。对于一般的 G，我们借助定理 E 的谱序列以及推论 3.11 和命题 3.13 所给出的 E_2-页上许多项的消失，它们共同表明这个群消失。特别地，当 $d = 0$ 时，（3.17）为笛卡尔方块这一事实意味着，要构造一个空间映射 $\Gamma \to [\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}]_{\mathrm{CAlg}}$，只需构造两个映射。

$$\Psi_{\mathrm{T}} \colon \Gamma \to [\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}]_{\mathrm{CAlg}} \qquad\qquad \Psi_{\mathrm{K}} \colon \Gamma \to [\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG}]_{\mathrm{CAlg}}$$

它们在限制到 $[\mathrm{Tmf}_p^{hG}$、$\mathrm{KO}((q))_p^{hG}]_{\mathrm{CAlg}}$ 时一致——我们稍后将回到 $\mathbf{E}_1$-结构。将第一个映射 Ψ_{T} 定义为以下复合映射

$$\mathbf{Z}_p^\times/\{\pm 1\} \xrightarrow{\Psi_p^{\mathrm{sm}}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{TMF}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) \to \tau_{\leq 0}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG})$$

其中 Ψ_p^{sm}是 $\mathbf{E}_1$-幺半群的一个态射，是 [Dav22b 的 p-进版本；Pr.2.37], 本身是这样一个事实的推论：TMF_p 是椭圆曲线模叠上层 $\mathcal{O}^{\mathrm{top}}$ $_{\mathrm{BT}_2^p}$ 的整体截面；参见 [Dav20, Th.5.17]。映射 Ψ_{K} 既可以像 Ψ_p^{sm}那样，通过模构造来构造，如 [Dav21, Pr.1.18], 所示；也可以利用唯一性陈述定理 3.12，得知从 Tmf_p^{hG}到 $\mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG}$的态射由其在 p-进 K 同调上的作用唯一确定（相差一个 $(2g-1)$-同伦），因此存在 $\psi^k\psi^\ell$ 与 $\psi^{k\ell}$之间的同伦，因为这些态射在取G-同伦不动点之前，在 p-进 K 同调上具有相同的模描述；关于 K 理论计算，请参见命题 3.7；关于这些 Adams 运算的模描述，请参见定理 3.5 的证明。第二种方法利用同伦意义下的唯一性以及 Adams 运算的模描述，表明这两个映射Ψ_{T} 和 Ψ_{K} 限制到 $\mathrm{KO}((q))_p^{hG}$ 后相等。于是我们得到一个空间态射

$$\Psi_1 \colon \Gamma \to [\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}]_{\mathrm{CAlg}} \tag{3.18}$$

并且要验证这是离散 $\mathbf{E}_1$-幺半群的态射，也就是等价地说，集合幺半群的态射，我们沿用前面的论证：要验证 $\psi^k\psi^\ell$ 与 $\psi^{k\ell}$ 之间的关系在离散幺半群 $[\mathrm{Tmf}_p^{hG}$，$\mathrm{Tmf}_p^{hG}]_{\mathrm{CAlg}}$中成立，需要构造这两个态射之间的同伦。现在对 $d=1$使用 (3.17)，我们得到所需的同伦：将其限制到 TMF_p^{hG}上时，它来自 Ψ_p^{sm}的构造；将其限制到 $\mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG}$上时，则利用从 Tmf_p^{hG}到 $\mathrm{KO}[\![q]\!]_p^{hG}$的态射的同伦唯一性。这些同伦在 $\mathrm{KO}((q))_p$ 上相符，因为这类态射在相差 $(2g-1)$-同伦的意义下唯一，因此我们在 Tmf_p^{hG}上得到一个同伦 $\psi^k\psi^\ell \simeq \psi^{k\ell}$，并由此可知，(3.18) 可以提升为离散 $\mathbf{E}_1$-幺半群的态射。

为了构造定理中所承诺的函子，我们首先注意到，自然映射 $\mathrm{Tmf}_p \to \mathrm{TMF}_p$ 是在元素 $\Delta^r \in \pi_{24r}\mathrm{Tmf}_p$处的局部化，其中当 $p=3$ 时，我们有$r=3$，否则 $r=1$。这一性质在 G-同伦不动点上仍然成立。事实上，从对同伦群的作用可以清楚地看出，自然映射 $\mathrm{Tmf}_p^{hG} \to \mathrm{TMF}_p^{hG}$是在 $\Delta^s \in \pi_{24s}\mathrm{Tmf}_p^{hG}$处的局部化，其中 s 可被 $2p-2$整除；也可以选择更小的 s，但这与我们的论证无关。这意味着空间的自然映射（其截断出现在 (3.17) 中）

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}) \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathrm{TMF}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG})$$

可以认作 $\mathbf{E}_1$-幺半群的自然映射

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}) \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{TMF}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) \tag{3.19}$$

通过求逆此 Δ^s定义。现在我们声称，对于 $0 \leq d \leq 2g-3$，下面的自然

E_1-幺半群图表

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\le d}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}) & \longrightarrow & \tau_{\le d}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{TMF}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\le 0}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG}) & \longrightarrow & \tau_{\le 0}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{TMF}_p^{hG}, \mathrm{TMF}_p^{hG}) \end{array} \tag{3.20}$$

是笛卡尔图。这实际上可由笛卡尔图 (3.17) 和定理 B 得出，后者表明 (3.17) 右侧的空间是离散的，因此自然映射 (3.19) 在正次数的同伦群上是一个同构。因此，为了构造所需的 E_1-幺半群$\Gamma \to \tau_{\le 2g-3}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{Tmf}_p^{hG}, \mathrm{Tmf}_p^{hG})$ 映射，只需构造到笛卡尔图 (3.20) 中其他因子的 E_1-幺半群映射即可。这可以利用上文讨论的映射 Ψ_1 和 Ψ_p^{sm} 来实现；由于 Ψ_1 的构造也使用了 Ψ_p^{sm}，这些映射在 TMF_p^{hG} 上保持一致。 □

*Pro*定理 D 的.....。将定理 3.16 的函子与连通覆盖函子复合。 □

最后，结合定理 D 与标准的有理信息，我们可以证明定理 C。

定理 C 的证明。固定一个整数 n，其素数集合为 $p|n$，并记 $M = \prod_{p|n}\mathbf{N}$。对于每个奇素数 $\ell \nmid n$，幺半群的包含

$$M \xrightarrow{(p_i^{e_i})\mapsto \prod p_i^{e_i}} \mathbf{N} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_\ell$$

可分解为单射 $M \to \mathbf{Z}_p^\times$，且在进一步商去 $M \to \mathbf{Z}_p^\times/\{\pm 1\}$ 后仍保持单射，因为 M 不包含除 0 之外具有加法逆元的元素。对于所有这样的奇数 ℓ，我们于是得到一个 E_1-幺半群态射

$$M \to \tau_{\le 1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}_\ell, \mathrm{tmf}_\ell)$$

关于 $G = \{\pm 1\}$ 的定理 D。存在一个类似的有理构造。

$$\Psi_{\mathbf{Q}}^n \colon M \to \tau_{\le 1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}, \mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}})$$

我们定义如下：首先，注意 $\Psi_{\mathbf{Q}}^n$ DFHH14 §12 第 [步中的有理 Goerss–Hopkins 障碍理论表明，其余域是离散的，且等价于 Q-代数 $\pi_*\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}$ 的自同态之间的映射集合。接下来，回顾定理 A 的证明，$\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}$ 是由两个变量 x 和 y 生成的自由形式交换微分分次代数，其中 $|x| = 8$ 和 $|y| = 12$。然后，我们定义 $\Psi_{\mathbf{Q}}^n$，令 p_i 对应于 $\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}$ 的自同态，该自同态将 x 送到 $p_i^4 x$，将 y 送到 $p_i^6 y$，并按乘法方式延拓。

为将 Ψ_ℓ^n 与 $\Psi_{\mathbf{Q}}^n$粘合起来，使用 $\mathrm{tmf}[\frac{1}{2mn}]$ 的算术裂解方块，从而得到空间图表

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\le 1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}[\frac{1}{2mn}], \mathrm{tmf}[\frac{1}{2mn}]) & \longrightarrow & \prod_{2\neq \ell \nmid n} \tau_{\le 1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}_\ell, \mathrm{tmf}_\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\le 1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}, \mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}) & \longrightarrow & \tau_{\le 1}\,\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}_{\mathbf{Q}}, (\prod_{2\neq \ell \nmid n} \mathrm{tmf}_\ell)_{\mathbf{Q}}) \end{array}$$

其中左侧的垂直映射和上方的水平映射是 E_1-幺半群的态射。再次如 Th.A 的证明所示，对于任意有理 E_∞-环 R，空间 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}\ R)$ 等价于 $\Omega^{\infty+8}R \times \Omega^{\infty+12}R$，因此上述图表是笛卡尔的，因为 $\pi_2 \mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}_{\mathbb{Q}}, (\prod \mathrm{tmf}_\ell)_{\mathbb{Q}})$ 消失了。Ψ^n 的构造现在归结为证明，当限制到右下角的空间时，$\prod \Psi^n_\ell$ 与 $\Psi^n_{\mathbb{Q}}$ 一致。再次借助 DFHH14 第 12.9] 节步骤 1 中的有理 Goerss–Hopkins 障碍理论，可知这个右下角空间是离散的，并且在取同伦群后等价于相应的分次 $\mathbb{Q}$-代数映射集合。特别地，Dav21 的 Th.C] 中给出的 ψ^k 计算表明，当限制到右下角的这个空间时，$\prod \Psi^n_\ell$ 与 $\Psi^n_{\mathbb{Q}}$一致，从而得到我们所需的空间态射

$$\Psi^n \colon M \to \tau_{\leq 1} \mathrm{CAlg}(\mathrm{tmf}[\frac{1}{2n}], \mathrm{tmf}[\frac{1}{2n}]).$$

再次，为了证明这可以校正为 E_1-幺半群的态射，我们需要检查是否存在能够确认这一点的同伦。与上文定理 3.16 的证明一样，这应通过参考从 $\mathrm{tmf}_{\mathbb{Q}}$ 到 $(\prod \mathrm{tmf}_\ell)_{\mathbb{Q}}$的 E_∞-环态射的唯一性来完成；这一点显然可由上述对 $\mathrm{tmf}_{\mathbb{Q}}$ 的刻画，以及 $(\prod \mathrm{tmf}_\ell)_{\mathbb{Q}}$ 对于$1 \leq i \leq 7$具有平凡的 π_i 这一事实得出。

类似地，我们可以利用定理 3.16 将 tmf_ℓ 上的同伦 $\psi^{-1} \simeq \mathrm{id}$，以及 $\mathrm{tmf}_{\mathbb{Q}}$ 上的同伦（由构造给出），提升为 $\mathrm{tmf}[\frac{1}{2}]$上的一个同伦。至此，证明完成。 □

注 3.21。我们之所以在证明定理 C 时将范围从 Tmf 限定为 tmf，唯一的原因是有理化后，tmf 具有一个带泛性质的简单对象。或许可以利用这个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tmf}_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{tmf}_{\mathbb{Q}}[c_4^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TMF}_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{TMF}_{\mathbb{Q}}[c_4^{-1}] \end{array}$$

证明一个适用于 Tmf 的定理 C 版本。

参考文献

[Beh20] Mark Behrens。《拓扑模形式与自守形式》。载于《同伦论手册》，第221–261页。佛罗里达州博卡拉顿：CRC 出版社，2020年。[Dav20] Jack Morgan Davies。《关于 Lurie 定理及其应用》，2020年。arXiv 预印本，arXiv:2007.00482。[Dav21] Jack Morgan Davies。《在可对偶拓扑模形式上构造和计算 Adams 运算》，2021年。arXiv 预印本，arXiv:2104.13407。[Dav22a] Jack Morgan Davies。《椭圆上同调在同伦意义下是唯一的》。《澳大利亚数学会杂志》，第1–20页，2022年。

[Dav22b] Jack Morgan Davies. 拓扑模形式上的 Hecke 算子，2022 年。arXiv 预印本，arXiv:2212.06208。[DFHH14] Christopher L. Douglas、John Francis、André G. Henriques 和 Michael A. Hill（编）。《拓扑模形式》。根据 2007 年 3 月 25 日至 31 日在美国新罕布什尔州北康威举行的 Talbot 研讨会编写，第 201 卷。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会（AMS），2014 年。[DR73] Pierre Deligne 和 M. Rapoport。椭圆曲线的模空间概形。《单变量模函数 II》，1972 年安特卫普大学国际暑期学校论文集，《数学讲义》349，143–316 页（1973 年），1973 年。[GH04] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins。交换环谱的模空间。载于《结构化环谱》，第 151–200 页。剑桥：剑桥大学出版社，2004 年。[GH05] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins。结构化环谱的模问题。2005 年。可见 https://sites.math.northwestern.edu/~pgoerss/spectra/obstruct.pdf。[HL16] Michael Hill 和 Tyler Lawson。具有层级结构的拓扑模形式。《数学发明》，203(2):359–416，2016 年。[HS99] Mark Hovey 和 Neil P. Strickland。Morava K-理论与局部化，第 666 卷。普罗维登斯，罗得岛州：美国数学学会（AMS），1999 年。[KM85] Nicholas M. Katz 和 Barry Mazur。椭圆曲线的算术模空间，第 108 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1985 年。[Kuh04] Nicholas J. Kuhn。Tate 上同调与多项式函子的周期局部化。《数学发明》，157(2):345–370，2004 年。[LN12] Tyler Lawson 和 Niko Naumann。高度为 2 的截断 Brown–Peterson 谱的交换性条件。《拓扑学杂志》，5(1):137–168，2012 年。[LN14] Tyler Lawson 和 Niko Naumann。Steenrod 代数上的图表的严格交换实现，以及素数 2 处的拓扑模形式。《国际数学研究通知》，2014(10):2773–2813，2014 年。[Mei22] Lennart Meier。具有层级结构的拓扑模形式：分解与对偶性。《美国数学会汇刊》，375(2):1305–1355，2022 年。[Sta] Stacks Project 作者。《Stacks Project》。https://stacks.math.columbia.edu。