Università degli studi di Pavia
Dipartimento di Matematica Felice Casorati
Corso di Laurea Magistrale in Matematica



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

球形区域中亥姆霍兹解的倏逝平面波近似

数学硕士学位论文

指导教师（Supervisor）：
Andrea Moiola 教授共同指导教
师（Co-Supervisor）：
EmileParolin 博士

毕业论文作者：
Nicola Galante学
号 493107

2021–2022 学年

arXiv:2305.02175v1 [math.NA] 3 May 2023

摘要

近期在 [19] 中展示的结果，在通过平面波叠加实现亥姆霍兹解的稳定近似方面取得了重大进展。研究表明，只要存在系数有界的展开形式的精确近似，就可以通过正则化技术有效克服基于平面波的特雷夫茨方法固有的数值不稳定性和病态性。当目标解包含高阶傅里叶模态时，由于展开系数呈指数增长，传播平面波无法产生稳定近似。相反，倏逝平面波的模态内容覆盖高阶傅里叶区域，因此能够同时提供精确且稳定的结果。所开发的数值方法按照概率密度函数对参数域进行采样，以此构建倏逝平面波近似集；与传统的传播平面波方案相比，该方法取得了显著改进。

以下工作将这项研究扩展到三维情形，验证了已取得的结果，并提出了新的结果。通过将三维雅可比–安格尔恒等式推广到复值方向，我们证明，球内任意亥姆霍兹解都可表示为倏逝平面波的连续叠加。该表示扩展了经典的赫格洛茨表示，并给出了一个重要的稳定性结果，而仅使用传播波无法实现这一点。我们针对三维情形设计了所提出的数值方案，并通过引入涉及极值点系的新采样策略加以扩展。数值实验检验了这些方法，结果表明它们达到了预期的精度和有界系数稳定性，与二维情形一致。

目录

引言 **7**

1 球面几何中的亥姆霍兹方程 13

1.1 球面波.131.2 归一化系数的渐近式.18

2 稳定数值近似 21

2.1 稳定逼近的概念.212.2 正则化边界采样法.222.3 极值点系.242.4 误差估计.27

3 I传播平面波集的不稳定性 31

3.1 传播平面波.313.2 赫格洛茨表示.323.3 传播平面波集不稳定.343.4 模态分析.353.5 数值实验.38

4 倏逝型平面波 41

4.1 定义.414.2 复方向 Jacobi–Anger 恒等式.444.3 维格纳矩阵.494.4 模态分析.50

5 Herglotz 变换 57

<escape>5.1 赫格洛茨密度空间.575.2 Herglotz 积分表示.635.3 再生核性质.67</escape>

6 倏逝平面波近似集 69

6.1 逼近集.696.2 猜想性的稳定逼近结果.736.3 概率密度与样本.75

7 数值结果 83

7.1 倏逝平面波的稳定性.837.2 解的代理函数的近似.887.3 奇点附近精度的提升.947.4 不同的几何形状.100

结论 **109**

参考文献 **110**

引言

理论框架

齐次亥姆霍兹方程

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \tag{1}$$

亥姆霍兹方程是广泛应用于各种科学与工程领域的基础数学模型，包括声学、电磁学、线性弹性力学和量子力学。它与标量波动方程 $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0$ 密切相关，因为该方程描述了时间谐波解 $U(\mathbf{x}, t) = \Re\{e^{-i\omega t} u(\mathbf{x})\}$ 的空间依赖关系，其中实参数 $\kappa = \omega/c > 0$ 是波数，而 c 和 ω 分别是波速和角频率。

不同于波数 κ 相对较小的情形（此时亥姆霍兹方程可视为拉普拉斯方程的扰动），一旦进入高频问题领域，即波长 $\lambda = 2\pi/\kappa$ 远小于计算域的特征长度时，亥姆霍兹解的逼近就会变得越来越困难且计算成本高昂。主要困难源于亥姆霍兹解的高度振荡特性；若要使用分片多项式达到高精度，就需要大量自由度。

文献中提出了多种数值方法来处理这一问题，其中，特雷夫茨方法尤为引人关注。这些离散格式采用的试函数和检验函数，在局部上是所近似微分方程的分片解——在本例中，即亥姆霍兹方程的分片解——并具有显著优势，尤其是计算成本相对较低。与有限元方法（FEMs）一样，这类方法可进行体离散；与边界元方法（BEMs）一样，它们只需在低维流形上进行积分。事实上，与标准数值方法相比，特雷夫茨方法往往能够以更少的自由度获得更准确的解，从而显著节省计算开销，尤其适用于大规模问题。

在所有特雷夫茨逼近空间及其相应的基函数中，传播平面波 $e^{i\kappa \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$，其中 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 1$表示传播方向，尤为值得关注，因为其简单的指数表达式使得

Trefftz格式的实现非常经济。具体而言，在任意具有分片平坦或直线边界的平坦子流形上计算积分，都可以通过闭式形式完成，且所需工作量与 κ 无关（见 [11, 第 4 节。1]）。遗憾的是，当采用高分辨率试探空间时，由传播平面波生成的线性系统容易出现病态性。事实上，由于传播方向相近的传播平面波近乎线性相关，展开的计算已知在数值上不稳定（见 [11, 第 4 节。3]）。这是一种纯粹的数值现象，在使用浮点运算时会出现。因此，无法达到逼近理论所预测的收敛性，数值格式的精度也会停滞不前。

二维领域的最新结果

[19]中所述的研究属于已提出的框架，并在通过平面波叠加对亥姆霍兹解进行稳定逼近方面带来了令人瞩目的新进展。为了给出明确而精确的理论结果，分析仍局限于圆形区域的情形。框架逼近理论的最新进展（见 [2, 3]）表明，只要存在系数有界的展开形式的精确近似，正则化技术就能有效解决病态性问题。在这种情况下，要在浮点运算中获得精确结果，不仅需要考察最佳逼近误差，还需要研究展开中系数的范数，而这本质上取决于所选的表示方式。

当使用传播平面波的线性组合来表示具有高阶傅里叶模态内容的亥姆霍兹解时，所得展开不可避免地包含指数级大的系数。 [19, 定理 4.3], 中的证明揭示了这一现象，并表明逼近的不稳定性源于传播平面波无法充分表示任意光滑亥姆霍兹方程解的高阶傅里叶模态。

因此，关键思路是用其他亥姆霍兹解丰富传播平面波逼近集，从而在保持实现简单且成本低廉的同时，获得精度高且系数有界的逼近。倏逝平面波似乎是这项任务的天然选择，因为它们保留了形式 $e^{i\kappa \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$，但其特点是具有复值方向 $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^n$，其中$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$，以满足亥姆霍兹方程。因此，主要任务仍是确定一组合适的倏逝平面波，并验证其在保证精度和稳定性方面的有效性。

模态分析得以进行，得益于所考虑的圆形区域。分析表明，倏逝平面波能够有效近似亥姆霍兹解的高阶傅里叶模态。这是传播平面波所不具备的一项关键特性。结果证实了预期： [19,

定理 6。7], 该定理确立了单位圆盘上的每个亥姆霍兹解都可以唯一地表示为倏逝平面波的连续叠加，而且，其对应的密度在适当的范数下是有界的。从这个意义上说，该定理可以被视为连续层面上的一种稳定性结果。其主要重点在于 *Herglotz* 变换 [19, 定义 6。6], 这是一种积分算子，它使得亥姆霍兹方程的每个解都能够表示为加权 L^2 空间中某个唯一函数的像，该空间称为赫格洛茨密度空间 [19, 公式 (6.5)]。此外， [19, 推论 6。13] 中的结果表明，Herglotz 变换将赫格洛茨密度空间中的任意点求值泛函映射为一个倏逝平面波。由此得到的等价关系，即亥姆霍兹解的近似问题（通过倏逝平面波实现）与相应 Herglotz 密度的近似问题（通过求值泛函实现）之间的等价性，为稳定的离散表示铺平了道路。

[19, 第 7] 节所述的数值格式采用了 [5]提出的思路，以便根据有限个样本重构赫格洛茨密度。尽管现有文献尚未提供足够的理论依据，无法确保所需的高精度且系数有界的近似性质，但本文给出的连续层面结果和数值实验支持了 [19, 猜想 71]的有效性。因此，亥姆霍兹解空间中的倏逝平面波集也有望具有类似的近似性质。

最后，通过多种形式对所开发的基于圆形几何的数值方法进行了评估。与传统的传播平面波方案相比，该方法展现出显著的改进。

三维扩展

将 [19]中取得的结果推广，存在许多潜在途径。例如，可以扩大研究范围以涵盖更一般的几何形状，从而应用 Trefftz格式；也可以考虑更复杂的边值问题，例如涉及时谐麦克斯韦方程或弹性波方程的问题。然而，本文选择了另一条同样重要的路径：将 [19]中的结果推广到三维几何。与此类似，分析仍局限于球形区域，以便通过模态分析展示明确的理论结果。

借助球面波的引入，亥姆霍兹解空间的结构可以轻松推广到球域。首先面临的挑战是，与二维情形不同，我们没有显而易见的方法在球面上选取间距相等的点。对于定义传播平面波逼近集而言，这似乎是理想的。 [23, 27] 中讨论的极值点系统具有优异的几何特性，能够生成分布均匀的点，因而为此提供了一个潜在解决方案。此外，这些点

在用于构造插值积分公式时，这些点表现出良好的积分性质。得益于推论 2.5 中给出的结果，我们能够将其纳入用于逼近亥姆霍兹解的基于采样的数值方法中。此外，我们利用极值系统提供数值证据，说明使用传播平面波逼近亥姆霍兹解时存在不稳定性的负面结果；这一点已在定理 3.4 中得到理论验证。

扩展到三维情形的另一个重要方面涉及在定义4.1中引入倏逝平面波，以及相关的复方向空间参数化 $\{\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3 : \mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 1\}$。其定义背后的理念保持不变：给定一个复值方向$\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$，倏逝平面波 $e^{i\kappa\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$ 以大于κ 的表观波数沿传播方向 $\Re\{\mathbf{d}\}$ 振荡，同时沿方向 $\Im\{\mathbf{d}\}$呈指数衰减。然而，与二维情形 [19, 第 5], 不同，“参数复化”过程——即通过将球坐标角复化而得到的复方向空间参数化——事实证明不太适合用于分析 Herglotz 密度空间，因为难以展示一个显式的希尔伯特基。因此，我们选择定义一个复值参考方向，然后通过与欧拉角相关联的正交矩阵，考察其在空间中的旋转。

这一选择与定理中引入的雅可比–安格尔恒等式密切相关4.7。借助 [18], 中的结果，这一结果很容易推广到二维复数情形，但在三维情形下，这一步并不简单。这需要扩展球谐函数的定义，以纳入复值方向；为此，还需进一步将费雷尔函数（1.4）扩展为缔合勒让德多项式（4.8）。此外， [6, 式（2.30）]和 [6, 式（2.46）]中给出的恒等式等一些基本代数性质也必须推广。

引入维格纳矩阵后，便可以进行模态分析。这些矩阵的特定性质（见 [7, 25]）对于验证倏逝平面波在近似亥姆霍兹解的高阶傅里叶模态方面的有效性至关重要。此外，这些性质对于构造赫格洛茨密度空间，以及定义和研究定义5.1中提出的该空间的希尔伯特基也起着关键作用。

这些结果为将赫格洛茨变换推广到三维情形奠定了基础 [19, 定义 6。6] 因此，定理 5.9 指出，单位球内任意亥姆霍兹解都可以唯一地表示为倏逝平面波的连续叠加。此外，相应的密度在适当的范数下有界。所给出的积分表示可视为标准 Herglotz 表示的推广（见 [6, 公式 (1.27)]），并具有稳健的稳定性结果，而仅考虑传播平面波时则不成立。基于这些发现，在 [19, 第 6 节。2] 连续框架情形中的所有结果，以及

赫格洛茨密度空间的再生核性质也得以保留，从而为离散化策略铺平了道路。

所提出的数值方案反映了 [19, Sec. 7]，中提出的方案，该方案受到 [5] 中讨论的加权最小二乘最优采样过程的启发。其主要目标是在参数域中生成采样节点分布，用于重构 Herglotz 密度，进而重构相关的亥姆霍兹解。明确掌握参数空间的希尔伯特基，对于这些过程的成功至关重要。此外，在定义 6.4 中，我们考虑了纳入极值点系统的简单变体。然而，为确保方法的稳定性，仍需进行一些数值逼近，包括对概率密度函数以及 Herglotz 密度空间基的归一化系数进行数值逼近；这些都是确保该方法有效的关键要素。

尽管实验表明，只要采用足够的过采样和正则化，所提出的数值技术就能达到预期精度并具有有界系数稳定性，但它们仍缺乏完整的证明，并且依赖于 [19, 猜想 7。1] 中提出的猜想。在三维情形下，与二维情形类似，该猜想得到了连续层面结果和各种数值实验的支持。与传统的传播平面波方案相比，所述数值方法通过近似不可避免出现的高阶傅里叶模态，在奇点附近提供更高的精度。此外，该方法似乎还保留了准最优性（见 [19, 第 8 节。4]），这意味着在精度水平固定时，近似前 N 个模态所需的自由度预算随 N 线性增长。

此外，与 [19, 第 8.5]，节类似，尽管所开发的倏逝型平面波近似集合是基于对单位球的分析构建的，但仍在立方体和四面体等不同几何形状上进行了测试。结果表明其具有出色的逼近性质，显示出所提出的数值方法在平面波逼近和特雷夫茨方法中的应用潜力。

论文大纲

在第 1章中，我们回顾了有关球形区域中亥姆霍兹方程解空间结构的已有结果。我们介绍了所谓的球面波，证明它们构成一个希尔伯特基，并研究了其 H^1归一化系数的渐近行为。

第2 章介绍了稳定逼近这一关键概念（见定义2.1），并提出了一种用于计算亥姆霍兹解近似的基于采样的数值方案。该简单方法依赖于正则化奇异值分解和过采样。定义2.2 介绍了极值点系，第2.3节说明了如何计算这些极值点系，强调了它们在定义传播平面波逼近集以及构造采样

点集以用于该数值方案中的球面上。该方案所提供解的精度在推论2.5中得到了证明，即只要逼近集具有稳定逼近性质，并且选取了适当的采样点集（例如极值点系），就可以通过数值方法计算出高精度的解。

第3 章表明，尽管采用了正则化技术，由于展开系数呈指数增长，传播平面波无法在单位球内实现稳定近似（见定理 3.4）。此外，我们证明，与球面波相关的 Herglotz 密度并非一致有界，这意味着对相关积分表示进行离散化，无法得到系数有界的离散表示。最后，数值实验验证了传播平面波集的不稳定性。

第4 章介绍倏逝平面波（见定义 4.1）及其模态分析中的若干重要组成部分，包括定理 4.7 中针对复值方向的广义雅可比–安格尔恒等式，以及定义4.7中的维格纳矩阵。与传播情形不同，倏逝平面波的模态内容能够覆盖高频傅里叶区域。

第5章介绍定义 5.1中所述的赫格洛茨密度空间，并通过雅可比–安格尔恒等式阐明该空间与亥姆霍兹方程解空间之间的紧密联系。由此引出一个积分算子——Herglotz 变换（见定义 5.8），该算子提供了一种表示方法，可将单位球内任意亥姆霍兹解表示为倏逝平面波的连续叠加，详见定理 5.9。这种表示是经典赫格洛茨表示的推广，给出了稳定且稳健的结果，而仅用传播平面波无法实现这一点。定理 5.13 证明，倏逝平面波构成亥姆霍兹解空间的连续框架；命题 5.14 则表明赫格洛茨密度空间具有再生核性质。这些关键特性为开发实用数值方法铺平了道路。

第6章讨论了一种利用倏逝平面波，在单位球中实现亥姆霍兹解稳定数值近似的方法。该方法的核心是根据概率密度函数，在参数域中生成采样节点的分布。我们提出了几种采样策略，其中包括结合极值点系统的简单变体。

第7 章介绍了若干数值实验，支持使用倏逝平面波近似亥姆霍兹解[1]。结果表明，所讨论的方法在球面几何和其他凸域中均能达到所需的精度和稳定性。

最后，我们总结本研究的结论，并探讨未来研究的可能方向。

[1]用于生成本文数值结果的 MATLAB 代码可在 https://github.com/Nicola-Galante/evanescent-plane-wave-approximation 获取。

第1章

球面几何中的亥姆霍兹方程

在本章中，我们参考文献中关于球域内亥姆霍兹方程解的诸多已知1，引入球面波的概念，以下用 b_ℓ^m表示，并由此定义由其生成的空间 $\mathcal{B}$ 。随后，我们给出若干引理，说明 $\mathcal{B}$配备适当范数后确实构成一个希尔伯特空间，球面波是其正交归一基，且该空间与亥姆霍兹方程解空间相同。最后，我们介绍球面波归一化系数的指数增长。

1.1 球面波

为了扩展 [19]针对二维情形所做的工作，本文考虑三维几何。具体而言，我们只考虑球形区域这一简单情形：这种方法可以通过分离变量法进行模态分析。事实上，正如后文将会清楚说明的，球面波构成一个正交归一基，并且是单位球内亥姆霍兹方程（1）的有界解，且可在球坐标中分离变量。因此，在对波数 κ 进行缩放后，且不失一般性，我们假设区域为开单位球，以下记作 $B_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\}$。我们还引入记号 $\mathbb{S}^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ |\mathbf{x}| = 1\}$，而当球面作为 ∂B_1 的边界时，我们使用 B_1 来特别强调这一点（考虑到其在不同于 B_1的区域上的应用）。我们还指出，球面波广泛应用于许多 Trefftz格式中，参见 [11] 及相关参考文献。

首先，我们简要介绍一些有助于定义球面波的特殊函数。在以下定义的各种约定中，我们选择采用 [18]。为方便记号，我们

定义指标集合

$$\mathcal{I} := \{(\ell, m) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le |m| \le \ell\}.$$

符合 [18, 式（10.47.3）], 对每个 $\ell \ge 0$，第一类球贝塞尔函数 是球贝塞尔方程的解

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}r^2} + 2r \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} + (r^2 - \ell(\ell+1))y = 0, \tag{1.1}$$

且定义为

$$j_\ell(r) := \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(r), \qquad r > 0, \tag{1.2}$$

其中， $J_\nu(r)$ 是通常的第一类贝塞尔函数（参见 [18, 式 (10.2.2)]）。球贝塞尔函数呈振荡并衰减，其渐近行为为 $r \to \infty$ ，且对于任意 $r \ge 0$ 均有界。

根据 [18, 公式（14.7.10）和（14.9.3）], 对于每一个（ℓ, m） $\in \mathcal{I}$，费雷尔函数（也称为第一类费雷尔函数或缔合勒让德多项式）是广义勒让德方程的解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0, \tag{1.3}$$

并定义为

$$\mathsf{P}_\ell^m(x) := \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell, \qquad |x| \le 1, \tag{1.4}$$

以便

$$\mathsf{P}_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \mathsf{P}_\ell^m(x), \qquad |x| \le 1. \tag{1.5}$$

特别地，P_ℓ^m称为次数为 ℓ 、阶数为 m的费雷尔函数；而当 $m = 0$ 时，它简称为次数为 ℓ的勒让德多项式。在文献中已知的众多正交关系中，对我们的讨论而言，值得回顾的是：固定阶数 m 时，费雷尔函数是正交的（参见 [18, 式 (14.17.6)]），即

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_\ell^m(x) \mathsf{P}_q^m(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\delta_{\ell,q}}{2\pi(\gamma_\ell^m)^2}, \tag{1.6}$$

其中

$$\gamma_\ell^m := \left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{1/2}. \tag{1.7}$$

根据 [18, 式 (14.30.1)], , 对于每个$\hat{}\mathbf{x} = (\sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2, \cos\theta_1) \in \mathbb{S}^2$，其中 $\theta_1 \in [0, \pi]$, $\theta_2 \in [0, 2\pi)$；并且对于每个 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$，次数为 ℓ 、阶数为 m 的球谐函数定义如下（此处稍微宽泛地使用了记号）：

$$Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) = Y_\ell^m(\theta_1, \theta_2) := \gamma_\ell^m e^{im\theta_2} \mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta_1), \tag{1.8}$$

其中因子 γ_ℓ^m用作归一化常数，也就是说，它满足 $\|Y_\ell^m\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}=1$。关于这些定义的更多细节，例如请参见 [6, 17]。为避免混淆，请注意，我们采用 *Condon-Shortley* 约定，即在定义费雷尔函数时，将相位因子放在 $(-1)^m$中（1.4），而不是放在 (1.7) 中。

球谐函数 Y_ℓ^m通过将其从$\mathbb{S}^2$ 延拓到所有 $\mathbb{R}^3$ ，并将其视为次数为 ℓ的齐次多项式，得到实心调和函数；具体地，令 $R_\ell^m(\mathbf{x}) := |\mathbf{x}|^\ell Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}})$，其中$\hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$，而 $\{R_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 恰好构成 $\mathcal{H}_\ell$的一组基； $\mathcal{H}_\ell$是次数为 ℓ的调和齐次多项式空间。

对于每个 $\ell \geq 0$，由于复指数族$\{\varphi \mapsto e^{im\varphi}\}_{|m|\leq\ell}$ 在 $L^2(0,2\pi)$中的正交性，并记 $\mathcal{Y}_\ell$ 为 $\mathcal{H}_\ell$中多项式在单位球面$\mathbb{S}^2$ 上的限制， $\{Y_\ell^m\}_{|m|\leq\ell}$ 是 $\mathcal{Y}_\ell$ 关于 $L^2(\mathbb{S}^2)$的厄米内积所构成的一组正交归一基。

此外，得益于（1.6），函数 $\{Y_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 构成了 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 中的正交归一基：

$$\begin{aligned}\left(Y_\ell^m, Y_q^n\right)_{L^2(\mathbb{S}^2)} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_\ell^m(\theta_1,\theta_2)\overline{Y_q^n(\theta_1,\theta_2)}\sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \gamma_\ell^m\gamma_q^n\int_0^{2\pi} e^{i\theta_2(m-n)}\mathrm{d}\theta_2\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_\ell^m(x)\mathsf{P}_q^n(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\delta_{m,n}\gamma_\ell^m\gamma_q^m\int_{-1}^{1}\mathsf{P}_\ell^m(x)\mathsf{P}_q^m(x)\mathrm{d}x = \delta_{\ell,q}\delta_{m,n}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

此外，对于每个 $\ell\geq 0$， $\mathcal{Y}_\ell$ 恰好是单位球面上与特征值 $-\ell(\ell+1)$ 对应的拉普拉斯–贝尔特拉米算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 的特征空间，即

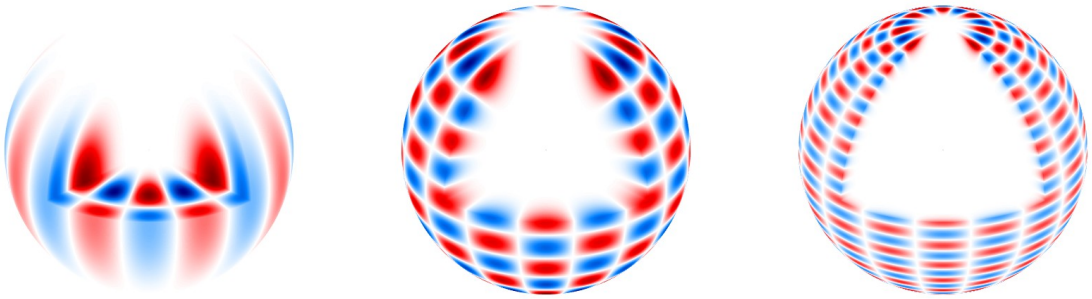
$$\Delta_{\mathbb{S}^2}Y_\ell^m + \ell(\ell+1)Y_\ell^m = 0, \quad 0\leq|m|\leq\ell, \tag{1.10}$$

其中，特征值 $-\ell(\ell+1)$ 的重数为 $2\ell+1=\dim(\mathcal{Y}_\ell)$ [17, 定理 2.4。1]。关于这一点，我们回顾一下，对于任意足够光滑的函数 $u:\ \mathbb{S}^2\to\mathbb{C}$，拉普拉斯–贝尔特拉米算子 $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ 定义如下：

$$\Delta_{\mathbb{S}^2}u := \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta_2^2} + \frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1\frac{\partial u}{\partial\theta_1}\right). \tag{1.11}$$

现在我们可以给出下一个定义了。首先，让我们引入以下依赖于 κ 的厄米内积及其相关范数：对于任意 $u,\ v\in H^1(B_1)$，

$$\begin{aligned}(u,v)_{\mathcal{B}} &:= (u,v)_{L^2(B_1)} + \kappa^{-2}(\nabla u,\nabla v)_{L^2(B_1)^2}, \\ \|u\|_{\mathcal{B}}^2 &:= (u,u)_{\mathcal{B}}.\end{aligned} \tag{1.12}$$



(a) 传播型 $\ell = 8$。 (b) 掠射型 $\ell = 16$。 (c) 倏逝型 $\ell = 32$。

图 1.1：单位球边界（去除第一卦限）上若干球面波的实部 b_ℓ^m $\mathbf{x}$ $\mathbf{x}$ $=(x, y, z)$: $x > 0, y > 0, z > 0\}\}$，其中 $m = 8$，波数为 $\kappa = 16$。随着阶数 ℓ 增大，可以看到这些函数的支集越来越集中在边界 ∂B_1附近。

定义 1.1 （球面波）。我们对任意 $(\ell,\ m) \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\ell^m(\mathbf{x}) &:= j_\ell(\kappa|\mathbf{x}|)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}), & \forall \mathbf{x} \in B_1, \\ b_\ell^m &:= \beta_\ell \tilde{b}_\ell^m, & \beta_\ell := \|\tilde{b}_\ell^m\|_{\mathcal{B}}^{-1}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 $\hat{}\mathbf{x} := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$。此外，我们引入空间

$$\mathcal{B} := \overline{\operatorname{span}\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{B}}} \subsetneq H^1(B_1).$$

请注意，与二维情形不同，球面波 $b_\ell^m \in \mathcal{B}$依赖于两个不同的参数（$\ell,\ m$）$\in \mathcal{I}$，但其范数 β_ℓ 与参数 m无关，稍后会对此作出说明（参见引理 1.4）。不过，与[19], 类似，我们将模态数为 $\ell < \kappa$ 的球面波称为传播模态（此类模态的“能量”分布在区域内部）；当 $\ell \gg \kappa$时，球面波称为倏逝型（其“能量”集中在区域边界附近）；最后，介于两者之间，满足 $\ell \approx \kappa$ 的波称为掠射型模态。图 1.1 展示了不同 ℓ取值下，函数 b_ℓ^m在单位球边界（去除第一卦限）上的表现 $\partial\{B_1 \setminus \{$ $\mathbf{x}$ $=(x,\ y,\ z)$: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}\}$。

根据（1.10）和（1.11），现在可以直接验证 b_ℓ^m在（1.13）中是亥姆霍兹方程（1）在（$\ell,\ m$）下的一个解 $\in \mathcal{I}$: 事实上，由于 j_ℓ 是方程~（1.1）的一个解，利用球坐标以及在 b_ℓ^m中的分离变量法，可得

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{b}_\ell^m + \kappa^2\tilde{b}_\ell^m &= \frac{\kappa^2}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}j_\ell}{\mathrm{d}r}\right)Y_\ell^m + \frac{\kappa^2 j_\ell}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^2}Y_\ell^m + \kappa^2 j_\ell Y_\ell^m \\ &= \frac{\kappa^2 Y_\ell^m}{r^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}j_\ell}{\mathrm{d}r}\right) + (r^2 - \ell(\ell+1))j_\ell\right] = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

现在我们介绍一些引理，它们有助于为后续内容做准备，这与 [19] 中的做法类似。

引理1.2。 空间$(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$是一个希尔伯特空间，且族 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$是一个希尔伯特基（即正交归一基）：

$$(b_\ell^m, b_q^n)_{\mathcal{B}} = \delta_{\ell,q}\delta_{m,n}, \qquad \forall\,(\ell,m),(q,n)\in\mathcal{I},$$

and

$$u = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}(u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}\, b_\ell^m, \qquad \forall u\in\mathcal{B}.$$

证明。根据我们在（1.13）中对球面波的定义，只需˜证明族 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 是正交的，这由（1.9）可得。对于（ℓ， m），（q， n）$\in\mathcal{I}$我们有：

$$\begin{aligned}(\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_q^n)_{L^2(B_1)} &= \int_0^1 j_\ell(\kappa r) j_q(\kappa r) r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_\ell^m(\theta_1,\theta_2)\overline{Y_q^n(\theta_1,\theta_2)}\sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \int_0^1 j_\ell^2(\kappa r) r^2\mathrm{d}r\, \delta_{\ell,q}\delta_{m,n},\end{aligned} \tag{1.15}$$

并记$\mathbf{n}$ 为外单位法向量，

$$\begin{aligned}(\partial_{\mathbf{n}}\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_q^n)_{L^2(\partial B_1)} &= \kappa j_\ell'(\kappa) j_q(\kappa)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_\ell^m(\theta_1,\theta_2)\overline{Y_q^n(\theta_1,\theta_2)}\sin\theta_1\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \kappa j_\ell'(\kappa) j_\ell(\kappa)\,\delta_{\ell,q}\delta_{m,n}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

相对于厄米内积 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{B}}$ 的正交性很容易看出，它来自于

$$\begin{aligned}(\nabla\tilde{b}_\ell^m, \nabla\tilde{b}_q^n)_{L^2(B_1)^2} &= (-\Delta\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_q^n)_{L^2(B_1)} + (\partial_{\mathbf{n}}\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_q^n)_{L^2(\partial B_1)} \\ &= \kappa^2(\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_q^n)_{L^2(B_1)} + (\partial_{\mathbf{n}}\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_q^n)_{L^2(\partial B_1)}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

□

特别地，注意到，由于（1.17），假设 $u\in H^1(B_1)$ 是亥姆霍兹方程（1）的一个解，对于任意 $v\in H^1(B_1)$，我们可以将（1.12）中的厄米内积及其对应的范数改写为

$$\begin{aligned}(u,v)_{\mathcal{B}} &:= 2(u,v)_{L^2(B_1)} + \kappa^{-2}(\partial_{\mathbf{n}}u, v)_{L^2(\partial B_1)}, \\ \|u\|_{\mathcal{B}}^2 &:= 2\|u\|_{L^2(B_1)}^2 + \kappa^{-2}(\partial_{\mathbf{n}}u, u)_{L^2(\partial B_1)}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

引入球面波的主要原因是可以利用它们展开 B_1 中的任意亥姆霍兹解，正如我们将在下一个引理中所示。

引理 1.3. $u \in H^1(B_1)$ 满足亥姆霍兹方程，当且仅当 $u \in \mathcal{B}$.

证明。 由下式定义的 Helmholtz 算子 $\mathcal{L}: H^1(B_1) \to H^{-1}(B_1)$ 的连续性

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2(B_1)^2} - \kappa^2 (u, v)_{L^2(B_1)}, \quad \forall u \in H^1(B_1), \forall v \in H_0^1(B_1),$$

可知， $\mathcal{L}$ 的核是 $H^1(B_1)$ 的闭子空间。根据 (1.14)，很容易验证 $\mathcal{B} \subseteq \ker \mathcal{L}$。

反过来，设 $u \in H^1(B_1)$ 满足 (1)，并令 $g := \partial_{\mathbf{n}} u - i\kappa u \in H^{-1/2}(\partial B_1)$。Robin 迹 g 可写为（参见 [17, 第 2.5 节1]）：

$$g(\theta_1, \theta_2) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{g}_\ell^m Y_\ell^m(\theta_1, \theta_2), \qquad \forall \theta_1 \in [0, \pi], \forall \theta_2 \in [0, 2\pi),$$

$$\text{where} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\hat{g}_\ell^m|^2 (\ell+1)^{-1} < \infty.$$

令 $L \geq 0$，并设 $g_L := \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{g}_\ell^m Y_\ell^m$。那么存在唯一的 u_L ∈张成空间 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}:\, \ell \leq L}$，使得 $g_L = \partial_{\mathbf{n}} u_L - i\kappa u_L$，即

$$u_L := \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{g}_\ell^m \left[\kappa \gamma_\ell^m \beta_\ell \big(j_\ell'(\kappa) - i j_\ell(\kappa)\big)\right]^{-1} b_\ell^m,$$

其中，分母中的项 $j_\ell'(\kappa) - i j_\ell(\kappa)$ 非零，这是因为 [18, 式 (10.21.3) 和 (10.58.1)]。该问题的适定性：求 $v \in H^1(B_1)$，使得

$$\Delta v + \kappa^2 v = 0, \ \text{in } B_1, \quad \text{and} \quad \partial_{\mathbf{n}} v - i\kappa v = h \ \text{ on } \partial B_1,$$

对于 $h \in H^{-1/2}(\partial B_1)$， [14, 命题 8.1.3], 意味着存在一个与 L 无关的常数 $C > 0$，使得 $\|u - u_L\|_{\mathcal{B}} \leq C \|g - g_L\|_{H^{-1/2}(\partial B_1)}$。令 L 趋于无穷大，最终可得 $u \in \mathcal{B}$，因此 $\ker \mathcal{L} = \mathcal{B}$。 □

1.2 归一化系数的渐近式

这些系数 β_ℓ 随着 ℓ 呈超指数级增长，且与 m 无关，在经历了截至 $\ell \approx \kappa$ 的预渐近区间后（见图1.2）。精确的渐近行为由以下引理给出。

引理 1.4。 对于所有 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$，我们有

$$\beta_\ell = \left(\frac{\pi}{2\kappa}\left[\left(1 + \frac{\ell}{\kappa^2}\right) J_{\ell+\frac{1}{2}}^2(\kappa) - \left(J_{\ell-\frac{1}{2}}(\kappa) + \frac{1}{\kappa} J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa)\right) J_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa)\right]\right)^{-1/2}, \tag{1.19}$$

˜因此， $\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}}$ 与 m 的取值无关，而且

$$\beta_\ell \sim 2\sqrt{2}\kappa \left(\frac{2}{e\kappa}\right)^{\ell} \ell^{\ell+\frac{1}{2}}, \qquad as \ \ell \to \infty. \tag{1.20}$$

证明。 由式（1.2）、（1.15）、（1.16），并利用 [18, 方程（10.22.5）和（10.51.2）], 可得:

$$\begin{aligned}\|\tilde{b}_\ell^m\|_{L^2(B_1)}^2 &= \int_0^1 j_\ell^2(\kappa r) r^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2\kappa}\int_0^1 J_{\ell+\frac{1}{2}}^2(\kappa r) r \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4\kappa}\left(J_{\ell+\frac{1}{2}}^2(\kappa) - J_{\ell-\frac{1}{2}}(\kappa) J_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa)\right), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}(\partial_{\mathbf{n}}\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_\ell^m)_{L^2(\partial B_1)} &= \kappa j_\ell'(\kappa) j_\ell(\kappa) = \kappa\left(\frac{\ell}{\kappa} j_\ell(\kappa) - j_{\ell+1}(\kappa)\right) j_\ell(\kappa) \\ &= \ell j_\ell^2(\kappa) - \kappa j_\ell(\kappa) j_{\ell+1}(\kappa) \\ &= \frac{\pi}{2\kappa}\left(\ell J_{\ell+\frac{1}{2}}^2(\kappa) - \kappa J_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa) J_{\ell+\frac{3}{2}}(\kappa)\right), \end{aligned} \tag{1.22}$$

˜因此，1.19) 可直接由 (1.18) 得出，且 $\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}}$ 与 m的取值无关。证明渐近行为，只需说明满足:

$$\begin{aligned}&\|\tilde{b}_\ell^m\|_{L^2(\partial B_1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^\ell \ell^{-(\ell+1)}, \\ &\|\tilde{b}_\ell^m\|_{L^2(B_1)} \sim \frac{1}{4}\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^\ell \ell^{-\left(\ell+\frac{3}{2}\right)}, \qquad \text{as } \ell \to \infty. \\ &\|\tilde{b}_\ell^m\|_{\mathcal{B}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\kappa}\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^\ell \ell^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

请注意，尽管证明并不需要这一点，我们也研究了迹范数的行为，因为这一结果稍后将有助于证明˜误差界 (2.21)。由 1.13) 的定义 b_ℓ^m，我们立即得到 $\|b_\ell^m\|_{L^2(\partial B_1)}^2 = j_\ell^2(\kappa)$。利用 (1.2) 和 [18, 式 (10.19.1)], ，即

$$J_\nu(r) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{er}{2\nu}\right)^\nu, \qquad \text{as } \nu \to \infty, \tag{1.24}$$

我们得到

$$j_\ell(r) \sim \frac{1}{2\sqrt{r}}\left(\frac{er}{2}\right)^{\ell+\frac{1}{2}}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{-(\ell+1)}, \qquad \text{as } \ell \to \infty, \tag{1.25}$$

因此，当 $\ell \to \infty$ 时

$$\|\tilde{b}_\ell^m\|_{L^2(\partial B_1)}^2 \sim \frac{1}{4\kappa}\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^{2\ell+1}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{-2(\ell+1)}. \tag{1.26}$$

由于对于每个 x， y， $z \in \mathbb{R}$，我们都有

$$(\ell+x)^{y\ell+z} \sim \ell^{y\ell+z}\exp\left\{xy + \frac{x(2z-xy)}{2\ell}\right\} \sim \ell^{y\ell+z}e^{xy}, \qquad \text{当 } \ell \to \infty, \tag{1.27}$$

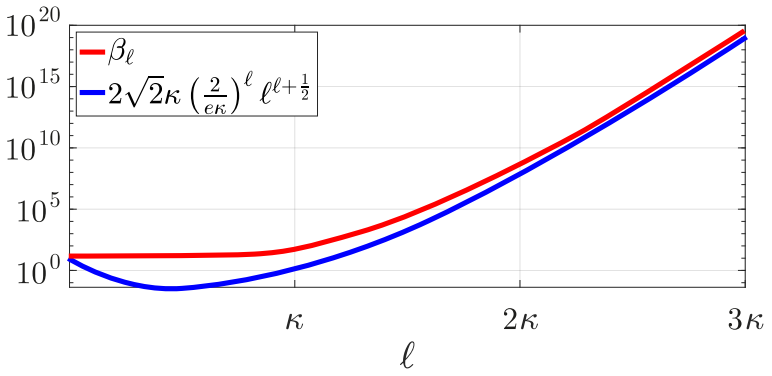


图 1.2：系数的超指数增长 $\beta_\ell = \|\tilde{b}_\ell^m\|_{\mathcal{B}}^{-1}$ 。注意，直到 $\ell \approx \kappa$ 都处于渐近前区间。波数 $\kappa = 16$。

于是 $(\ell + 1/2)^{-2(\ell+1)}$ 在无穷远处等价于 $\ell^{-2(\ell+1)}e^{-1}$；因此，（1.23）中的第一个结果可直接由（1.26）和（1.27）推出。

现在考虑 $L^2(B_1)$ 范数。由 (1.21) 和 (1.24)，当 $\ell \to \infty$

$$\|\tilde{b}_\ell^m\|_{L^2(B_1)}^2 \sim \frac{1}{8\kappa}\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^{2\ell+1}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{-2(\ell+1)}\left[1-\frac{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{2(\ell+1)}}{\left(\ell-\frac{1}{2}\right)^{\ell}\left(\ell+\frac{3}{2}\right)^{\ell+2}}\right],$$

并且，由于 (1.27，很容易验证方括号内的项在无穷远处等价于 ℓ^{-1} 。

现在考虑 κ-加权 $H^1(B_1)$ 范数 (1.18)：我们需要研究边界项的渐近式。由 (1.22) 和 (1.24)，当 $\ell \to \infty$

$$(\partial_{\mathbf{n}}\tilde{b}_\ell^m, \tilde{b}_\ell^m)_{L^2(\partial B_1)} \sim \frac{1}{4\kappa}\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^{2\ell+1}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{-2(\ell+1)}\left[\ell-\frac{e\kappa^2}{2}\frac{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{\ell+1}}{\left(\ell+\frac{3}{2}\right)^{\ell+2}}\right], \tag{1.28}$$

并且，由于 (1.27，很容易验证方括号内的第二项受第一项支配，因为它在无穷远处等价于 $\kappa^2/2\ell$ 。因此，˜在极限 $\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}}$ 中，$\ell \to \infty$ 的主导项是边界项 (1.28)。□

注 1.5. 我们选择使用自然范数对球面波进行归一化$\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$，但显然也可以采用其他选择，只是指数增长 β_ℓ 的系数会略有不同（参见 [19, 注 2.5]，关于二维情形）。

第2章

稳定数值近似

本章将简要回顾并推广到三维情形，介绍 [19, 第 3], 节中得到的结果。其核心在于稳定逼近这一概念，它对于以级数展开的形式计算数值逼近至关重要。其基本思路是开发一种数值方法，通过在展开中使用小系数来获得精确逼近，从而确保在计算机算术有限精度的限制下仍具有稳定性。本文提出的方法建立在 [2, 3]中的结果之上。我们还介绍一种实用的基于采样的数值方案，利用正则化奇异值分解和过采样来计算亥姆霍兹解的近似。我们将证明，只要逼近集具有稳定近似性质，并且恰当地选择采样点，该方法就能得到精确解。在这方面，我们将极值点系统作为一个潜在示例加以介绍。这些点集具有有趣的几何性质和积分性质，因此在本文中很有用，可用于构造平面波逼近集；这一点将在后续章节中进一步说明。

2.1 稳定近似的概念

我们考虑一个逼近集序列，其位于 $\mathcal{B}$

$$\boldsymbol{\Phi} := \{\boldsymbol{\Phi}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\Phi}_k := \{\phi_{k,p}\}_p, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

其中，对于每个 k， p， $\phi_{k,\ p} \in \mathcal{B}$ 都是亥姆霍兹方程（1）在 B_1 中的解，且$|\boldsymbol{\Phi}_k| < \infty$; 这些集合不需要是嵌套的。对于任意集合 $\boldsymbol{\Phi}_k$ ，若存在$k \in \mathbb{N}$，我们定义如下算子:

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k} : \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|} \to \mathcal{B}, \quad \text{such that} \quad \boldsymbol{\mu} = \{\mu_p\}_p \mapsto \sum_p \mu_p \phi_{k,p}. \tag{2.2}$$

在框架理论中，这通常称为合成算子。

定义 2.1 (稳定逼近)。 序列 $\boldsymbol{\Phi}$ 逼近集 (2.1)称为 $\mathcal{B}$ 的稳定逼近；如果对于任意容差 $\eta > 0$，都存在一个稳定性指数 $\lambda \geq 0$ 和一个稳定性常数 $C_{\mathrm{stb}} \geq 0$，使得

$$\forall u \in \mathcal{B}, \exists k \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|} \quad such\ that \quad \begin{cases} \|u - \mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \leq \eta \|u\|_{\mathcal{B}} & and \\ \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \leq C_{\mathrm{stb}} |\boldsymbol{\Phi}_k|^{\lambda} \|u\|_{\mathcal{B}} & . \end{cases} \tag{2.3}$$

稳定逼近集序列能够将任意亥姆霍兹解表示为有限展开 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu}$，其系数 $\boldsymbol{\mu}$ 具有有界的ℓ^2-范数，至多呈代数增长。稳定性指数 λ决定了系数范数的增长率，指数越小 λ，序列就越稳定。值得注意的是，在（ ℓ^2）中使用2.3-范数并非必要，因为可以使用任意离散 ℓ^p-范数来衡量系数范数的增长。这是因为这些范数彼此等价，正如霍¨尔德不等式所确立的那样；我们所考虑的集合都是有限维的。

接下来， [19], 我们将介绍两个形如（2.1）的逼近集示例：式（3.3）中的传播平面波，以及式（6.6）中的倏逝平面波。正如我们将在后续章节中展示的，这两种选择具有不同的稳定性。在定理3.3中，我们证明传播平面波是不稳定的；而在第7 章中，数值实验表明，采用第6.1 节和第6.3节所述的方法构建的倏逝平面波集是稳定的。

2.2 正则化边界采样方法

下面介绍如何在实践中计算系数。为简单起见，我们采用一种采样型策略，沿用 [12]并延续 [19]中的做法。考虑带有狄利克雷边界条件的亥姆霍兹问题：求 $u \in H^1(B_1)$，使得

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad \text{in } B_1, \qquad \text{and} \qquad \gamma u = g, \quad \text{on } \partial B_1,$$

其中， $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial B_1)$， γ是狄利克雷迹算子；已知当 κ^2 不是狄利克雷拉普拉斯算子的特征值时，该问题是适定的。在我们的所有数值实验中，我们旨在重构解 $u \in \mathcal{B}$，并且可以获得其在边界上的迹 γu 。因此，为了能够对狄利克雷迹进行点求值，我们简单地假设$u \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$。

因此，设 $u \in \mathcal{B} \cap \overline{C}^0(B_1)$ 为我们近似问题的目标。对于给定的逼近集 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|}$，我们要寻找一组系数 $\boldsymbol{\Phi}_k$ (在（2.1）中引入)，使得 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi} \approx u$。我们还假设，对于每个 p， $\phi_{k,\,p} \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$。接下来需要弄清楚如何选择单位球面上的 $S \geq |\boldsymbol{\Phi}_k|$ 采样点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^{S}$（$\mathbf{x}_s \in \partial B_1$ 对于 $s = 1, \ldots\ldots, S$）。值得注意的是，与二维情形 [19, 式（3.6）], 不同，这里没有显而易见的方法来确定一组

等距点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$。正如我们将在第 2.4 节看到的，这种选择基本上旨在确保数值求积公式

$$\lim_{S\to\infty}\sum_{s=1}^{S} w_s v(\mathbf{x}_s) = \int_{\partial B_1} v(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}), \qquad \forall v \in C^0(\partial B_1), \tag{2.4}$$

其中 $\mathbf{w}_S = (w_s)_s \in \mathbb{R}^S$ 是与采样点集 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$相关联的一个合适的正权重向量。在这方面，在以下数值实验中，作为一种特定选择，我们考虑极值点系及其相关权重（见 [13, 22, 23]），我们将在下一节中对此作更详细的描述。

现在引入矩阵 $A = (A_{s,p})_{s,p} \in \mathbb{C}^{S\times|\mathbf{\Phi}_k|}$ 以及向量 $\mathbf{b} = (b_s)_s \in \mathbb{C}^S$，使得

$$A_{s,p} := w_s^{1/2}\phi_{k,p}(\mathbf{x}_s), \quad \mathbf{b}_s := w_s^{1/2}(\gamma u)(\mathbf{x}_s), \quad 1 \le p \le |\mathbf{\Phi}_k|, \quad 1 \le s \le S. \tag{2.5}$$

采样方法即通过近似求解以下可能超定的线性系统来实现

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}. \tag{2.6}$$

然而，矩阵 A 往往可能是病态的（见第 3.3 节），这会导致使用有限精度算术时得到不精确的解。当矩阵 A 的病态性仅由近似函数的冗余造成时，我们可以认为这种病态性无害。事实上，尽管这种病态性会导致展开中的系数不唯一，但所有展开仍可能以相近的精度逼近解。如果这些展开中存在一些系数范数较小的展开，那么就可以使用正则化技术缓解这种病态性。为了即使在存在病态性的情况下也能获得解，我们采用了 [2, 3]中提出的过采样与正则化技术相结合的方法。正则化求解过程分为以下几个步骤：

- 第一步是对矩阵 A进行奇异值分解（SVD），即

  $$A = U\Sigma V^*.$$

  将 σ_p（其中 $p = 1, \ldots, |\mathbf{\Phi}_k|$）记为 A的奇异值，并假设它们按降序排列。为便于表示，将最大的奇异值重命名为 $\sigma_{\max} := \sigma_1$。

- 然后，正则化过程包括将相对较小的奇异值设为零，以此进行截断。选择一个阈值参数 $\epsilon \in (0, 1]$，并通过将所有满足 $\sigma_m < \epsilon\sigma_{\max}$ 的 σ_m替换为零，将对角矩阵 Σ 近似为 Σ_ϵ。由此得到 A的近似分解，即

  $$A_{S,\epsilon} := U\Sigma_\epsilon V^*. \tag{2.7}$$

- 最后，通过以下方法获得（2.6）中线性系统的近似解

$$\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon} := A^{\dagger}_{S,\epsilon}\mathbf{b} = V\Sigma^{\dagger}_{\epsilon}U^{*}\mathbf{b}. \tag{2.8}$$

这里，$\Sigma^{\dagger}_{\epsilon} \in \mathbb{R}^{|\mathbf{\Phi}_k|\times S}$ 表示矩阵 Σ_{ϵ}的伪逆，即由下式定义的对角矩阵：$(\Sigma^{\dagger}_{\epsilon})_{j,\ j} = (\Sigma_{j,\ j})^{-1}$ 若$\Sigma_{j,\ j} \geq \epsilon\sigma_{\max}$ 否则为$(\Sigma^{\dagger}_{\epsilon})_{j,\ j} = 0$。为了稳健地计算$\boldsymbol{\xi}_{S,\ \epsilon}$必须从右向左计算式（2.8）右侧，即$\boldsymbol{\xi}_{S,\ \epsilon} = V(\Sigma^{\dagger}_{\epsilon}(U^{*}\mathbf{b}))$，以避免 $\Sigma^{\dagger}_{\epsilon}$ 对角线上的极小值和极大值混杂在一起。

2.3 极值点系

我们首先给出极值点系的定义，参见 [23]。

定义 2.2（极值系统）。设 $S = (L+1)^2 \in \mathbb{N}$，其中 $L \geq 0$。若集合$\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^{S} \subset \partial B_1$ 满足 $\Delta_L \neq 0$，则称其为一个点的基本系统，其中

$$\Delta_L(x_1, ..., x_S) := \det(G_L), \qquad with \qquad G_L := (Y_j(\mathbf{x}_s))_{j,s} \in \mathbb{C}^{S\times S}, \tag{2.9}$$

且 $\{Y_j\}_{j=1}^{S}$ 是前 S 个球谐函数 (1.8)，次数不超过 L 且阶数任意。若一个基本系统使 $|\Delta_L|$达到最大值，则称其为极值系统。

函数 $\{Y_j\}_{j=1}^{S}$ 构成球面多项式空间 $\mathbb{P}_L(\partial B_1)$ 的一个基，其维数确实为 $S = (L+1)^2$。更一般地，基本系统与插值矩阵中所选基的选择无关。

极值系统提供了分布均匀的点；如果利用这些点确定插值积分公式（如（2.4）中的公式），则具有良好的积分性质，同时还具有优良的几何性质。此外，研究发现，极值系统能够产生具有正权重的插值求积公式，至少达到$L = 200$（见 [26]）。

人们之所以关注这类点系统，是因为它与拉格朗日插值有关。给定函数 $v \in C^0(\partial B_1)$，在基本系统 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^{S}$ 的各点处对 v 进行插值的唯一多项式 $\Lambda_L v \in \mathbb{P}_L(\partial B_1)$ 可写为

$$\Lambda_L v = \sum_{s=1}^{S} v(\mathbf{x}_s)\ell_s,$$

其中，ℓ_s 是与第 s 个点 $\mathbf{x}_s$ 相关联的拉格朗日多项式，即

$$\ell_j \in \mathbb{P}_L(\partial B_1), \qquad \ell_j(\mathbf{x}_s) = \delta_{j,s}, \qquad j, s = 1, ..., S.$$

与点系统 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^{S}$相关联的插值求积公式 is

$$Q_L(v) := \int_{\partial B_1} (\Lambda_L v)(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{S} w_s v(\mathbf{x}_s), \tag{2.10}$$

$$\text{where} \qquad w_s := \int_{\partial B_1} \ell_s(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}), \tag{2.11}$$

且它使得积分

$$I(v) := \int_{\partial B_1} v(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}) \tag{2.12}$$

对于 $\mathbb{P}_L(\partial B_1)$ 中所有多项式，均可精确计算，即对每个 $p \in \mathbb{P}_L(\partial B_1)$， $Q_L(p) = I(p)$。

根据 [23], ，极值点及相关权重的构造依赖于再生核希尔伯特空间理论；一般性参考资料见 [20]。多项式空间 $\mathbb{P}_L(\partial B_1) \subset L^2(\partial B_1)$具有再生核性质。对每个 $\mathbf{x}$， $\mathbf{y} \in \partial B_1$，再生核定义如下：

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = (K_{\mathbf{y}}, K_{\mathbf{x}})_{L^2(\partial B_1)} = \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_\ell^m(\mathbf{y})} Y_\ell^m(\mathbf{x}), \tag{2.13}$$

其中， $K_{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_L(\partial B_1)$ 是在$\mathbf{x} \in \partial B_1$处求值泛函的（唯一）Riesz 表示，即

$$v(\mathbf{x}) = (v, K_{\mathbf{x}})_{L^2(\partial B_1)}, \qquad \forall v \in \mathbb{P}_L(\partial B_1). \tag{2.14}$$

注意，由于加法定理 [6, 式 (2.30)], ，即

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_\ell^m(\mathbf{y})} Y_\ell^m(\mathbf{x}) = \frac{2\ell+1}{4\pi} \mathsf{P}_\ell(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial B_1, \tag{2.15}$$

再生核 K 是实数且对称的。再生核性质意味着，在单位球面 ∂B_1 上对 $\mathbb{P}_L(\partial B_1)$ 的元素逐点求值是连续运算（参见 [20, 定义 1.2]）。

给定一个基本系 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$，族 $\{K_{\mathbf{x}_s}\}_{s=1}^S$ 构成了$\mathbb{P}_L(\partial B_1)$的一个基：事实上，这些多项式是线性无关的，因为 Gram 矩阵$K_L \in \mathbb{R}^{S \times S}$ 的元素

$$(K_L)_{j,s} := \left(K_{\mathbf{x}_j}, K_{\mathbf{x}_s}\right)_{L^2(\partial B_1)} = K(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_s) \tag{2.16}$$

当且仅当其非奇异时 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$ 是一个基本系统。由（2.13）可知，矩阵 K_L 可以写成 $K_L = G_L^* G_L$，其中 G_L 是（2.9）中定义的插值矩阵。根据加法定理（2.15），有 K（$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$）$=\!\!\sim K$（$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$），其中

$$\tilde{K}(t) := \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=1}^{L} (2\ell+1) \mathsf{P}_\ell(t), \qquad \forall t \in [-1, 1]. \tag{2.17}$$

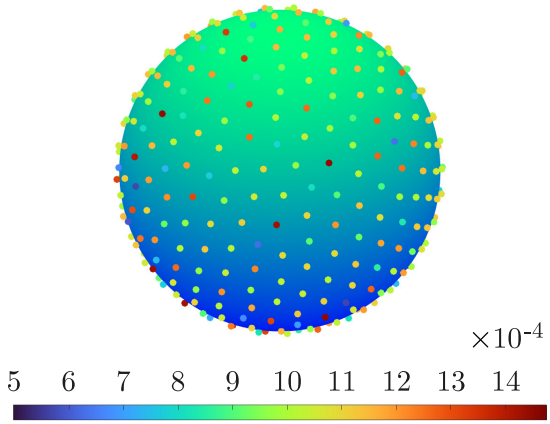


图 2.1：单位球面 B_1 上 $S = 400$ 个极值点的分布。每个点 $\mathbf{x}_s$ 的颜色根据与其相关的权重 w_s 确定。

因此，我们可以通过勒让德多项式的向上递推，利用（K_L 2.16）由（2.17）轻松计算矩阵 [18, 公式（14.10.3）]）。特别地，由于P_ℓ（1）$= 1$ 对每个次数 $\ell \geq 0$都成立，注意到

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \tilde{K}(1) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{L} (2\ell + 1) = \frac{S}{4\pi}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \partial B_1,$$

因此，K_L 的对角线元素相等。

显然，对于任意点集，K_L 都是半正定的，且 $\det(K_L) = \det(G_L)^2 \geq 0$，因此可以通过最大化对称正定矩阵 K_L 的行列式来获得极值系统 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$。在 [23] 中，使用了重启共轭梯度算法，随后采用基于海森矩阵有限差分近似的牛顿法，以及有限内存 BFGS 方法，来最大化 $\log\det(K_L)$，从而避免溢出问题。该过程只能找到局部极大值点。此外，由于 K_L 具有旋转不变性，第一个点 $\mathbf{x}_1$ 任意固定在北极；若 $S > 1$，则第二个点 $\mathbf{x}_2$ 固定在本初子午线上。

与极值点 $\mathbf{w}_S = (w_s)_s$ 相关的权重 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$ 因此得到，其定义见式（2.11）。然而，权重的实际计算方式有所不同。根据再生核性质（2.14），基 $\{K_{\mathbf{x}_s}\}_{s=1}^S$ 满足

$$\int_{\partial B_1} K_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}) = 1, \qquad s = 1, ..., S,$$

因此，求积公式（2.10）对 $\mathbb{P}_L(\partial B_1)$ 中所有多项式都精确的条件可写为

$$K_L \mathbf{w}_S = \mathbf{1}, \tag{2.18}$$

其中 $\mathbf{w}_S = (w_s)_s$，$\mathbf{1}$ 是 $\mathbb{R}^S$ 中的全一向量，且 K_L 在（2.16）中定义。特别要注意，该数值求积公式对常数多项式是精确的

$1 \in \mathbb{P}_L(\partial B_1)$，因此 $\sum_{s=1}^S w_s = 4\pi$。需要注意的是，对于其他点系统，尤其当 L 较大时，使用（2.18）求解权重可能会因矩阵的病态性而变得困难 K_L。然而，极值系统的一个特点是，矩阵 K_L 具有很好的条件数。

插值型数值求积公式（2.10）相对于精确积分（2.12）的误差可按如下方式估计：对于任意 $p \in \mathbb{P}_L(\partial B_1)$,

$$|I(v) - Q_L(v)| = |(I - Q_L)(v - p)| \leq (4\pi + \|\mathbf{w}_S\|_{\ell^1}) \|v - p\|_\infty$$

因此，假设所有权重 w_s 均为正，

$$|I(v) - Q_L(v)| \leq 8\pi \inf_{p \in \mathbb{P}_L(\partial B_1)} \|v - p\|_\infty. \tag{2.19}$$

因此，若 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$ 是一个极值点系，且$\mathbf{w}_S \in \mathbb{R}^S$ 是其对应的权重，那么根据（2.19）和魏尔斯特拉斯–斯通定理，收敛性（2.4）即可得到保证。

图 2.1展示了一些极值点及其对应的权重；其数值表列于 [26]。其他类型的基系统见 [27]。

注 2.3. 请注意，若要将极值系统 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$ 用作单位球面 ∂B_1 上的采样点集，并用于线性系统 (2.6)，则 $S \in \mathbb{N}$ 必须是完全平方数。

2.4 误差估计

通过采用第 2.2 节中概述的正则化技术，并进行过采样，即 S 大于 $|\mathbf{\Phi}_k|$，即可实现精确近似。前提是集合序列按照定义 2.1 的含义构成稳定逼近，且所选采样点和权重满足（2.4）。这一一般性结论是 [2,定理 53] 和 [3, 定理 1.3 和 37], 的主要结论，也是研究亥姆霍兹方程解的稳定逼近集的基础。

更准确地说，我们有如下命题 [19, 命题 3。2], 该命题又以广义采样背景下的 [3, 定理 3。7] 为基础。

命题 *2.4.* 设 γ 为狄利克雷迹算子，$u \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$ 和 $k \in \mathbb{N}$。给定某个逼近集 $\mathbf{\Phi}_k$，使得对于任意 p, $\phi_{k,p} \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$，存在一组采样点 $\{x_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$ 以及适当选取的正权重 $w_S \in \mathbb{R}^S$，满足 *(2.4)*，并取某个正则化参数 $\epsilon \in (0, 1]$。我们考虑线性系统 *(2.6)* 的近似解，即 $\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}$，其定义见 *(2.8)*。那么 $\forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}$, $\exists S_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\forall S \geq S_0$

$$\|\gamma(u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon})\|_{L^2(\partial B_1)} \leq 3\|\gamma(u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu})\|_{L^2(\partial B_1)} + \sqrt{2\epsilon\sigma_{\max}} \|\mathbf{w}_S\|_\infty^{1/2} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}. \tag{2.20}$$

进一步假设 κ^2 不是 B_1 中狄利克雷拉普拉斯算子的特征值。那么存在一个常数 $C_{\text{err}} > 0$，它与 u 和 $\mathbf{\Phi}_k$ 无关，使得 $\forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}$,$\exists S_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\forall S \geq S_0$

$$\|u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{L^2(B_1)} \leq C_{\text{err}} \left(\|u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} + \epsilon \sigma_{\max} \|\mathbf{w}_S\|_\infty^{1/2} \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \right). \tag{2.21}$$

证明。由于 u和 $\mathbf{\Phi}_k$被假设属于 $\mathcal{B} \cap C^0(B_1)$, 它们经狄利克雷迹算子 γ 在边界 ∂B_1 上的像的逐点求值是良定义的。由于根据假设，(2.4)成立，对于任意 $v \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$, $\exists S_0 \in \mathbb{N}$ 满足 $\forall S \geq S_0$

$$\|\gamma v\|_{L^2(\partial B_1)}^2 \leq 2 \sum_{s=1}^{S} w_s |(\gamma v)(\mathbf{x}_s)|^2 \leq 4 \|\gamma v\|_{L^2(\partial B_1)}^2, \tag{2.22}$$

其中常数 2 和 4 是任意的，分别可以替换为任意一对常数 C_1 和 C_2 使得 $1 < C_1 < C_2$。在 [3, 公式 (3.2)] 中采用了类似的论证（注意，在 $A' = B' = 1$ 的记号中 [3]）。此外，注意到，由于 (2.2) 和 (2.5)，可得

$$(A\boldsymbol{\mu})_s = w_s^{1/2} \gamma \left(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu} \right)(\mathbf{x}_s), \qquad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}, \tag{2.23}$$

因此

$$\|A\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{s=1}^{S} w_s \left| \gamma \left(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu} \right)(\mathbf{x}_s) \right|^2, \qquad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}. \tag{2.24}$$

令 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}$。由 (2.8) 可得:

$$\begin{aligned} u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon} &= [u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu}] + [\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} A_{S,\epsilon}^\dagger A\boldsymbol{\mu} - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}] + [\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu} - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} A_{S,\epsilon}^\dagger A\boldsymbol{\mu}] \\ &= [u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu}] + \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} A_{S,\epsilon}^\dagger [A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}] + \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} [\mathrm{Id} - A_{S,\epsilon}^\dagger A] \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

证明通过估计 L^2 在 ∂B_1 上的迹范数来进行。式（2.25）中的第一项显然出现在式（2.20）中，因此我们考察第二项。由式（2.22）–（2.24），假设 S 已选得足够大，我们可以写成:

$$\begin{aligned} \|\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} A_{S,\epsilon}^\dagger [A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}])\|_{L^2(\partial B_1)}^2 &\leq 2 \sum_{s=1}^{S} w_s |\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} A_{S,\epsilon}^\dagger [A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}])(\mathbf{x}_s)|^2 \\ &= 2 \|A A_{S,\epsilon}^\dagger [A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}]\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

此外，正则化（2.7）确保$\|AA_{S,\epsilon}^\dagger\| \leq 1$并再次利用（2.22）–（2.23），且假设 S 已选取得足够大，我们有:

$$\begin{aligned} \|\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} A_{S,\epsilon}^\dagger [A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}])\|_{L^2(\partial B_1)}^2 &\leq 2 \|A\boldsymbol{\mu} - \mathbf{b}\|_{\ell^2}^2 = 2 \sum_{s=1}^{S} w_s |\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu} - u)(\mathbf{x}_s)|^2 \\ &\leq 4 \|\gamma(u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k} \boldsymbol{\mu})\|_{L^2(\partial B_1)}^2. \end{aligned}$$

现在我们考察（2.25）中的第三项。与前面一样，由（2.22）–（2.24），存在 S 充分大，使得

$$\begin{aligned}\|\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}[\mathrm{Id}-A_{S,\epsilon}^{\dagger}A]\boldsymbol{\mu})\|_{L^2(\partial B_1)}^2 &\le 2\sum_{s=1}^{S} w_s|\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}[\mathrm{Id}-A_{S,\epsilon}^{\dagger}A]\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_s)|^2\\ &= 2\|A[\mathrm{Id}-A_{S,\epsilon}^{\dagger}A]\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}^2.\end{aligned}$$

正则化（2.7）确保 $\|A[\mathrm{Id}-A_{S,\epsilon}^{\dagger}A]\| \le \epsilon\sigma_{\max}\|\mathbf{w}_S\|_\infty^{1/2}$，从而

$$\|\gamma(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}[\mathrm{Id}-A_{S,\epsilon}^{\dagger}A]\boldsymbol{\mu})\|_{L^2(\partial B_1)}^2 \le 2\epsilon^2\sigma_{\max}^2\|\mathbf{w}_S\|_\infty\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}^2.$$

结合所有估计，我们得到（2.20）。

为了证明（2.21），首先注意到迹算子$\gamma:\ \mathcal{B}\to L^2(\partial B_1)$的连续性允许我们对任意 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{C}^{|\mathbf{\Phi}_k|}$:

$$\|\gamma(u-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu})\|_{L^2(\partial B_1)} \le \|\gamma\|\|u-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}}. \tag{2.26}$$

接下来需要用其迹的 $L^2(B_1$ 范数来界定 $u-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}$ 的 $L^2(\partial B_1$ 范数。令 $\{\hat{}e_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 为 $e:=u-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}$在希尔伯特基 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$中的系数。由渐近式（1.23），可得

$$\|e\|_{L^2(B_1)}^2=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{c_\ell^{(1)}}{1+\ell^2}\sum_{m=-\ell}^{\ell}|\hat{e}_\ell^m|^2 \quad\text{and}\quad \|e\|_{L^2(\partial B_1)}^2=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{c_\ell^{(2)}}{\sqrt{1+\ell^2}}\sum_{m=-\ell}^{\ell}|\hat{e}_\ell^m|^2,$$

其中我们引入了两列严格为正的常数 $\{c_\ell^{(i)}\}_{\ell\ge0}$，对于 $i=1,\ 2$，它们均有上下界，且与$u-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\ \epsilon}$无关。注意，$\{c_\ell^{(2)}\}_{\ell\ge0}$ 有下界这一事实，是因为 κ^2 不是狄利克雷特征值。由此以及（2.21）、（2.26）和（2.20），我们可以推出（

□

命题2.4 表明，若要从球面上的样本准确重建亥姆霍兹解，采用定义2.1中定义的稳定逼近集，并结合满足（2.4）的适当采样点和权重，是必要条件；前提是采样点数量S 足够多，且正则化参数 ϵ足够小。具体而言，我们有以下推论。

推论 *2.5*。设 $\delta>0$。我们假设有一个逼近集序列$\{\mathbf{\Phi}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$，其按照定义 *2.1* 的意义是稳定的，以及一组采样点$\{x_s\}_{s=1}^S\subset\partial B_1$ 和一个正权重向量 $w_S\in\mathbb{R}^S$，使得 *(2.4)* 得到满足。还假设 κ^2 不是 B_1中的狄利克雷特征值。那么，$\forall u\in\mathcal{B}\cap C^0(\bar{B_1})$，$\exists k\in\mathbb{N}$，$S_0\in\mathbb{N}$和 $\epsilon_0\in(0,1]$使得 $\forall S\ge S_0$和 $\epsilon\in(0,\epsilon_0]$

$$\|u-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{L^2(B_1)}\le\delta\|u\|_{\mathcal{B}}, \tag{2.27}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon} \in \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|}$ 定义于 (2.8)。此外，我们可以将正则化参数 ϵ取到尽可能大

$$\epsilon_0 = \frac{\delta}{2C_{\mathrm{err}}C_{\mathrm{stb}}\sigma_{\max}|\boldsymbol{\Phi}_k|^{\lambda}\|\mathbf{w}_S\|_{\infty}^{1/2}}. \tag{2.28}$$

证明。 设 $\eta > 0$ 且 $u \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$。稳定性假设意味着 $\exists k \in \mathbb{N}$以及 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|}$，使得（2.3）成立，即

$$\|u - \mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \le \eta\|u\|_{\mathcal{B}} \qquad \text{and} \qquad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \le C_{\mathrm{stb}}|\boldsymbol{\Phi}_k|^{\lambda}\|u\|_{\mathcal{B}}.$$

此外，设 $\epsilon \in (0, 1]$。由前一个命题可知，存在 $S \in \mathbb{N}$，使得对于这个特定的 $\boldsymbol{\mu}$，我们有：

$$\begin{aligned}\|u - \mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{L^2(B_1)} &\le C_{\mathrm{err}}\left(\|u - \mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} + \epsilon\sigma_{\max}\|\mathbf{w}_S\|_{\infty}^{1/2}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}\right)\\ &\le C_{\mathrm{err}}\left(\eta + \epsilon\sigma_{\max}C_{\mathrm{stb}}|\boldsymbol{\Phi}_k|^{\lambda}\|\mathbf{w}_S\|_{\infty}^{1/2}\right)\|u\|_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

取 $\eta \le \frac{\delta}{2C_{\mathrm{err}}}$ 和 $\epsilon \le \epsilon_0$，其中 ϵ_0 由（2.28）给出，则误差估计（2.27）即得。 □

注意，推论 2.5 表明，向量 $\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon} \in \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|}$ ——使用正则化奇异值分解（2.8）可在浮点运算中稳定地计算——提供了 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon}$ 对 u的精确近似。这远强于仅仅说明，对于任意解 u，存在一个系数向量 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{|\boldsymbol{\Phi}_k|}$，使得 $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\mu}$ 是 u的精确近似。因此，关于 $u - \mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon}$的先前误差界也适用于使用采样方法获得、并通过计算机运算计算出的解。这与传播平面波近似的经典理论形成对比，例如 [16]，该理论给出了严格的最佳近似误差界，但这些误差界往往无法通过数值计算实现，因为精确近似需要较大的系数并伴随消去现象，所以使用精确算术得到的结果与使用浮点运算得到的结果并不一致。

最后，为了衡量近似的误差，我们类比[19],引入以下相对残差

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, \boldsymbol{\Phi}_k, S, \epsilon) := \frac{\|A\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon} - \mathbf{b}\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{b}\|_{\ell^2}}, \tag{2.29}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon}$ 是正则化系统（2.8）的解。事实上，按照命题 2.4证明中的相同推理，可以证明，当 S 的值足够大时，（2.29）中的量 $\mathcal{E}$ 满足不等式

$$\|u - \mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_k}\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{L^2(B_1)} \le \tilde{C}\|u\|_{\mathcal{B}}\,\mathcal{E},$$

其中， C 是一个与 u、 $\boldsymbol{\Phi}_k$ 和 S无关的常数。

第 3 章

传播平面波集的不稳定性

在本章中，我们将说明，传播平面波——与 [19, 第 4] 节中的二维情形类似——无法在单位球内产生稳定逼近 B_1。然而，利用传播平面波展开近似亥姆霍兹解，是许多 Trefftz 格式的关键组成部分（见 [11]）。我们还将介绍 Herglotz 函数这一经典概念。所有 Herglotz 函数都是亥姆霍兹方程（1）的解，但并非所有亥姆霍兹方程的解都具有这种表示。此外，我们将证明，与球面波相关的密度在 ℓ中并非一致有界，这意味着，对相关积分表示进行离散化，无法得到系数有界的近似离散表示。最后，我们通过数值计算验证了传播平面波集的不稳定性。

3.1 传播型平面波

现在我们将介绍传播平面波这一概念。此处使用“传播型”一词，是为了将下述定义与倏逝平面波的概念区分开来，后者将在稍后介绍（见定义4.1）。

定义 3.1 (传播平面波**)**。对于任意一对角度 $(\theta_1, \theta_2) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$，令

$$\phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) := e^{i\kappa \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1}$$

波的传播方向由下式给出

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\theta_1, \theta_2) := (\sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2, \cos\theta_1) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3. \tag{3.2}$$

显然可以验证，任何传播平面波都满足齐次亥姆霍兹方程（1），因为 $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$。

在三维中，使用近乎均匀分布的方向可获得各向同性近似。对于某个 $P \in \mathbb{N}$，传播平面波逼近集 定义为

$$\mathbf{\Phi}_P := \left\{ \frac{1}{\sqrt{P}} \phi_{\mathbf{d}_p} \right\}_{p=1}^{P}, \tag{3.3}$$

其中，$\{\mathbf{d}_p\}_{p=1}^{P} \subset \mathbb{S}^2$ 是一个近乎均匀的方向集。与球面波不同，基于这类传播平面波的逼近集通常不具有层次结构。

注 3.2。由于定义 2.2 中给出的极值系统能够提供分布均匀的点，且具有优良的几何性质，因此在数值实验中，我们将用它们来描述这样的方向集。与采样点集的情况类似，使用极值点系时，方向集 $\{\mathbf{d}_p\}_{p=1}^{P} \subset \mathbb{S}^2$ 只有在 $P \in \mathbb{N}$ 是完全平方数时才有定义。

最后，我们陈述一个基本恒等式，它在以下分析中无处不在，并将平面波与球面波联系起来。根据恒等式 [6,式（2.46）]，即

$$e^{irt} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell(r) \mathsf{P}_\ell(t), \qquad \forall r \geq 0, \forall t \in [-1,1], \tag{3.4}$$

结合加法定理（2.15），对于任意 $\mathbf{x} \in B_1$ 和 $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$，我们可推导出 *Jacobi–Anger* 恒等式:

$$\phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = e^{i\kappa \mathbf{d}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{Y_\ell^m(\mathbf{d})} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) j_\ell(\kappa|\mathbf{x}|), \tag{3.5}$$

其中 $\hat{}\mathbf{x} := \mathbf{x}/|\mathbf{x}| \in \mathbb{S}^2$.

3.2 赫格洛茨表示

<escape>我们现在回顾所谓的 *Herglotz* 函数 在 [6, 式 (3.43)], 中定义的，对于任意 $v \in L^2(\mathbb{S}^2)$，其定义为</escape>

$$u_v(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{S}^2} v(\mathbf{d}) \phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{3.6}$$

这种表达式称为赫格洛茨表示，而 v 称为 u_v的*Herglotz* 密度。这些函数 $u_v \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$可以看作传播平面波的连续叠加，其权重根据 v确定，并且是亥姆霍兹方程的整解。

事实上，由于 $v \in L^2(\mathbb{S}^2)$，我们可以将其重写为球谐函数的展开形式，即

$$v(\mathbf{d}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{v}_\ell^m Y_\ell^m(\mathbf{d}), \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{S}^2, \tag{3.7}$$

与 $\{\hat{v}_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}} \in \ell^2(\mathcal{I})$，并且借助恒等式（3.5）和正交性（1.9），可得

$$\begin{aligned} u_v(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{S}^2} v(\mathbf{d})\phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}) = \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{v}_\ell^m Y_\ell^m(\mathbf{d})\phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{v}_\ell^m Y_\ell^m(\mathbf{d}) \left(4\pi \sum_{q=0}^{\infty} i^q \sum_{n=-q}^{q} \overline{Y_q^n(\mathbf{d})}\, \tilde{b}_q^n(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(\frac{4\pi i^\ell \hat{v}_\ell^m}{\beta_\ell} \right) b_\ell^m(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

由于系数 $\{\beta_\ell\}_{\ell\geq 0}$ 在引理1.4中所示的超指数增长，我们推得 $u_v \in \mathcal{B}$。

尽管球面波具有赫格洛茨表示，但其赫格洛茨密度并不关于指标 ℓ一致有界。对于任意 $\ell \geq 0$，再次利用 Jacobi–Anger 恒等式（3.5），可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} Y_\ell^m(\mathbf{d})\phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}) &= \int_{\mathbb{S}^2} Y_\ell^m(\mathbf{d}) \left(4\pi \sum_{q=0}^{\infty} i^q \sum_{n=-q}^{q} \overline{Y_q^n(\mathbf{d})}\, \tilde{b}_q^n(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}) \\ &= 4\pi i^\ell \tilde{b}_\ell^m(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

因此，我们得到球面波的赫格洛茨表示，

$$b_\ell^m(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \left[\frac{\beta_\ell}{4\pi i^\ell} Y_\ell^m(\mathbf{d}) \right] \phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma(\mathbf{d}). \tag{3.9}$$

由引理 1.4可知，相关的 Herglotz 密度 $\mathbf{d} \mapsto \beta_\ell(4\pi)^{-1} i^{-\ell} Y_\ell^m(\mathbf{d})$并不关于指标 ℓ 在 $L^2(\mathbb{S}^2)$中一致有界。因此，精确积分表示的离散化不会产生系数有界的近似离散表示，下一步将对此进行论证。

此外，并非亥姆霍兹方程的所有解都能对某个 $v \in L^2(\mathbb{S}^2)$ 写成形式 (3.6)。对于任意序列 $\{\hat{u}_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}} \in \ell^2(\mathcal{I})$，可推出 $u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{u}_\ell^m b_\ell^m \in \mathcal{B}$。此外，如果 u 能以形式 (3.6) 表示为 Herglotz 表示，那么根据 (3.8)，密度 v 的球谐函数展开的系数 $\{\hat{v}_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ (3.7) 满足关系 $\hat{v}_\ell^m = (4\pi)^{-1} i^{-\ell} \beta_\ell \hat{u}_\ell^m$for $(\ell, m) \in \mathcal{I}$。要使 v 属于 $L^2(\mathbb{S}^2)$，这些系数就必须属于 $\ell^2(\mathcal{I})$

而这只有在系数 $\{\hat{u}_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 以超指数级衰减、从而抵消 $\{\beta_\ell\}_{\ell\geq 0}$的增长时才可能实现，这一点同样由引理 1.4可知。例如，传播平面波不是 Herglotz 函数，因为其系数衰减得不够快，这一点从 Jacobi–Anger 恒等式（3.5）可以很容易看出：事实上，传播平面波所对应的 Herglotz 密度 v 必须是一个广义函数，即以d为中心的狄拉克分布。

3.3 传播平面波集不稳定

现在，我们将考察一个模型近似问题，以说明传播平面波展开所带来的数值问题。具体而言，我们将研究如何用 b_ℓ^m对某个（ℓ， m）$\in\mathcal{I}$ 球面波进行近似，并采用（3.3）中定义的传播平面波逼近集序列。结果表明，（2.3）中的两个要求——精确近似和小系数——无法同时满足。因此，不可能利用传播平面波实现稳定近似。

引理 3.3。设 $(\ell,\ m)\in\mathcal{I}$，$0<\eta\leq 1$ 以及 $P\in\mathbb{N}$ 给定。由 $\mathbf{\Phi}_P$ 在(3.3) 中定义的传播平面波所构成的逼近集满足：对每个 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{C}^P$，

$$\|b_\ell^m-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_P}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}}\leq\eta\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}}\quad\Rightarrow\quad\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}\geq(1-\eta)\,\frac{\beta_\ell}{2\sqrt{\pi(2\ell+1)}}\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.10}$$

证明。设 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{C}^P$。利用雅可比–安格尔恒等式（3.5），可得：

$$\left(\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_P}\boldsymbol{\mu}\right)(\mathbf{x})=\frac{4\pi}{\sqrt{P}}\sum_{p=1}^{P}\mu_p\sum_{q=0}^{\infty}i^q\sum_{n=-q}^{q}\overline{Y_q^n(\mathbf{d}_p)}\,\tilde{b}_q^n(\mathbf{x})=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{n=-q}^{q}c_q^n\tilde{b}_q^n(\mathbf{x}), \tag{3.11}$$

其中系数

$$c_q^n:=\frac{4\pi i^q}{\sqrt{P}}\sum_{p=1}^{P}\mu_p\overline{Y_q^n(\mathbf{d}_p)},\qquad\forall(q,n)\in\mathcal{I},$$

得益于 [17,公式 (2.4.106)],满足

$$|c_q^n|=\frac{4\pi}{\sqrt{P}}\left|\sum_{p=1}^{P}\mu_p\overline{Y_q^n(\mathbf{d}_p)}\right|\leq\frac{2\sqrt{\pi(2q+1)}}{\sqrt{P}}\sum_{p=1}^{P}|\mu_p|\leq 2\sqrt{\pi(2q+1)}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}. \tag{3.12}$$

因此，由于（3.11），近似误差为

$$\|b_\ell^m-\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_P}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}}^2=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{n=-q}^{q}\left|\delta_{\ell,q}\delta_{m,n}-c_q^n\beta_q^{-1}\right|^2.$$

要使误差 $\|b_\ell^m - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_P}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}}$ 低于容差 $\eta > 0$，我们至少需要

$$\left|\delta_{\ell,q}\delta_{m,n} - c_q^n \beta_\ell^{-1}\right| \leq \eta, \qquad \forall (q,n) \in \mathcal{I}.$$

根据（3.12），对于（q，n）=（ℓ，m），可得

$$\eta \geq \left|1 - c_\ell^m \beta_\ell^{-1}\right| \geq 1 - |c_\ell^m|\beta_\ell^{-1} \geq 1 - 2\beta_\ell^{-1}\sqrt{\pi(2\ell+1)}\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2},$$

可写作（3.10），回想一下 $\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}} = 1$。 □

该界表明，要以传播平面波展开的形式精确逼近球面波b_ℓ^m $\mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_P}\boldsymbol{\mu}$，并达到给定的精度（即较小的 $\eta > 0$），系数的范数必须至少按 $\sim \ell^\ell$ 的速度增长，即随 ℓ 超指数级增长（见引理 1.4）。显然，在这种情况下，精度与稳定性的性质互不相容。仿照 [19,第 4 节。3], 我们将此结果概括为以下定理。

定理 3.4. 由以下内容构成的逼近集序列 $\{\mathbf{\Phi}_P\}_{P\in\mathbb{N}}$ 由具有近乎均匀分布方向的传播平面波组成，如 (3.3)中所定义的，对于 $\mathcal{B}$而言不是稳定逼近。

证明。前一个引理表明，球面波序列 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$无法在逼近集序列 $\{\mathbf{\Phi}_P\}_{P\in\mathbb{N}}$意义下稳定逼近，符合定义 2.1。事实上，设 $(\ell,m) \in \mathcal{I}$，并假设存在$P \in \mathbb{N}$ 和 $\mu \in \mathbb{C}^P$，使得 $\|b_\ell^m - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_P}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \leq \eta\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}}$ 对某个 $1 > \eta > 0$成立。那么

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \geq (1-\eta)\,\frac{\beta_\ell}{2\sqrt{\pi(2\ell+1)}}\|b_\ell^m\|_{\mathcal{B}},$$

这意味着 $\|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2}$ 无法关于 ℓ 一致有界，这由引理 1.4可知。由于不满足稳定性条件（2.3），我们可以根据定义 2.1得出，逼近集序列 $\{\mathbf{\Phi}_P\}_{P\in\mathbb{N}}$ 不稳定。2.1。

□

3.4 模态分析

同一问题的另一种视角由雅可比–安格尔恒等式（3.5）给出，因为它使我们能够定量了解传播平面波的模态内容。对于任意 $\mathbf{x} \in B_1$ 和 $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{S}^2$，我们有

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} 4\pi i^\ell \overline{Y_\ell^m(\mathbf{d})}\,\tilde{b}_\ell^m(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left[4\pi i^\ell \beta_\ell^{-1}\gamma_\ell^m e^{-im\theta_2}\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta_1)\right] b_\ell^m(\mathbf{x}). \qquad (3.13)\end{aligned}$$

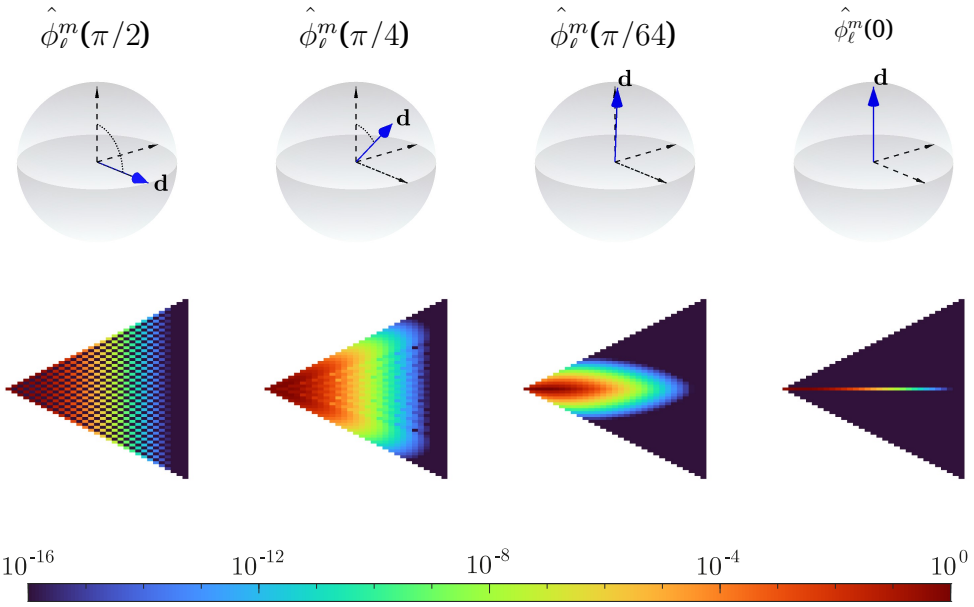


图 3.1：传播平面波的模态分析：（上方）固定方位角时方向向量的表示 $\mathbf{d}$，以及下方相关系数的分布 $\theta_2 = 0$，其在（ $\phi_\ell^m(\theta_1)$ 中的3.14）对应不同的 θ_1值。指标 ℓ 在横坐标上变化，范围为 $0 \le \ell \le 30$；而指标 m 在纵坐标上变化，范围为 $0 \le |m| \le \ell$，形成一个三角形。波数$\kappa = 6$。

注意，系数的模

$$\hat{\phi}_\ell^m(\theta_1) := |(\phi_{\mathbf{d}}, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}| = \frac{4\pi}{\beta_\ell}\gamma_\ell^m \, |\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta_1)| \tag{3.14}$$

在展开式 (3.13) 中，取决于 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$ 和 $\theta_1 \in [0, \pi]$。然而，借助 (1.7) 和 (1.5)，$\gamma_\ell^{-m}|\mathsf{P}_\ell^{-m}| = \gamma_\ell^m|\mathsf{P}_\ell^m|$，因此，对于每个 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$，$\phi_\ell^{-m}(\theta_1) = \phi_\ell^m(\theta_1)$。此外，由于费雷尔函数的奇偶性 [18, 式 (14.7.17)]，，在分析系数模的性质时，只需考虑 $\theta_1 \in [0, \pi/2]$ 的情况。

显然，每个平面波的模态分布 $\phi_{\mathbf{d}}$ 取决于其传播方向的垂直分量，因此也取决于 P_ℓ^m [18, 第 14.16 节2]的零点分布ˆ。例如，$\phi_\ell^m(\pi/2) = 0$ 每当 $\ell + m$ 为奇数时；或者，由于 $\mathsf{P}_\ell^\ell(\cos\theta_1) = (2\ell - 1)!! \sin^\ell\theta_1$ [17, 式（2.4.102）], ˆ$\phi_\ell^\ell(0) = 0$ 对每个 $\ell > 0$都成立。更一般地，根据费雷尔函数的定义（1.4），可得 ˆ$\phi_\ell^m(0) = 0$ 对每个 $m \neq 0$都成立。因此，如果 $\theta_1 \approx 0$，那么 $|m|$ 越接近 ℓ，ˆ $\phi_\ell^m(\theta_1)$ 就越接近 0。图 3.1 展示了系数分布（3.14）的一些示例。

例如，如果我们想用 $\ell > 0$ 来近似球面波 b_ℓ^ℓ，就需要更多沿“水平方向”而非“垂直方向”传播的传播平面波

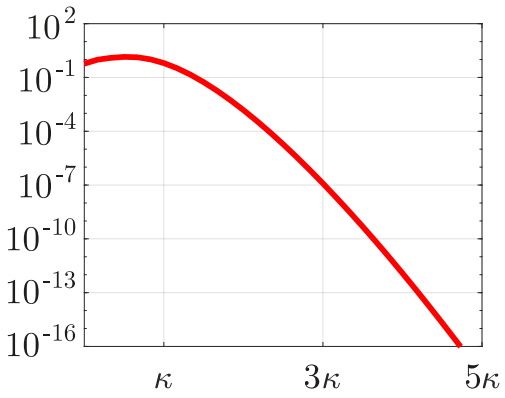


图 3.2：传播平面波的模态分析：系数 $\hat{}$ 的分布 ϕ_ℓ 在（3.17）中。这对应于沿垂直线段对图 $\ell^2$3.1中的三角形内各值计算范数。请注意，这些系数在倏逝区间 $\ell \gg \kappa$中以超指数级的速度衰减。波数 $\kappa = 6$。

方向。反之，对于带有奇数 ℓ 的传播模态 b_ℓ^0，则需要更多沿“垂直方向”而非“水平方向”传播的平面波。

然而，所有平面波（3.1）无论其传播方向 $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$如何，都有一个共同点：系数 $\hat{}$ $\phi_\ell^m(\theta_1)$ 在倏逝模态区间 $\ell \gg \kappa$内以超指数速度衰减。直接的结论是，传播平面波不适合用于逼近傅里叶模态成分较高的亥姆霍兹解，这一点已在引理 3.3中展示。图 3.1中的图像直观地说明了这一点。

此外，通过定义以下内容，可以更清楚地看出这一点：

$$\begin{aligned} \tilde{b}_\ell[\mathbf{d}] &:= \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\phi_{\mathbf{d}}, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}\, b_\ell^m, & \forall \ell \geq 0,\, \forall \mathbf{d} \in \mathbb{S}^2, \\ b_\ell[\mathbf{d}] &:= \hat{\phi}_\ell^{-1} \tilde{b}_\ell[\mathbf{d}], & \hat{\phi}_\ell := \left\| \tilde{b}_\ell[\mathbf{d}] \right\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

事实上，借助（3.15），我们可以写成

$$\phi_{\mathbf{d}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\phi_{\mathbf{d}}, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}\, b_\ell^m = \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{\phi}_\ell\, b_\ell[\mathbf{d}], \tag{3.16}$$

其中 $b_\ell[\mathbf{d}] \in$ 张成空间$\{b_\ell^m\}_{m=-\ell}^{\ell}$，其中 $\|b_\ell[\mathbf{d}]\|_{\mathcal{B}} = 1$ 并且

$$\hat{\phi}_\ell = \left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[\hat{\phi}_\ell^m(\theta_1) \right]^2 \right)^{1/2} = \frac{4\pi}{\beta_\ell} \left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\mathbf{d})|^2 \right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{\pi(2\ell+1)}}{\beta_\ell}. \tag{3.17}$$

注意，在（3.17）中，第二个等式成立是由于（3.14），而最后一个等式则得益于 [17, 式（2.4.105）]。除以一个乘法常数 i^ℓ外，函数$b_\ell[\mathbf{d}]$ 与按照传播型平面b_ℓ^0 旋转后的球面波重合

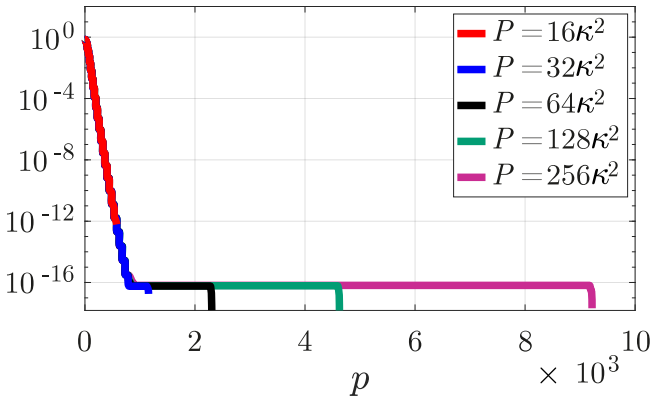


图 3.3：奇异值 $\{\sigma_p\}_p$ 矩阵 A 使用传播平面波逼近集（3.3）时的情况。可以看到，当 P 增大时，超过固定阈值的奇异值数量并未增加。波数 $\kappa = 6$。

波的方向 $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$。利用定义（1.8）和（1.13）以及涉及所谓维格纳矩阵的恒等式（4.25）和（4.29）（见第4.3节），可以直接验证这一点。例如，如果 $\mathbf{d} \in \mathbb{S}^2$ 是向上方向，则由（3.13）和（3.15）可得 $b_\ell[\mathbf{d}] = i^\ell b_\ell^0$。（3.16）中的系数 $\hat{}\ \phi_\ell$ 与 $\mathbf{d}$ 无关，因为 $\{Y_\ell^m\}_{|m|\le\ell}$ 是 $\mathcal{Y}_\ell$ 的正交归一基——即次数为 ℓ 的球谐函数和齐次多项式空间——此外，球面、齐次多项式和拉普拉斯算子在 $\hat{}$ 旋转下均保持不变。系数 ϕ_ℓ 的分布如图3.2所示：注意，在倏逝区间 $\ell \gg \kappa$中，其衰减速度为超指数级。

3.5 数值实验

引理 3.3 的不稳定性结果可以通过数值实验得到验证。我们再次考察用传播平面波逼近集 $\mathbf{\Phi}_P$ 逼近球面波 b_ℓ^m 的问题，其中某个 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$，该逼近集由式（3.3）定义。正如预期，本节使用极值点系（见定义 2.2）来描述平面波在 $\mathbf{\Phi}_P$ 中的传播方向，以及采样点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$。通过求解线性系统（2.18）计算相应的权重 $\mathbf{w}_S \in \mathbb{R}^S$。因此，回顾备注 2.3 和备注 3.2，所展示的数值结果基于这样的近似集维数：取大于或等于 P 的最小平方整数。与 [19, 第 4.4]，节类似，我们选择 $S = \lceil \sqrt{2|\mathbf{\Phi}_P|} \rceil^2$。采样矩阵 A 和右端项 $\mathbf{b}$ 根据式（2.5）定义，其中 $u = b_\ell^m$，且某个 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$。

矩阵 A 是已知的病态矩阵，因为其条件数（最大奇异值 $\sigma_{\max}$ 与最小奇异值 $\sigma_{\min}$之比）会随着逼近集中平面波数量的增加而呈指数增长 $\mathbf{\Phi}_P$，如图3.3所示。这一现象并非采样方法所独有，在

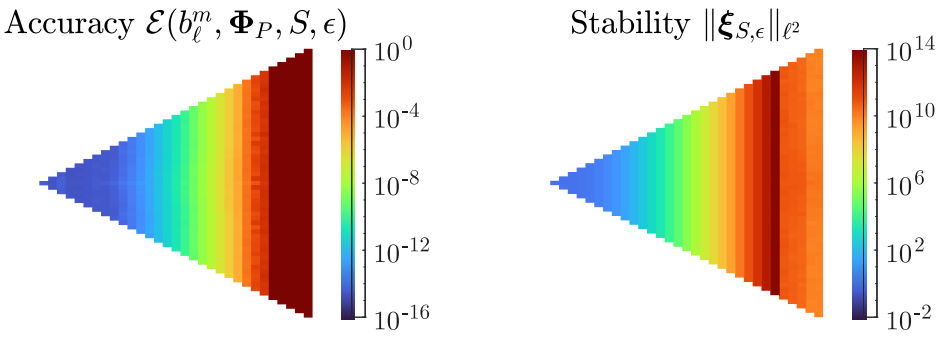


图3.4：精度 $\mathcal{E}$，定义见（2.29）（左）以及稳定性 $\|\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon}\|_{\ell^2}$（右），表示球面波 b_ℓ^m由传播平面波近似的情况。指标 ℓ 在横坐标上于范围 $0 \le \ell \le 5\kappa$内变化，而指标 m 在纵坐标上于范围 $0 \le |m| \le \ell$ 内变化，构成一个三角形。自由度预算 $P = 64\kappa^2$、波数 $\kappa = 6$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

第 [11, 4 节3] 中关于笛卡尔几何下伽辽金形式质量矩阵的类似实验也观察到了这一现象，对于情形 $S = |\mathbf{\Phi}_P|$。最小二乘形式的条件数甚至更差。因此，在后续的数值实验中，我们将采用第2.2 节所述的正则化技术，阈值参数为 $\epsilon = 10^{-14}$。

<escape>如图所示，在3.4 这一特定情形下，当 $P = 64\kappa^2$时，模态数m 并不重要，因为对于固定的 ℓ，随着阶数m 的变化，结果并不会发生显著变化。因此，在下文中，我们只考察 $m = 0$ 的情形。这里使用同一个矩阵 A 来近似所有的 b_ℓ^m，对于任意的（ℓ，m）$\in \mathcal{I}$，直至 $\ell = 5\kappa$。左图给出了相对残差 $\mathcal{E}$，其定义见（2.29），用以衡量近似的精度。右图给出了系数的大小，即$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon}\|_{\ell^2}$ 用以衡量近似的稳定性。对于固定的 $m = 0$ 以及不同的 $P \in \mathbb{N}$选择，其他数值结果也采用相同的布局展示于图3.5中。我们观察到三种情况：</escape>

- 对于传播模态，即对应于模态数为 $\ell \le \kappa$ 的球面波的模态，近似精度较高（$\mathcal{E} < 10^{-13}$），且系数的大小适中（$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\,\epsilon}\|_{\ell^2} < 10$）。

- 对于大致大于波数 κ的模态数 ℓ，计算所得近似的系数范数会呈指数级增长，精度也会相应降低。

- 在某个时刻（在这项具体的数值实验中，大约介于 $\ell = 4\kappa$ 和 $\ell = 5\kappa$ 之间），系数的指数增长彻底破坏了近似的稳定性，使我们无法以任何显著的精度近似目标 b_ℓ^0。当相对误差达到 $\mathcal{O}(1)$ 量级时，所报告的系数大小已毫无意义。事实上，令$\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}$ 恒等于零，也能得到类似的误差。

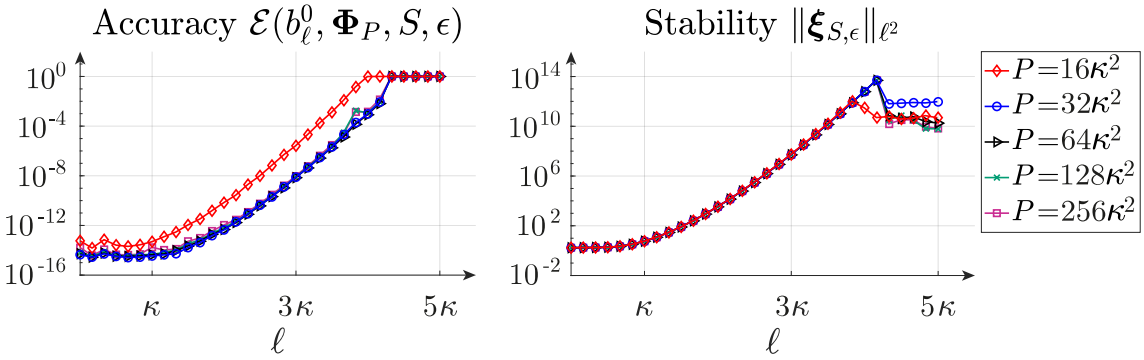


图 3.5：精度 $\mathcal{E}$，定义见式（2.29）（左）以及稳定性 $\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$（右），即用传播平面波近似球面波的精度和稳定性。波数 $\kappa = 6$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

如 [19, 第 4 节4], 所示，即使在三维中，增大 P 也无法使精度超过某个限度。事实上，图3.3显示，矩阵 A 的 ϵ-秩（大于 ϵ的奇异值数量）不会随着 P 的增大而增加。虽然增大 P 无法提高精度，但也不会进一步加剧数值不稳定性。尽管矩阵 A的条件数随着 P 的增大而急剧上升，如图3.3所示，情况依然如此。

与图 3.4一样，在图 3.5 中，对于固定的 P，也使用同一个矩阵 A 来近似所有 b_ℓ^0，适用于任意模态数 ℓ，直至 $\ell = 5\kappa$（即计算相同颜色的所有标记）。即使矩阵 A 的条件数极大（例如，在所呈现的数值实验中，当 $P = 256\kappa^2$ 时），所有传播模态仍能达到近乎机器精度的准确度 $\ell \leq \kappa$，同时对于模态数较大的倏逝模态，误差仍保持在 $\mathcal{O}(1)$ 的量级 $\ell \geq 4\kappa$。第2.2 节概述的简单正则化技术使我们能够获得这些结果。

任何正则化技术都只能减轻、无法消除使用传播平面波的特雷夫茨方法固有的不稳定性。即使采用正则化，在给定的浮点精度下，仍无法精确近似倏逝模态。与二维情形类似，[19], 本文的主要目标是构造一个平面波离散空间，使其能够稳定逼近所有模态，以便应用于 Trefftz 格式。

第 4 章

倏逝平面波

本章旨在介绍倏逝平面波。其特征方向向量为$\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$，而传播波的方向向量为$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$，并阐释为何预期倏逝平面波具有更好的稳定性。传播平面波和倏逝平面波有时分别称为均匀平面波和非均匀平面波，因为只有前者的振幅恒定。倏逝平面波沿传播方向振荡，其表观波数大于 κ；传播方向与向量 $\Re\{\mathbf{d}\}$平行，并沿与 $\Im\{\mathbf{d}\}$平行的方向呈指数衰减。这两个方向彼此正交。我们首先引入新的倏逝参数来定义倏逝平面波：$\theta_3 \in [0, 2\pi)$，该参数决定衰减方向；以及 $\zeta \in [0, +\infty)$，该参数调节表观波数和衰减率的大小。然后，仿照 [19,第 5 节，2], 我们对倏逝平面波进行模态分析，并将雅可比–安格尔恒等式（3.5）推广至复数域：可以发现，与传播情形不同，通过调整倏逝参数 θ_3 和 ζ，可以将平面波的傅里叶成分移至更高模态。因此，我们预期倏逝平面波更适合捕捉规则性较差的亥姆霍兹解中的高阶傅里叶模态，例如在存在邻近奇点的情况下。

4.1 定义

现在我们将介绍倏逝平面波的概念。显然，为了定义一个形式为 $e^{i\kappa\mathbf{d}\cdot\mathbf{x}}$ 且满足亥姆霍兹方程（1）的平面波，我们需要一个方向向量$\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$ 使得$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}_i^2 = 1$，即

$$|\Re\{\mathbf{d}\}|^2 - |\Im\{\mathbf{d}\}|^2 = 1 \qquad \text{and} \qquad \Re\{\mathbf{d}\} \cdot \Im\{\mathbf{d}\} = 0. \tag{4.1}$$

我们的方法包括固定一个满足条件（4.1）的参考复方向向量，然后在空间中对其进行所有可能的旋转。假设，

例如，其实部和虚部均为非负值，且分别平行于 z 轴和 x 轴。那么，(4.1) 中的第一个方程变为 $\Re\{\mathrm{d}_3\}^2-\Im\{\mathrm{d}_1\}^2=1$，并定义 $z:=\Re\{\mathrm{d}_3\}$，可得 $\Im\{\mathrm{d}_1\}=\sqrt{z^2-1}$。注意，由于 $\Im\{\mathbf{d}\}$ 是实数，因此需要 $z\geq 1$。因此，对于每个 $z\geq 1$，我们定义参考向上复方向向量 $\mathbf{d}\uparrow(z)$ 如下

$$\mathbf{d}_{\uparrow}(z):=(i\sqrt{z^2-1},0,z)\in\mathbb{C}^3. \tag{4.2}$$

我们现在可以给出倏逝平面波的定义，并同时给出复方向空间 $\{\mathbf{d}\in\mathbb{C}^3:\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=1\}$ 的一个满射参数化。

定义 4.1 (倏逝平面波参数化)。设 $\boldsymbol{\theta}:=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)\in\Theta:=[0,\pi]\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)$ 为欧拉角，$R_{\boldsymbol{\theta}}$ 为按照约定（z-y-z）定义的关联旋转矩阵，即 $R_{\boldsymbol{\theta}}:=R_z(\theta_2)R_y(\theta_1)R_z(\theta_3)$，其中

$$R_y(\theta):=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix},\qquad R_z(\theta):=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

此外，对于每个 $z\geq 1$，令 $\mathbf{d}\uparrow(z)$ 为参考向上复方向向量(4.2)。对于任意 $\mathbf{y}:=(\boldsymbol{\theta},\zeta)\in\Theta\times[0,+\infty)$，我们令

$$\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}):=e^{i\kappa\mathbf{d}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}},\qquad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \tag{4.3}$$

其中，波的复值方向由

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}):=R_{\boldsymbol{\theta}}\,\mathbf{d}_{\uparrow}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\in\mathbb{C}^3. \tag{4.4}$$

旋转矩阵 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 的显式定义如下:

$$R_{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}c_1c_2c_3-s_2s_3 & -c_1c_2s_3-s_2c_3 & s_1c_2\\ c_1s_2c_3+c_2s_3 & -c_1s_2s_3+c_2c_3 & s_1s_2\\ -s_1c_3 & s_1s_3 & c_1\end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

其中，我们用简写记号 $c_i:=\cos(\theta_i)$ 和 $s_i:=\sin(\theta_i)$ 表示 $i=1,2,3$。因此，对于每个 $\mathbf{y}\in\Theta\times[0,+\infty)$，$\mathbf{d}(\mathbf{y})$ 都可以改写为

$$\mathbf{d}(\mathbf{y})=z\begin{pmatrix}s_1c_2\\ s_1s_2\\ c_1\end{pmatrix}+i\sqrt{z^2-1}\begin{pmatrix}c_1c_2c_3-s_2s_3\\ c_1s_2c_3+c_2s_3\\ -s_1c_3\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

其中 $z=\zeta/2\kappa+1$。不难验证，倏逝型平面波满足齐次亥姆霍兹方程（1），因为$\mathbf{d}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{d}(\mathbf{y})=1$ 对任意$\mathbf{y}\in\Theta\times[0,+\infty)$）按构造成立，这是因为（ $R_{\boldsymbol{\theta}}$ （4.5）中的旋转矩阵是酉矩阵。事实上，

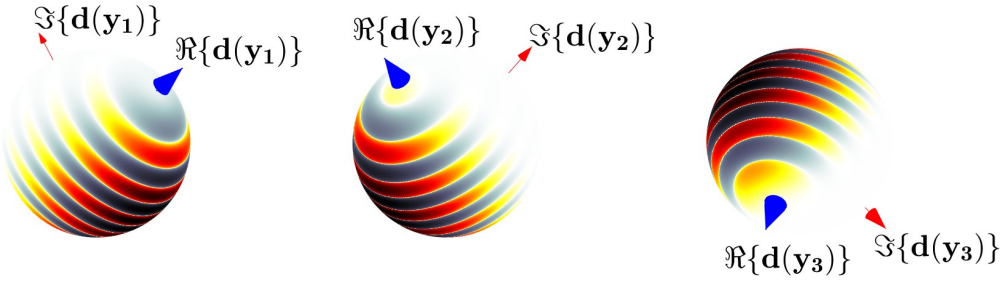


图4.1：限制在 ∂B_1 上的三种不同倏逝平面波的实部 $\phi_{\mathbf{y}}$。蓝色箭头表示实部 $\Re\{\mathbf{d}(\mathbf{y})\}$ 的方向，即 (3.2) 中定义的 $\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)$；红色箭头表示虚部 $\Im\{\mathbf{d}(\mathbf{y})\}$ 的方向，即 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 在 (4.5) 中的第一列 $\mathbf{d}^{\perp}(\boldsymbol{\theta})$。箭头的大小与向量的范数成正比，因此取决于 ζ 和 κ。从左到右，对于 $\mathbf{y}=(\boldsymbol{\theta},\zeta)$，分别有：$\mathbf{y}_1=(\pi/4,\pi/4,7\pi/8,2)$、$\mathbf{y}_2=(\pi/5,8\pi/5,\pi,4)$ 和 $\mathbf{y}_3=(5\pi/8,9\pi/5,\pi/5,8)$。波数 $\kappa=16$。

$\mathbf{d}(\mathbf{y})$ 满足条件（4.1），此外 $|\Re\{\mathbf{d}(\mathbf{y})\}|=z$ 且 $|\Im\{\mathbf{d}(\mathbf{y})\}|=\sqrt{z^2-1}$ 对每个$\mathbf{y}\in\Theta\times[0,+\infty)$，其中 $z=\zeta/2\kappa+1$。

请注意，我们选择将其参数化 $\mathbf{d}(\mathbf{y})$ 于 (4.4) 使用 $z=\zeta/2\kappa+1$ 其中$\zeta\in[0,+\infty)$。尽管这一选择可能不会立即显而易见，但它使后续分析中的定义和命题更加简洁。

定义中欧拉角和矩阵的选择4.1 取自 [21, 方程（4）和（5）], 不同之处在于，我们改变角度的符号，以确保与传播波所采用的记号一致。事实上，如果我们假设 $\zeta=0$，对于任意 $\boldsymbol{\theta}\in\Theta$，我们可以得到定义3.1 中具有实方向$\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)$ 的（3.2）：在这种情况下，波的方向事实证明与新的角参数 θ_3无关，因为绕竖直轴的任意旋转$R_z(\theta_3)$ 都会将$\mathbf{d}^{\uparrow}(1)=(0,0,1)$ 变为自身。

由于式（**4.6**）中的方向向量 $\mathbf{d}(\mathbf{y})$ 是复数，因此波的行为可能不够清晰。式（4.3）中的倏逝型平面波可更明确地表示为

$$\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})=e^{i\left(\frac{\zeta}{2}+\kappa\right)\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)\cdot\mathbf{x}}e^{-\left(\zeta\left(\frac{\zeta}{4}+\kappa\right)\right)^{1/2}\mathbf{d}^{\perp}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{x}},$$

其中 $\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)$ 定义于 (3.2)，$\mathbf{d}^{\perp}(\boldsymbol{\theta})$ 是 (4.5) 中矩阵 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 的第一列。从该公式可知，波以表观波数$\zeta/2+\kappa\geq\kappa$ 沿传播方向 $\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)$ 振荡，该方向平行于 $\Re\{\mathbf{d}(\mathbf{y})\}$。此外，波沿方向 $\mathbf{d}^{\perp}(\boldsymbol{\theta})$以速率 $(\zeta(\zeta/4+\kappa))^{1/2}$ 指数衰减，该方向平行于 $\Im\{\mathbf{d}(\mathbf{y})\}$，因此与 $\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)$ 正交。因此，衰减方向与传播方向正交；这一点也由 $\mathbf{d}(\theta_1,\theta_2)$ 与 (4.5) 中 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 的第三列重合这一事实所证实，而该矩阵是酉矩阵。这说明将新参数命名为 $\theta_3\in[0,2\pi)$ 和 $\zeta\in[0,+\infty)$ 是合理的，它们控制着

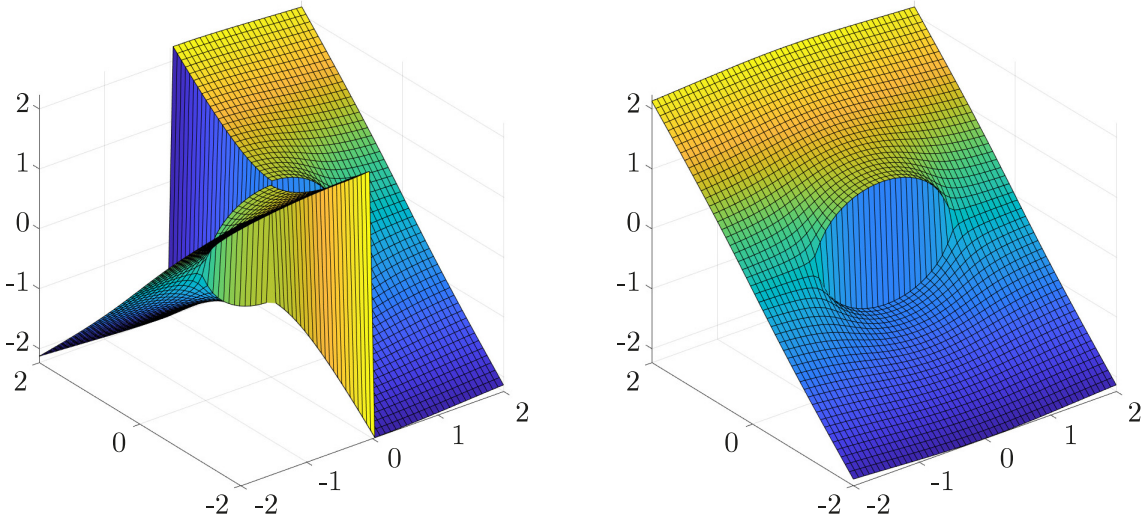


图4.2：（w^2-1）$^{1/2}$的虚部：（左）考虑主值时，我们有两条支割线，分别沿着（-1, 1）和（$-i\infty$, $+i\infty$）；（右）考虑（4.7）中的定义时，可以消除虚轴上的支割线。

复方向的虚部$\mathbf{d}(\mathbf{y})$ 在 (4.4) 中，倏逝参数。图 ∂B_1 给出了三种不同的倏逝平面波在4.1中的表示。

注4.2。 为了定义倏逝平面波，与二维情况相反， [19, 第 5], “参数复化”过程——也就是通过将 {$\mathbf{d}$ 中的角度复化来参数化复方向空间 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}=1$} （(3.2) ）——事实证明，对于我们将在第5 章稍后引入的三维赫格洛茨密度空间的分析而言，这种方法不太适用，尤其是在涉及基的正交性和渐近行为时$\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ （见引理 5.3 和引理5.4）。因此，我们选择定义一个复参考方向 $\mathbf{d}^{\uparrow}(z)$ ，然后通过正交矩阵 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ 对其进行空间旋转。

4.2 复方向 Jacobi–Anger 恒等式 $\mathbf{y}$

为了进一步研究倏逝平面波，我们需要为解析工具集补充一些定义，具体来说，我们需要将 Ferrers 函数扩展到复数域（见 (4.8)），并引入 维格纳矩阵 (见定义 4.8）。根据 [8, 第 3.2 节，式 (6)], ，对于任意 $m\in\mathbb{Z}$，本节中我们始终采用以下约定

$$(w^2-1)^{m/2} := \mathcal{P}\left[(w+1)^{m/2}\right]\,\mathcal{P}\left[(w-1)^{m/2}\right], \qquad \forall w\in\mathbb{C}, \tag{4.7}$$

其中 $\mathcal{P}[\,\cdot\,]$ 表示选取主值分支。注意，对于每个$w\in\mathbb{C}$ 以及奇数 $m\in\mathbb{Z}$，这等价于说

$$(w^2-1)^{m/2}:=\begin{cases}-\mathcal{P}\left[(w^2-1)^{m/2}\right] & \text{if } \Re\{w\}<0 \ \vee\ (\Re\{w\}=0\ \wedge\ \Im\{w\}<0)\\ +\mathcal{P}\left[(w^2-1)^{m/2}\right] & \text{if } \Re\{w\}>0 \ \vee\ (\Re\{w\}=0\ \wedge\ \Im\{w\}\geq 0)\end{cases}.$$

利用（4.7），只需将复平面左半部分的函数值镜像到右半部分（并在 $\Re\{w\}=0$ 处进行一些修正），即可消除沿虚轴的支割线；对于 $m=1$的情形，见图 4.2。

根据 [18, 方程（14.7.14）和（14.9.13）], ，对于每一组（ℓ， m）$\in\mathcal{I}$，缔合勒让德多项式都是广义勒让德方程（1.3）的解，定义如下：

$$P_\ell^m(w):=\frac{1}{2^\ell\ell!}(w^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}w^{\ell+m}}(w^2-1)^\ell,\qquad \forall w\in\mathbb{C},\tag{4.8}$$

因此

$$P_\ell^{-m}(w)=\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(w),\qquad \forall w\in\mathbb{C}.\tag{4.9}$$

特别地， P_ℓ^m称为次数为 ℓ 、阶数为 m的缔合勒让德多项式。对于每一组（ℓ， m）$\in\mathcal{I}$满足 $\frac{m}{2}\notin\mathbb{Z}$时， P_ℓ^m是复平面上的单值函数，在区间（-1，1）上有一条支割线，并且从上方连续；否则，若 m 为偶数， P_ℓ^m是次数为 ℓ的多项式。由 [18, 方程（14.23.1）], 可得：

$$\lim_{\epsilon\ 0}P_\ell^m(x\pm i\epsilon)=(\pm1)^mP_\ell^m(x)=i^{\mp m}\mathsf{P}_\ell^m(x),\qquad \forall x\in(-1,1).\tag{4.10}$$

注意，若 $m=0$，我们便得到次数为 ℓ的勒让德多项式，它定义在整个复平面上，即对于任意 $w\in\mathbb{C}$， $P_\ell(w)$ $=\mathsf{P}_\ell(w)$。

下一节将讨论倏逝平面波的模态分析，该分析依赖于将雅可比–安格尔恒等式（3.5）推广到式（$\mathbf{d}(\mathbf{y})$ 中的复值方向 4.4）。首先，我们需要将球谐函数（1.8）推广到式（$\mathbf{d}\uparrow(z)$ 中形如 4.2的复方向4.8）。引入缔合勒让德多项式（ℓ， m）$\in\mathcal{I}$ 后，对于每个

$$Y_\ell^m\left(\mathbf{d}_\uparrow(z)\right):=\gamma_\ell^m i^{-m}P_\ell^m(z),\qquad \forall z\geq 1,$$

其中 γ_ℓ^m在式（1.7）中已有定义。以下命题为此定义提供了依据；该命题将加法定理（2.15）推广至考虑向上的复方向向量的情形。

P命题 4.3。 对于任意 $\ell\geq 0$、$\mathbf{x}\in\mathbb{S}^2$ 和 $z\geq 1$，以下恒等式成立。 ：

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_\ell^m(\mathbf{d}_\uparrow(z))\overline{Y_\ell^m(\mathbf{x})}=\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_\ell^m(\mathbf{d}_\uparrow(z))Y_\ell^m(\mathbf{x})=\frac{2\ell+1}{4\pi}P_\ell(\mathbf{d}_\uparrow(z)\cdot\mathbf{x}).\tag{4.11}$$

证明。令 $\ell \geq 0$， $z \geq 1$ 且 $\mathbf{x} =$(正弦 θ 余弦 φ，正弦 θ 正弦 φ，余弦 θ) $\in \mathbb{S}^2$，其中 $\theta \in [0, \pi]$ 且 $\varphi \in [0, 2\pi)$。由（4.10），可得：

$$P_\ell(z)P_\ell(\cos\theta - i\epsilon) + 2\sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}(-1)^m P_\ell^m(z)P_\ell^m(\cos\theta - i\epsilon)\cos(m\varphi) \tag{4.12}$$

$$\Big\downarrow \ \epsilon \searrow 0$$

$$P_\ell(z)\mathsf{P}_\ell(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} i^{-m} P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)\cos(m\varphi), \tag{4.13}$$

此外，根据（4.7），我们有

$$P_\ell\left(z(\cos\theta - i\epsilon) - \sqrt{z^2-1}\sqrt{(\cos\theta - i\epsilon)^2 - 1}\cos\varphi\right) \tag{4.14}$$

$$\Big\downarrow \ \epsilon \searrow 0$$

$$P_\ell\left(z\cos\theta + i\sqrt{z^2-1}\sin\theta\cos\varphi\right). \tag{4.15}$$

由于 [18, 方程（14.7.16）和（14.28.1）]，（4.12）和（4.14）中的表达式取值相同，因此（4.13）和（4.15）也相同。于是，利用（1.5）、（1.7）和（4.9），我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}(\gamma_\ell^m)^2 i^{-m}P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi} = \sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}i^{-m}P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}\\
&= \sum_{m=0}^{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}i^{-m}P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi} + \sum_{m=-\ell}^{-1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}i^{m}P_\ell^{-m}(z)\mathsf{P}_\ell^{-m}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}\\
&= \sum_{m=0}^{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}i^{-m}P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{\pm im\varphi} + \sum_{m=1}^{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}i^{-m}P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{\mp im\varphi}\\
&= P_\ell(z)\mathsf{P}_\ell(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}i^{-m}P_\ell^m(z)\mathsf{P}_\ell^m(\cos\theta)\cos(m\varphi)\\
&= P_\ell\left(z\cos\theta + i\sqrt{z^2-1}\sin\theta\cos\varphi\right) = P_\ell\left(\mathbf{d}_\uparrow(z)\cdot\mathbf{x}\right)
\end{aligned}$$

并且（4.11）得证。 □

注 4.4. 更精确地说，[18, 式 (14.28.1)] 指出，(4.12) 与 (4.14) 之间的等式仅在 $\theta \in [0, \pi/2)$ 成立，因此，按照前面的证明，恒等式 (4.11) 也仅在这种情况下得到证明。这可能是因为 [18]在缔合勒让德多项式的定义中未采用约定 (4.7)，因此 [18, 式 (14.28.1)] 仅适用于实部为正的值

实部。因此，虽然 (4.11) 中的所有项作为θ 的函数在 $(0,\pi)$ 上都是解析的（明确写出 x 对 θ 的依赖关系），但根据 [1, 定理 3.2.6]，这些恒等式很容易推广到这个区间。此外，当 $x=(0,0,1)$ 时，这些恒等式也成立，即 $\theta=\pi$：事实上，$P_\ell^m(-1)=(-1)^\ell\delta_{0,m}$ 并且根据 [18, 式 (14.7.17)]，$P_\ell(-z)=(-1)^\ell P_\ell(z)$ 对每个 $z\geq 1$ 都成立。

前述结果（4.11）使我们接近于推导出参考复方向 $\mathbf{d}^\uparrow(z)$ 的雅可比–安格尔恒等式，其中 $z\geq 1$。不过，在继续之前，我们必须先将恒等式（3.4）推广到 t取复值的情形，这需要用到以下引理。

引理 4.5。设 $\ell\geq 0$。对于任意 $0\leq m\leq \ell$ 和 $w\in\mathbb{C}$，有

$$P_\ell^m(w)=\frac{(\ell+m)!}{2^\ell \ell!}\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k}(w-1)^{\ell-(m/2+k)}(w+1)^{m/2+k}. \tag{4.16}$$

特别地，由于 (4.9)，$P_\ell^m(z)\geq 0$ 对于任意 $z\geq 1$ 以及 $(\ell,\ m)\in\mathcal{I}$。

证明。经过一些计算，我们可以得出

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}w^{\ell+m}}(w^2-1)^\ell &= \sum_{k=0}^{\ell+m}\binom{\ell+m}{k}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k}(w-1)^\ell\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{\ell+m-k}}{\mathrm{d}w^{\ell+m-k}}(w+1)^\ell\right)\\
&= \sum_{k=m}^{\ell}\binom{\ell+m}{k}\left(\frac{\ell!}{(\ell-k)!}(w-1)^{\ell-k}\right)\left(\frac{\ell!}{(k-m)!}(w+1)^{k-m}\right)\\
&= \frac{(w-1)^\ell}{(w+1)^m}\sum_{k=m}^{\ell}\frac{(\ell+m)!}{k!(\ell+m-k)!}\frac{\ell!}{(\ell-k)!}\frac{\ell!}{(k-m)!}\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^k\\
&= (w-1)^{\ell-m}\sum_{k=0}^{\ell-m}\frac{(\ell+m)!}{(m+k)!(\ell-k)!}\frac{\ell!}{(\ell-m-k)!}\frac{\ell!}{k!}\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^k\\
&= (\ell+m)!(w-1)^{\ell-m}\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k}\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^k.
\end{aligned}$$

因此，根据定义（4.7）和（4.8），可得

$$\begin{aligned}
P_\ell^m(w) &= \frac{1}{2^\ell\ell!}(w^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}w^{\ell+m}}(w^2-1)^\ell\\
&= \frac{(\ell+m)!}{2^\ell\ell!}(w-1)^{\ell-m/2}(w+1)^{m/2}\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k}\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^k\\
&= \frac{(\ell+m)!}{2^\ell\ell!}\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k}(w-1)^{\ell-(m/2+k)}(w+1)^{m/2+k}.
\end{aligned}$$

□

命题 4.6。 对于任意 $r \geq 0$ 和 $w \in \mathbb{C}$，以下恒等式成立：

$$e^{irw} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}(2\ell+1) j_{\ell}(r) P_{\ell}(w). \tag{4.17}$$

证明。令 $R > 1$和 $B_R := \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$。我们要证明，对于每个 $r \geq 0$ 和 $w \in B_R$，式（4.17）右侧均有定义。由（1.25），只需证明

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{er}{2\ell+1}\right)^{\ell} |P_{\ell}(w)| < \infty, \qquad \forall r \geq 0, \forall w \in B_R. \tag{4.18}$$

由（4.16）和范德蒙德恒等式 [24, 式（**1**）], 可得

$$|P_{\ell}(w)| \leq \frac{1}{2^{\ell}} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}^2 |w-1|^{\ell-k} |w+1|^k \leq \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k}^2 \left(\frac{R+1}{2}\right)^{\ell} = \binom{2\ell}{\ell} \left(\frac{R+1}{2}\right)^{\ell},$$

因此，对于每个 $r \geq 0$ 和 $w \in B_R$，级数（4.18）被以下表达式控制

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell}, \qquad \text{where} \qquad c_{\ell} := \binom{2\ell}{\ell} \left[\frac{er(R+1)}{4\ell+2}\right]^{\ell}. \tag{4.19}$$

级数（4.19）收敛，这一点可由比值判别法直接看出：事实上，由（1.27），有

$$\frac{c_{\ell+1}}{c_{\ell}} \sim \left(\frac{\ell+1/2}{\ell+3/2}\right)^{\ell+1} \frac{er(R+1)}{\ell+1} \sim \frac{r(R+1)}{\ell}, \qquad \text{as } \ell \to \infty.$$

因此，对于每个 $r \geq 0$ 和 $w \in B_R$，式（4.17）右侧均有定义。函数 $w \mapsto e^{irw}$ 和 $w \mapsto P_{\ell}(w)$ 在 B_R 上解析，并且由于恒等式（3.4）成立，即当 $w \in [-1, 1]$时，（4.17）成立，因此根据 $r \geq 0$和 $w \in B_R$ 以及 [1, 定理 3.2。6]，（ $R > 1$ 任意取值时，（4.17）均成立$w \in \mathbb{C}$。 □

最后，利用 (4.11) 和 (4.17)，我们可以为参考复方向 $\mathbf{d}_{\uparrow}(z)$ 推导出雅可比–安格尔恒等式，该恒等式对每个 $z \geq 1$都成立。得到这一结果后，便可直接推出集合 $\{\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3 : \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1\}$ 中所有复方向对应的雅可比–安格尔恒等式。

定理 4.7。 对于任意$\mathbf{x} \in B_1$ 和 $z \geq 1$，以下恒等式成立：

$$e^{i\kappa \mathbf{d}_{\uparrow}(z)\cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^{m}(\mathbf{d}_{\uparrow}(z)) Y_{\ell}^{m}(\hat{\mathbf{x}}) j_{\ell}(\kappa|\mathbf{x}|). \tag{4.20}$$

因此，对于任意 $\mathbf{x} \in B_1$ 和$\mathbf{y} \in \Theta \times [0, +\infty)$，可得：

$$\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = e^{i\kappa \mathbf{d}(\mathbf{y})\cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^{m}\left(\mathbf{d}_{\uparrow}\left(\frac{\zeta}{2\kappa} + 1\right)\right) Y_{\ell}^{m}\left(R_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\hat{\mathbf{x}}\right) j_{\ell}(\kappa|\mathbf{x}|). \tag{4.21}$$

证明。 恒等式（4.20）可由（4.11）和（4.17）轻易推出。为了将雅可比–安格尔恒等式（3.5）扩展到（4.4）中的复值方向 $\mathbf{d}$（$\mathbf{y}$）并由此证明恒等式（4.21），我们可以注意到:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) &= e^{i\kappa\mathbf{d}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}} = e^{i\kappa R_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{d}_{\uparrow}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\cdot\mathbf{x}} = e^{i\kappa\mathbf{d}_{\uparrow}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\cdot R_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\mathbf{x}} \\ &= 4\pi\sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^{m}\left(\mathbf{d}_{\uparrow}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\right) Y_{\ell}^{m}\left(R_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\hat{\mathbf{x}}\right) j_{\ell}(\kappa|\mathbf{x}|).\end{aligned}$$

□

4.3 维格纳矩阵

现在我们专门用一小节介绍维格纳矩阵。根据 [9,式 (1)] 和 [7, 式 (5.65)]中的记号，我们提出如下定义。

定义 4.8 (维格纳矩阵)。设 $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ 为欧拉角，且 $\ell \geq 0$。维格纳 D 矩阵是酉矩阵 $D_{\ell}(\boldsymbol{\theta}) = (D^{m}{}_{,\ell}{}^{m'}(\boldsymbol{\theta}))_{m,m'} \in \mathbb{C}^{(2\ell+1)\times(2\ell+1)}$，其中 $|m|, |m'| \leq \ell$，其元素定义为

$$D_{\ell}^{m,m'}(\boldsymbol{\theta}) := e^{im'\theta_2} d_{\ell}^{m,m'}(\theta_1) e^{im\theta_3}. \tag{4.22}$$

反过来，矩阵 $d_{\ell}(\theta) := (d^{m}{}_{,\ell}{}^{m'}(\theta))_{m,m'} \in \mathbb{R}^{(2\ell+1)\times(2\ell+1)}$，其中 $|m|, |m'| \leq \ell$，称为维格纳 d 矩阵，其元素为

$$d_{\ell}^{m,m'}(\theta) := \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} w_{\ell,k}^{m,m'} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2(\ell-k)+m'-m} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k+m-m'}, \tag{4.23}$$

其中

$$w_{\ell,k}^{m,m'} := \frac{(-1)^k \left[(\ell+m)!(\ell-m)!(\ell+m')!(\ell-m')!\right]^{1/2}}{(\ell-m-k)!(\ell+m'-k)!(k+m-m')!\,k!} \tag{4.24}$$

其中 $k_{\min} :=$ 最大值$\{0, m'-m\}$ 且 $k_{\max} :=$ 最大值$\{\ell-m, \ell+m'\}$。

有关三角函数的其他明确表达式，请参见 [25, 第 4 节。3]。式 (4.22) 和 (4.24) 与所引用文献中的符号差异源于欧拉角的选择。注意，维格纳 d 矩阵 $d_{\ell}(\theta_1)$ 是实数：这主要归因于定义 4.1 中采用的约定选择（ z-y-z ）。

由于维格纳 D 矩阵 $D_{\ell}(\boldsymbol{\theta})$，任何次数为 ℓ 、阶数为 m的球谐函数，在旋转 $R_{\boldsymbol{\theta}}$下会变换为同一次数的球谐函数的线性组合，事实上，展开公式 [25, 第 4.1 节，公式 (5)]成立，即

$$Y_{\ell}^{m}(\mathbf{d}) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} \overline{D_{\ell}^{m,m'}(\boldsymbol{\theta})} Y_{\ell}^{m'}(R_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{d}), \qquad \forall \mathbf{d} \in \mathbb{S}^2, \forall (\ell, m) \in \mathcal{I} \tag{4.25}$$

（另见 [21, 式（33）]和 [7, 式（4.1）]）。最后，我们已经具备了对倏逝平面波进行模态分析（4.3）的所有要素。

注 4.9。 正如 [9], 所指出的，*Wigner* 公式（4.23）的数值计算会产生无法容忍的数值误差，因为该公式表现为许多带交替符号的大数之和。为避免这一问题，前文所引文章的作者提出了一种简单方法：将 $d_\ell(\theta)$ 矩阵展开为复 *Fourier* 级数，然后通过在 J_y 的特征基中对角化角动量算子，精确计算 *Fourier* 系数 J_z （关于这些算子的更多细节，请参见 [7, 第 1]）。由此得到的过程避免了数值消去问题，因为根据 J_y的特征向量归一化条件，每个 *Fourier* 系数的范数都不超过 *1*。更准确地说， J_y 首先表示为一个 $(2\ell+1)$ 维 *Hermitian* 矩阵

$$J_y = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & -X_{-\ell+1} & & & & \\ X_\ell & 0 & -X_{-\ell+2} & & & \\ & X_{\ell-1} & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & -X_\ell \\ & & & & X_{-\ell+1} & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $(J_y)_{m,\,m'} = (X_{-m'}\delta_{m,\,m'+1} - X_{m'}\delta_{m,\,m'-1})/(2i)$，对于 $|m|、\ |m'| \le \ell$，其中的项X_m：$= [(\ell+m)(\ell-m+1)]^{1/2}$满足 $X_{\pm m} = X_{\mp m+1}$。接下来，对厄米矩阵J_y 进行对角化，以获得所有特征向量 $\{\mathbf{j}_m\}_{m=-\ell}^{\ell}$，从而计算

$$d_\ell^{m,m'}(\theta) = \sum_{\mu=-\ell}^{\ell} e^{i\mu\theta} j_{\mu,m}\overline{j_{\mu,m'}}, \tag{4.26}$$

其中 $\mathbf{j}_\mu = (j_{\mu,\,m})_{m=-\ell}^{\ell}$。如前所述，该方法不仅具有所有系数 $t^{m,\,\ell}{}^{,\,m'}{}_{,\,\mu}$ 在 (4.26)中均小于 *1* 的优点，而且矩阵 J_y是三对角厄米矩阵，因此可以很容易地进行对角化。在下面的数值实验中，我们将使用 (4.26) 来克服由于 *Wigner* 公式 (4.23)可能造成的任何精度损失，从而采用傅里叶展开 (4.26)。

4.4 模态分析

在（4.21）中，我们看到可以将雅可比–安格尔恒等式（3.5）扩展到 $\{\mathbf{d} \in \mathbb{C}^3$ 中的所有复值方向：$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 1\}$。根据前几节提出的定义，我们对倏逝平面波进行模态分析，试图解释为什么我们认为这类波比传播波具有更好的稳定性。为提高可读性，我们引入记号$\mathbf{D}_\ell^m(\boldsymbol{\theta})$，其中 $0 \le |m| \le \ell$ 表示维格纳 D 矩阵 $D_\ell(\boldsymbol{\theta})$ 的各列，并且

$$\mathbf{P}_\ell(\zeta) := \left(\gamma_\ell^{m'} i^{m'} P_\ell^{m'}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\right)_{m'=-\ell}^{\ell} \in \mathbb{C}^{2\ell+1}. \tag{4.27}$$

本节所呈现的结论基于以下基本结果。

命题 4.10。 以下恒等式对任意 $\mathbf{x} \in B_1$ 和 $\mathbf{y} \in \Theta\times[0,+\infty)$成立：

$$\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[4\pi i^{\ell} \beta_{\ell}^{-1} \overline{\mathbf{D}_{\ell}^{m}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}_{\ell}(\zeta)} \right] b_{\ell}^{m}(\mathbf{x}), \tag{4.28}$$

证明。 利用复方向 Jacobi–Anger 恒等式（4.21）和展开公式（4.25），我们得到

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell}^{\ell} 4\pi i^{\ell} Y_{\ell}^{m'} \left(\mathbf{d}_{\uparrow} \left(\frac{\zeta}{2\kappa} + 1 \right) \right) Y_{\ell}^{m'} \left(R_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} \right) j_{\ell}(\kappa|\mathbf{x}|) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell}^{\ell} 4\pi i^{\ell} Y_{\ell}^{m'} \left(\mathbf{d}_{\uparrow} \left(\frac{\zeta}{2\kappa} + 1 \right) \right) \left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{D_{\ell}^{m',m}(\boldsymbol{\theta})} Y_{\ell}^{m}(\hat{\mathbf{x}}) \right) j_{\ell}(\kappa|\mathbf{x}|) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[\sum_{m'=-\ell}^{\ell} 4\pi i^{\ell-m'} \beta_{\ell}^{-1} \gamma_{\ell}^{m'} P_{\ell}^{m'} \left(\frac{\zeta}{2\kappa} + 1 \right) \overline{D_{\ell}^{m',m}(\boldsymbol{\theta})} \right] b_{\ell}^{m}(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

□

值得注意的是，根据定义（4.22），[21, 式（35）] 以及维格纳 d 矩阵的对称性质 [25,第 4.4 节，式（1）],可得

$$D_{\ell}^{0,m}(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\theta_2} \mathsf{P}_{\ell}^{m}(\cos\theta_1), \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \forall (\ell,m) \in \mathcal{I}, \tag{4.29}$$

此外 $P_{\ell}^{m}(1) = \delta_{0,\,m}$ 根据（4.8）。因此，在（ $\zeta = 0$ （4.28）中代入后，对于任意$\boldsymbol{\theta} \in \Theta$，我们便得到式（3.13）中的传播平面波雅可比–安格尔展开。系数模

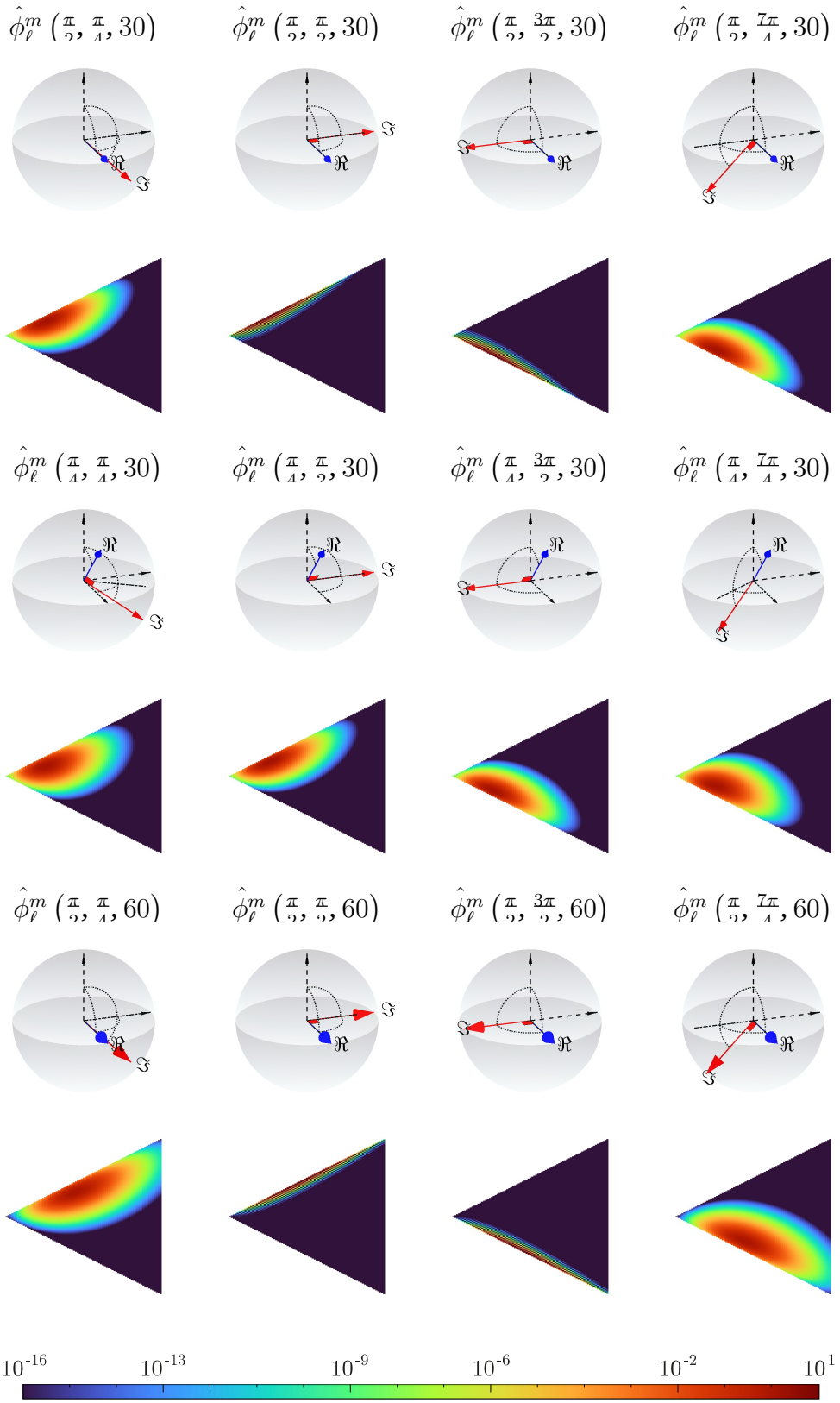
$$\hat{\phi}_{\ell}^{m}(\theta_1,\ \theta_3,\ \zeta) := |(\phi_{\mathbf{y}},\ b_{\ell}^{m})_{\mathcal{B}}| = \frac{4\pi}{\beta_{\ell}} \left| \sum_{m'=-\ell}^{\ell} \gamma_{\ell}^{m'} i^{-m'} d^{m',\ell}{}^{m}(\theta_1) e^{-im'\theta_3} P_{\ell}^{m'} \left(\frac{\zeta}{2\kappa} + 1 \right) \right| \tag{4.30}$$

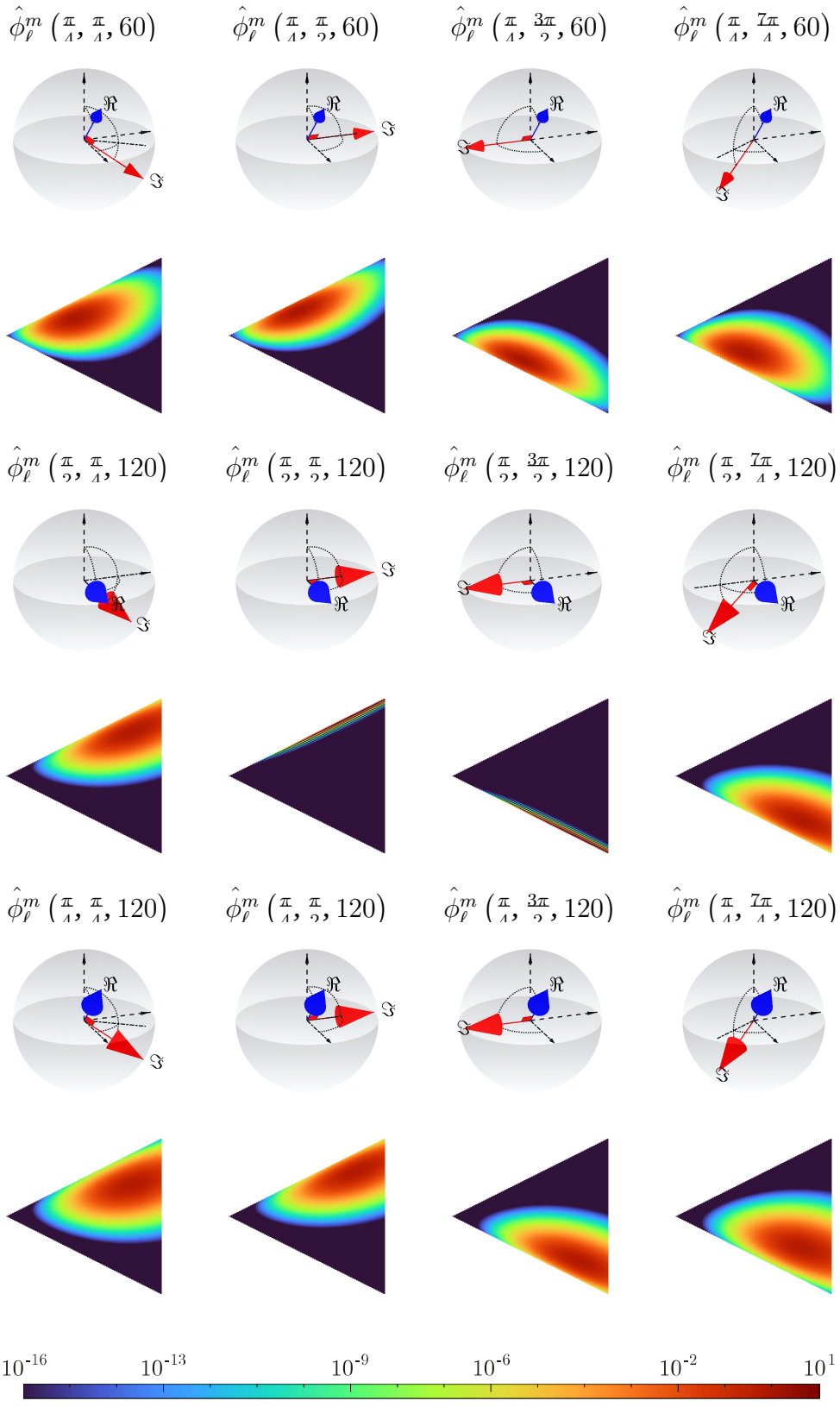
模态展开（4.28）取决于 $\theta_1 \in [0,\pi]$、 $\theta_3 \in [0,2\pi)$ 和（ℓ、 m） $\in \mathcal{I}$。注意，若 $\zeta = 0$, 那么根据（4.29），系数（4.30）与（3.14）中的传播波一致，因此与 θ_3无关。

图4.3展示了系数（4.30）的一些分布。通过调整倏逝参数 θ_3 和 ζ，对于任意（ℓ、 m） $\in \mathcal{I}$，平面波的傅里叶模态成分都可以移至更高的范围，如与图3.1对比所示：实际上，通过改变 ζ，我们能够达到更高的次数，即更大的 ℓ；而通过改变 θ_3，则可以遍历不同的阶数 m。

为了更清楚地看到这一结果，仿照（3.15）中的做法，我们定义 ：

$$\begin{aligned}
&\tilde{b}_{\ell}[\mathbf{y}] := \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\phi_{\mathbf{y}}, b_{\ell}^{m})_{\mathcal{B}}\, b_{\ell}^{m}, && \forall \ell \geq 0,\ \forall \mathbf{y} \in \Theta \times [0,+\infty), \\
&b_{\ell}[\mathbf{y}] := \hat{\phi}_{\ell}^{-1}(\zeta) \tilde{b}_{\ell}[\mathbf{y}], && \hat{\phi}_{\ell}(\zeta) := \left\| \tilde{b}_{\ell}[\mathbf{y}] \right\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$


$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 30\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 60\right)$
$\Re$
$\Im$
10^{-16}
10^{-13}
10^{-9}
10^{-6}
10^{-2}
10^{1}


$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 60\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 120\right)$
$\hat{\phi}_\ell^m\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 120\right)$
$\Re$
$\Im$
10^{-16}
10^{-13}
10^{-9}
10^{-6}
10^{-2}
10^{1}

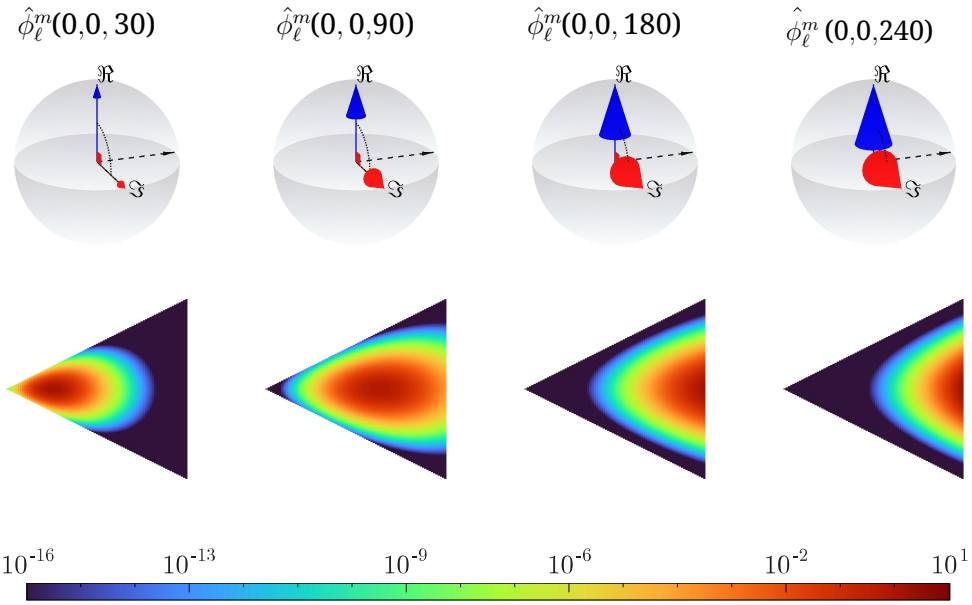


图4.3：倏逝平面波的模态分析。对于每个波：（上方）方向向量 d(y) 的实部和虚部表示（图中分别用$\Re$ 和 $\Im$ 表示以简化记号），其方位角 $\theta_2 = 0$固定。箭头的大小与向量的范数成正比，因此取决于 ζ 和 κ；（下方）式 (4.30) 中的系数 $\phi_\ell^m(\theta_1, \theta_3, \zeta)$ 在 θ_1、θ_3 和 ζ取不同值时对应的分布。索引 ℓ在横坐标上于范围 $0 \le \ell \le 80$内变化，而索引 m 在纵坐标上于范围 $0 \le |m| \le \ell$ 内变化，形成一个三角形。我们对系数进行了适当归一化，所用归一化因子（仅取决于ζ）在第 6 章中有所说明，即式 (6.2) 中 μ_N 的平方根，并根据式 (6.19) 中的近似计算得出。波数 $\kappa = 6$。

事实上，由于（4.31），我们可以写成

$$\phi_{\mathbf{y}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\phi_{\mathbf{y}}, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}\, b_\ell^m = \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{\phi}_\ell(\zeta)\, b_\ell[\mathbf{y}], \tag{4.32}$$

其中 $b_\ell[\mathbf{y}] \in$ 张成空间$\{b_\ell^m\}_{m=-\ell}^{\ell}$，且 $\|b_\ell[\mathbf{y}]\|_{\mathcal{B}} = 1$，并且

$$\hat{\phi}_\ell(\zeta) = \left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[\hat{\phi}_\ell^m(\theta_1, \theta_3, \zeta) \right]^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| (\phi_{\mathbf{y}}, b_\ell^m)_{\mathcal{B}} \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{4\pi}{\beta_\ell} \left| \mathbf{P}_\ell(\zeta) \right|. \tag{4.33}$$

式（4.33）中的最后一个等号成立，是因为式（4.30）以及酉性条件 [25, 第 4.1 节，式（6）]。此外请注意，令 $\zeta = 0$，我们便回到传播型 ˆ情形（3.17）。式（ ϕ_ℓ（ζ）中的系数分布在图 4.33中展示，4.4 对应倏逝参数 ζ 的不同取值。

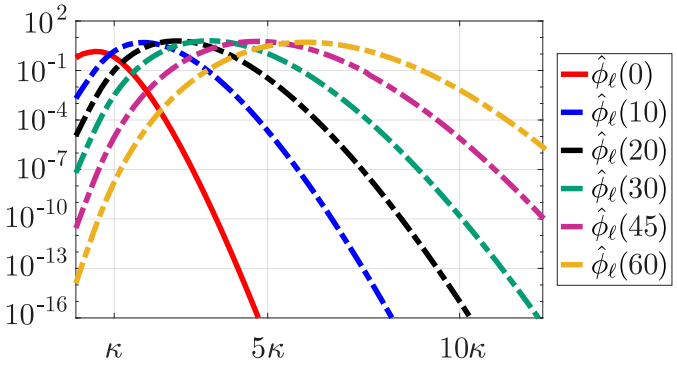


图4.4：倏逝型平面波的模态分析：对于倏逝参数 ζ 的不同取值，式 (4.33) 中系数 $\phi_\ell(\zeta)$ 的分布。对于每个 ζ，这对应于沿着三角形中所表示的数值分布的垂直线段取 ℓ^2 范数；这些三角形描述了式 (4.30) 中系数 $\phi_\ell^m(\theta_1,\theta_3,\zeta)$ 的分布，例如图 4.1所示的三角形。请注意，增大 ζ 的值可以覆盖更高阶的傅里叶模态，这与图 3.1 中传播情形下的情况相反。我们根据一个仅取决于 ζ 的归一化因子对系数进行了适当归一化；该因子在第 6 章中进行了描述，即式 (6.2) 中 μ_N 的平方根，并使用式 (6.19) 中的近似进行计算。波数 $\kappa = 6$。

<escape>最后，让我们更详细地考察（4.30）中系数的对称性。与传播情形类似，我们仍然可以将讨论限制在考虑 $\theta_1 \in [0,\pi/2]$ 的情况：事实上，借助（4.9）以及维格纳 d 矩阵的对称性 $d^{m}{}_{,\ell}{}^{m'}(\theta) = (-1)^{\ell+m'} d^{-m}{}_{,\ell}{}^{m'}(\pi-\theta)$，在 [25, 第 4.4 节，公式（1）], 中，我们有</escape>

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_\ell^m(\theta_1,\theta_3,\zeta) &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'} i^{m'} d_\ell^{m',m}(\theta_1) e^{im'\theta_3} P_\ell^{m'}(\zeta/2\kappa+1)\right| \\
&= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{-m'} i^{m'} d_\ell^{-m',m}(\pi-\theta_1) e^{im'\theta_3} P_\ell^{-m'}(\zeta/2\kappa+1)\right| \\
&= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'} i^{-m'} d_\ell^{m',m}(\pi-\theta_1) e^{-im'\theta_3} P_\ell^{m'}(\zeta/2\kappa+1)\right| \\
&= \hat{\phi}_\ell^m(\pi-\theta_1,\theta_3,\zeta). \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

此外，我们可以假设 $\theta_3 \in [0,\pi/2]\cup[3\pi/2,2\pi)$（或在 $[\pi/2,3\pi/2]$ 中作类似假设）：

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_\ell^m(\theta_1,\theta_3,\zeta) &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'} i^{m'} d_\ell^{m',m}(\theta_1) e^{im'\theta_3} P_\ell^{m'}(\zeta/2\kappa+1)\right| \\
&= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'} i^{-m'} d_\ell^{m',m}(\theta_1) e^{-im'(\pi-\theta_3)} P_\ell^{m'}(\zeta/2\kappa+1)\right| \\
&= \hat{\phi}_\ell^m(\theta_1,\pi-\theta_3,\zeta). \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

系数随 θ_3 的取值变化而呈现的对称行为同样值得关注。利用 $d^{m}{}_{,\ell}{}^{m'}(\theta) = (-1)^{m'-m} d^{-m}{}_{,\ell}{}^{-m'}(\theta)$ 在 [25, 第 4.4 节，公式 (1)], 中的性质，可以推得：

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_\ell^m(\theta_1,\pi-\theta_3,\zeta) &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'}i^{-m'}d_\ell^{m',m}(\theta_1)e^{-im'(\pi-\theta_3)}P_\ell^{m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right)\right| \\ &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{-m'}i^{-m'}d_\ell^{-m',-m}(\theta_1)e^{im'\theta_3}P_\ell^{-m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right)\right| \\ &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'}i^{m'}d_\ell^{m',-m}(\theta_1)e^{-im'\theta_3}P_\ell^{m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right)\right| \\ &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\gamma_\ell^{m'}i^{-m'}d_\ell^{m',-m}(\theta_1)e^{-im'(\pi+\theta_3)}P_\ell^{m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right)\right| \\ &= \hat{\phi}_\ell^{-m}(\theta_1,\pi+\theta_3,\zeta). \end{aligned} \tag{4.36}$$

此外，借助恒等式 $d^{m,\ell\ m'}(0)=\delta_{m,m'}$ (它可直接由(4.23))推出)，可以看出 $\phi_\ell^m(0,\ \theta_3,\ \zeta)$实际上与 θ_3的取值无关：

$$\hat{\phi}_\ell^m(0,\theta_3,\zeta)=4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\gamma_\ell^m e^{-im\theta_3}P_\ell^m\left(\zeta/2\kappa+1\right)\right|=4\pi\beta_\ell^{-1}\gamma_\ell^m P_\ell^m\left(\zeta/2\kappa+1\right).$$

此外，形式为 $\phi_\ell^m(\pi/2,\ \pi/2,\ \zeta)$ 和 $\phi_\ell^m(\pi/2,\ 3\pi/2,\ \zeta)$ 的系数组合，呈现出与图 3.1 中 $\theta_1=\pi/2$ 情况相同的棋盘格模式。例如，令 $\theta_1=\theta_3=\pi/2$，并将求和式（4.30）中的各加数记为$c^{m',\ell\ m}(\zeta)$，则有

$$\begin{aligned} c_\ell^{-m',m}(\zeta) &= \gamma_\ell^{-m'}i^{m'}d_\ell^{-m',m}\left(\pi/2\right)e^{im'\pi/2}P_\ell^{-m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right) \\ &= (-1)^{\ell+m+m'}\gamma_\ell^{-m'}d_\ell^{m',m}\left(\pi/2\right)P_\ell^{-m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right) \\ &= (-1)^{\ell+m+m'}\gamma_\ell^{m'}d_\ell^{m',m}\left(\pi/2\right)P_\ell^{m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right) \\ &= (-1)^{\ell+m}\gamma_\ell^{m'}i^{-m'}d_\ell^{m',m}\left(\pi/2\right)e^{-im'\pi/2}P_\ell^{m'}\left(\zeta/2\kappa+1\right) \\ &= (-1)^{\ell+m}c_\ell^{m',m}(\zeta), \end{aligned}$$

其中我们用到了维格纳 d 矩阵的性质 $d^{m,\ell\ m'}(\pi/2)=(-1)^{\ell+m'}d^{-m,\ell\ m'}(\pi/2)$，见[25, 第 4.4 节，式（1）]。因此，若 $\ell+m$ 为奇数，则有 $c^{-m',\ell\ m}(\zeta)=-c^{m',\ell\ m}(\zeta)$，因此根据（4.29），可得

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_\ell^m(\pi/2,\pi/2,\zeta) &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|\textstyle\sum_{m'=-\ell}^{\ell}c_\ell^{m',m}(\zeta)\right| = 4\pi\beta_\ell^{-1}\left|c_\ell^{0,m}(\zeta)\right| \\ &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\gamma_\ell^0 P_\ell\left(\zeta/2\kappa+1\right)\left|d_\ell^{0,m}\left(\pi/2\right)\right| \\ &= 4\pi\beta_\ell^{-1}\gamma_\ell^m P_\ell\left(\zeta/2\kappa+1\right)\left|\mathsf{P}_\ell^m(0)\right|=0, \qquad \text{if } \ell+m \text{ is odd.}\end{aligned}$$

ˆ 对于 $\phi_\ell^m(\pi/2,\ 3\pi/2,\ \zeta)$ 也可以看到同样的结果。可以想见，像前面的公式那样，利用维格纳 d 矩阵的对称性质以及费雷尔函数（1.4）或缔合勒让德多项式（4.8）的相关性质，还可以推导出许多其他此类关系。

总而言之，我们的研究结果表明，倏逝平面波能够准确捕捉正则性较低的亥姆霍兹解中的高阶傅里叶模态。然而，如何为倏逝参数 θ_3 和 ζ 选取合适的值，以构造规模适当的近似空间，仍是一项重大挑战。本文余下部分将重点讨论这一问题。

第5章

Herglotz 变换

本章中，按照 [19, 第 6], 节，我们引入一族定义在参数域 $\Theta \times [0, +\infty)$ 上的函数 $\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$，并由此定义由它们生成的空间 $\mathcal{A}$。我们给出若干引理，证明赋予适当加权范数后的 $\mathcal{A}$ 确实是一个希尔伯特空间，且函数 a_ℓ^m 构成其正交归一基。相关归一化系数 α_ℓ（定义见（1.13））的渐近行为恰好与 β_ℓ 相反：当 ℓ 趋于无穷时，$\alpha_\ell \sim \beta_\ell^{-1}$ 。据此，我们得以引入空间 $\mathcal{A}$ 与单位球 B_1 内亥姆霍兹解空间 $\mathcal{B}$ 之间的 Herglotz 变换 T。 T 的积分表示可视为 Herglotz 经典积分表示（3.6）的一般化。因此，我们将 $\mathcal{A}$ 称为 Herglotz 密度空间。此外，我们证明了算子 T 有界且可逆。

因此，单位球 B_1 中的任何亥姆霍兹解都可以唯一地表示为倏逝平面波的连续叠加；此外，其相应的密度在适当的范数下有界，即 $\mathcal{A}$ 范数。

这一结果表明，倏逝平面波构成了亥姆霍兹解空间的连续框架。这一性质为实现稳定且准确的离散展开奠定了基础。一个重要推论是，Herglotz 密度空间具有再生核性质，这意味着点求值泛函是连续的。因此，根据里斯定理，任何点求值泛函都可以与 $\mathcal{A}$中的一个元素对应，进而通过 Herglotz 变换映射为一个倏逝平面波。

5.1 Herglotz 密度空间

为简化记号，下面将参数域记为

$$Y := \Theta \times [0, +\infty).$$

我们引入一个定义在 Y 上的加权 L^2 空间。权函数为

$$w(\mathbf{y}) = w(\theta_1, \zeta) := \sin(\theta_1)\, \zeta^{1/2} e^{-\zeta}, \qquad \forall \mathbf{y} \in Y. \tag{5.1}$$

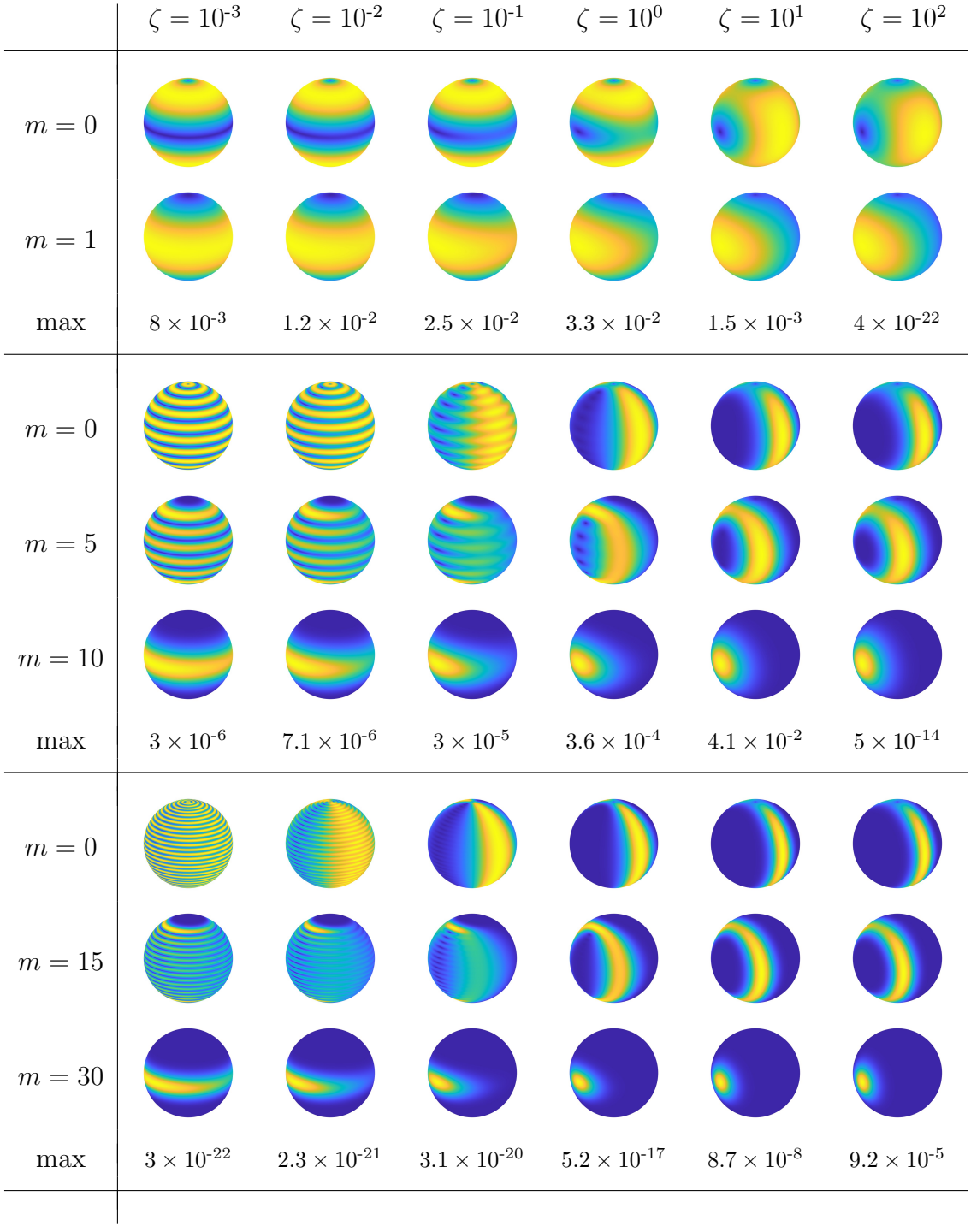


图5.1：函数 $(\zeta \sin\ \theta_1 \cos\theta_3, \zeta \sin\ \theta_1 \sin\ \theta_3, \zeta \cos\theta_1) \mapsto |w^{1/2}(\theta_1, \zeta) a_\ell^m(\theta_1, \cdot, \theta_3, \zeta)|$ 的表示。这些函数与 a_ℓ^m 的第二个自变量无关；固定 $\ell = 1$、$\ell = 10$ 和 $\ell = 30$（从上到下），并取 m 和 ζ 的不同值。对于每个次数 ℓ，每列中的函数共享相同的色标，其最大值位于底部的“max”行。波数 $\kappa = 6$。

注意，w 不依赖于欧拉角 θ_2 和 θ_3。w-加权的 L^2厄米内积及其对应的范数定义如下：

$$\begin{aligned}(u,v)_{\mathcal{A}} &:= \int_Y u(\mathbf{y})\overline{v(\mathbf{y})}w(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}, \\ \|u\|_{\mathcal{A}}^2 &:= (u,u)_{\mathcal{A}},\end{aligned} \qquad \forall u,v \in L^2(Y;w). \tag{5.2}$$

现在，我们定义 $L^2(Y;w)$ 的一个真子空间，将其记为 $\mathcal{A}$，并称为<style id='5'>Herglotz 密度空间。

定义 5.1（赫格洛茨密度）。对于任意 $(\ell,\ m)$，我们定义 $\in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_\ell^m(\mathbf{y}) &:= \mathbf{D}_\ell^m(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{P}_\ell(\zeta), & \forall \mathbf{y}\in Y, \\ a_\ell^m &:= \alpha_\ell \tilde{a}_\ell^m, & \alpha_\ell := \|\tilde{a}_\ell^m\|_{\mathcal{A}}^{-1},\end{aligned} \tag{5.3}$$

其中 $\mathbf{D}_\ell^m(\boldsymbol{\theta})$ 和 $\mathbf{P}_\ell(\zeta)$ 分别在 (4.27) 和 $\mathbf{y}\ =(\boldsymbol{\theta},\ \zeta)$中定义。此外，我们引入空间

$$\mathcal{A} := \overline{\mathrm{span}\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}} \subsetneq L^2(Y;w).$$

与球面波（1.13）类似，赫格洛茨密度也依赖于两个不同的参数（$\ell,\ m$）$\in\mathcal{I}$，但其范数 α_ℓ 与参数m无关，稍后将会说明这一点（见引理 5.3）。波数 κ 显式地出现在 4.27 中 $\mathbf{P}_\ell(\zeta)$ 的定义中，因此每个 a_ℓ^m对于（$\ell,\ m$）$\in\mathcal{I}$ 都依赖于它。

图5.1展示了一些由 $w^{1/2}$ 加权的密度 a_ℓ^m。请注意，随着次数 ℓ 增大，图中所示函数的最大值出现在越来越大的倏逝参数 ζ 处，这反映了从传播模态（例如 $\ell=1$）到倏逝模态（例如 $\ell=30$）的转变。这些函数的对称性可根据性质 (4.34) 和 (4.35) 来理解。为方便起见，我们只报告 $m\geq 0$ 的一些情况，因为根据 (4.36)，对于 $m\leq 0$，函数关于平面 $\{\mathbf{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ y=0\}$ 对称。如果 ζ 足够大（例如 $\zeta=10$），支集会形成环状结构；当 $|m|$ 趋于 ℓ 时，该结构会收缩为一个点。而如果 $|m|$ 趋于 0，则它倾向于形成两条关于平面$\{\mathbf{x}\ =(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x=0\}$ 对称的竖直条带。ζ 越小，函数对 θ_3 的依赖性就越弱，所呈现的图案也越符合 Ferrers 函数 P_ℓ^m 的零点分布（见第 4.16.2] 节 [18, ）。例如，在图5.1中，当 $\zeta=10^{-3}$ 时，我们观察到 $\ell-|m|$ 近乎均匀的蓝色水平带。

我们提出一个引理，以便稍后研究归一化系数 α_ℓ 的渐近行为。

引理 5.2. 对于所有 $(\ell,m)\in\mathcal{I}$ 和 $z\geq 1$

$$(z-1)^\ell \leq \frac{\sqrt{\pi}(\ell-m)!P_\ell^m(z)}{2^\ell\Gamma(\ell+1/2)} \leq (z+1)^\ell. \tag{5.4}$$

证明。注意，由于（4.9），$(\ell+m)!\,P_\ell^{-m}(z) = (\ell-m)!\,P_\ell^m(z)$，对每个 $(\ell,\ m) \in \mathcal{I}$。因此，在下文中我们可以假设 $m \geq 0$。由（4.16）且由于

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}, \qquad \forall n \geq 0, \tag{5.5}$$

(见 [18, 式（5.5.5）]) 可直接得出：

$$A_\ell^m(z) := \frac{\sqrt{\pi}(\ell-m)!P_\ell^m(z)}{2^\ell\Gamma(\ell+1/2)} = \binom{2\ell}{\ell+m}^{-1}(z-1)^\ell\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{m/2+k}.$$

由范德蒙德恒等式 [24, 式（1）], 可得：

$$\begin{aligned}
A_\ell^m(z) &\geq \binom{2\ell}{\ell+m}^{-1}(z-1)^\ell\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k} = (z-1)^\ell, \\
A_\ell^m(z) &\leq \binom{2\ell}{\ell+m}^{-1}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\ell-m/2}(z-1)^\ell\sum_{k=0}^{\ell-m}\binom{\ell}{k}\binom{\ell}{m+k} \\
&= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{m/2}(z+1)^\ell \leq (z+1)^\ell.
\end{aligned}$$

□

注 5.3. 数值实验表明，有可能改进（5.4）中的上界，取 z^ℓ。然而，缺少这样的改进并不影响下一个结果的有效性。

经过一个预渐近区间后，系数 α_ℓ 会随 ℓ 超指数级衰减，直至 $\ell \approx \kappa$。精确的渐近行为由以下引理给出。

引理 5.4. 对于所有 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$，$\|\tilde{a}_\ell^m\|_{\mathcal{A}}$ 与 m 的取值无关，并且

$$\alpha_\ell \sim c(\kappa)\left(\frac{e\kappa}{2}\right)^\ell \ell^{-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}, \qquad as\ \ell \to \infty, \tag{5.6}$$

其中常数 $c(\kappa)$ 仅取决于 κ。

证明。由于正交条件 [25, 第 4.10 节，式 (5)], namel y

$$\int_\Theta D_\ell^{m',m}(\boldsymbol{\theta})\overline{D_q^{n',n}(\boldsymbol{\theta})}\sin(\theta_1)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} = \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\delta_{m,n}\delta_{m',n'}\delta_{\ell,q}, \tag{5.7}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\|\tilde{a}_\ell^m\|_{\mathcal{A}}^2 &= \int_Y |\mathbf{D}_\ell^m(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{P}_\ell(\zeta)|^2 w(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\
&= \sum_{m'=-\ell}^{\ell}\int_\Theta |D_\ell^{m',m}(\boldsymbol{\theta})|^2\sin(\theta_1)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\int_0^{+\infty}\left[\gamma_\ell^{m'}P_\ell^{m'}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\right]^2\zeta^{1/2}e^{-\zeta}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\sum_{m'=-\ell}^{\ell}\int_0^{+\infty}\left[\gamma_\ell^{m'}P_\ell^{m'}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+1\right)\right]^2\zeta^{1/2}e^{-\zeta}\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

注意到 $\|\tilde{a}_\ell^m\|_{\mathcal{A}}$ 与 m 的取值无关。接下来，我们研究式（5.8）中的积分，以下记作 $B_\ell^{m'}$。根据式（5.4）：

$$\begin{aligned} B_\ell^{m'} &\geq \left(\frac{2^\ell \gamma_\ell^{m'}\Gamma(\ell+1/2)}{\sqrt{\pi}(\ell-m')!}\right)^2 \int_0^{+\infty}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}\right)^{2\ell}\zeta^{1/2}e^{-\zeta}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{4\pi^2\kappa^{2\ell}}\frac{(2\ell+1)\Gamma^2(\ell+1/2)}{(\ell+m')!(\ell-m')!}\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2}\right) = e^{-2\kappa}C_\ell^{m'}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

并且类似地

$$\begin{aligned} B_\ell^{m'} &\leq \left(\frac{2^\ell \gamma_\ell^{m'}\Gamma(\ell+1/2)}{\sqrt{\pi}(\ell-m')!}\right)^2 \int_0^{+\infty}\left(\frac{\zeta}{2\kappa}+2\right)^{2\ell}\zeta^{1/2}e^{-\zeta}\mathrm{d}\zeta \\ &= \left(\frac{2^\ell \gamma_\ell^{m'}\Gamma(\ell+1/2)}{\sqrt{\pi}(\ell-m')!}\right)^2 \int_{4\kappa}^{+\infty}\left(\frac{\eta}{2\kappa}\right)^{2\ell}(\eta-4\kappa)^{1/2}e^{-(\eta-4\kappa)}\mathrm{d}\eta \\ &< \frac{2\ell+1}{4\pi^2}\frac{2^{2\ell}\Gamma^2(\ell+1/2)}{(\ell+m')!(\ell-m')!}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\eta}{2\kappa}\right)^{2\ell}\eta^{1/2}e^{-\eta}e^{4\kappa}\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{e^{4\kappa}}{4\pi^2\kappa^{2\ell}}\frac{(2\ell+1)\Gamma^2(\ell+1/2)}{(\ell+m')!(\ell-m')!}\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2}\right) = e^{2\kappa}C_\ell^{m'}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

其中我们使用了变量替换 $\eta = \zeta + 4\kappa$，而 $C_\ell^{m'}$ 定义为

$$C_\ell^{m'} := \frac{e^{2\kappa}}{4\pi^2\kappa^{2\ell}}\frac{(2\ell+1)\Gamma^2(\ell+1/2)}{(\ell+m')!(\ell-m')!}\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2}\right), \qquad \forall\,(\ell,m')\in\mathcal{I}. \tag{5.11}$$

利用（1.27）和 [18, 式（5.11.3）], 容易验证，当 $\ell\to+\infty$时：

$$\begin{aligned} \Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2}\right) &\sim \sqrt{2\pi}e^{-\left(2\ell+\frac{3}{2}\right)}\left(2\ell+\frac{3}{2}\right)^{2\ell+1} \sim \sqrt{2\pi}e^{-2\ell}\,(2\ell)^{2\ell+1}, \\ \Gamma^2\left(\ell+\frac{1}{2}\right) &\sim 2\pi e^{-(2\ell+1)}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^{2\ell} \sim 2\pi e^{-2\ell}\ell^{2\ell}, \\ \frac{1}{(\ell+m')!(\ell-m')!} &\sim \frac{e^{2(\ell+1)}}{2\pi(\ell+m'+1)^{\ell+m'+1/2}(\ell-m'+1)^{\ell-m'+1/2}} \\ &\sim \frac{e^{2(\ell+1)}}{2\pi e^2\ell^{2\ell+1}} = \frac{1}{2\pi}e^{2\ell}\ell^{-(2\ell+1)}, \qquad |m'|\leq\ell \text{ fixed}, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{(2\ell+1)\Gamma^2(\ell+1/2)}{(\ell+m')!(\ell-m')!}\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2}\right) \sim 2\sqrt{2\pi}e^{-2\ell}(2\ell)^{2\ell+1}, \qquad \text{as } \ell\to+\infty.$$

由（5.9）和（5.10）可知，当 $\ell\to+\infty$ 时，存在一个常数 $c_1(\kappa)$，它仅依赖于波数 κ，使得

$$C_\ell^{m'} \sim \frac{e^{2\kappa}}{\pi\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{e\kappa}\right)^{2\ell}\ell^{2\ell+1} \quad\Rightarrow\quad B_\ell^{m'} \sim c_1(\kappa)\left(\frac{2}{e\kappa}\right)^{2\ell}\ell^{2\ell+1}.$$

此外，$\|\tilde{a}_\ell^m\|_{\mathcal{A}}^2$ 在无穷远处也与 $B_\ell^{m'}$ 有相同的行为：事实上，由于（5.8），我们有

$$\|\tilde{a}_\ell^m\|_{\mathcal{A}}^2 \sim \frac{4\pi^2}{\ell} \sum_{m'=-\ell}^{\ell} c_1(\kappa) \left(\frac{2}{e\kappa}\right)^{2\ell} \ell^{2\ell+1} \sim c_2(\kappa) \left(\frac{2}{e\kappa}\right)^{2\ell} \ell^{2\ell+1},$$

对于某个常数 $c_2(\kappa)$，其仅依赖于 κ；所述结果（5.6）即得证。 □

引理5.5。空间$(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ 是一个希尔伯特空间，且族 $\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 是一个希尔伯特基（即正交归一基）：

$$(a_\ell^m, a_q^n)_{\mathcal{A}} = \delta_{\ell,q}\delta_{m,n}, \qquad \forall\,(\ell,m),(q,n) \in \mathcal{I},$$

and

$$u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (u, a_\ell^m)_{\mathcal{A}}\, a_\ell^m, \qquad \forall u \in \mathcal{A}.$$

证明。根据我们在（5.3）中对赫格洛茨密度的定义，只需证明族 $\{\tilde{a}_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 正交即可；回溯（5.8）中的步骤便可直接看出这一点。

□

根据我们的定义，雅可比–安格尔展开（4.28）可写成简洁的形式 m

$$\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} 4\pi i^\ell\, \overline{\tilde{a}_\ell^m(\mathbf{y})}\, \tilde{b}_\ell^m(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell\, \overline{a_\ell^m(\mathbf{y})}\, b_\ell^m(\mathbf{x}) \tag{5.12}$$

其中我们引入了

$$\tau_\ell := 4\pi i^\ell (\alpha_\ell \beta_\ell)^{-1}, \qquad \forall \ell \geq 0.$$

公式（5.12）在下文中起着核心作用：它借助（4.3）中的倏逝平面波 $\phi_{\mathbf{y}}$，将亥姆霍兹方程解空间 $\mathcal{B}$ 的球面波基（1.13）与空间 $\mathcal{A}$ 的赫格洛茨密度基（5.3）联系起来。

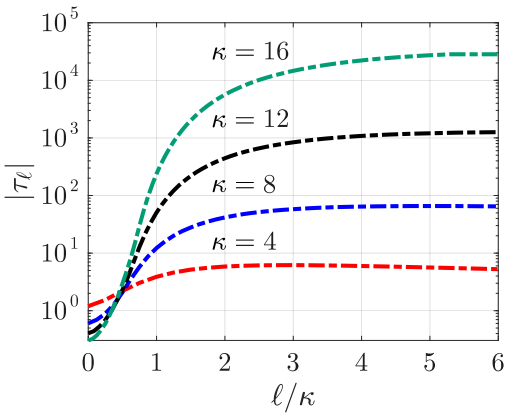
借助引理中给出的渐近式 1.4 和引理 5.4，我们可以推导出下一个结果。

推论 5.6. 存在关于 $|\tau_\ell|$ 的一致有界性，即

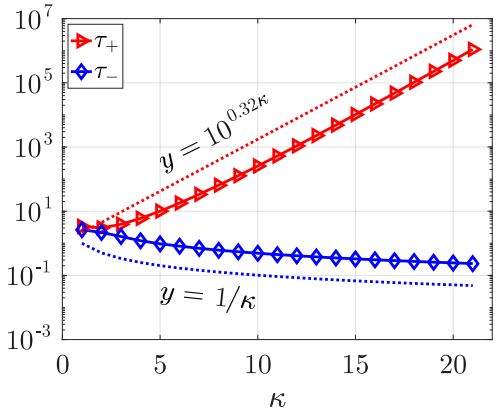
$$\tau_- := \inf_{\ell\geq 0} |\tau_\ell| > 0, \qquad \textit{and} \qquad \tau_+ := \sup_{\ell\geq 0} |\tau_\ell| < \infty. \tag{5.13}$$

显然，为了确立一致有界性（1.12），需要为亥姆霍兹方程解空间（5.2）和赫格洛茨密度空间（5.13）选取特定的范数对。这也为权重（5.1）的选择提供了依据。

.....的行为 $|\tau_\ell|$ 对后续分析至关重要，其结果见图5.2a ，其中展示了不同波数 κ下的情况。请注意，该图与（5.13）中给出的结果一致，因为当 ℓ取较大值时，曲线呈现平坦的渐近行为。此外，请注意，数值 $\tau_\pm$ 取决于波数 κ，如图5.2b所示。



(a) $|\tau_\ell|$ 对模态的依赖性
对于不同波数 κ 的数目 ℓ 。



(b) $\tau_\pm$ 在（5.13）中定义的依赖关系
关于波数 κ。

图 5.2

5.2 Herglotz 积分表示

本节将介绍*Herglotz* 变换 T。借助这一积分算子，我们可以将 $\mathcal{B}$ 中的任意亥姆霍兹解表示为倏逝平面波的线性组合，每个波都由 $\mathcal{A}$中的一个元素赋予权重。借用框架理论的术语（关于该领域的参考文献见 [4]），我们还将描述伴随算子 T^*、相应的框架算子和 Gram 算子 S 以及 G，并证明它们的一些性质。

首先，我们给出下面的引理，它对于定义 Herglotz 变换很有用。

引理 5.7。对于任意 $\mathbf{x} \in B_1$，$\mathbf{y} \mapsto \overline{\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})} \in \mathcal{A}$。

证明。令 $\mathbf{x} \in B_1$ 并定义 $v_{\mathbf{x}} : \mathbf{y} \mapsto \overline{\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})}$。利用雅可比–安格尔恒等式（5.12），可得

$$v_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{\tau_\ell}\, \overline{b_\ell^m(\mathbf{x})} a_\ell^m(\mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{y} \in Y.$$

由于 $\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathcal{A}$的希尔伯特基，根据 [17, 式（2.4.105）]，我们得到

$$\|v_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{A}}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tau_\ell b_\ell^m|^2 \le \frac{\tau_+^2}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\beta_\ell^2 j_\ell^2(\kappa|\mathbf{x}|).$$

根据（1.20）和（1.25），容易看出

$$(2\ell+1)\beta_\ell^2 j_\ell^2(\kappa|\mathbf{x}|) \sim 2\kappa^2 |\mathbf{x}|^{2\ell},$$

由此我们得出 $\|v_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{A}} < \infty$，因为 $|\mathbf{x}| < 1$。 □

注意，如果 $\mathbf{x} \in \partial B_1$，那么 $\mathbf{y} \mapsto \overline{\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})}$ 不属于 $\mathcal{A}$，这一点可以从前面的证明中轻易看出。现在我们可以定义 Herglotz 变换了。

定义 5.8 (Herglotz 变换)。 对于任意 $v \in \mathcal{A}$，我们将 *Herglotz* 变换记为 T，并定义为算子

$$\boxed{(Tv)(\mathbf{x}) := \int_Y v(\mathbf{y})\phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})w(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}, \qquad \forall \mathbf{x} \in B_1.} \tag{5.14}$$

<escape>该算子在 $\mathcal{A}$ 上定义良好，这得益于引理 5.7。在连续框架理论的背景下，例如参见 [4, 公式 (5.27)], ，该算子称为 合成算子。</escape>

定理 5.9. 算子 T 在 $\mathcal{A}$上有界且可逆：

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \\ v &\mapsto Tv = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell \, (v, a_\ell^m)_{\mathcal{A}} \, b_\ell^m, \end{aligned} \tag{5.15}$$

and

$$\tau_- \|v\|_{\mathcal{A}} \le \|Tv\|_{\mathcal{B}} \le \tau_+ \|v\|_{\mathcal{A}}, \qquad \forall v \in \mathcal{A}. \tag{5.16}$$

特别地， T 相对于基底 $\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 和 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$是对角的，即：

$$Ta_\ell^m = \tau_\ell \, b_\ell^m, \qquad \forall (\ell, m) \in \mathcal{I}. \tag{5.17}$$

证明。 根据雅可比–安格尔恒等式（5.12），对于任意 $v \in \mathcal{A}$ 和 $\mathbf{x} \in B_1$，我们有

$$\begin{aligned} (Tv)(\mathbf{x}) &= \int_Y \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) v(\mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} = \int_Y \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell \, b_\ell^m(\mathbf{x}) \overline{a_\ell^m(\mathbf{y})} \right) v(\mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell \int_Y \overline{a_\ell^m(\mathbf{y})} v(\mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \, b_\ell^m(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell \, (v, a_\ell^m)_{\mathcal{A}} \, b_\ell^m(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

因此（5.15）成立。因此，由引理 1.2

$$\|Tv\|_{\mathcal{B}}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tau_\ell|^2 |(v, a_\ell^m)_{\mathcal{A}}|^2, \qquad \forall v \in \mathcal{A},$$

并且（5.16）可由引理 5.5 的结果及（5.13）中的一致有界性推出。容易验证，逆算子为

$$T^{-1}u = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell^{-1} (u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}} \, a_\ell^m, \qquad \forall u \in \mathcal{B}. \tag{5.18}$$

□

由此可知，Herglotz 变换 T 在 Herglotz 密度空间 $\mathcal{A}$ 与亥姆霍兹解空间 $\mathcal{B}$之间有界且可逆。根据（5.18），逆算子 T^{-1} 还可写成积分算子：对于任意 $u \in \mathcal{B}$,

$$\left(T^{-1}u\right)(\mathbf{y}) = \int_{B_1} u(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x} + \kappa^{-2}\int_{B_1} \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \forall \mathbf{y} \in Y,$$

其中，核 Ψ 定义如下：对于任意 $\mathbf{y} \in Y$,

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell^{-1} a_\ell^m(\mathbf{y})\overline{b_\ell^m(\mathbf{x})}, \qquad \forall \mathbf{x} \in B_1.$$

式 (5.14) 中的积分表示 Tv 与赫格洛茨表示 (3.6) 相似，但同时将其适用范围扩展到了 $\mathcal{B}$ 中的所有亥姆霍兹解。事实上，正如第 3.2 节中所解释的，标准 Herglotz 表示 (3.6) 无法将所有亥姆霍兹解表示为密度为$v \in L^2(\mathbb{S}^2)$ 的传播平面波 (3.1) 的连续叠加。然而，通过纳入倏逝波 (4.3)，就可以利用广义 Herglotz 表示 (5.14) 表示任意亥姆霍兹解。这是因为算子 T 是空间 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 之间的同构；这意味着对于任意 $u \in \mathcal{B}$，都存在唯一对应的$v \in \mathcal{A}$，使得 $u = Tv$。这一结果的代价是需要使用四维参数域（笛卡尔积 Y），而非二维参数域（$[0,\pi]\times[0,2\pi)$），因此需要进行四重积分；新增的维数对应于倏逝参数 θ_3 和 ζ。

此外，对于任意 $(\ell, m) \in \mathcal{I}$，球面波$\tau_\ell^{-1}a_\ell^m$的 Herglotz 密度$b_\ell^m$在 $\mathcal{A}$ 范数下有界 τ_-^{-1}，这是由 (5.17) 得出的，因此关于指标 ℓ一致有界。这与标准 Herglotz 表示 (3.9) 形成对比：该表示仅使用传播平面波，其关联的 Herglotz 密度无法关于指标 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 一致有界 ℓ。从这个意义上说，定理5.9 可视为连续层面上的一种稳定性结果。我们的目标是推导这一积分表示的离散版本。

在连续框架情形中，参见 [4, 公式 (5.28)], 的伴随算子 T，T^*称为 分析算子。

引理 5.10. 对于任意 $u \in \mathcal{B}$， T 的伴随算子 T^* 由下式给出。

$$(T^*u)(\mathbf{y}) := (u, \phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}}, \qquad \forall \mathbf{y} \in Y.$$

算子 T^* 在 $\mathcal{B}$上有界且可逆：

$$T^* : \mathcal{B} \to \mathcal{A},$$
$$u \mapsto T^*u = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{\tau_\ell}\,(u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}\, a_\ell^m, \tag{5.19}$$

and

$$\tau_-\|u\|_{\mathcal{B}} \le \|T^*u\|_{\mathcal{A}} \le \tau_+\|u\|_{\mathcal{B}}, \qquad \forall u \in \mathcal{B}. \tag{5.20}$$

证明。 对于任意 $v \in \mathcal{A}$ 和 $u \in \mathcal{B}$，我们有：

$$
\begin{aligned}
(Tv, u)_{\mathcal{B}} &= \left(\int_Y \phi_{\mathbf{y}} v(\mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}, u \right)_{\mathcal{B}} = \int_Y v(\mathbf{y}) (\phi_{\mathbf{y}}, u)_{\mathcal{B}} \, w(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} \\
&= \left(v, \overline{(\phi_{\mathbf{y}}, u)_{\mathcal{B}}} \right)_{\mathcal{A}} = \left(v, (u, \phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}} \right)_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}
$$

此外，利用 Jacobi–Anger 恒等式（5.12），对于任意 $u \in \mathcal{B}$ 和 $\mathbf{y} \in Y$

$$
(T^* u)(\mathbf{y}) = (u, \phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}} = \left(u, \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tau_\ell \, \overline{a_\ell^m(\mathbf{y})} \, b_\ell^m \right)_{\mathcal{B}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \overline{\tau_\ell} \, (u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}} \, a_\ell^m(\mathbf{y}).
$$

因此（5.19）成立。由于 T 可逆，因此 T^* 也可逆，故只需证明（5.20）成立。因此，由引理 5.5

$$
\|T^* u\|_{\mathcal{A}}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tau_\ell|^2 |(u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}|^2,
$$

以及（5.20）由引理 1.2 和（5.13）中的一致有界性推导得出。 □

在 [4], 中使用的连续框架术语中，我们引入框架算子 和 *Gram* 算子 的概念如下：

$$
\begin{aligned}
S &:= TT^* \ : \ \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \\
G &:= T^* T \ : \ \mathcal{A} \to \mathcal{A}.
\end{aligned}
$$

框架算子公式可以进一步明确如下：对于任意 $u \in \mathcal{B}$,

$$
(Su)(\mathbf{x}) = \int_Y (u, \phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}} \, \phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) w(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}, \qquad \forall \mathbf{x} \in B_1.
$$

推论 5.11. 算子 S 和 G 有界、可逆、自伴且正。对于任意 $v \in \mathcal{A}$ 和 $u \in \mathcal{B}$,

$$
\begin{aligned}
Su &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tau_\ell|^2 (u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}} \, b_\ell^m, \\
Gv &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\tau_\ell|^2 (v, a_\ell^m)_{\mathcal{A}} \, a_\ell^m,
\end{aligned}
\qquad \textit{and} \qquad
\begin{aligned}
\tau_-^2 \|u\|_{\mathcal{B}} \le \|Su\|_{\mathcal{B}} \le \tau_+^2 \|u\|_{\mathcal{B}}, \\
\tau_-^2 \|v\|_{\mathcal{A}} \le \|Gv\|_{\mathcal{A}} \le \tau_+^2 \|v\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}
$$

证明。 该结果直接由定理5.9 和引理5.10得出。 □

最后，我们现在可以证明，倏逝平面波（4.3）构成了亥姆霍兹解空间 $\mathcal{B}$的连续框架。首先，我们概述 [4, 定义 5.6。1]中的一般定义。

定义 5.12 (连续框架)。 设 $\mathcal{H}$ 为一个复希尔伯特空间， X 为配备正测度 μ的测度空间。连续框架是满足以下条件的一族向量 $\{\phi_x\}_{x\in X}\subset\mathcal{H}$ ：

- 对于所有 $u\in\mathcal{H}$，函数 $x\mapsto(u,\phi_x)_{\mathcal{H}}$ 是 X 上的一个可测函数；
- 存在常数 $A,B>0$ ，使得

$$A\|u\|_{\mathcal{H}}^2\leq\int_X|(u,\phi_x)_{\mathcal{H}}|^2\mathrm{d}\mu(x)\leq B\|u\|_{\mathcal{H}}^2,\qquad\forall u\in\mathcal{H}.$$

定理 5.13。 族 $\{\phi_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in Y}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个连续框架。此外，最优框架界为 $A=\tau_-^2$ 和 $B=\tau_+^2$。

证明。 很容易验证，倏逝波族 $\{\phi_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in Y}$ 满足定义 5.12中的两个条件。事实上，对于任意 $u\in\mathcal{B}$，其可测性

$$\mathbf{y}\mapsto(u,\phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}}=(T^*u)(\mathbf{y})$$

由此可得 $T^*u\in\mathcal{A}$，根据引理 5.10，以及 $\mathcal{A}\subset L^2(Y;\ w)$。

第二个条件，即

$$A\|u\|_{\mathcal{B}}^2\leq\int_Y|(u,\phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}}|^2w(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\leq B\|u\|_{\mathcal{B}}^2,\qquad\forall u\in\mathcal{B},$$

对于某些常数 $A,\ B>0$由框架算子的有界性和正性可知 S，如推论5.11所证明的。事实上，对于任意 $u\in\mathcal{B}$，我们有

$$\int_Y|(u,\phi_{\mathbf{y}})_{\mathcal{B}}|^2w(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}=(Su,u)_{\mathcal{B}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}|\tau_\ell|^2|(u,b_\ell^m)_{\mathcal{B}}|^2,$$

这也表明，所给出的框架界是最优的。 □

5.3 再生核性质

连续框架结果的一个值得注意的推论体现在以下命题中，该命题引自 [19, 第 6 节。3] 证明也请参见该节。

命题 5.14. 赫格洛茨密度空间 $\mathcal{A}$ 具有再生核性- 质。再生核由给出如下

$$K(\mathbf{z},\mathbf{y})=K_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})=(K_{\mathbf{y}},K_{\mathbf{z}})_{\mathcal{A}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\overline{a_\ell^m(\mathbf{y})}a_\ell^m(\mathbf{z}),\qquad\forall\mathbf{y},\mathbf{z}\in Y,\tag{5.21}$$

级数逐点收敛，其中 $K_{\mathbf{y}}\in\mathcal{A}$ 是求值泛函在 $\mathbf{y}\in Y$ 处的（唯一）*Riesz* 表示，即

$$v(\mathbf{y})=(v,K_{\mathbf{y}})_{\mathcal{A}},\qquad\forall v\in\mathcal{A}.\tag{5.22}$$

需要注意的是，再生核性质（5.22）意味着，在任意点对 $\mathcal{A}$ 中元素的求值 Y 都是连续的 [20, 定义 1。2]。令$\mathbf{y} \in Y$，则存在某个常数 $c_{\mathbf{y}} > 0$:

$$|v(\mathbf{y})| = \left|(v, K_{\mathbf{y}})_{\mathcal{A}}\right| \leq c_{\mathbf{y}} \|v\|_{\mathcal{A}}, \qquad \forall v \in \mathcal{A}.$$

以下结果直接由命题5.14、定理5.9 以及雅可比–安格尔恒等式（5.12）推导而来，突显了引入再生核性质的动机。

推论 5.15。 倏逝平面波是求值泛函的 *Riesz* 表示在 T 下的像，即

$$\phi_{\mathbf{y}} = TK_{\mathbf{y}}, \qquad \forall \mathbf{y} \in Y. \tag{5.23}$$

因此，通过同构 T，利用倏逝平面波逼近亥姆霍兹解 $u \in \mathcal{B}$ ，等价于通过求值泛函的展开来逼近其 Herglotz 密度 $v = T^{-1}u \in \mathcal{A}$ ，即

$$v \approx \sum_{p=1}^{P} \mu_p K_{\mathbf{y}_p} \qquad \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \qquad u \approx \sum_{p=1}^{P} \mu_p \phi_{\mathbf{y}_p} \tag{5.24}$$

对于某组系数 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_p\}_{p=1}^{P}$。后续章节将提供数值证据，表明确实可以构造出这样的合适近似（对族 $\{K_{\mathbf{y}_p}\}_p$ 和 $\{\phi_{\mathbf{y}_p}\}_p$进行某种归一化后）。

第 6 章

倏逝平面波近似集

本章将介绍一种方法，用倏逝型平面波对单位球 B_1 中的一般亥姆霍兹解进行稳定数值近似。

这一方法的核心在于，该近似问题与相应的 Herglotz 密度问题等价，正如（5.24）所述。类似于 [19, 第 7], 节中的做法，主要思路是将 [5,10, 15]（称为相干性最优采样）中的采样技术调整到我们的情形，以便在 Y 中生成采样节点的分布，用于重构 Herglotz 密度。此外，也考虑了若干简单的变体，包括使用（2.9）中定义的极值点系统。特别是，最后一节深入阐释了数值方案，并展示了多种采样策略。正如第 7章和 [19, 第 8]节所表明的，所述方法非常有效。不过，使用倏逝平面波近似亥姆霍兹解的精度和稳定性，仍缺乏完整的证明。

令 $u \in \mathcal{B}$ 为我们近似问题的目标，$v := T^{-1}u \in \mathcal{A}$ 为其对应的 Herglotz 密度。此外，给定某个容差 $\eta > 0$ 。

6.1 逼近集

由于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是无限维空间，构造有限维逼近集的策略是，分别通过截断希尔伯特基 $\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 和 $\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$，利用由此形成的有限维子空间的自然层级。

定义 6.1（截断空间）。对于任意 $L \geq 0$，我们分别将截断 *Herglotz* 密度空间和截断亥姆霍兹方程解空间定义为

$$\mathcal{A}_L := \operatorname{span}\{a_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}:\,\ell\leq L} \subsetneq \mathcal{A}, \qquad \mathcal{B}_L := \operatorname{span}\{b_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}:\,\ell\leq L} \subsetneq \mathcal{B}.$$

我们将两个空间 $\mathcal{A}_L$ 和 $\mathcal{B}_L$ 的维数记为

$$N = N(L) := \dim \mathcal{A}_L = \dim \mathcal{B}_L = (L+1)^2 \in \mathbb{N}.$$

我们还引入正交投影 Π_L 到 $\mathcal{B}_L$，其定义为

$$\begin{aligned} \Pi_L &: \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \\ u &\mapsto \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (u, b_\ell^m)_{\mathcal{B}}\, b_\ell^m, \end{aligned}$$

并将 u 在 $\mathcal{B}_L$ 上的投影记为 $u_L := \Pi_L u \in \mathcal{B}_L$，将 u_L 在逆变换下的像记为 $v_L := T^{-1}u_L \in \mathcal{A}_L$。显然，投影序列 $\{u_L\}_{L\geq 0}$ 在 $\mathcal{B}$ 中收敛于 u。特别地，我们可以定义

$$L^* = L^*(u,\eta) := \min\{L \geq 0 : \|u - u_L\|_{\mathcal{B}} < \eta \|u\|_{\mathcal{B}}\}. \tag{6.1}$$

此外，(5.16) 表明序列 $\{v_L\}_{L\geq 0}$ 收敛于 v 中的 $\mathcal{A}$：事实上，对于任意 $L \geq L^*$，我们有

$$\|v - v_L\|_{\mathcal{A}} \leq \tau_-^{-1} \|u - u_L\|_{\mathcal{B}} < \tau_-^{-1} \eta \|u\|_{\mathcal{B}}.$$

我们的目标是用倏逝平面波近似投影 $u_L = \Pi_L u \in \mathcal{B}_L$（或等价地，$v_L = T^{-1}u_L \in \mathcal{A}_L$）。主要思路是按照 [10, Sec. 2.1], [5, Sec. 2.2] 和 [15,Sec. 2], 中概述的分布，在 Y中构造有限个采样节点 $\{\mathbf{y}_p\}_p$，从而构造 $\mathcal{A}_L$ 中元素的近似；其相关概率密度见（6.2）。这一策略的一种变体是，将基于该分布的采样限制在倏逝域 $[0, 2\pi) \times [0, +\infty)$内，并利用 $[0,\pi] \times [0, 2\pi)$中坐标的极值点系统，从而在 Y 中生成有限集 $\{\mathbf{y}_p\}_p$。鉴于这些系统的几何性质能够提供分布良好的点，这种选择似乎更为理想。请注意，这等同于预先确定倏逝平面波的传播方向，然后通过基于（6.2）的采样来选择波的强度和衰减方向。尽管区域 $[0, +\infty)$无界，但（5.1）中权重的可积性有限，因此只需在有界区域内进行采样。采用适当的归一化因子后，相关的采样泛函$\{K_{\mathbf{y}_p}\}_p$ 预计能够为 v_L提供良好的近似。因此，除一个归一化因子外， u_L 的逼近集将由倏逝平面波$\{\phi_{\mathbf{y}_p}\}_p$构成。

概率密度函数 ρ_N 按照 N项*Christoffel*函数的倒数定义（归一化除外），遵循 [5, 公式（2.6）]:

$$\rho_N := \frac{w}{N\mu_N}, \quad \text{where} \quad \mu_N(\mathbf{y}) := \left(\sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_\ell^m(\mathbf{y})|^2 \right)^{-1}, \quad \forall \mathbf{y} \in Y. \tag{6.2}$$

请注意， ρ_N 和 μ_N 定义良好，因为 $0 < \mu_N \le \mu_1 < \infty$，这是由于 $a_0^0 \neq 0$。函数 μ_N 实际上与 $\boldsymbol{\theta}$无关：事实上，借助维格纳 D 矩阵的酉性条件 [25, 第 4.1 节，公式（6）], 可直接推出

$$\mu_N^{-1}(\mathbf{y}) = \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_\ell^m(\mathbf{y})|^2 = \sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell^2 \, |\mathbf{P}_\ell(\zeta)|^2 , \quad \forall \mathbf{y} \in Y. \tag{6.3}$$

因此，密度函数 ρ_N 是定义在 Y上的二元函数，因为它与欧拉角 θ_2、$\theta_3 \in [0, 2\pi)$ 无关，并且仅通过权重 θ_1 依赖于w ，见（5.1）。这一特征的出现完全归因于涉及欧拉角时，球面参数化中不可避免地产生的奇异性。因此，采样问题可视为近乎一维，其关键参数为 ζ。然而，为ζ 选择合适的分布是一项重大挑战。此外，值得注意的是， $1/\mu_N$ 对应于再生核 K对角线的截断级数展开；该展开通过取 $z = y$ 并将（5.21）中的级数截断至 L而得到。

数值方案涉及针对每个 $L \ge 0$，在参数域 Y 中生成一系列节点集

$$\mathbb{Y}_L := \{\mathbb{Y}_{L,P}\}_{P\in\mathbb{N}}, \quad \text{where} \quad \mathbb{Y}_{L,P} := \{\mathbf{y}_{L,P,p}\}_{p=1}^{P}, \quad \forall P \in \mathbb{N}, \tag{6.4}$$

采用一种采样策略，使得$|\mathbb{Y}_{L,\,P}| = P$，对所有 $P \in \mathbb{N}$均成立，并且序列$\mathbb{Y}_L$ 收敛（在适当意义下）至（$\rho_{N(L)}$ 6.2）中定义的密度，当 P 趋于无穷大时。这些集合不要求彼此嵌套。

可以构造两个逼近集：其中一个由 $\mathcal{A}$ 中的采样泛函组成，另一个由 $\mathcal{B}$中的倏逝平面波组成。针对节点集（6.4），我们在 $\mathcal{A}$ 中引入如下有限集序列：

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Psi}_L := \{\boldsymbol{\Psi}_{L,P}\}_{P\in\mathbb{N}}, \quad \forall L \ge 0, \quad \text{where} \\ \boldsymbol{\Psi}_{L,P} := \left\{ \sqrt{\frac{\mu_N(\mathbf{y}_{L,P,p})}{P}} K_{\mathbf{y}_{L,P,p}} \right\}_{p=1}^{P}, \quad \forall P \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{6.5}$$

在逼近集中，每个求值泛函 $K_{\mathbf{y}_{L,\,P,\,p}}$ 均已由实常数 $\sqrt{\mu_N(\mathbf{y}_{L,\,P,\,p})}/P$归一化，该常数在数值上接近 $\|K_{\mathbf{y}_{L,\,P,\,p}}\|_{\mathcal{A}}^{-1}/\sqrt{P}$。更准确地说，我们有

$$\sqrt{\mu_N(\mathbf{y})}\|K_{\mathbf{y}}\|_{\mathcal{A}} = \left(\sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_\ell^m(\mathbf{y})|^2 \right)^{-1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_\ell^m(\mathbf{y})|^2 \right)^{1/2} \ge 1, \quad \forall \mathbf{y} \in Y.$$

(6.5) 中的归一化常数对于该方案的数值稳定性至关重要：事实上，集合序列的稳定近似性质（2.3）取决于其元素的归一化方式。

与(6.4) 中的节点集序列和逼近集序列（6.5）相关联，在 $\mathcal{A}$ 中，我们定义如下的归一化倏逝平面波逼近集序列： $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} &:= \{\boldsymbol{\Phi}_{L,P}\}_{L\geq 0, P\in\mathbb{N}}, \qquad \text{where} \\ \boldsymbol{\Phi}_{L,P} &:= \left\{ \sqrt{\frac{\mu_N(\mathbf{y}_{L,P,p})}{P}} \phi_{\mathbf{y}_{L,P,p}} \right\}_{p=1}^{P}, \quad \forall L \geq 0, \forall P \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

由于（5.23），集合序列（6.6）是经 Herglotz 变换算子作用后所得的集合序列 (6.5) T。

构造逼近集 $\boldsymbol{\Phi}_{L,\ P}$ 的数值方案仅基于两个参数： L 和 P。这些参数的调整十分简单：

- 首先要考虑的参数是 L，它决定傅里叶截断阶数。随着 L 增大， u （分别为 $v = T^{-1}u$）由 $u_L = \Pi_L u$ （分别为 $v_L = \Pi_L v$）逼近的精度会提高。 $L \geq L^*$的合适取值取决于亥姆霍兹解的正则性，因此也取决于模态展开系数的衰减率。

- 第二个参数是倏逝平面波近似空间的维数 P，它也等于 Y中的采样点数量。若 L 固定，增大P 应能控制 u_L （分别为$v_L = T^{-1}u_L$）由$\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Phi}_{L,\ P}}\boldsymbol{\xi}$（分别为$\mathcal{T}_{\boldsymbol{\Psi}_{L,\ P}}\boldsymbol{\xi}$）逼近的精度，其中系数 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^P$有界。下文给出的数值结果支持这一猜想，并通过实验表明 P 应随 L呈二次增长，因此随 N呈线性增长，且比例常数适中（见第7.2节）。

在我们的实现中（详见第2.2节），选定逼近集 $\boldsymbol{\Phi}_{L,P}$后，计算特定的一组系数 $\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}$需要使用两个额外参数： S 和 ϵ:

- 第一个参数 S表示物理区域 B_1边界上的采样点数量。如 [2, 3], 所述，建议使用适当数量的过采样。为了利用第2.3节中的理论结果，有必要适当选择采样点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$和权重 $\mathbf{w}_S \in \mathbb{R}^S$ ，以满足（2.4）的要求。实际中，我们将使用定义 2.2中引入的极值点系，因此 S 取为完全平方数。与 [19], 类似，为简单起见，我们选择过采样比为 2，即 $S = \lceil \sqrt{2}|\boldsymbol{\Phi}_{L,\ P}| \rceil^2$。这种较高程度的过采样可能并非必要；可以进行额外的数值实验，探究降低过采样比 $S/|\boldsymbol{\Phi}_{L,\ P}|$ 是否可行，从而降低该方法的计算成本。

- 第二个参数 ϵ 是用于奇异值截断的正则化参数。为了评估该方法，我们在后续数值实验中使用值 $\epsilon = 10^{-14}$。如果较不精确的近似也能满足要求，则可以增大参数 ϵ 。

需要指出的是，重构策略的选择不会影响逼近集 $\mathbf{\Phi}_{L,\,P}$，也不会影响其相关的精度和稳定性性质。虽然我们以带正则化奇异值分解的边界采样作为简单示例介绍了该方法，但其他重构策略也同样有效，例如在区域内部采样，或使用 Galerkin 或 Petrov–Galerkin 投影。同样，也可以采用其他正则化技术，例如 Tikhonov 正则化。无论选择何种具体策略，充分过采样并进行正则化都至关重要。

此处采用的构造方法基于 [19, 第 7 节。3], 中概述的思想，建立在此前于不同背景下探索过的类似概念之上。事实上，文献中可以找到与此处所提出的类似的采样节点集，例如 [5, 10, 15]。这些研究关注的是通过采样，在带权 L^2 空间中重构有限维子空间（具有显式正交归一基）的元素，具体如 [5]所述。此后，这种方法被用于构造 [15]中的随机求积规则。这些方法背后的思想是，通过在特定节点处采样，可以收集足够的信息，从而将函数准确地重构为（截断的）正交归一基上的展开。

在这一框架下，文献中的结果表明，要重构一个元素 $v_L = \Pi_L v \in \mathcal{A}_L$，只需在节点 $\mathbf{\Psi}_{L,\,P}$ 处进行采样，其中 P的取值足够大即可。相比之下，上述数值方法旨在将元素 $v_L = \Pi_L v \in \mathcal{A}_L$ 近似为求值泛函集合 $\mathbf{\Psi}_{L\text{中的展开},\,P}$ 其中 P足够大。这意味着，我们所寻求的近似属于求值泛函的张成空间，张成空间 $\mathbf{\Psi}_{L,\,P}$，而该空间与 $\mathcal{A}_L$的交集为空。根据（5.23），对张成空间 T 中的这一近似应用 Herglotz 变换$_{,\,P}$ 可得到张成空间 $\mathbf{\Phi}_{L,\,P}$ 中的一个元素（即倏逝平面波的有限叠加），该元素近似于$u_L = Tv_L \in \mathcal{B}_L$。尽管与相关研究存在联系，但目前仍缺乏完整的证明，也没有坚实的理论基础来支持这一数值方法。然而，第7 章中展示的大量数值测试证明了集合 $\mathbf{\Phi}_{L,\,P}$具有较高的精度和稳定性。

6.2 一个关于稳定近似结果的猜想

以下总结了 [19, 第 7 节4], 中提出的推测，这些推测是由 [19, 节 8] 中的二维数值实验以及下一章中的结果所启发的。

猜想 6.2。 逼近集序列 $\mathbf{\Psi}_L$ 定义于(6.5) 是 $\mathcal{A}_L$的稳定逼近，且关于截断参数 L一致。也就是说，存在 $\lambda^* \geq 0$ 和 $C^* \geq 0$ 与 L 无关，使得 $\forall L \geq 0$，$\exists P^* = P^*(L,\ \eta,\ \lambda^*,\ C^*) \in \mathbb{N}$使得 $\forall v_L \in \mathcal{A}_L$，$\exists \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^{P^*}$使得

$$\|v_L - \mathcal{T}_{\mathbf{\Psi}_{L,P^*}}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{A}} \leq \eta\|v_L\|_{\mathcal{A}} \qquad and \qquad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \leq C^* P^{*\lambda^*}\|v_L\|_{\mathcal{A}}. \tag{6.7}$$

为简单起见，以下我们假设任意 $P \geq P^*$ 均满足（6.7）中的两个不等式。若不满足这一条件，证明也很容易调整。尽管当这些集合是分层的时，此假设成立，但这并非必要条件。

如果前面陈述的猜想成立，那么倏逝平面波的逼近集（6.6）的稳定性便随之成立。

命题 *6.3*。设 $\delta > 0$。若猜想 *6.2* 成立，则逼近集序列 *(6.6)* 为 $\mathcal{B}$ 提供稳定逼近。此外，假设存在采样点集合 $\{x_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$，以及满足 *(2.4)* 的正权重向量 $w_S \in \mathbb{R}^S$。若 κ^2 不是 B_1 上的狄利克雷特征值，则$\forall u \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$、$\exists L \geq 0$、$P \in \mathbb{N}$、$S \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon \in (0, 1]$，使得

$$\|u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_{L,P}}\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{L^2(B_1)} \leq \delta\|u\|_{\mathcal{B}},$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_{S,\ \epsilon} \in \mathbb{C}^P$ 由 (2.8) 中的正则化过程计算得出。*SVD* 正则化参数 ϵ可选为 (2.28)。

证明。 我们需要证明逼近集序列的稳定性，即对任意 $\tilde{\eta} > 0$，存在 $\lambda \geq 0$和 $C \geq 0$，使得 $\forall u \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$，$\exists L \geq 0$，$P \in \mathbb{N}$ 和 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^P$，满足

$$\|u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_{L,P}}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \leq \tilde{\eta}\|u\|_{\mathcal{B}} \qquad \text{and} \qquad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \leq CP^{\lambda}\|u\|_{\mathcal{B}}. \tag{6.8}$$

既然这一点成立，所述结果便直接由推论 2.5 得出。

令 $\eta > 0$和 $u \in \mathcal{B} \cap C^0(B_1)$。对于任意 $L \geq L^*(u,\ \eta)$，其中 L^* 定义于 (6.1)，若令 $u_L :=\Pi_L u$ 则有

$$\|u - u_L\|_{\mathcal{B}} \leq \eta\|u\|_{\mathcal{B}}.$$

设 $v := T^{-1}u \in \mathcal{A}$以及 $v_L := T^{-1}u_L$。假设猜想 6.2 成立，则存在 $\lambda^* \geq 0$和 $C^* \geq 0$，二者均与 L无关；并且 $P^* = P^*(L,\ \eta,\ \lambda^*,\ C^*) \in \mathbb{N}$，使得对任意 $P \geq P^*$，存在一组系数 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^P$，使不等式 (6.7) 成立。此外，由于 (5.16) 和 (6.7)，我们有

$$\|u_L - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_{L,P}}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \leq \tau_+\eta\|v_L\|_{\mathcal{A}} \qquad \text{and} \qquad \|v_L\|_{\mathcal{A}} \leq \tau_-^{-1}\|u_L\|_{\mathcal{B}} \leq \tau_-^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}}.$$

对于任意 $L \geq L^*(u,\ \eta)$ 和 $P \geq P^*$，结合前述界，可以估计亥姆霍兹解 u 的总近似误差为

$$\begin{gathered}\|u - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_{L,P}}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \leq \|u - u_L\|_{\mathcal{B}} + \|u_L - \mathcal{T}_{\mathbf{\Phi}_{L,P}}\boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{B}} \leq \left(1 + \tau_+\tau_-^{-1}\right)\eta\|u\|_{\mathcal{B}} \\ \text{and} \qquad \|\boldsymbol{\mu}\|_{\ell^2} \leq C^* P^{\lambda^*}\tau_-^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}}.\end{gathered} \tag{6.9}$$

最后，取 $\eta = \tilde{\eta}/\left(1+\tau_+\tau_-^{-1}\right)$ 并注意到，(6.9) 即为 (6.8)，其中 $\lambda = \lambda^*$ 且 $C = C^*\tau_-^{-1}$。 □

稳定性指数的独立性 λ^* 以及稳定性常数 C^* 在猜想 6.2 中不依赖于截断参数 L，这对前面的证明至关重要。若没有这种一致稳定性，猜想 6.2 就不足以建立（6.8）。

6.3 概率密度与样本

在本节中，我们将介绍第 6.1 节概述的数值方案。在图6.1的左栏中，我们描绘了概率密度函数

$$\hat{\rho}_N(\zeta) := \int_\Theta \rho_N(\boldsymbol{\theta}, \zeta)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}, \qquad \forall \zeta \in [0, +\infty), \tag{6.10}$$

相对于比值 ζ/κ，其中 $\rho_{N(L)}$ 定义于（6.2）中。变量 L 表示截断参数，说明采样是为了近似 $\mathcal{A}_L$中的元素，其维数为 N（L）。值得注意的是，尽管 ρ_N 是参数域 Y上的一个四变量函数，但它相对于 θ_1 呈正弦变化（见（5.1））， 而相对于其他欧拉角 θ_2 和 θ_3则保持恒定。

概率密度的主模态 $\hat{}\rho_N$ 出现在 $\zeta = 0$，其表示纯传播平面波。随着波数增大，$\zeta = 0$ 中的峰值以及密度支集都会变大。后者不同于二维情形 [19], ，这是由于倏逝参数的参数化依赖于 κ ζ （4.4）；这就是为什么在图 ζ 6.1中， κ 会按波数进行缩放。最终，当 ζ 足够大时，概率呈指数趋近于零。如果 $L \leq \kappa$，则密度为单峰分布；而对于 $L \gg \kappa$，它们是多峰分布：事实上，例如当 $L = 4\kappa$时，除了位于 $\zeta = 0$的主模态外，我们还会观察到一个额外模态，该模态对应于相对较大的倏逝参数值（大致为 $\zeta = 5\kappa$）。

类比于 [19, 第 8 节1], ，对于任意 $L \geq 0$，一种可行的策略是在笛卡尔积 Y 中，利用 逆变换抽样 （ITS）技术生成$P = \nu N$（L）个样本；该技术由 [5, 第 5 节2]提出。该过程涉及在 $[0,1]^4$ 中生成采样集合，使其在适当意义下收敛于均匀分布$\mathcal{U}_{[0,1]^4}$，当 P 趋于无穷大时。

$$\{\mathbf{z}_p\}_{p=1}^P, \quad \text{with} \quad \mathbf{z}_p = (z_{p,\theta_1}, z_{p,\theta_2}, z_{p,\theta_3}, z_{p,\zeta}) \in [0,1]^4, \quad p = 1, ..., P, \tag{6.11}$$

然后将它们映射回参数域 Y，以获得在 $P \to \infty$ 时收敛到概率密度函数 ρ_N 的采样集合。因此，我们需要反演与 Y 中各参数相关联的每个累积分布函数。鉴于 ρ_N 对角变量的依赖性质，这

对于每个 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Theta$，结果都可以轻松地显式计算。然而，与倏逝参数 ζ 相关的累积分布函数的数值计算，即

$$\Upsilon_N(\zeta) := \int_0^\zeta \hat{\rho}_N(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \qquad \forall \zeta \in [0, +\infty), \tag{6.12}$$

实现起来有些困难，运行成本高，而且数值不稳定。事实上，由于 (4.27)、(5.1)、(5.8)、(6.3) 以及定义 (6.10，我们应计算：

$$\begin{aligned}
\Upsilon_N(\zeta) &= \int_0^\zeta \int_\Theta \rho_N(\boldsymbol{\theta}, \eta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\eta = \int_0^\zeta \int_\Theta \frac{\eta^{1/2} e^{-\eta} \sin\theta_1}{N \mu_N(\boldsymbol{\theta}, \eta)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\eta \\
&= \left(\int_\Theta \sin\theta_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell^2 \int_0^\zeta |\mathbf{P}_\ell(\eta)|^2\, \eta^{1/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{L} (2\ell+1) \frac{\sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^\zeta \left[\gamma_\ell^m P_\ell^m(\eta/2\kappa + 1)\right]^2 \eta^{1/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta}{\sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^\infty \left[\gamma_\ell^m P_\ell^m(\eta/2\kappa + 1)\right]^2 \eta^{1/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta}.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

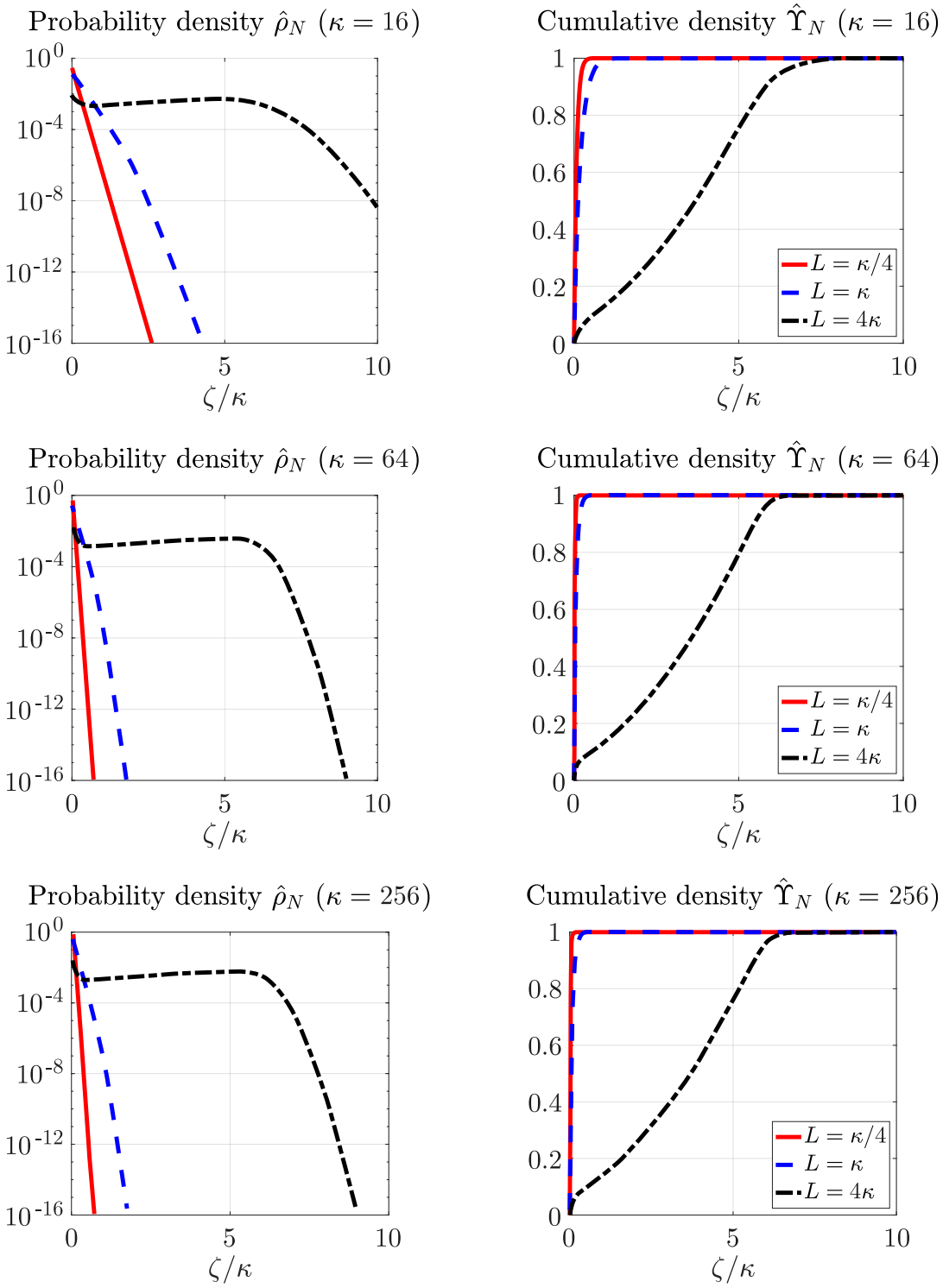
根据注记 5.3 的建议以及渐近式 [18, 式 (14.8.12)], ，我们建议采用近似

$$\begin{aligned}
\int_0^\zeta \left[\gamma_\ell^m P_\ell^m\left(\frac{\eta}{2\kappa} + 1\right)\right]^2 \eta^{1/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta &\approx \left(\frac{2^\ell \gamma_\ell^m \Gamma(\ell + 1/2)}{\sqrt{\pi}(\ell - m)!}\right)^2 \int_0^\zeta \left(\frac{\eta}{2\kappa} + 1\right)^{2\ell} \eta^{1/2} e^{-\eta}\mathrm{d}\eta \\
&= \left(\frac{2^\ell \gamma_\ell^m \Gamma(\ell + 1/2)}{\sqrt{\pi}(\ell - m)!}\right)^2 \int_{2\kappa}^{2\kappa+\zeta} \left(\frac{\eta}{2\kappa}\right)^{2\ell} (\eta - 2\kappa)^{1/2} e^{-(\eta - 2\kappa)}\mathrm{d}\eta \\
&\le \frac{e^{2\kappa}}{4\pi^2 \kappa^{2\ell}} \frac{(2\ell+1)\Gamma^2(\ell + 1/2)}{(l+m)!(l-m)!} \int_{2\kappa}^{2\kappa+\zeta} \eta^{2\ell+1/2} e^{-\eta}\mathrm{d}\eta \\
&= C_\ell^m \int_{2\kappa}^{2\kappa+\zeta} \eta^{2\ell+1/2} e^{-\eta}\mathrm{d}\eta,
\end{aligned} \tag{6.14}$$

其中常数 C_ℓ^m在 (5.11) 中定义。请注意，我们仿照 (5.10) 进行处理，用一个次数为 ℓ 的单项式近似缔合勒让德多项式，并将被积函数中的因子 $(\eta - 2\kappa)^{1/2}$ 替换为 $\eta^{1/2}$。因此，我们用以下形式近似 (6.13) 中的分子和分母：

$$\begin{aligned}
&\int_0^\zeta \left[\gamma_\ell^m P_\ell^m\left(\frac{\eta}{2\kappa} + 1\right)\right]^2 \eta^{1/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta \approx C_\ell^m \left[\Gamma\left(2\ell + \frac{3}{2}, 2\kappa\right) - \Gamma\left(2\ell + \frac{3}{2}, 2\kappa + \zeta\right)\right], \\
&\int_0^\infty \left[\gamma_\ell^m P_\ell^m\left(\frac{\eta}{2\kappa} + 1\right)\right]^2 \eta^{1/2} e^{-\eta}\mathrm{d}\eta \approx C_\ell^m\, \Gamma\left(2\ell + \frac{3}{2}, 2\kappa\right),
\end{aligned} \tag{6.15}$$

其中我们引入了上不完全伽马函数，其定义见 [18, 式 (8.2.2)]。请注意，这一选择是在下限与



ˆ图 6.1：采样密度函数 ˆρ_N 见式（6.10）（左）和 Υ_N 见式（6.17）（右），相对于 κ缩放的倏逝参数 ζ 为子空间$\mathcal{A}_L$构造。波数 κ 从上到下在 $\{16, 64, 256\}$ 中变化。

（5.9）和（5.10）中的上界。由于常数因子可以直接化简，根据这一启发式方法，对于每个 $\zeta \in [0, +\infty)$，我们得到

$$\begin{aligned}\Upsilon_N(\zeta) &\approx \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{L}(2\ell+1)\frac{\Gamma\left(2\ell+3/2, 2\kappa\right) - \Gamma\left(2\ell+3/2, 2\kappa+\zeta\right)}{\Gamma\left(2\ell+3/2, 2\kappa\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{L}(2\ell+1)\frac{\Gamma\left(2\ell+3/2, 2\kappa+\zeta\right)}{\Gamma\left(2\ell+3/2, 2\kappa\right)}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

因此，为了近似 Υ_N 在（6.12）中的值，从（6.16）出发，我们定义累积分布函数

$$\hat{\Upsilon}_N(\zeta) := 1 - \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{L}(2\ell+1)\frac{Q\left(2\ell+3/2, 2\kappa+\zeta\right)}{Q\left(2\ell+3/2, 2\kappa\right)}, \qquad \forall \zeta \in [0, +\infty), \tag{6.17}$$

其中，Q 是归一化上不完全伽马函数，定义见 [18, 公式（8.2.4）]。引入该函数是为了能够稳定地计算累积密度函数ˆ $\hat{\Upsilon}_N$，并避免溢出问题。函数 Υ_N 保留以下性质，这些性质对于我们的采样至关重要：

$$0 \le \hat{\Upsilon}_N(\zeta) \le 1, \qquad \hat{\Upsilon}_N(0) = 0, \qquad \lim_{\zeta\to\infty} \hat{\Upsilon}_N(\zeta) = 1.$$

与原本需要在ˆ（6.13）中计算的内容相比，这一非常简单的表达式的优势十分明显。一些累积分布函数 Υ_N 在图6.1的右列中表示。当 $\mathcal{A}_L$ 仅由与传播区域（$L \le \kappa$）相关的元素ˆ组成时，累积分布函数 Υ_N 几乎是阶跃函数，尤其是在波数较大时。然而，对于 $L > \kappa$，这些函数更加复杂（例如，参见 $L = 4\kappa$的情形）。因此，对于 $L \le \kappa$，如第3.5节所述，只选择传播平面波是安全的；但对于 $L > \kappa$，倏逝波的选择则成为一项并非易事的任务。

因此，在生成采样集（6.11）后，我们在 $[0,1]^4$, 中将其映射到参数域 Y，得到：

$$\{\mathbf{y}_p\}_{p=1}^{P}, \quad \text{with} \quad \mathbf{y}_p = \left(\arccos\left(1-2z_{p,\,\theta_1}\right)\ 2\pi z_{p,\,\theta_2}, 2\pi z_{p,\,\theta_3}, \hat{\Upsilon}_N^{-1}\left(z_{p,\zeta}\right)\right) \in Y. \tag{6.18}$$

密度函数 ρ_N 关于 θ_1 呈正弦变化，而关于 θ_2 和 θ_3为常数，这简化了样本生成过程，无需使用[5, 第 5]节中采用张量积正交归一基的技术。反演 ˆ$\hat{\Upsilon}_N^{-1}$ 可以使用基本的求根技术计算。在我们的数值实验中，采用了简单可靠的二分法。

如前所述，另一种可行的策略是使用极值点的球坐标替换式（6.18）中采样点的前两个分量。因此，我们需要按照式（6.11）生成采样点集

仅在 $[0,1]^2$ 中，然后再将它们映射回倏逝域 $[0,2\pi)\times[0,+\infty)$。请注意，再次采用这种方法要求 $P\in\mathbb{N}$ 为完全平方数。

样本 $\{\mathbf{y}_p\}_{p=1}^P$ 在笛卡尔积 Y 中生成后，下一步是构造倏逝平面波集（6.6）。这一过程涉及计算 N项 Christoffel函数 μ_N，根据（6.3），该函数同时取决于（ α_ℓ ）中的归一化系数（5.3）以及 $\mathbf{P}_\ell(\zeta)$ 在（4.27）中的表达式。后者可以通过一些递推公式简单推导得出（参见 [18, 公式（14.7.15）和（14.10.3）]），而前者则由于（5.8）中的积分而带来了一些数值计算上的困难。然而，采用（6.15）中给出的近似方法可以帮助克服这一问题。由（5.8）和（5.11）可得：

$$\begin{aligned}
\alpha_\ell^{-2} &= \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\int_0^\infty\left[\gamma_\ell^m P_\ell^m\left(\frac{\eta}{2\kappa}+1\right)\right]^2\eta^{1/2}e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta\\
&\approx \frac{8\pi^2}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{e^{2\kappa}}{4\pi^2\kappa^{2\ell}}\frac{(2\ell+1)\Gamma^2(\ell+1/2)}{(l+m)!(l-m)!}\,\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2},2\kappa\right)\\
&= \frac{8\pi^2}{(2\ell+1)}\frac{e^{2\kappa}(2\ell+1)}{4\pi^2\kappa^{2\ell}}\frac{2^{2\ell}}{(2\ell)!}\frac{\sqrt{\pi}(2\ell)!}{2^{2\ell}\ell!}\,\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2},2\kappa\right)\\
&= \frac{2\sqrt{\pi}e^{2\kappa}}{\ell!\kappa^{2\ell}}\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\ell+\frac{3}{2},2\kappa\right),
\end{aligned}\tag{6.19}$$

其中我们使用了（5.5）以及

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{1}{(\ell+m)!(\ell-m)!}=\frac{1}{(2\ell)!}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\binom{2\ell}{\ell+m}=\frac{1}{(2\ell)!}\sum_{m=0}^{2\ell}\binom{2\ell}{m}=\frac{2^{2\ell}}{(2\ell)!}.$$

在我们的数值实验中，我们将采用（6.17）和（6.19）中给出的近似。

在第7 章中，我们测试五种采样方法。这些策略的不同之处在于是否纳入极值系统，以及如何生成初始采样分布。具体而言，在前三种策略中， Y 中的所有节点坐标都按照概率分布（6.2）进行采样，因此初始样本是在 $[0,1]^4$中生成的。而在最后两种策略中，则会用到极值点的坐标，以此确定 Y中采样点的前两个分量。在后一种情况下，初始样本是在 $[0,1]^2$中生成的。

D定义 6.4 (采样策略)。我们将考虑以下策略 :

(a) 确定性采样： $[0,1]^4$ 中的初始样本是由四组等距点组成的笛卡尔积，每个方向上的点数相同。所展示的数值结果使用大于或等于 P 的最小四次幂整数作为近似集维数。

(b) 随机采样：$[0,1]^4$ 中的初始样本是根据四个均匀分布的乘积随机生成的 $\mathcal{U}_{[0,1]}$。(c) Sobol 采样：$[0,1]^4$ 中的初始样本对应于 *Sobol* 序列，这是一种准随机低差异序列。(d) 极值–随机采样：$[0,1]^2$ 中的初始样本是根据两个均匀分布的乘积随机生成的 $\mathcal{U}_{[0,1]}$。所呈现的数值结果使用大于或等于P 的最小平方整数作为近似集维数。(e) 极值–Sobol 采样：$[0,1]^2$ 中的初始样本对应于 *Sobol* 序列。所呈现的数值结果使用大于或等于 P 的最小平方整数作为近似集维数。

注6.5。 为避免符号过于繁复，同时确保讨论具有一般性，我们有时会不严谨地使用 P 表示倏逝平面波近似集 $\mathbf{\Phi}_{L,\ P}$的维数，尽管这可能无法准确反映其实际大小，因为实际大小取决于所采用的采样策略。

由前述采样策略得到的节点集示例见图 6.2 和图6.3。我们仅报告与参数 $\theta_1 \in [0,\pi]$ 和 $\zeta \in [0,+\infty$相关的分量，因为概率密度函数ρ_N 相对于其他欧拉角 θ_2 和 θ_3是常数。如预期的那样，当 L取较小值时，采样点会聚集在线 $\zeta = 0$附近，此时传播平面波能够提供足够的近似。然而，需要注意的是，在 $\zeta = 0$处不存在纯传播平面波，因为 ρ_N是连续分布。对于 $L > \kappa$，倏逝参数 ζ 覆盖更大的范围，并在分布的次峰附近（大约在 $\zeta = 5\kappa$附近）出现一定程度的集中，这与图 6.1 的结果一致。

注6.6。 正如我们将看到的，前述采样策略得出的结果非常相似。尤其是，这表明采用极值点系(2.9)，如采样过程 (d) 和 (e) （定义 6.4）中所采用的做法，并不会带来进一步的改进。值得注意的是，选择参数$\theta_1 \in [0,\pi]$ 和 $\theta_2 \in [0,2\pi)$的问题，此处旨在构造倏逝型平面波近似集 (6.6)，不仅存在于构造传播平面波方向集 (3.3)时，也存在于定义采样点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial B_1$时，这些采样点用于线性系统 (2.6)。这表明，无需利用极值点的几何性质，只需采用加权采样策略即可，无论这种策略是确定性的、随机的，还是准随机的。由于可以不使用极值系统，所需的工作量更少，因此我们能够以更少的约束取得相似的结果；毕竟，点的数量不再必须是完全平方数。

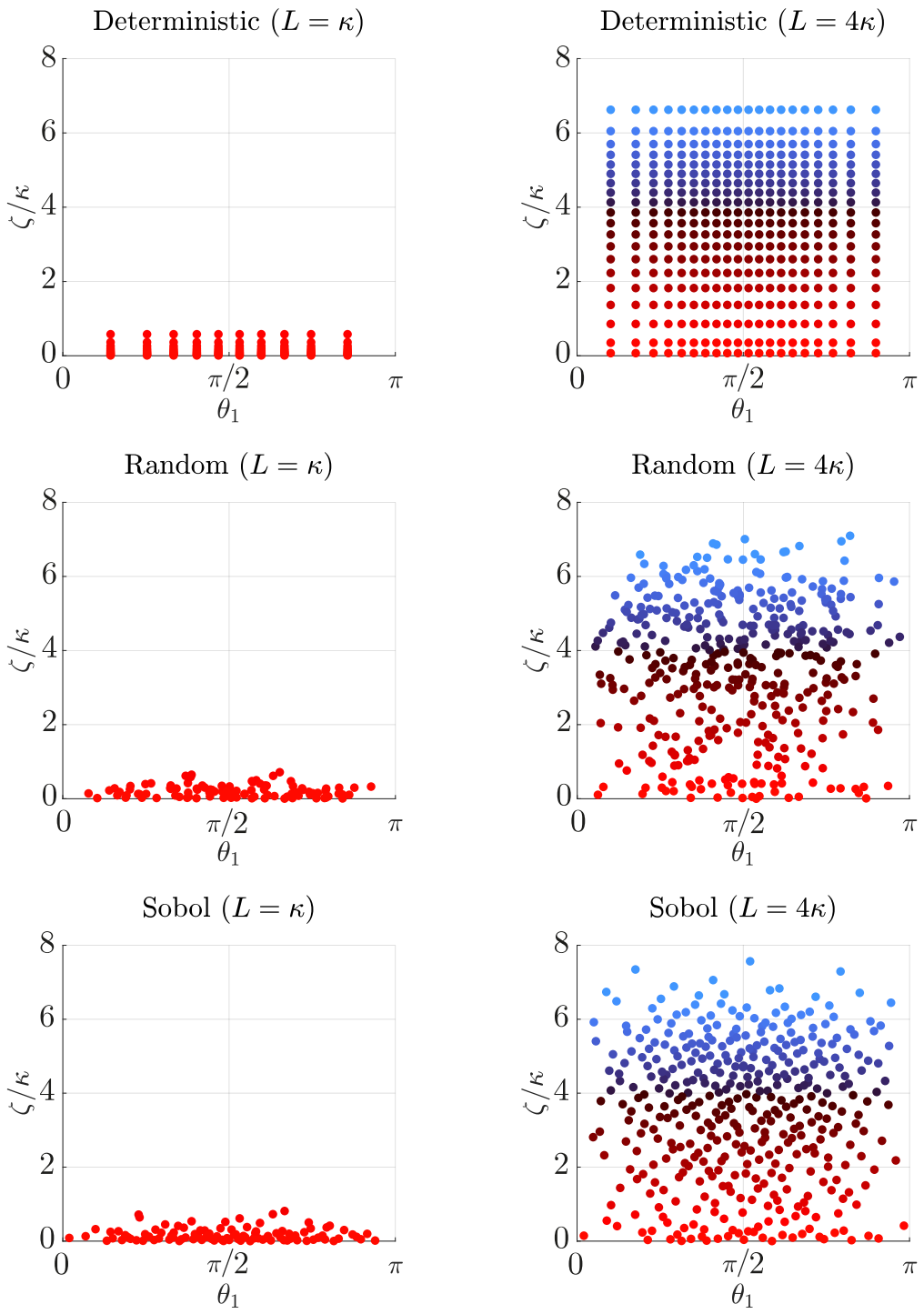


图 6.2： $P = 6L$ 中的样本 $[0, \pi] \times [0, +\infty)$ 对于 L 等于 κ (左)和 4κ (右)，以及定义 6.4 中介绍的采样策略 (a)–(c)（从上到下）。点的颜色根据 μ_N 在 (6.2) 中的平方根确定，该平方根使用 (6.19) 中的近似计算。波数 $\kappa = 16$。

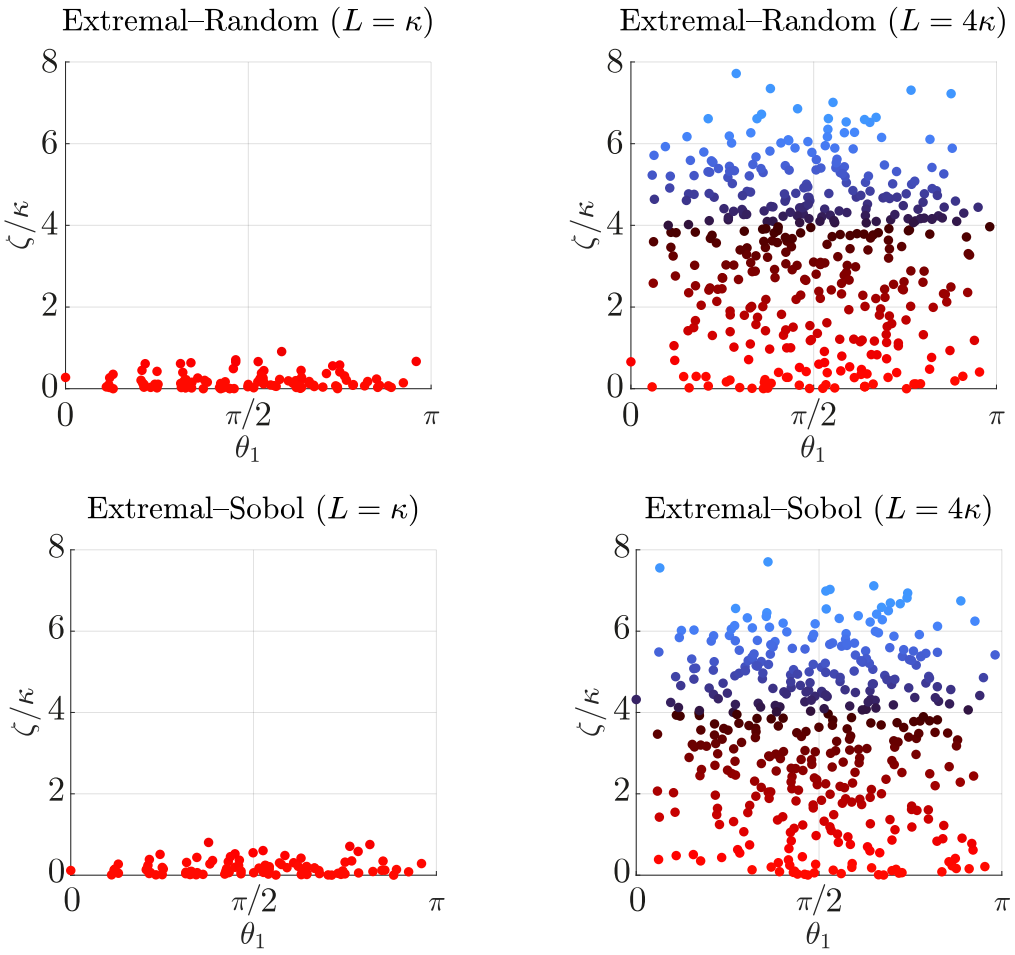


图6.3: $P = \lceil\sqrt{6L}\rceil^2$节点位于 $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ 对于 L 等于 κ (左)和 4κ(右), 以及定义 6.4 中介绍的采样策略 (d) 和 (e)（从上到下）。由于节点的第一分量是借助极值系统定义的，因此总有一个点满足 $\theta_1 = 0$：事实上，如第2.3节所强调的，无论系统的基数是多少，第一个极值点始终固定在北极。点的颜色根据（6.2）中的 平方根确定，该值使用（6.19）中的近似计算。波数 $\kappa = 16$。

第7章

数值结果

我们给出数值证据，表明所述方法可用于在单位球内获得稳定且精确的亥姆霍兹解近似 B_1。首先，我们重复第3.5 节中的数值实验，考察按照定义6.4中概述的采样策略构造的、由倏逝平面波组成的逼近集。随后，我们通过重构若干解的代理函数并研究误差收敛性，来考察猜想6.2是否成立。此外，我们还分析逼近集的最优规模 P 与截断参数 L之间的关系。最后，本章以若干数值结果作结，涉及三维空间中亥姆霍兹方程基本解的近似，包括在单位球内 B_1 以及不同几何形状中的近似。

7.1 倏逝平面波稳定性

我们再次考虑第3.5节中的数值测试。该测试表明，任何使用传播平面波的近似都不稳定。我们旨在确定，采用倏逝平面波的所提方法能否在不牺牲精度的前提下提高稳定性。背景设定保持不变：我们计算多个次数 b_ℓ^0 对应的球面波 ℓ的近似。与图3.4类似，数值结果的精度和稳定性在改变阶数 $|m| \leq \ell$时并无显著差异，如图7.1 中特定情形 $P = 4L^2 = 64\kappa^2$所示。不过，这次我们使用逼近集$\mathbf{\Phi}_{L,\ P}$ ，它们定义于（6.6）中，其中的倏逝平面波由参数 $\{\mathbf{y}_{L、\ P、\ p}\}_p$表征，这些参数根据定义6.4中介绍的采样策略确定。倏逝波的归一化方式见（6.6），其中参数 L 固定为 4κ。

数值结果显示在图7.2 和图7.4中。一方面，左图显示了相对残差 $\mathcal{E}$，其在式（2.29）中定义，用作近似精度的指标。另一方面，右图显示了系数的大小，$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\ \epsilon}\|_{\ell^2}$，用于表示近似的稳定性。这些结果应与图3.5中的结果进行比较；该图是在仅使用

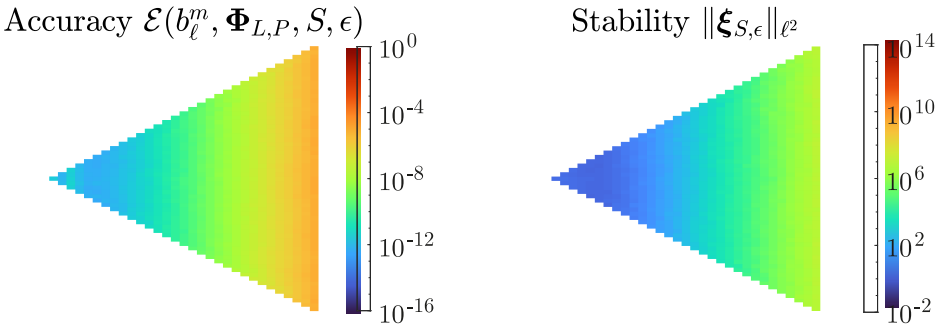
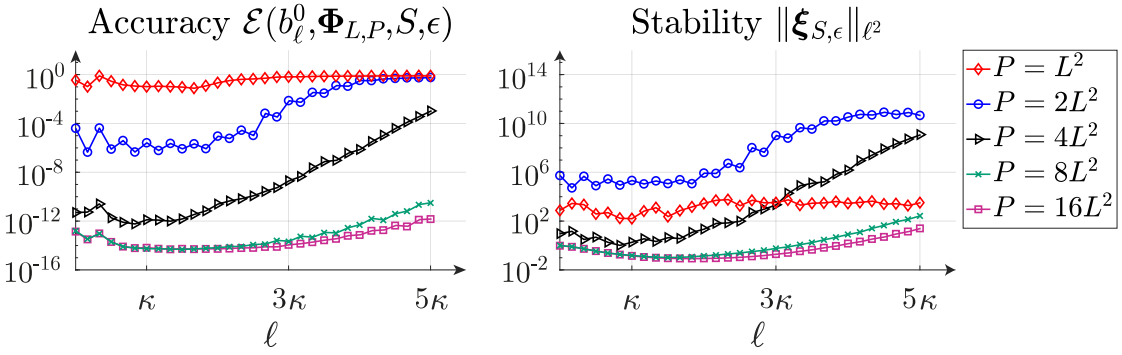


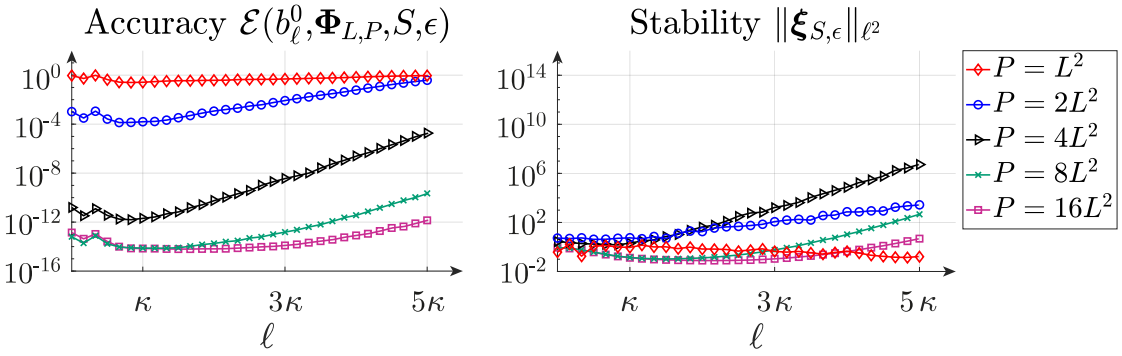
图7.1：精度 $\mathcal{E}$ 定义见 (2.29)（左）以及稳定性 $\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$ （右）：用倏逝平面波 b_ℓ^m 近似球面波，其中 Y 中的参数根据定义6.4中的 Sobol 采样 (c) 选取。索引ℓ 在横坐标上于范围 $0 \le \ell \le 5\kappa$内变化，而 m 在纵坐标上于范围 $0 \le |m| \le \ell$ 内变化，构成一个三角形。在 $L = 4\kappa$处截断，自由度预算 $P = 4L^2$，波数 $\kappa = 6$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

传播平面波作为式（3.3）中定义的逼近集时得到的结果。关键结论是，只要使用足够多的波，即令 P 足够大，就能以接近机器精度的精度近似所有模态 $\ell \le L = 4\kappa$ 。这包括传播模态 $\ell \le \kappa$，它们仅用传播平面波就已能得到很好的近似；更重要的是，也包括倏逝模态 $\kappa < \ell \le L = 4\kappa$ ，对于这些模态，纯传播平面波只能提供较差的近似，甚至无法近似。此外，次数更高的模态，即 $L = 4\kappa < \ell \le 5\kappa$，也能得到精确近似。近似展开中系数的范数$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$ 较为适中，这与第3.5节的结果形成鲜明对比。此外可以看出，当P取较小值时，例如 $P = L^2 = 16\kappa^2$ 和 $P = 2L^2 = 32\kappa^2$，纯传播平面波对传播模态的近似效果优于倏逝平面波。这是因为由传播平面波构成的近似空间针对传播模态进行了优化，而这些模态张成的空间维数为（$\kappa+1$）^{2}。另一方面，使用倏逝平面波构造的近似空间旨在逼近数量更多的模态，其中包括一些倏逝模态；这些模态张成的空间维数为$N =$ （$L+1$）^{2},，其中 $L = 4\kappa$ 为本次数值实验中的取值。

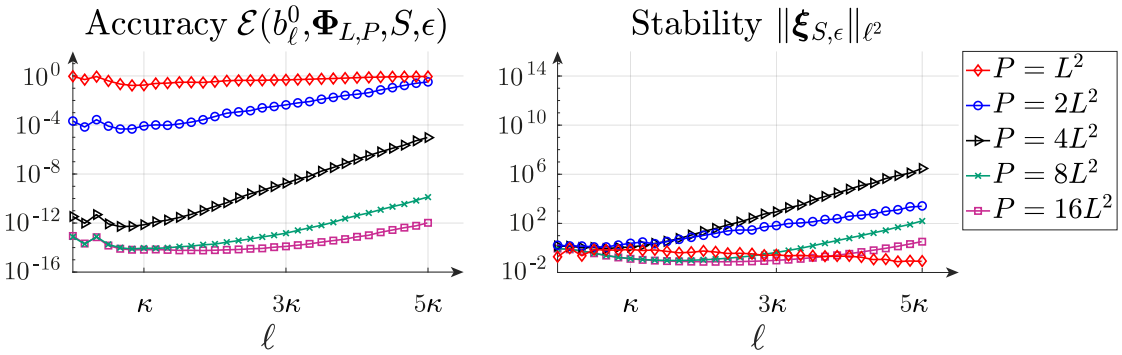
比较图 7.3 和图7.5与图3.3可以看出，当P 足够大时，对于传播平面波和倏逝平面波，矩阵 A 的条件数具有可比性。倏逝模态精度的提高并非源于线性系统具有更好的条件性，而是因为矩阵的 ϵ-秩（即大于 ϵ的奇异值数量）有所增加（在 10^3 的情况下，传播平面波对应的奇异值数量少于 5×10^3 ，而倏逝平面波对应的奇异值数量约为 $P = 16L^2 = 256\kappa^2$）。增大截断参数 L可以提高 ϵ-秩。



(a) 确定性采样。

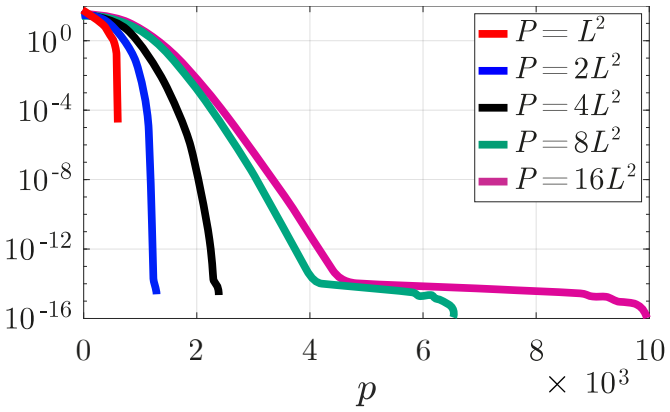


(b) 随机采样。

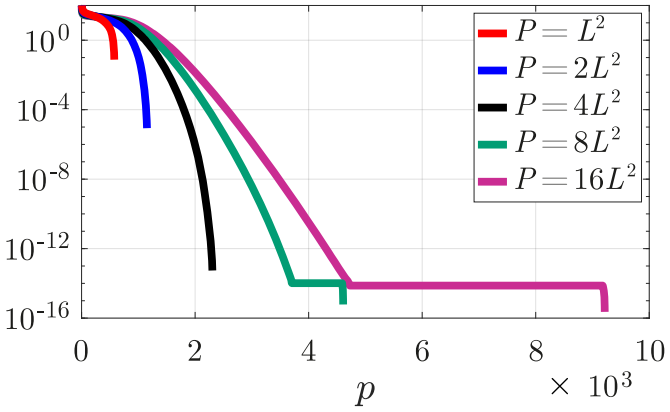


(c) Sobol 采样。

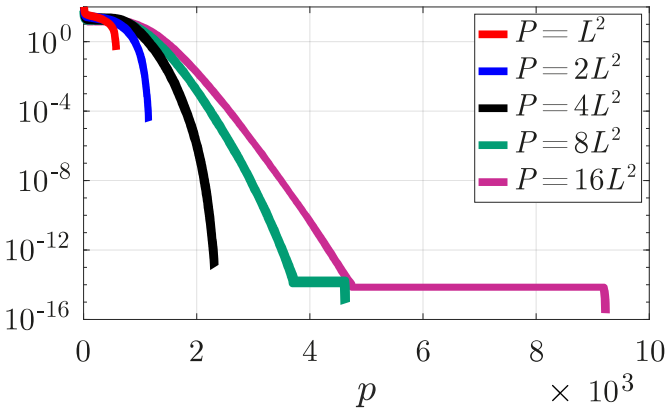
图 7.2：精度 $\mathcal{E}$，如（2.29）中所定义（左）以及稳定性 $\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$ 球面波的近似（右） b_ℓ^0 通过倏逝平面波实现，其中的参数Y根据定义 6.4中介绍的采样策略 (a)–(c) 选取。将这些结果与图 3.5中展示的结果进行比较。在 $L = 4\kappa$ 处截断，波数 $\kappa = 6$，正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。



(a) 确定性采样。

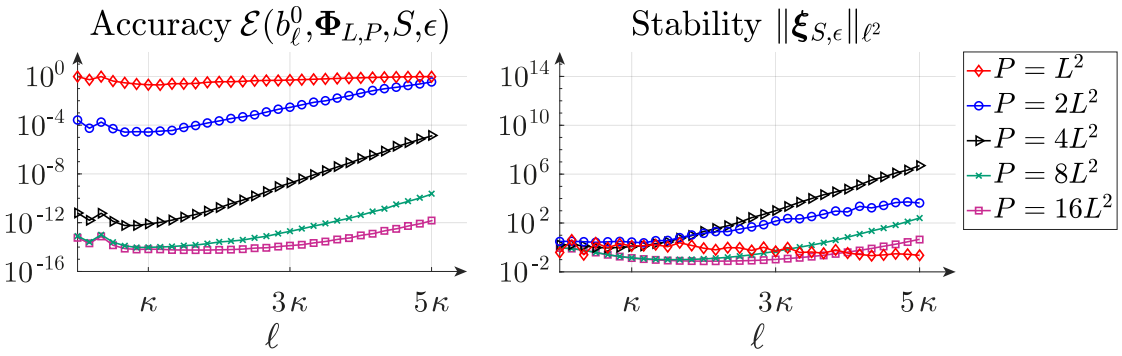


(b) 随机采样。

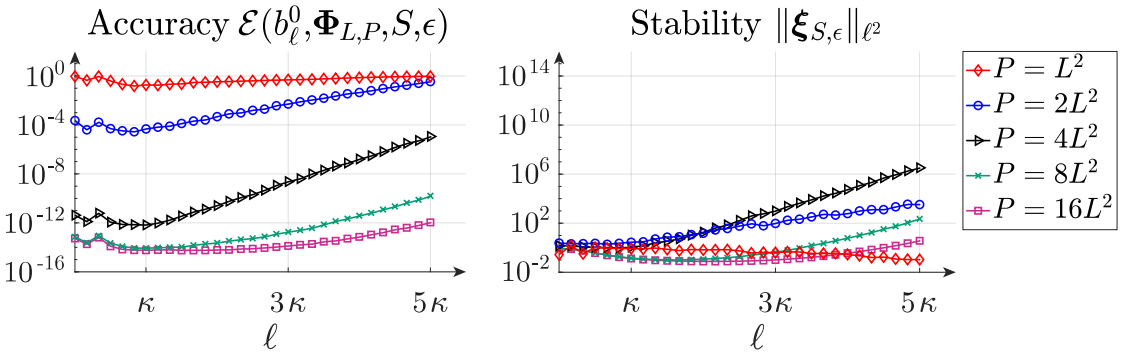


(c) Sobol 采样。

图 7.3：奇异值 $\{\sigma_p\}_p$ 矩阵 A 使用倏逝型平面波近似集（6.6），其中 Y 中的参数根据定义 6.4中介绍的采样策略 (a)–(c) 选取。请将这些结果与图 3.2中的结果进行比较。在 $L = 4\kappa$处截断，波数 $\kappa = 6$。

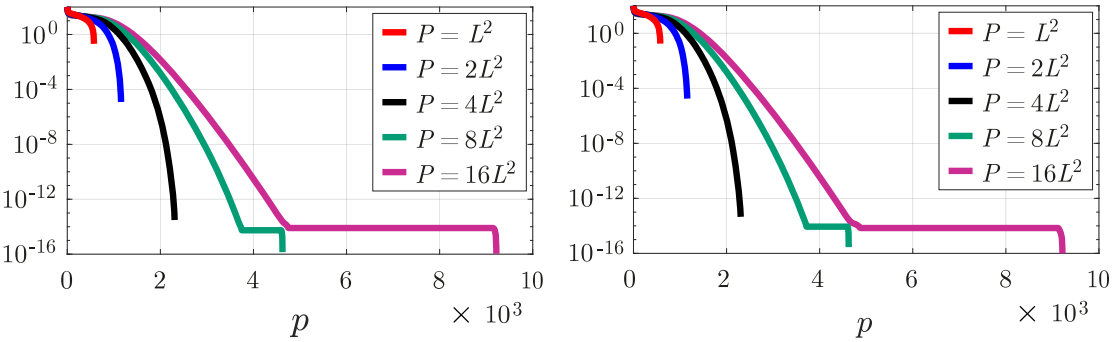


(d) 极值–随机采样。



(e) 极值–Sobol 采样。

图7.4：图 7.2 的图注同样适用于此处，唯一的区别在于， Y 中的参数现在是根据定义 6.4中的采样策略 (d) 和 (e) 选取的。



(d) 极值–随机采样。

(e) 极值–Sobol 采样。

图7.5：图7.3 的图注同样适用于此处，唯一的区别在于， Y 中的参数现在是根据定义 6.4中的采样策略 (d) 和 (e) 选取的。

7.2 解的代理函数的近似

我们通过重构以下形式的解的代理函数，对前文所述的过程进行测试：

$$u := \sum_{\ell=0}^{L} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{u}_\ell^m b_\ell^m \in \mathcal{B}_L. \tag{7.1}$$

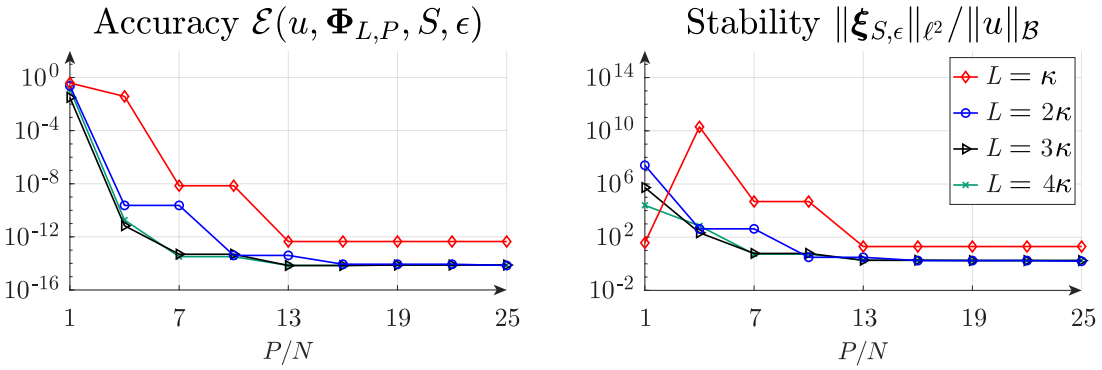
系数 $\{\hat{u}_\ell^m\}_{(\ell,m)\in\mathcal{I}}$ 展开式（7.1）中的系数是服从正态分布的随机数（均值为 0，标准差为 1）与缩放因子 $[\max\{1,\ell-\kappa\}]^{-1}$的乘积。 $\mathcal{B}$ 中任意元素的系数o（ℓ^{-1}）的模按 $\ell\to\infty$衰减，因此，这一情形颇具挑战性。

我们对定义 6.4 中介绍的所有采样策略执行前文概述的过程。主要目标是检验猜想 6.2 的有效性，重点考察当近似空间的维数 P 增加时误差的变化情况（关于近似空间的确切维数，参见备注 6.5 ）。与之前的做法类似，我们选择 $S=\lceil\sqrt{2}|\mathbf{\Phi}_{L,P}|\rceil^2$ 个第 2.3 节介绍的极值点，在球面上进行采样。数值结果显示于图 7.6 和图7.7中。左图展示了在（2.29）中定义的相对残差 $\mathcal{E}$，将其作为衡量近似精度的指标。右图描绘了系数的大小，即$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}/\|u\|_{\mathcal{B}}$，将其作为衡量近似稳定性的指标。

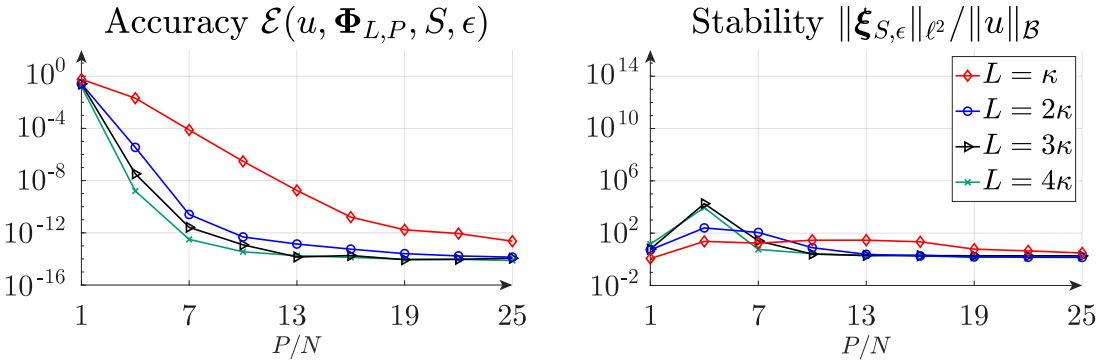
<escape>误差随着比值 $P/N(L)=P/(L+1)^2$,的增大而迅速减小，该比值等于逼近集的维数与可能的解的代理函数空间的维数之比。图 7.6 和图 7.7所示的数值结果表明，逼近集的大小 P 应随截断参数 L呈二次变化。事实上，当 L 足够大时（例如 $L\geq 2\kappa$），误差衰减在很大程度上与 L无关：这与猜想 6.2一致。这是一个关系到所提出方法效率的重要问题：由式（6.6）定义的近似空间$\mathbf{\Phi}_{L,\,P}$是准最优的，即只需 $P=\mathcal{O}(N)$ 个自由度（DOFs），并采用适中的比例常数，就能以合理的精度逼近 N 球面模态。</escape>

此外，请注意，随着近似空间维数的增加，展开式中系数$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}/\|u\|_{\mathcal{B}}$ 的幅值会逐渐减小。这证实了可以获得精确且稳定的近似结果。对于较小的 $P/N(L)$，所报告的$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}/\|u\|_{\mathcal{B}}$ 数值（尤其是初始阶段的增加）并不显著，因为这些数值对应的是不精确的近似结果。

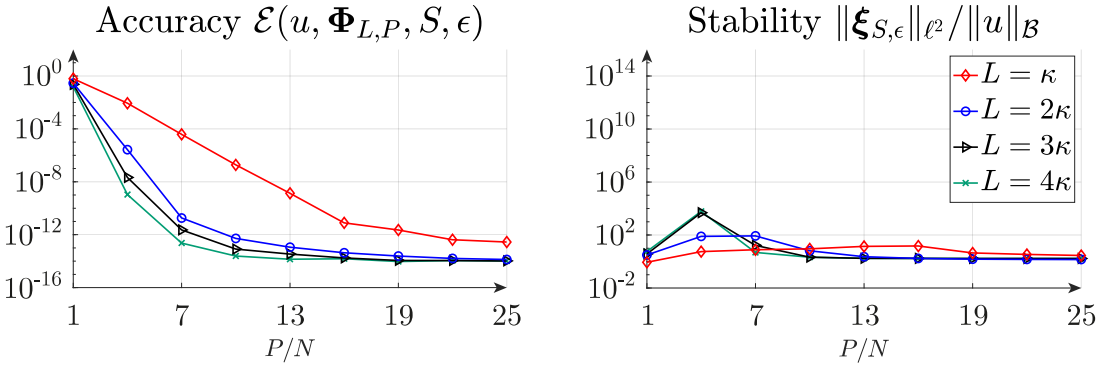
在图 7.8中，我们给出了一个解的代理（7.1）的图像，其波数为$\kappa=5$，截断参数为 $L=5\kappa=25$。此外，在图 7.9和图7.10 中，我们给出了使用首先 $P=4(L+1)^2=2704$ 个平面波，然后 $P=9(L+1)^2=6084$ 个平面波时的绝对误差，无论这些平面波是传播型还是倏逝型（其中 Y 中的节点均使用定义 6.4中的极值–Sobol 策略（e）选取）。在这两种情况下，均采用第2.2节中讨论的相同正则化过采样技术。



(a) 确定性采样。

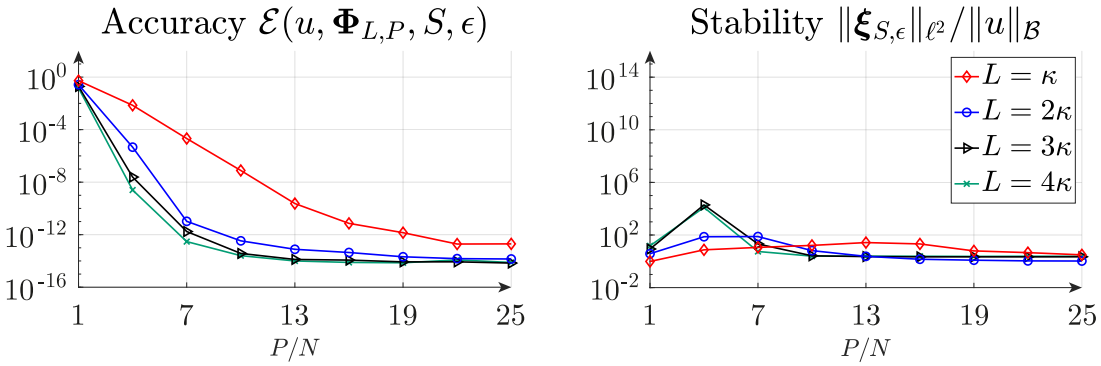


(b) 随机采样。

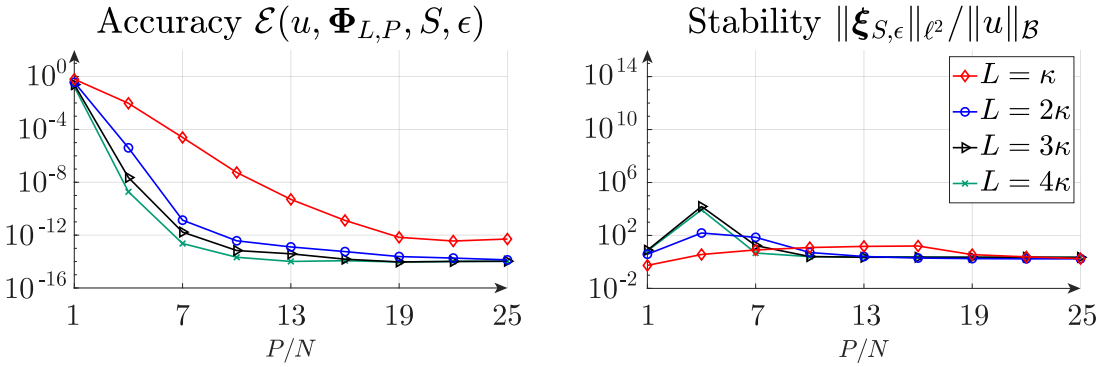


(c) Sobol 采样。

图 7.6：解的代理函数 u 采用形式 (7.1)，由 P 个倏逝平面波进行近似时的精度 $\mathcal{E}$（定义见 (2.29)）（左）和稳定性 $\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}/\|u\|_{\mathcal{B}}$（右）。其中，$Y$ 中的参数按照定义 6.4 所述的采样策略 (a)–(c) 选取。横轴表示比值 $P/N(L)$，其中 $N(L) = (L+1)^2$ 是空间 $\mathcal{B}_L$ 的维数，u 属于该空间。波数 $\kappa = 6$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。



(d) 极值–随机采样。



(e) 极值–Sobol 采样。

图 7.7：图7.6 的说明同样适用于此处，唯一的区别在于 Y 中的参数现在根据定义 6.4中的采样策略 (d) 和 (e) 进行选择。

使用传播平面波 $\mathbf{\Phi}_P$ 所产生的误差明显高于使用倏逝平面波 $\mathbf{\Phi}_{L\text{所得到的误差}P}$。如图 7.9 和图7.10所示，分别使用 L^∞ 范数测量时，前者的误差约大 8 个数量级，后者约大 12 个数量级。在这两种情况下，误差都集中在边界附近。然而，尽管增加自由度，在传播波的情况下，精度并未得到改善，尤其是在 ∂B_1；而使用倏逝波则可以降低误差。这是因为倏逝平面波能够有效捕捉亥姆霍兹解中较高阶的傅里叶模态，而传播平面波无法做到这一点。

关于用倏逝平面波进行近似，我们可以估算每个方向上每波长所用的自由度数，记为 $\lambda = 2\pi/\kappa$，取值为$\lambda\sqrt[3]{3|\mathbf{\Phi}_{L,\ P}|/4\pi}$，在图 7.9中约为 10.9，在图 7.10中约为 14.2。对于低阶方法，常用的经验法则是每波长大约使用 $6 \sim 10$ 个自由度，以达到 1 或 2 个有效数字的精度。不过请注意，只需比这个数量略多一些，就能得到 $8 \sim 12$ 个有效数字的精度。

总之，数值结果与猜想 6.2完全一致。

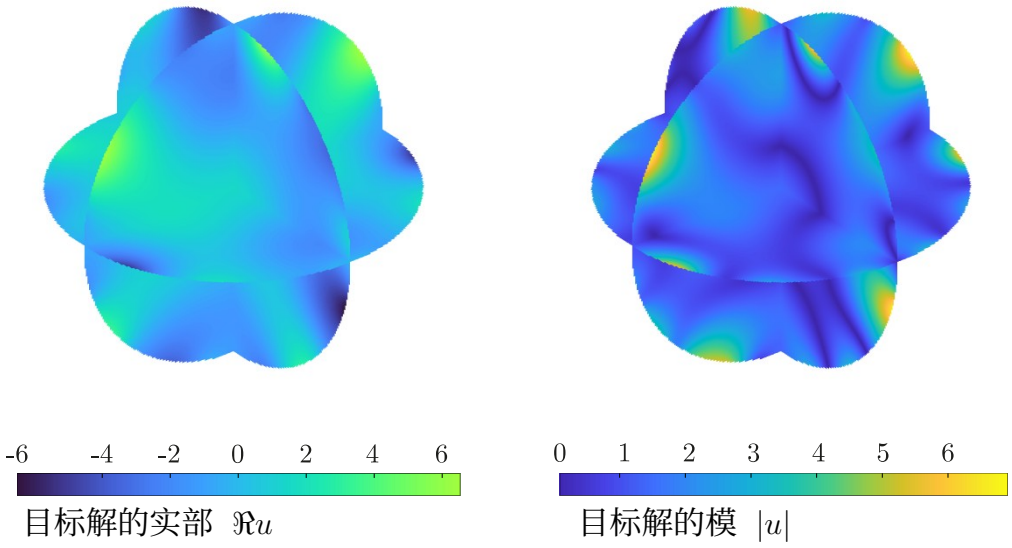


图 7.8：解的代理 u，即近似的目标，定义于（7.1）中，波数为 $\kappa = 5$ 和 $L = 5\kappa = 25$。目标解的实部 $\Re u$ 和模 $|u|$分别绘制于 $B_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z) : xyz = 0\}$（上图）以及单位球面上 ∂B_1（下图）。

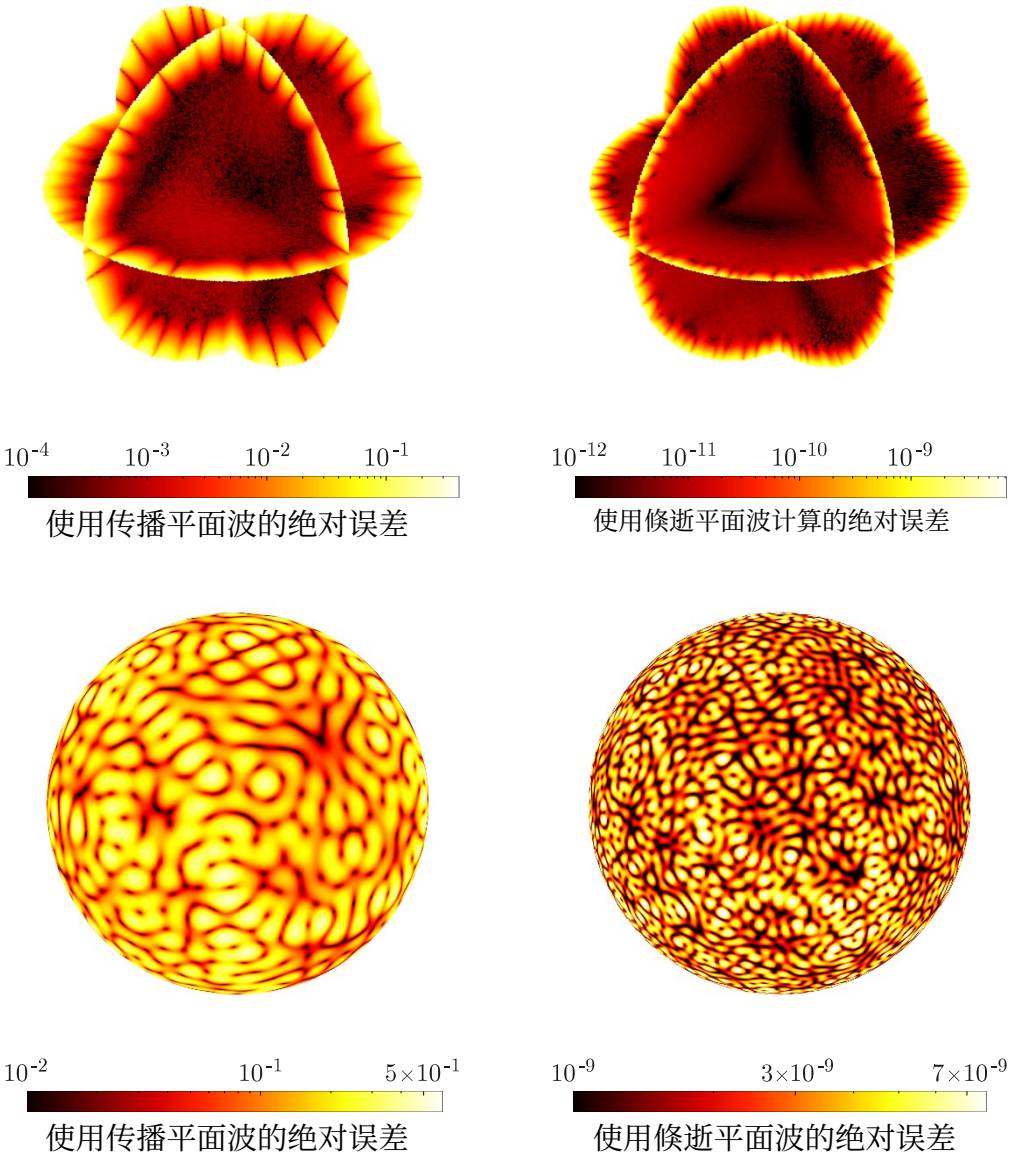


图 7.9：解的代理 u 的近似的绝对误差，该代理在 (7.1) 中定义，使用 $L = 5\kappa = 25$。误差采用 $P = 4(L+1)^2 = 2704$个平面波给出，这些平面波可以是来自 (3.3) 的传播波 $\mathbf{\Phi}_P$（左），也可以是来自 (6.6) 的倏逝波 $\mathbf{\Phi}_{L,P}$，其参数通过定义 6.4（右）中介绍的极值–Sobol 策略 (e) 构造。绝对误差分别绘制在 $B_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z) : xyz = 0\}$（上）和单位球面 ∂B_1（下）上。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

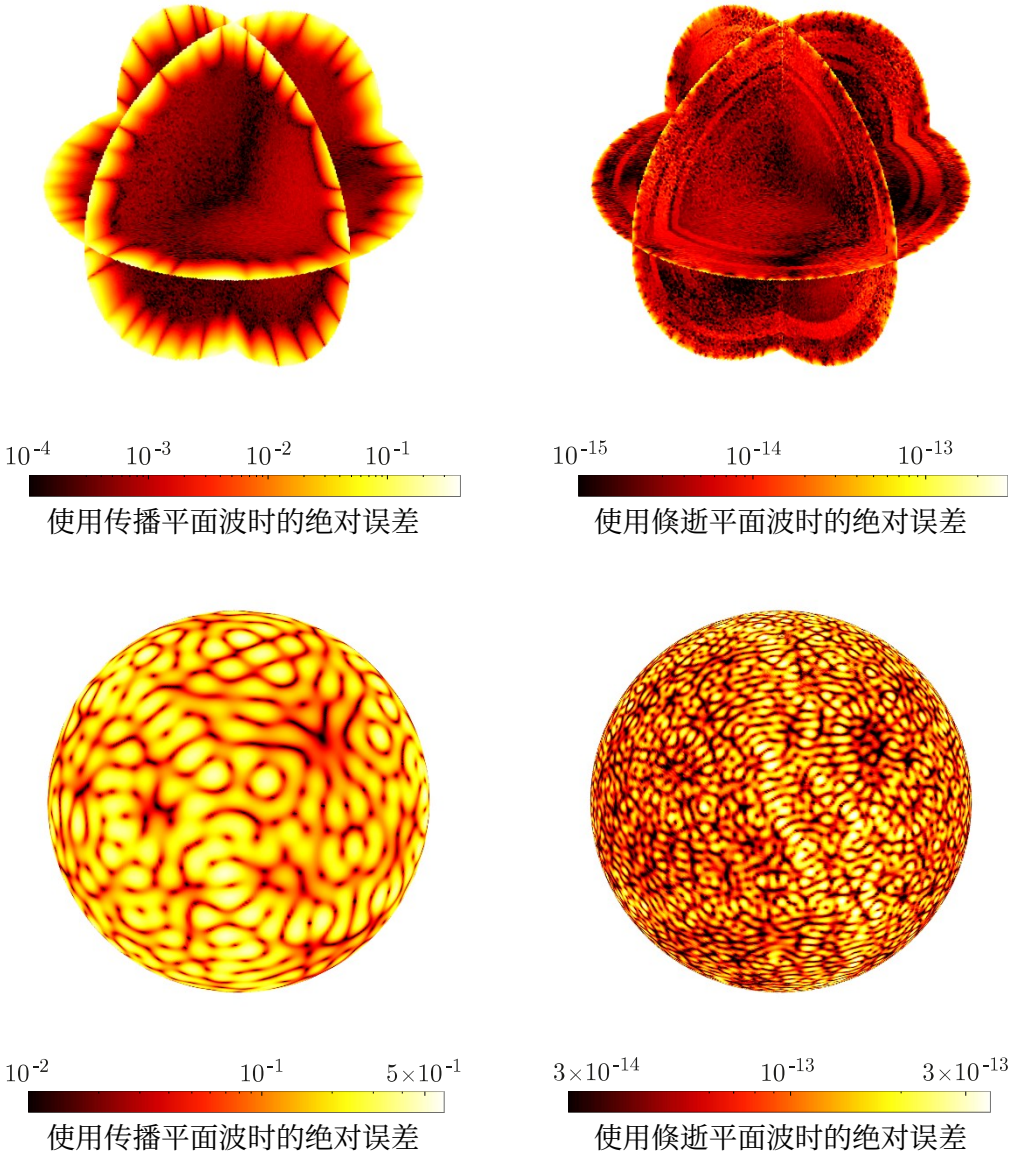


图 7.10：图注7.9 同样适用于此处，唯一的区别是现在绝对误差是使用 $P = 9$（$L + 1$）$^2 = 6084$ 平面波给出的。

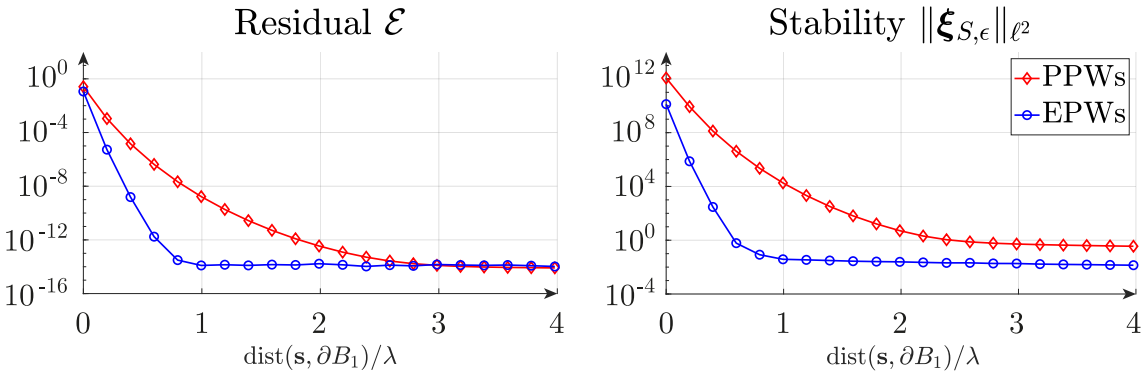


图7.11：残差 $\mathcal{E}$（定义见（2.29））（左）以及稳定性$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$（右）：利用 $\Phi_{\mathbf{s}}$（7.2）中介绍的 $P = 2704$ 平面波（传播型或倏逝型）对基本解进行近似（其中 Y 中的节点采用定义6.4中介绍的极值–Sobol 策略 (e) 选取）。图中数值与奇点到表面$\mathbf{s}$ 的距离有关 ∂B_1，该距离已按波长 $\lambda = 2\pi/\kappa$缩放。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

7.3 奇点附近的精度提升

在接下来的章节中，我们将考察一些涉及亥姆霍兹方程基本解的数值实验，即:

$$\Phi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}, \qquad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是一个凸域，且 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$。目前先假设 $\Omega = B_1$；下一节中我们将考察不同的几何形状，以说明基于前文对单位球 B_1的分析所构造的逼近集，在其他形状上也具有出色的逼近性质。

在图7.11中，我们研究了式（2.29）中定义的精度 $\mathcal{E}$，以及用传播型或倏逝型平面波近似式（7.2）中定义的基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$ 的稳定性$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$。横坐标表示奇点 $\mathbf{s}$ 到表面 ∂B_1的距离，该距离已按波长$\lambda = 2\pi/\kappa$进行了缩放。由于近似空间$\boldsymbol{\Phi}_{L,P}$具有准最优性（第7.2节的数值结果对此有所提示），截断参数 L 由 P 计算为 $L := \max\{\lceil\kappa\rceil, \lfloor\sqrt{P/10}\rfloor\}$。可以类比 [19, 第8节4]，探究关系 $P = \nu L^2$ 中更好的比例常数。

这些结果表明，当奇点靠近边界 ∂B_1 时，倏逝平面波能够有效捕捉基本解的高阶傅里叶模态 $\Phi_{\mathbf{s}}$。具体而言，如果 $\mathbf{s} \in \partial B_1$，那么由于系数较大，两种平面波近似集都不足以逼近基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$：事实上，如果 $\mathbf{s} \in \partial B_1$，那么 $\Phi_{\mathbf{s}} \notin \mathcal{B}$。随着我们远离奇点，

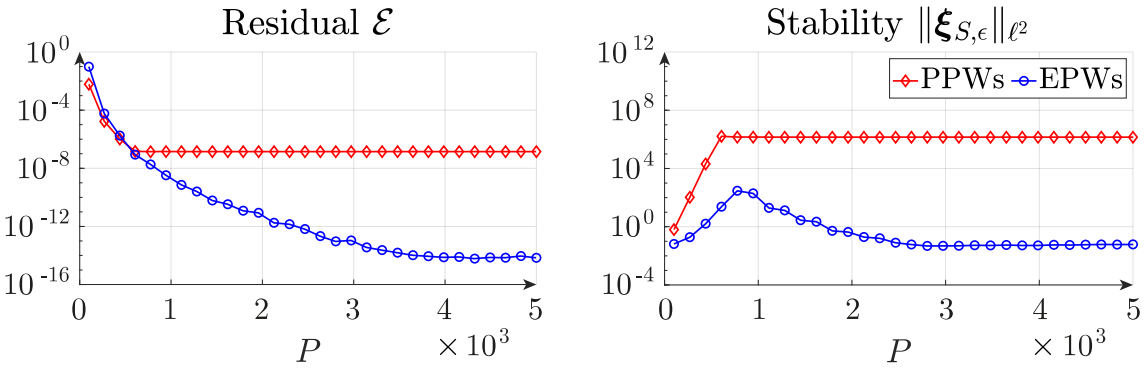


图7.12：残差 $\mathcal{E}$，定义见（2.29）（左）以及稳定性$\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$（右），对应于用平面波（传播型或倏逝型）对式（7.2）中的基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$（7.2）所作的近似，其中 $\mathbf{s} = (2\lambda/3,\ 0,\ 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$（其中 Y 中的节点采用定义6.4中介绍的极值–Sobol 策略（e）选取）。我们展示了逼近集 P规模增大时近似的收敛情况。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

倏逝波更适合逼近由邻近奇点引起的高阶傅里叶模态。图 7.11给出了一个示例，其中可以观察到，倏逝波集所提供的精度已经达到 10^{-14}，当 $\mathrm{dist}(\mathbf{s}\ \partial B_1) = \lambda$ 时。如果奇点 $\mathbf{s}$ 位于足够远的位置（约 3 个波长，即 $\mathrm{dist}(\mathbf{s}\ \partial B_1) = 3\lambda$），两种类型的平面波集都能很好地近似基本解$\Phi_{\mathbf{s}}$，因为它们只需处理其传播模态。

图7.12 展示了逼近集 P规模增大时平面波近似的收敛情况。我们考虑式（ $\Phi_{\mathbf{s}}$ 7.2）中定义的基本解，其波数为 $\kappa = 5$，奇点为$\mathbf{s} = (1 + 2\lambda/3,\ 0,\ 0)$。值得注意的是，采用传播平面波时，随着 P增大，线性系统的残差起初迅速减小。然而，由于系数迅速增大，残差最终会在达到机器精度之前趋于平稳。相反，采用倏逝平面波近似集时，残差会收敛至机器精度，并且达到最终精度时系数的幅值仍处于合理范围内。事实上，使用倏逝平面波时，截断参数 L会随逼近集 P规模同步增大，因此近似模态的数量也随之增加，从而得到越来越精确的近似。相比之下，使用传播波时，增大离散空间只能改善对传播模态的近似，却忽略了更高阶的傅里叶模态内容。

从图 7.13 到图 7.16，我们展示了基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$ 在波数为 $\kappa = 5$以及奇点 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$取不同值时的两个实例，同时给出了使用平面波进行近似时的误差，无论这些平面波是传播型还是倏逝型。结果与图 7.11一致。

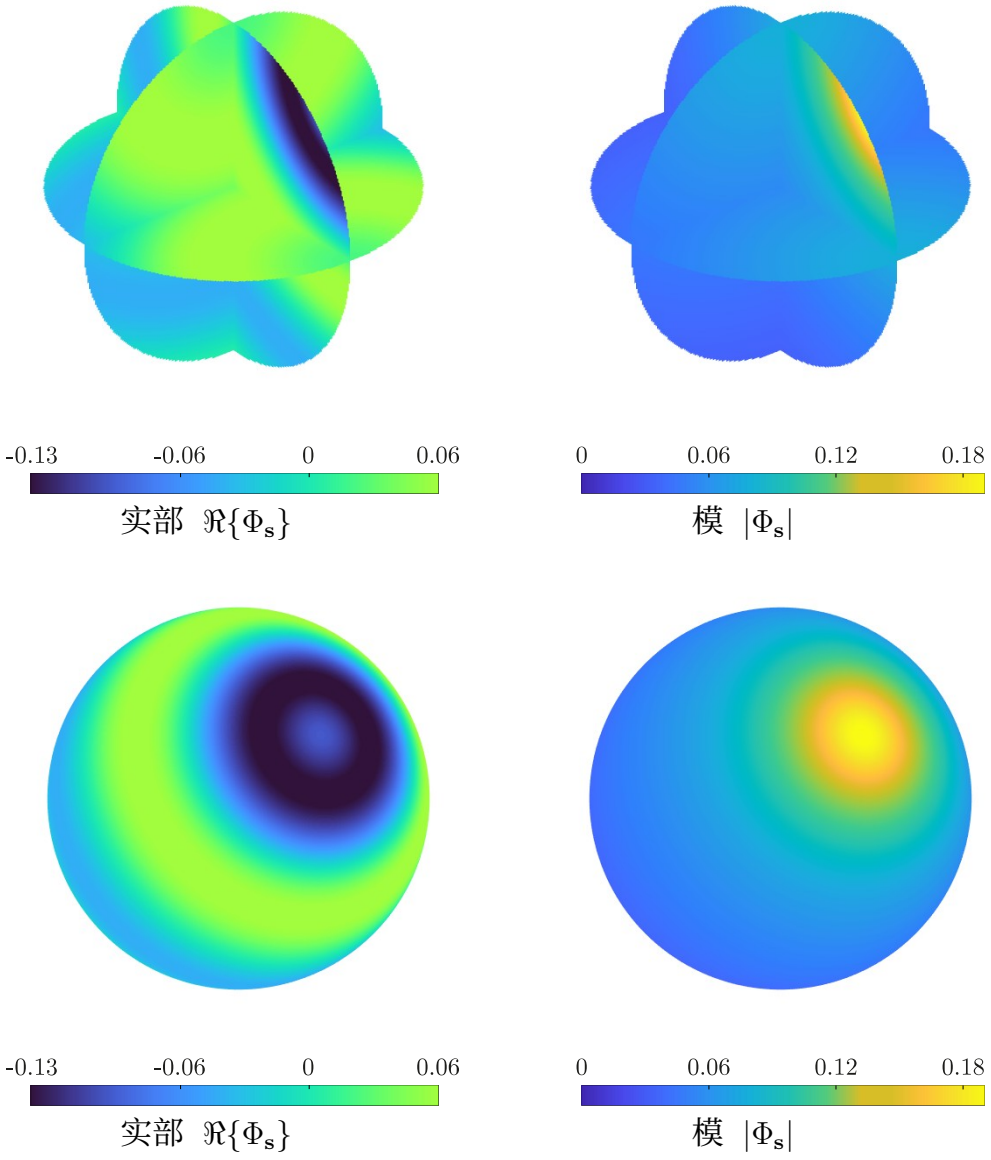


图7.13：基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$ 定义于（7.2）中，波数为 $\kappa = 5$ 且$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$ 使得距离$(\mathbf{s}\ \partial B_1) = \lambda/3$。基本解的实部 $\Re\{\Phi_{\mathbf{s}}\}$ 和模$|\Phi_{\mathbf{s}}|$ 分别绘制在 $B_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z) : xyz = 0\}$（上图）以及单位球面 ∂B_1 （下图）上。

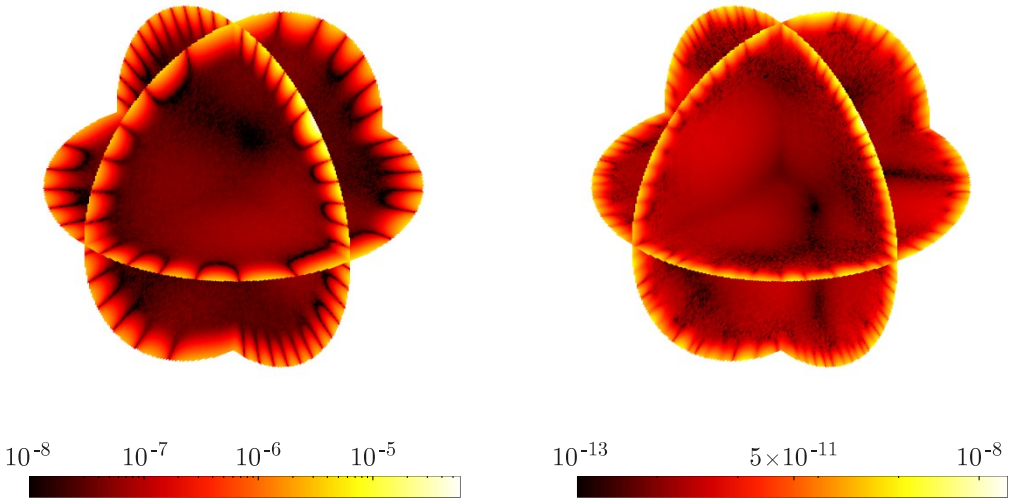


图 7.14：在 s $\in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$ 使得 dist(s ∂B_1) $= \lambda/3$的条件下，对(7.2)中定义的基本解 Φ_s近似的绝对误差。误差使用 $P = 2704$ 平面波给出，分别为来自(3.3)的传播波 $\mathbf{\Phi}_P$ （左）或来自(6.6)的倏逝波 $\mathbf{\Phi}_{L,P}$，其参数采用定义 6.4中介绍的极值–Sobol 策略(e)构造（右）。绝对误差同时绘制在 $B_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z) : xyz = 0\}$ （顶部）和单位球面 ∂B_1（底部）上。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。结果与7.11中报告的结果一致。

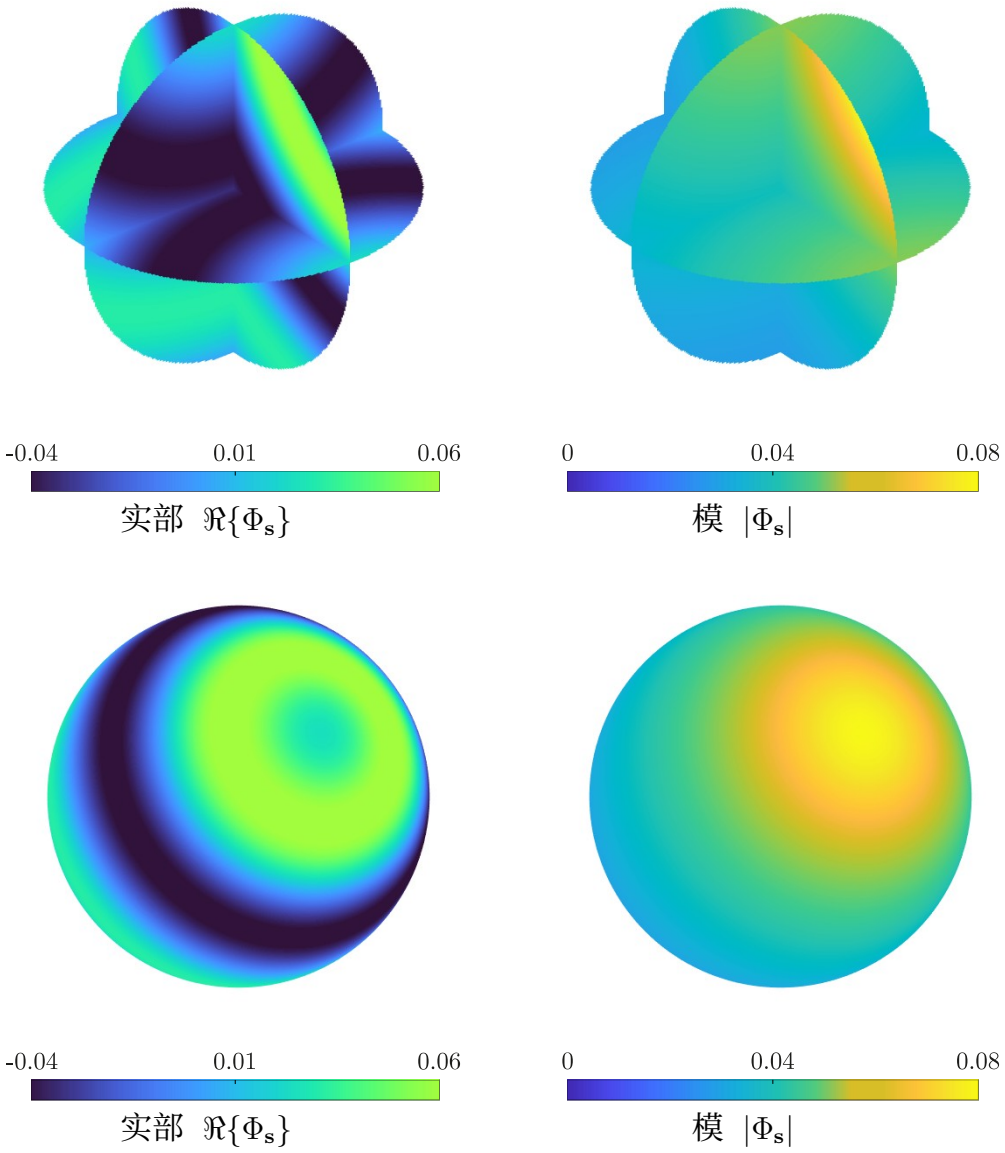


图 7.15：基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$ 定义于 (7.2)，波数为 $\kappa = 5$ 且$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$ 使得距离$(\mathbf{s}\ \partial B_1) = 4\lambda/5$。基本解的实部 $\Re\{\Phi_{\mathbf{s}}\}$ 和模$|\Phi_{\mathbf{s}}|$ 绘制在 $B_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z)$ 上：（$xyz = 0\}$ 上）以及单位球面上（∂B_1 下）。

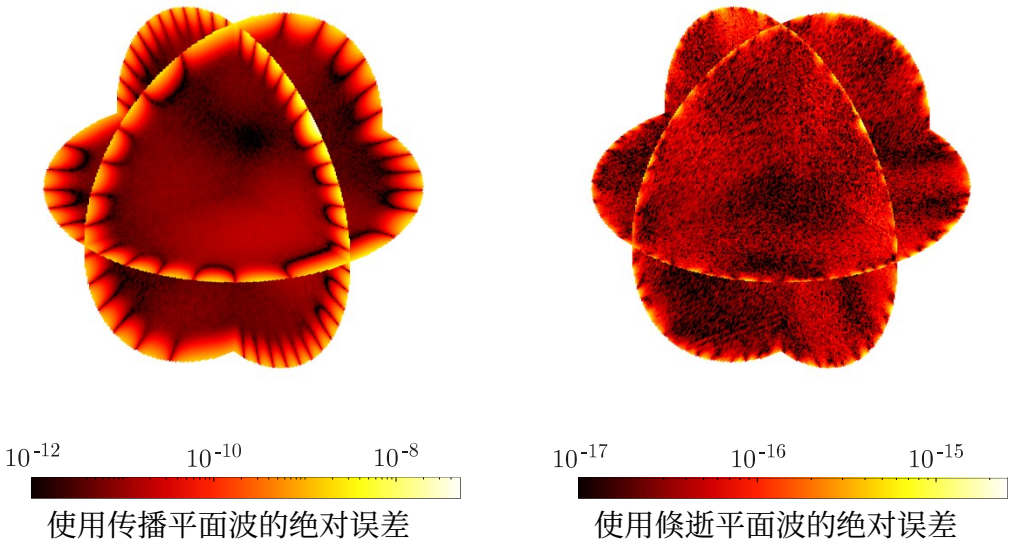


图 7.16：图 7.14的说明在此同样适用，唯一的区别是，现在基本解的奇点 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_1$ $\Phi_{\mathbf{s}}$ 选择为使 $\mathrm{dist}(\mathbf{s}, \partial B_1) = 4\lambda/5$。结果与 7.11 中报告的结果一致。

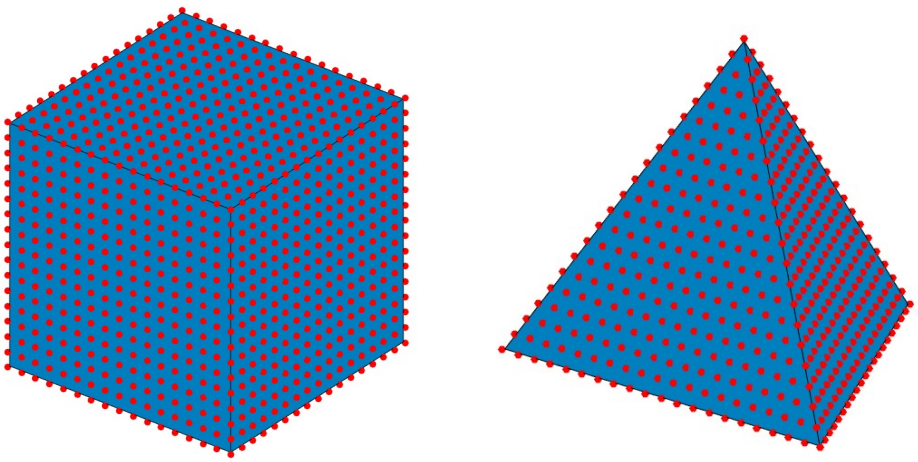


图7.17：等距采样点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial\Omega$。首先沿边放置等距节点。随后，对于每个面，从一条边开始生成一系列平行的等距节点集。对于 $\Omega = Q_1$（左图），每个序列中的节点数量相同。如果 $\Omega = T_1$（右图），节点数量则逐渐减少，每次减少一个，直至到达对面的顶点。

7.4 不同的几何形状

在本章结尾，我们展示各种形状上的一些数值结果，以说明我们基于单位球面的分析所构造的逼近集 B_1在其他几何形状上同样表现良好。再次强调，逼近问题的目标是确定亥姆霍兹方程的基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$，如（7.2）中所定义，但这次针对一个凸多面体 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$，该多面体内接于单位球面，且奇点 $\mathbf{s}$ 属于 $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$。我们将同时考虑 $\Omega = Q_1$，其中 Q_1 是边平行于笛卡尔坐标轴的立方体，以及 $\Omega = T_1$，其中 T_1 是顶点为

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\sqrt{\frac{2}{9}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{9}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\sqrt{\frac{8}{9}}, 0, -\frac{1}{3}\right), \quad \mathbf{v}_4 = (0,0,1)\,.$$

我们重新考察平面波近似随逼近集规模 P 增大时的收敛性。近似方案借鉴自第2.2节：在 Ω 的边界上使用等距的狄利克雷数据点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S$（见图 7.17），并使用正则化奇异值分解求解过采样线性系统。请注意，由于采用了等距采样点，因此对于（$w_s = |\partial\Omega|/S$），我们可以为每个 $s = 1, \ldots\ldots, S$选择相应取值。逼近集由两类平面波构成：传播型平面波，其方向由极值点系统确定（2.9）；以及倏逝型平面波，如（6.6）所述。倏逝型

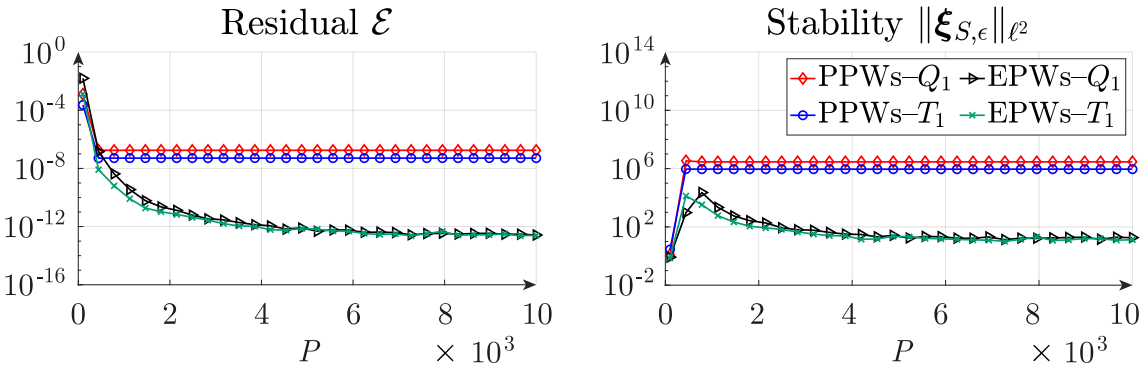


图 7.18：基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$（见（7.2））的近似所对应的残差 $\mathcal{E}$（按（2.29）定义，左图）和稳定性 $\|\boldsymbol{\xi}_{S,\epsilon}\|_{\ell^2}$（右图），分别在 Q_1 中取 $\mathbf{s} = (1/\sqrt{3}+2\lambda/3,\ 0,\ 0)$，以及在 T_1 中取 $\mathbf{s} = (0,\ 0,\ -1/3-2\lambda/3)$。两种平面波近似集均有使用，分别为传播型或倏逝型（其中 Y 中的节点采用定义 6.4 中介绍的极值–Sobol 策略（e）选取）。我们报告了随着逼近集大小 P 增大时近似的收敛情况。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

平面波集按照极值–Sobol 策略 (e) 构造，具体见定义 6.4。截断参数 L 根据逼近集的维数P 计算，公式为 $L := \max\{\lceil\kappa\rceil, \lfloor\sqrt{P}/10\rfloor\}$。最后，将倏逝型平面波归一化，使其在边界 L^∞ 上的范数为单位范数 $\partial\Omega$；这与球面几何所用的集合相比，是唯一的变化。

图7.18展示了随着逼近集 P 规模的增大，平面波近似的收敛情况。我们考虑式（7.2）中定义的基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$，其波数为 $\kappa = 5$，奇点为$\mathbf{s} = (1/\sqrt{3}+2\lambda/3, 0, 0)$（当$\Omega = Q_1$时），以及$\mathbf{s} = (0, 0, -1/3-2\lambda/3)$（当$\Omega = T_1$时），从而在两种情况下，$\mathrm{dist}(\mathbf{s}, \partial\Omega) = 2\lambda/3$，如图7.12所示。这些结果与第7.3节中展示的结果一致：倏逝平面波能够逼近更多模态，从而获得更高的精度；相比之下，传播平面波由于系数迅速增大，在达到机器精度之前便会停止收敛。然而，需要注意的是，与图7.12所示的球面几何情形相比，使用倏逝平面波会导致收敛速度更慢。

最后，我们展示一些具有波数的基本解示例 $\Phi_{\mathbf{s}}$，并选择若干奇点$\kappa = 5$，既包括$\mathbf{s}$中的，也包括 Q_1 中的 T_1，并展示使用平面波进行近似时的误差，无论这些平面波是传播型还是倏逝型（参见图7.20 至图7.25）。

值得注意的是，前文所述的数值方案中，采用等间距的狄利克雷数据点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial\Omega$ 时，角点附近似乎会产生一些误差。因此，在图7.22 和图7.25 中，我们报告了一些数值实验，其中选用了局部加密的采样点。

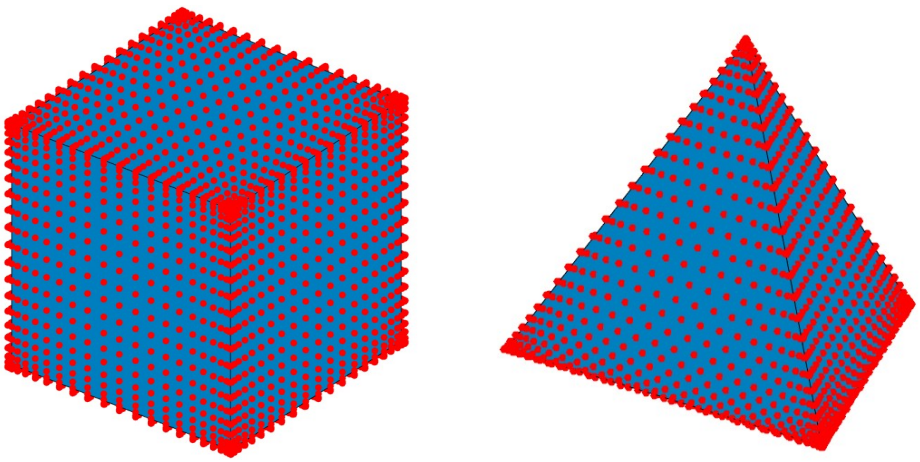


图7.19：局部细化的采样点 $\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial\Omega$。首先沿边放置切比雪夫节点。随后，对于每个面，从一条边开始生成一系列平行的切比雪夫节点集。对于 $\Omega = Q_1$（左图），每组序列中的节点数相同。对于 $\Omega = T_1$（右图），节点数逐渐递减，每次减少一个，直至到达对顶点。

在这种情况下，我们将线性系统（$\mathbf{w}_S \in \mathbb{R}^S$（2.6）中的权重设为常数。为构造点网格，首先沿边放置切比雪夫节点。然后，对于每个面，从一条边开始，依次生成一组平行的切比雪夫节点列。如果 $\Omega = Q_1$，每列中的节点数保持不变；如果 $\Omega = T_1$，则节点数逐渐减少，每次减一个，直到到达对面的顶点。请注意，获取 $\partial\Omega$ 上一组等间距采样点（例如图7.17所示）的一个可行方法，是在每一步使用等间距节点，而非切比雪夫节点。图7.19展示了一些局部加密网格的示例。

该方法的精度和稳定性分析（未绘出）与图7.18中报告的完全类似，但与图7.22 和图7.25相比，图7.21 和图7.24在角点附近的精度更高，而后者采用的是等距节点。

这些结果表明，所提出的用于平面波近似和特雷夫茨方法的数值方法前景可期。值得注意的是，考虑到用于构造近似的数值方法并未针对这些特定几何形状进行精细调优（除在边界上进行 L^∞ 重新归一化，以及可能选择狄利克雷采样点$\{\mathbf{x}_s\}_{s=1}^S \subset \partial\Omega$ 外），这些结果相当令人瞩目。我们相信，通过制定专门针对底层几何形状的更优规则，可以改进所概述的方案，从而得到更加有效的近似方案。

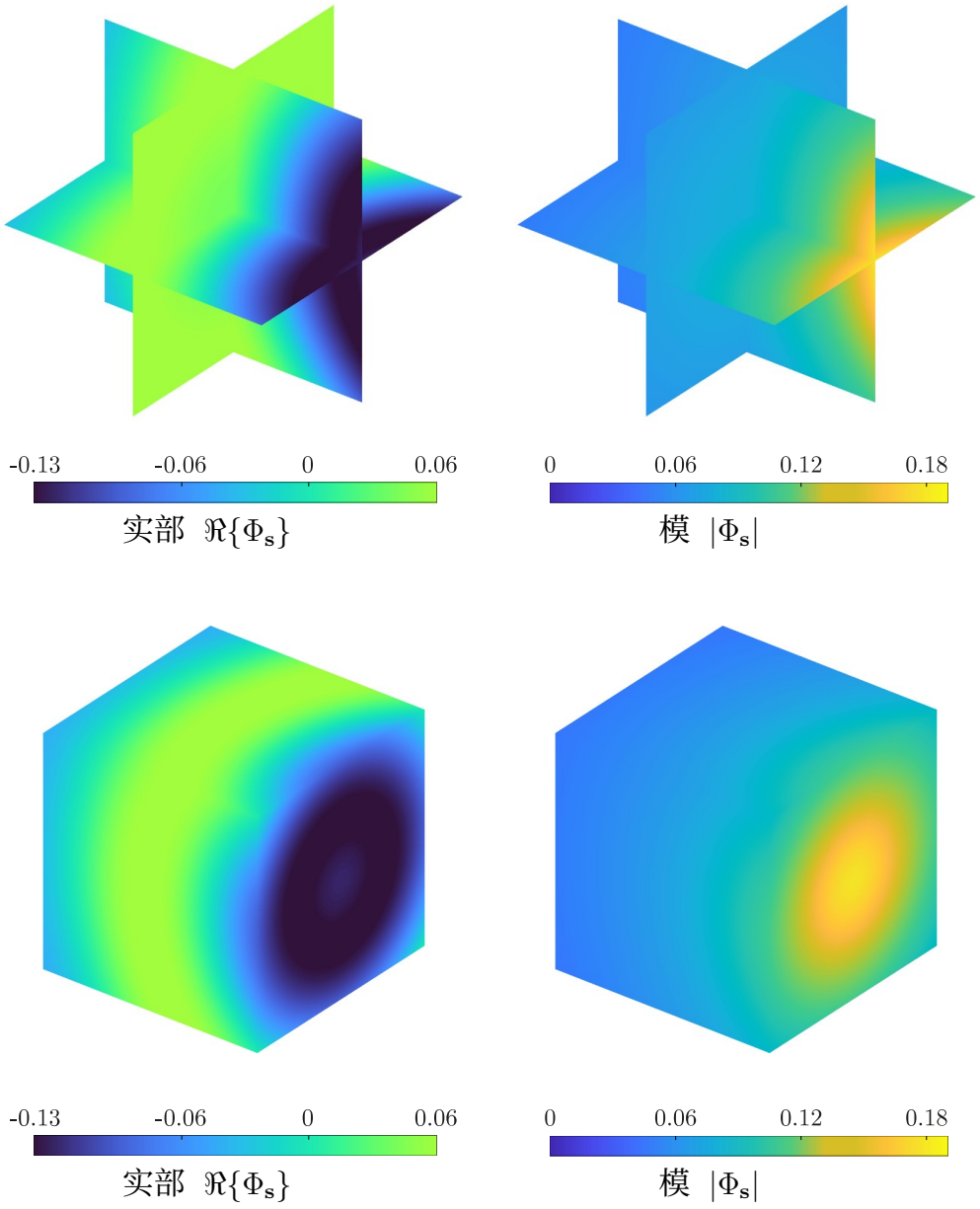


图7.20：基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$ 定义于（7.2），波数为 $\kappa = 5$ 且$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus Q_1$ 使得 $\mathrm{dist}(\mathbf{s}, \partial Q_1) = \lambda/3$。基本解的实部 $\Re\{\Phi_{\mathbf{s}}\}$ 和模$|\Phi_{\mathbf{s}}|$ 绘制在 $Q_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z) : \ xyz = 0\}$（上图）以及边界上 ∂Q_1（下图）。

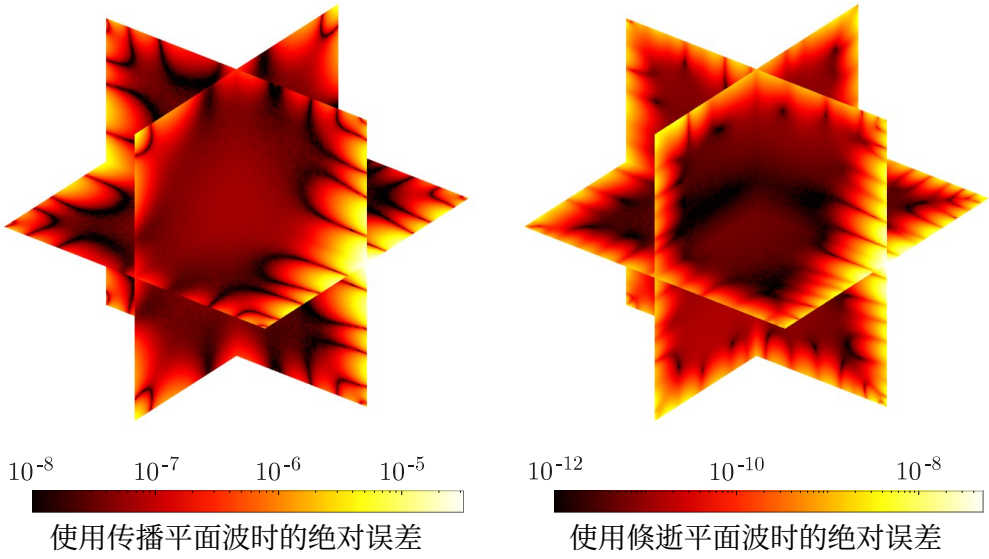


图 7.21：基本解的近似绝对误差 $\Phi_{\mathbf{s}}$，该基本解在 (7.2) 中定义，且 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus Q_1$ 使得 $\operatorname{dist}(\mathbf{s}, \partial Q_1) = \lambda/3$。误差使用 $P = 2704$ 平面波计算，既包括来自 (3.3) 的传播波 $\mathbf{\Phi}_P$（左图），也包括来自 (6.6) 的倏逝波 $\mathbf{\Phi}_{L,P}$；其参数采用定义 6.4 中介绍的极值–Sobol 策略 (e) 构造（右图）。两种情况下，边界 ∂Q_1 上的狄利克雷数据采样节点均匀分布。绝对误差同时绘制在 $Q_1 \cap \{\mathbf{x} = (x, y, z) : xyz = 0\}$（上图）和边界$\partial Q_1$ 上（下图）。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

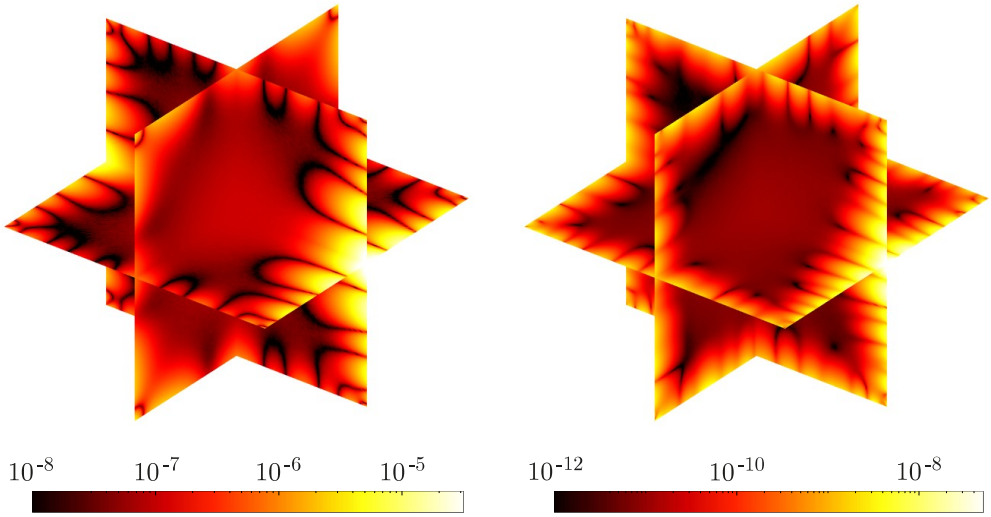


图 7.22：图 7.21 的说明在此同样适用，唯一的区别是，现在边界上的狄利克雷数据采样节点 ∂Q_1 在角点附近进行了局部加密。

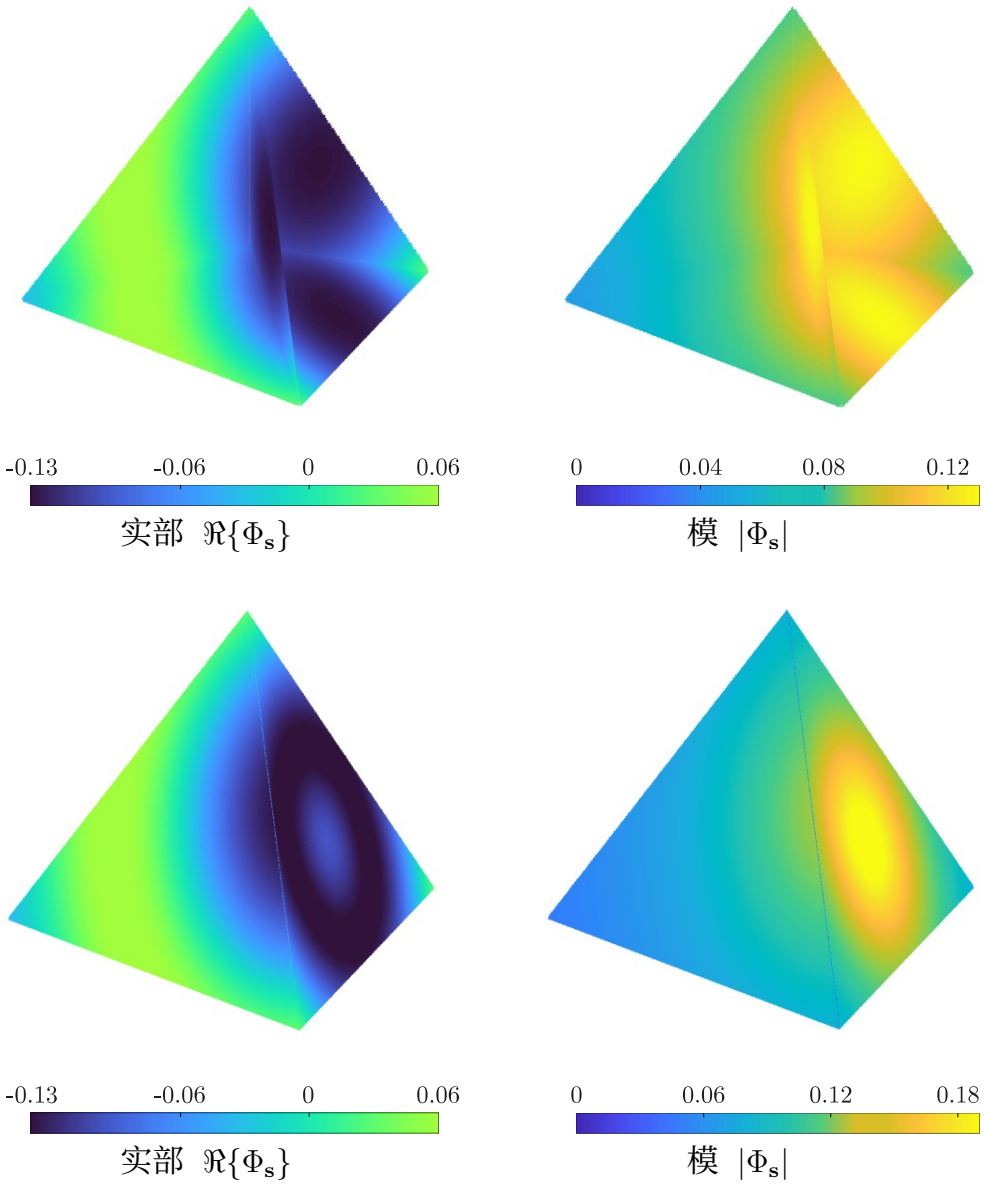


图 7.23：基本解 $\Phi_{\mathbf{s}}$ 定义于（7.2），波数为 $\kappa = 5$ 且$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus T_1$ 使得距离$(\mathbf{s}\ \partial T_1)$ $= \lambda/3$。基本解的实部 $\Re\{\Phi_{\mathbf{s}}\}$ 和模$|\Phi_{\mathbf{s}}|$ 绘制在六个三角形上，其中每个三角形的一个顶点位于 T_1 的重心，另外两个顶点位于 T_1 （上图）以及边界上 ∂T_1 （下图）。

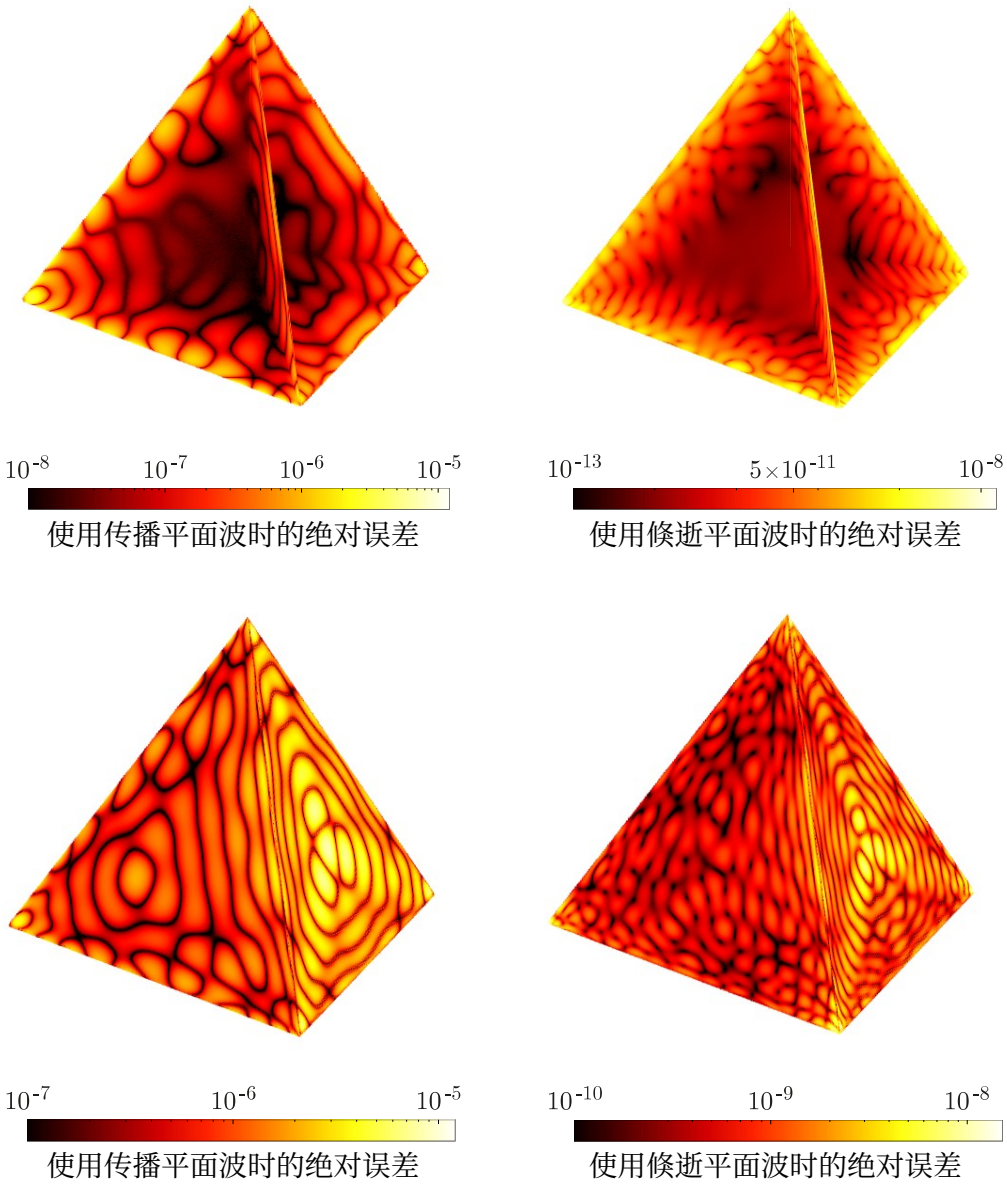


图 7.24：基本解的近似的绝对误差 $\Phi_{\mathbf{s}}$定义于（7.2）中，其中 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus T_1$ 使得 $\mathrm{dist}(\mathbf{s}\ \partial T_1) = \lambda/3$。误差通过以下方式给出：$P = 2704$ 平面波，可以是传播波 $\mathbf{\Phi}_P$，来自（3.3）（左图），也可以是倏逝波$\mathbf{\Phi}_{L,\ P}$ 来自（6.6），其参数采用定义6.4 中介绍的极值–Sobol 策略（e）构造（右图）。两种情况下，边界上的狄利克雷数据采样节点均匀分布。在六个三角形上（每个三角形的一个顶点位于 T_1 的重心，另外两个顶点位于 T_1 的两个顶点）（上图），以及边界上 ∂T_1 （下图），均绘出了绝对误差。波数 $\kappa = 5$ 和正则化参数 $\epsilon = 10^{-14}$。

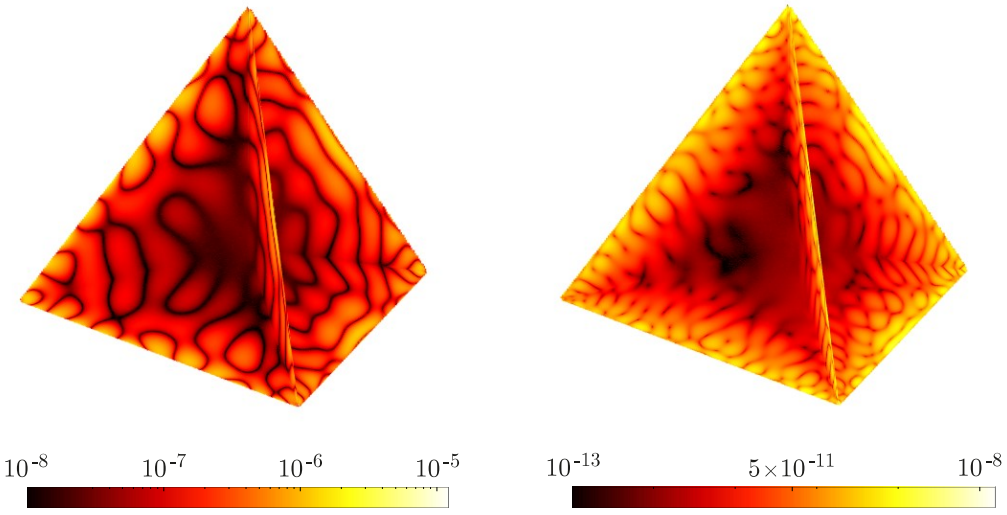


图 7.25：图 7.24 的说明在此同样适用，唯一的区别是，现在边界 ∂T_1 上的狄利克雷数据采样节点在角点附近进行了局部加密。

结论

众所周知，基于传播平面波的特雷夫茨方法会受到数值不稳定性的影响，从而显著降低逼近方案的精度和效率。问题源于逼近空间增大时必然出现的线性系统病态性，因为传播方向相近的传播平面波几乎线性相关。然而，[19, 第 3 节4], 中讨论的误差分析在此推广到了三维情形（见第 2.4 节），结果表明，倏逝平面波能够以系数有界的展开形式提供精确近似，从而克服这一问题。

本文的分析拓展了 [19, 定理 43] 的研究结果，证明传播平面波在三维情形下同样缺乏高阶傅里叶模态成分。因此，在考虑正则性较低的亥姆霍兹解时，其展开系数会随即发散。定理3.4 陈述了这一结果，并通过数值计算加以验证。相反，将雅可比–安格尔恒等式推广到复值方向后（见定理 4.7），便可进行模态分析；分析表明，倏逝平面波能够覆盖整个模态谱。此外，定理 5.9 将 [19, 定理 67]中的关键结果推广至三维情形，指出单位球内的任意亥姆霍兹解都可以唯一表示为倏逝平面波的连续叠加。所得数值方案表明，倏逝平面波近似集具有精确且稳定的表现，展现出其在特雷夫茨方法中的潜在用途。

总之，本文为基于倏逝平面波的稳定且精确近似格式的持续研究作出了贡献，并在 [19]中所述先前工作的基础上进一步推进。尽管猜想6.2 仍未得到解决，但仍需进一步研究，以严格论证倏逝平面波集的逼近性质。

未来的研究将着眼于扩大研究范围，以涵盖更一般的几何形状，从而能够应用 Trefftz格式，并探索更复杂的边值问题，例如涉及时谐 Maxwell 方程和弹性波方程的问题。我们相信，这将为倏逝平面波近似格式在更广泛情境中的潜在应用提供宝贵见解。

参考文献

[1] M. J. Ablowitz 和 A. S. Fokas。《style id='2'>复变变量：导论与应用。第2版。剑桥应用数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2003年，第 xii+647 页。[2] B. Adcock 和 D. Huybrechs。“框架与数值近似”。载于：*SIAM Rev.* 61.3（2019），第443–473页。[3] B. Adcock 和 D. Huybrechs。“框架与数值近似 II：广义采样”。载于：*J. Fourier Anal. Appl.* 26.6（2020），第87号论文，共34页。[4] O. Christensen。《style id='12'>框架与里斯基底导论。第二版。应用与数值谐波分析。Birkh¨auser/Springer，[Cham], 2016, ，第 xxv+704 页。[5] A. Cohen 和 G. Migliorati。“最优加权最小二乘方法”。载于：*SMAI J. Comput. Math.* 3（2017），第181–203页。[6] D. Colton 和 R. Kress。《style id='22'>逆声学与电磁散射理论。第3版。第93卷。纽约：Springer，2013年，第 xiv + 405 页。[7] V. Devanathan。《style id='26'>量子力学中的角动量技术。第108卷。物理学基础理论。Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1999年，第 xii+242 页。[8] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi。《style id='31'>高等超越函数。第I、II卷。部分内容基于 Harry Bateman 遗留的笔记。McGraw-Hill Book Co., Inc.，纽约—多伦多—伦敦，1953年，第 x xvi+302、xvii+396 页。[9] X. M. Feng、P. Wang、W. Yang 和 G. R. Jin。“通过精确对角化高精度求值 Wigner 的 d 矩阵”。载于：*Phys. Rev. E* 92（2015年10月4日），第043307页。[10] J. Hampton 和 A. Doostan。“以相干性为基础的采样与最小二乘多项式混沌回归的收敛性分析”。载于：*Comput. MethodsAppl. Mech. Engrg.* 290（2015），第73–97页。

[11] R. Hiptmair、A. Moiola 和 I. Perugia。“亥姆霍兹方程的特雷夫茨方法综述”。载于：构建桥梁：现代数值偏微分方程方法中的联系与挑战。第114卷。计算机科学与工程讲义。Springer, [Cham], 2016,，第237–278页。[12] D. Huybrechs 和 A.-E. Olteanu。“用于亥姆霍兹问题波基方法的过采样配置法”。载于：*Wave Motion* 87（2019），第92–105页。[13] J. Marzo 和 J. Ortega-Cerd`a。“球面上费克特点的均匀分布”。载于：*Constr. Approx.* 32.3（2010），第513–521页。[14] J. M. Melenk。“关于广义有限元方法”。马里兰大学帕克分校。博士论文。1995年，第227页。[15] G. Migliorati 和 F. Nobile。“任意维数下稳定的高阶随机求积公式”。载于：*J. Approx. Theory* 275（2022），第105706号论文，共30页。[16] A. Moiola、R. Hiptmair 和 I. Perugia。“齐次亥姆霍兹解的平面波近似”。载于：*Z. Angew. Math. Phys.* 62.5（2011），第809–837页。[17] J.-C.N´ed´elec。《style id='23'>声学与电磁方程。第144卷。应用数学科学。调和问题的积分表示。Springer-Verlag，纽约，2001年，第 x +316 页。[18] *NIST*数学函数数字图书馆。2023年3月15日发布的1.1.9版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。URL：http://dlmf.nist.gov/。最后访问日期：2023年4月27日。[19] E. Parolin、D. Huybrechs 和 A. Moiola。《style id='32'>利用倏逝平面波稳定逼近亥姆霍兹解。第2版。2022年。[20] V. I. Paulsen 和 M. Raghupathi。《style id='35'>再生核希尔伯特空间理论导论。第152卷。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，剑桥，2016年，第 x+182 页。[21] J. D. Pendleton。“欧拉角几何、螺旋度基向量与维格纳D函数加法定理”。载于：*American Journal of Physics* 71.12（2003），第1280–1291页。[22] M. Reimer。《style id='42'>多元函数构造理论。Bibliographisches Institut，曼海姆，1990年，第280页。[23] I. H. Sloan 和 R. S. Womersley。“极值点系与球面上的数值积分”。载于：《计算数学进展》21.1-2（2004），第107–125页。

[24] A. D. Sokal. “如何推广（以及不应如何推广）Chu–Vandermonde 恒等式”。载于：《美国数学月刊》127.1（2019），第 54–62 页。[25] D. A. Varshalovich、A. N. Moskalev 和 V. K. Khersonskiı. 角动量量子理论。不可约张量、球谐函数、矢量耦合系数、 $3nj$ 符号，俄文译本。世界科学出版公司，新泽西州蒂内克，1988 年，第 xii+514 页。[26] R. S. Womersley. 球面上的插值与求积。 URL： https://web.maths.unsw.edu.au/~rsw/Sphere/。最后访问日期：2023年4月27日。[27] R. S. Womersley 和 I. H. Sloan. “球面上的多项式插值能有多好？”载于：《计算数学进展》14.3（2001），第 195–226 页。