arXiv:2305.02183v1 [math.MG] 3 May 2023

仿射空间上度量的 Cayley-Menger扩展。

Ana Casimiro[1] C´esar Rodrigo[2]

[1]数学系，NOVA SST，里斯本NOVA大学，卡帕里卡校区，2829-516，葡萄牙卡帕里卡 数学与应用中心（NOVA Math）amc.fct.unl.pt

[2]塞图巴尔理工学院，塞图巴尔高等技术学院，IPS校区，埃斯特凡尼利亚，2914-761，葡萄牙塞图巴尔 数学、基础应用与运筹研究中心
cesar.fernandez@estsetubal.ips.pt

2023年5月4日

摘要

对于任意配备任意惯性指数度量结构的仿射空间 A，我们考虑作用于 A 的二次函数空间上的仿射泛函空间。在这个泛函空间上，我们以函子方式刻画一个由度量结构导出的对称双线性形式。我们探究这一新度量空间中相关对象的几何关系。它们的性质编码了文献中关于欧氏平方距离矩阵、凯莱-门格尔矩阵及行列式、平方距离坐标系，以及 Lie 和 M¨obius 球面几何的所有已知特征。我们将这一形式命名为凯莱-门格尔积；它构成了统一这些领域成果的几何基础，并将其推广到度量仿射空间或丛。

关键词：仿射几何、线性包、二次包、度量、距离坐标、欧氏距离矩阵、凯莱-门格尔行列式。

MSC2020：51N10，15A63，15B99，51M04，51M09。

1

1 引言

仿射度量几何是许多科学学科基础训练中的一个经典领域。因此，在探索其基本对象时，人们很难期待有什么令人惊讶的发现。欧几里得空间中一对

[1]资助：本研究由国家基金资助，经由 FCT - 科学与技术基金会（Funda.c˜ao Para a Ciˆencia e a Tecnologia, I.P.）拨款，资助项目包括 UIDB/00297/2020、UIDP/00297/2020（数学与应用中心）以及 UIDB/04561/2020、UIDP/04561/2020（CMAF-CIO）。

点之间的平方距离（以及其推广，即与超球面偶或超平面偶相关联的幂）似乎格外倾向于满足某些代数关系。Cayley [1], 注意到了这一现象，并指出这要求某个行列式为零；后来，Menger [2]的研究表明，这也是点集嵌入 n维空间的充分条件。Lachlan [3] 沿用了相同的思路，将点之间的平方距离替换为对应于球面偶的所谓幂（由 Darboux [4]引入），并推导出这类数值的新代数关系。Cox [5] 认识到，只要在平面圆的空间上赋予适当的线性结构，这种幂的概念便是一个双线性积。幂坐标也被用于研究圆和球面 [6]。

以一种多少有些无关的方式，M¨obius 和 Lie [7, 8] 引入了额外的几何结构来研究球面。球面可以视为某个射影空间上的点；借助立体投影，这些射影空间为欧几里得空间增添了额外的维度。在这些射影空间中，某些二次曲面发挥着重要作用。

由于其与技术应用密切相关，距离几何这一分支在本世纪重新受到关注。人们正基于欧几里得情形[9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]下对平方距离矩阵和凯莱-门格尔矩阵的考察，开发并推导出各种各样的应用。许多概念和结果都是借助特定的、非函子性的对象引入并证明的，且缺乏恰当的几何框架。尚不清楚这些内容在多大程度上只是专为欧几里得几何构造出来的产物，以及在考察此类空间之间的等距变换时，这些产物会如何随之变化。

本文提出了一个颇为出人意料的事实：这个事实似乎一直未被察觉，至少从未被正式阐述过。所有这些对象都与一种非凡的内蕴双线性形式直接相关；该形式可通过函子方式从任意仿射度量空间构造而来（无论其惯性指数如何，甚至对于退化度量也适用），我们称之为凯莱-门格尔双线性形式。其函子性质使我们能够探究它在仿射度量空间范畴中相对于态射（或自同构）的行为。它还提供了所需的概念，使若干线性几何中的已知结果得以推广到流形上的仿射度量丛，从而为研究（伪）黎曼流形带来一种新工具。

本文从第 2 节开始，仅以重心算子（定义 2.1）来阐述仿射几何。仿射空间 A 及其方向向量空间 $\overrightarrow{A}$，都以函子方式浸入线性 $\widehat{\ }$ 包 A 中（定义 2.5 ）。仿射函数可表示为线性包上的线性函数，而它们的线性主分量则是这些线性函数在该线性包中方向向量子空间上的限制。

第 3 节随后根据二次映射和二次函数相对于重心算子的行为对其进行介绍（定义 3.1）。每个二次函数都有一个与之对应的梯度余向量场（定义 3.5）和一个海森主分量（定义 3.6）。仿射庞加莱引理（命题 3.7）利用梯度算子，将仿射空间上的仿射余向量场与二次函数联系起来。定理 3.8 确定了一个交换图，其中的正合列（12）联系了线性包上的对称双线性

形式与仿射空间上的二次函数。二次函数的海森主分量随后表现为将相应的线性包双线性形式限制到方向向量子空间上。

子空间的过滤：常函数、仿射函数、二次函数，引出了对商空间的考察：仿射函数模常函数（定义 2.4）构成方向余向量的线性空间（或仿射空间上的常余向量场）；二次函数模常函数构成闭仿射余向量场的线性空间（命题 3.7）；最后，二次函数模仿射函数构成度量的线性空间（定义 4.1），我们将在第 4 节研究这一空间。每个二次函数都有一个度量等价的约化形式，可通过以给定点为中心的齐次化，或通过在给定参照系处的平凡化得到（命题 4.1）。

确定以不同点 $P \in \mathbb{A}$ 为中心的度量的齐次代表元，可得到仿射空间 $\mathbb{A}$ 到与度量m相关联的二次函数仿射空间中的一个二次浸入（定义 4.4）。通过在给定参照系处取值为零的向量包上的二次函数来确定度量，可得命题 4.7 中的矩阵表示（19）；该表示有助于深入理解凯莱-门格尔矩阵和行列式与度量作为向量包上双线性形式的限制这一解释之间的关系（注 4.8）。

在完成了用线性包上的双线性形式描述二次函数和度量之后，第 5 节将阐述本文的主要结果：在内在意义上，为任意给定的度量引入与之关联的二次包上的凯莱-门格尔双线性形式。首先，引入二次包 $\widehat{\mathbb{A}^2}$，并给出从仿射空间 $\mathbb{A}$ 到该空间的自然二次浸入（定义 5.1）。利用这一浸入，$\mathbb{A}$ 上的任意二次函数都可以表示为二次包上的线性函数。本节将探讨这一自然浸入与定义 4.4 中给出的凯莱-门格尔映射之间的关系。

固定一个非零度量 $m \in \mathrm{Met}\,\mathbb{A}$，就确定了二次包的一个商空间，即仿射泛函空间 $\mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\mathbb{A}$；这些泛函定义在与 m 相关的二次函数空间 $\mathrm{Quad}_m\mathbb{A}$ 上。其对偶空间恰好是$\widehat{\text{仿射空间}}$ $\mathrm{Quad}_m\,\mathbb{A}$ 的线性包 $\mathrm{Quad}_m\mathbb{A}$，它可以看作二次函数的线性子空间，其中海森主分量是 m 的倍数（参见引理 5.4 及其后续评注）。

命题 5.7 表明，任意仿射参照系都会在 $\mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\mathbb{A}$ 上确定一个自然的基，并确定与之对偶的基。对于非退化度量的情形，命题 5.8 会在$\widehat{\mathrm{Quad}_m\mathbb{A}}$ 上确定另一个基（它与前一个基不对偶）。后者是 $\mathbb{A}$ 上一个超定的二次坐标系统，称为凯莱-门格尔坐标（定义 5.4）。基变换矩阵恰好是凯莱-门格尔矩阵。然而，这个矩阵还具有一个更为根本的性质。具体而言，由这两个基确定的双线性形式$\widehat{\mathrm{CM}_m}\colon \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\,\mathbb{A} \to \mathrm{Quad}_m\,\mathbb{A}$ 与参照系的选择无关，并且可以用内蕴的方式描述，具有函子性刻画。本文的这一主要结果陈述于定理 5.11。

对于每个度量 $m \in \mathrm{Met}\mathbb{A}$，都存在一个与之相对应的双线性形式 CM_m（与 m 相关的凯莱-门格尔积），其最基本的性质在命题 5.13 中有所描述；特别是，它与

Cayley-Menger 矩阵、凯莱-门格尔超定二次坐标系相关，并使得仅通过线性表达式即可处理和计算 m-二次函数：如引理 5.15 所示，尽管 $\overbrace{\quad}$A 通过二次映射浸入 Quad$_m$A 及其对偶空间中，取商 R 的线性投影算子会将这些二次映射转换为线性映射，从而提供一种简单的（线性）机制，根据二次坐标的超定系统确定点的仿射坐标。

例如，一个点的重心坐标可以由其凯莱-门格尔坐标（二次！）函数值的仿射组合恢复。其惯性指数与度量的惯性指数直接相关（推论 5.20），并且对于任意非退化度量 m，CM$_m$ 都是非退化的（推论 5.21）。在 m-二次函数空间上定义这一双线性形式，也与将超平面和超球面建模为射影空间中点的理论密切相关（命题 5.17）；这些理论沿袭了 Lie、M¨obius 或 Pedoe [8, 7, 16] 的思想。然而，这些模型专注于欧几里得情形，并包含一些特设元素，例如原点的选择或立体投影。我们可以利用二次包上的内蕴凯莱-门格尔积来探讨这一问题，相关结果将在一篇配套论文中给出。

在定理 5.22 和推论 5.23 中，我们还说明了这种双线性形式与将点浸入为二次函数空间上的求值算子（见命题 5.1），以及与凯莱-门格尔浸入（定义 4.4）之间的关系。

在非退化情形下，逆凯莱-门格尔双线性积允许在仿射空间的 m-二次函数的线性包上定义（逆）凯莱-门格尔双线性积。推论 5.23 表明，位于凯莱－门格二次曲面上的元素，恰好是线性包 Quad$_m$A 中相对于该逆凯莱-门格尔双线性积为各向同性的点。最后，我们给出定理 5.27，说明仿射映射相对于如下函子时的行为：该函子将任意度量仿射空间 (A m) 关联到其对应的、带有凯莱-门格尔双线性形式的向量空间 (Aff Quad$_m$ A, CM$_m$)。

第 5 节的主要结果总结于图 1，并在本文末尾的注释 5.29 中作了解释；其计算应用则在第 6 节中作了简要展示。建议读者查阅该处，以了解大多数相关定义的具体表述，以及它们之间若干关系的可视化。

2 仿射空间和线性包

我们假设读者具备线性几何与仿射几何以及向量空间对偶的基础知识。下文中，与向量空间 $\vec{V}$ 相关联的线性形式（余向量）的（对偶）空间记作 $\vec{V}^*$，向量与余向量之间的对偶配对记作 $\langle , \rangle$, f^*: $\vec{V}^* \to \vec{E}^*$ 表示与映射 f: $\vec{E} \to \vec{V}$ 相关联的对偶映射，而在子空间 $\vec{F} \subseteq \vec{V}$ 上取值为零的（相 incident）余向量子空间记作 $\vec{F}^\circ \subseteq \vec{V}^*$。为简单起见，我们假设所讨论的所有空间均为实有限维空间。

为方便起见，我们对仿射几何的讨论主要采用重心

描述仿射空间的方法，而不采用通常通过固定底层方向向量空间来定义仿射结构的方法。要在某个集合 A 上确定一个（实）仿射结构，唯一必要的要素是一种乘积（或伸缩）概念，我们称之为重心算子。重心算子满足一组公理，这些公理见 [17]，中的定理 1.1 或 [18] 中的定理 2.1。更多细节请参阅这些论文；我们假定读者已了解这些公理的推论，以及该领域的所有一般概念和主要结果：

定义 2.1。我们将带有重心算子的集合 A 称为实仿射空间：

$$\mathrm{bary}\colon (\alpha, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A} \mapsto \mathrm{bary}_\alpha(P, Q) \in \mathrm{A}$$

满足以下公理：

Af1）乘法结构保持性：

$$\mathrm{bary}_1(P, Q) = Q, \quad \mathrm{bary}_\alpha(P, P) = P,$$

$$\mathrm{bary}_\alpha(P, \mathrm{bary}_\beta(P, Q)) = \mathrm{bary}_{\alpha\beta}(P, Q)$$

Af2）对于每个 bary$^\beta$，每个 bary$_\alpha(P, \cdot)$ 都是一个态射：

$$\mathrm{bary}_\alpha(P, \mathrm{bary}_\beta(Q, R)) = \mathrm{bary}_\beta(\mathrm{bary}_\alpha(P, Q), \mathrm{bary}_\alpha(P, R))$$

Af3）重心条件：

$$\mathrm{bary}_\alpha(P, Q) = \mathrm{bary}_{1-\alpha}(Q, P)$$

Af4）平移映射 bary$_\alpha(P, \cdot)$ $\circ$ bary$^{1/\alpha}(Q, \cdot)$ 的交换性：

$$\mathrm{bary}_\alpha(P, \cdot) \circ \mathrm{bary}_{1/\alpha}(Q, \cdot) \circ \mathrm{bary}_\beta(R, \cdot) \circ \mathrm{bary}_{1/\beta}(S, \cdot) = \\ \mathrm{bary}_\beta(R, \cdot) \circ \mathrm{bary}_{1/\beta}(S, \cdot) \circ \mathrm{bary}_\alpha(P, \cdot) \circ \mathrm{bary}_{1/\alpha}(Q, \cdot)$$

元素 bary $_\alpha\ P\ Q$ $P + (\ ,\ )$ 通常用 $\alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$ $1-\alpha\ \cdot P + \alpha \cdot Q$ 经典记法表示为 或 ( )（也称为加权平均）。

定义 2.2. 仿射空间 A 和 B 之间的映射 f 是仿射的，如果

$$\mathrm{bary}_\alpha(f(P), f(Q)) = f(\mathrm{bary}_\alpha(P, Q)), \quad \forall(\alpha, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathrm{A} \times \mathrm{A}.$$

仿射空间 A 和 B 之间的仿射映射集合是 Map(A,B) 的一个仿射子空间，记作 Aff(A,B)。

我们将满足 $\sum w_i = 1$ 的任意列矩阵 $w = [w_0 \ldots w_n]^t \in M_{(n+1)1}$(R) 称为 n 维权重。 n 维权重的集合构成一个仿射子空间 W$_n$ $\subset$ $M_{(n+1)1}$(R)，并将作为（n 维）仿射空间的基本模型。

任意有序点序列 $k+1$ P $= [P_0 \ldots P_k] \in M_{1(k+1)}$(A) 都确定一个仿射映射（点的仿射组合） $w \in$ W$_k$ $\mapsto$ $w_0 P_0 + w_1 P_1 + \ldots + w_k P_k \in$ A。

定义 2.3。我们将包含点集 $P_0, \ldots, P_k \in \mathrm{A}$ 的最小仿射子空间称为 A 的仿射张成，并记作 $\langle P_0, \ldots, P_k \rangle$。其中的点都是由这些点和权重 $w = [w_0 \ldots w_k]^t \in \mathrm{W}_k$构成的仿射组合。

当仿射空间由有限个点张成时，我们称它为有限维。任何一个 $\mathcal{R} = (R_0, R_1, \ldots, R_n)$ 由点构成的最小有序点列，若其仿射张成为 A，就称为该仿射空间的仿射参照系。

下文中，我们始终假设所讨论的仿射空间都是有限维的。

仿射映射 $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ 的特征是 $f(\alpha \cdot P + \beta \cdot Q) = \alpha \cdot f(P) + \beta \cdot f(Q)$，其中 $P, Q \in \mathrm{A}$ 且 $\alpha + \beta = 1$。在这种情况下，该性质可推广到任意仿射组合：

$$f(w_0 P_0 + \ldots + w_k P_k) = w_0 f(P_0) + \ldots + w_k f(P_k)$$

对于任意 k维权重 $w \in \mathrm{W}_k$ 以及点 $P_0, \ldots, P_k \in \mathrm{A}$。用矩阵形式表示，当 $P = w_0 P_0 + \ldots + w_k P_k$ 时，我们可以写成：

$$f(P) = [Q_0\, Q_1\, \ldots\, Q_k] \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}, \qquad Q_i = f(P_i) \in \mathrm{B}, \quad w \in \mathbb{W}_k \subset M_{(k+1)1}(\mathbb{R})$$

其中乘积按重心意义作显然的定义，适用于一个含有 $k+1$ 个 B 中元素的行向量与一个 k维权重。

考虑特例 $\mathrm{B} = \mathrm{R}$，可得到仿射函数空间 $\mathrm{Aff\,A} \subset \mathrm{Map(A, R)}$，它是 A 上实值函数空间 Map(A, R) 的一个向量子空间。常函数是仿射函数的一种特殊情形。特别地，常值单位函数 $u \in \mathrm{Aff\,A}$ 是仿射的。我们有一个自然的线性浸入 $\alpha \in \mathrm{R} \mapsto \alpha u \in \mathrm{Aff\,A}$。

定义 2.4。商空间 Aff A/R 称为与 A 相关联的余向量空间，记作 $\overrightarrow{A}^*$。

任一仿射函数 f 确定一个 $\mathrm{d}f = f + \mathrm{R} \in \mathrm{Aff\,A/R} = \overrightarrow{A}^*$，即其梯度余向量，也称为与 f 相关联的（线性）主分量。

包含映射 $\alpha \in \mathrm{R} \mapsto \alpha u \in \mathrm{Aff\,A}$ 和投影算子 $f \in \mathrm{Aff\,A} \mapsto \mathrm{d}f \in \overrightarrow{A}^*$ 确定了一个线性映射的正合列：

$$0 \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{Aff\,A} \to \overrightarrow{A}^* \to 0. \tag{1}$$

任意仿射空间到线性包中的以下浸入归功于 Tisseron [19]。感兴趣的读者可以参阅 [20]，了解线性包（也称为向量包）的若干方面。为简洁起见，下面不加证明地陈述其主要特征：

定义 2.5. 仿射函数空间上的线性算子所构成的向量空间 $\mathrm{A} = (\mathrm{Aff\,A})^*$ 称为与 A 相关联的线性包。每个点 $P \in \mathrm{A}$ 都在 A 上定义一个元素 z_P，其确定方式为 $\langle z_P, f \rangle = f(P)$，其中 $f \in \mathrm{Aff\,A}$ 为任意仿射函数。元素 z_P 称为仿射函数在 P 处的求值算子。

$\widehat{\ }$仿射浸入 A $\subset$ A 到一个向量空间中，将 Aff A 识别为 $\widehat{\ }$Lin(A, R)。从范畴论的角度来看，任何其他此类仿射浸入都可以视为该仿射空间的线性包。这正是向量空间 $\widehat{\ }$的情形，它在 Berger 的《几何学》 X 中被称为与仿射空间 X 相关联的“泛空间” [21] （第 3.1 节和第 3.2 节）。我们更倾向于采用 Tisseron 的表述，因为它具有内在性。

映射 $P \in \widehat{\mathrm{A}}$ 是一个仿射浸入，它确定了将 A 识别为其线性包的仿射子空间：

$$\mathrm{A} \simeq \{z \in \widehat{\mathrm{A}} : \langle z, u\rangle = 1\} \subset \widehat{\mathrm{A}}. \tag{2}$$

第二个表述将任意仿射空间上的重心标架与其线性包上的线性标架联系起来：

命题 2.1. 有序点列 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 是 A 上的仿射$\widehat{\ }$参照系，当且仅当 $z_{R_0}, \ldots, z_{R_n}$ 是向量空间 A 的一组基。其对偶基是一列函数 $w_0, \ldots, w_n \in$ Aff A，称为与该参照系关联的重心坐标函数。

固定一个参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 后，我们可以将任意向量 $z \in \widehat{\ }$A 表示为线性组合 $x_0 z_{R_0} + x_1 z_{R_1} + \ldots + x_n z_{R_n}$。列向量$x = [x_0 \ldots x_n]^t \in M_{(n+1)1}$(R) 称为与 $z \in$ A 关联的线性坐标向量（或简称线性$\widehat{\ }$坐标），其所依据的是基（线性标架）$z_{R_0}, \ldots, z_{R_n}$，也可称为依据仿射参照系 $\mathcal{R}$。坐标$\widehat{\ }$函数 $x_0, \ldots, x_n$ 在 A 上是线性的，并限制为 A $\subset$A 上的仿射函数 w_i。事实上，这些仿射函数 $w_0, \ldots, w_n$ 在向量空间 Aff A 上构成一组基。

重心坐标是 A 上由 $n+1$ 个仿射函数构成的坐标系，并且它们是超定的：已知某个点上 n 个此类函数的值，就能确定其余坐标函数的值。本文将讨论坐标系的不同概念。为使表述准确，现将其含义明确说明如下：

定义 2.6. 我们将仿射空间 A 上的超定坐标系（简称“o.d.system”）定义为任意（不一定是仿射的）单射映射x: A $\to$ R^m。其分量 $x_i \in$ Map(A, R) 称为该坐标系的第 i 个坐标函数。当 x 为双射时，我们就简称其为坐标系。

对于固定的超定坐标系 x: A $\to$ R^m，每个点 $P \in$ A 都由某个元素 $x(P) = [x_1(P) \ \ldots x_m(P)]^t \in M_{m1}$(R) 唯一确定，该元素称为给定超定坐标系下与此点关联的坐标向量。

当我们谈到仿射坐标系或二次坐标系时，指的是映射 x 相应地为仿射映射或二次映射（参见定义 3.1）。当 A 配备了向量空间结构且 x 是线性映射时，我们称它定义了一个线性坐标系。

注 2.2. 每个满足 $w_0 + w_1 + \ldots + w_n = u$ 的基 $w_0, \ldots, w_n \in$ Aff A 都有一个属于 A $\subseteq$A 的对偶基 $z_0, z_1, \ldots, z_n$，事实上：

$$\langle z_i, u\rangle = \langle z_i, w_0 + \ldots + w_n\rangle = \sum_j \langle z_i, w_j\rangle = 1 \Rightarrow z_i \in \mathrm{A} \subseteq \widehat{\mathrm{A}}.$$

当单射 $x = (w_0, .., w_n)$ 的取值属于 n 维权重空间时，它称为重心坐标正交系。其分量是仿射函数，用于确定任意点相对于某个仿射参照系的重心坐标。

任意重心坐标正交系都可以看作 A 上的一组线性$\widehat{}$坐标，或看作 A 上的一组仿射坐标（只有满足 $x_0 + \ldots + x_n = 1$ 的元素才表示 A 上的点）。

定义 2.7. 仿射函数 $f \in$ Aff A 在重心坐标正交系 $w_0, \ldots, w_n \in$ Aff A 中的线性坐标 $(c_0, \ldots, c_n)$，称为相对于对应参照系的该仿射函数的线性系数。它们确定一个行向量 $[c_0 \ldots c_n] \in M_{1(n+1)}$(R)，称为相对于对应仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 的该仿射函数的系数行向量（或简称系数）。

对于任意函数 $f \in$ Aff A 和由系数$c = [c_0 \ldots c_n] \in M_{1(n+1)}$(R) 表示的点 $Q \in$ A，以及一个 n 维权重 $w = [w_0 \ldots w_n]^t$，其值 $f(Q)$ 就是矩阵乘积 $c \cdot w$。

单位函数 $u \in$ Aff A 关于任意仿射参照系的系数由单位行向量 $[1 \ldots 1] = \mathbb{1}_n \in M_{1\times(n+1)}$(R) 表示。

$\widehat{}$利用浸入 A $\subset$ A，点 $Q \in$ A 可由基 $v_{R_0}, \ldots, v_{R_n}$下的坐标向量 $q \in M_{(n+1)1}$(R) 表示，其中 $\mathbb{1}_n \cdot q = 1$，从而确定一个 n 维权重 $q \in$W$_n$，我们称之为相对于参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 的 Q 的重心坐标向量。

余向量空间 $\overrightarrow{A}^*$ 的元素 A/R 可以视为等价类 $c + \mathrm{R}\mathbb{1}_n$，这些等价类由 $(n+1)$-行向量 c 构成，并且是关于加上单位行向量 $\mathbb{1}_n$ 的倍数而言的。也就是说，仿射参照系的一个选取确定了一个线性同构 $\overrightarrow{A}^* \simeq M_{1(n+1)}(R)/\langle \mathbb{1}_n \rangle$。

定义 2.8。余向量空间 $\overrightarrow{A}^* =$ Aff A$/\langle u \rangle$ 上的线性算子称为仿射空间 A 的方向向量。这个线性算子空间（ $\overrightarrow{A}^*$ 的对偶空间）表示为 $\overrightarrow{A}$，称为与 A 相关的方向向量空间。

考虑到 (2) 以及与 (1) 对偶的正合列， $\overrightarrow{A}$ 可以看作 (Aff A)* 的一个线性子空间，即与 $u \in$ AffA 相 incident 的元素所组成的空间。

$$\overrightarrow{A} = \langle u \rangle^\circ = \{z \in \widehat{\mathrm{A}} : \langle z, u \rangle = 0\} \subset \widehat{\mathrm{A}} = (\mathrm{Aff\ A})^*.$$

定义 2.9。记 $\overrightarrow{PQ} = z_Q - z_P \in \widehat{}$A。这个元素与 $u \in$ Aff A 相 incident，因此它属于与 A 相关的方向向量空间 $\overrightarrow{A}$，并称为点对 P、$Q \in$ A 所对应的方向向量。

当 $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{A} \subset \widehat{}$A 在参照系$\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$中具有坐标向量 $x = [x_0 \ldots x_n]^t$ 时，有 $x_0 + \ldots + x_n = 0$。序列 $(x_0, \ldots, x_n)$ 属于子空间 $\langle \mathbb{1}_n \rangle^\circ \subseteq M_{(n+1)1}$(R)。我们称其为空心权重空间。

$$\mathbb{H}_n = \langle \mathbb{1}_n \rangle^\circ = \left\{ [x_0 \ldots x_n]^t \in M_{(n+1)1}(\mathbb{R}) : \sum x_i = 0 \right\}. \tag{3}$$

去掉与 $\vec{x}$关联的坐标向量的第一个坐标后，我们得到 $(x_1, \ldots, x_n)$，即 $\vec{x}$相对于基 $\overrightarrow{R_0R_1}, \ldots, \overrightarrow{R_0R_n}$ $\vec{A}$ 在 上的线性坐标。

回顾一下，仿射映射的复合仍然是仿射的。任意仿射映射 $f \in$ Aff(A, B) 都通过复合确定一个线性映射 Aff B $\to \widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Aff A，以及相应的对偶线性映射 f: A $\to$ B，其特征是满足条件 $f(z_P) = z_{f(P)}$，对仿射子空间 A $\subset$A.$\widehat{\ }$ 上的每个元素 P 都成立。考虑单位函数的行为 $u_B \circ f = u_A$，我们得出结论： f 也将向量子空间 $\vec{A} \subset \widehat{\ }$A 中的元素映射为 $\vec{B} \subset \widehat{\ }$B 中的元素。将 $\widehat{f}$ 限制到 $\vec{A}$，可表示为 df: $\vec{A} \to \vec{B}$，称为与仿射映射 f 相关联的（线性）主分量。对于特殊情形 B $=$R，这一概念与先前定义的、与 A 上函数相关联的梯度余向量 d $f \in \vec{A}^*$一致。注意:

$$\mathrm{d}f(\overrightarrow{PQ}) = \widehat{f}(\overrightarrow{PQ}) = \widehat{f}(z_Q - z_P) = \widehat{f}(z_Q) - \widehat{f}(z_P) = z_{f(Q)} - z_{f(P)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}.$$

两个仿射空间 A、B 之间的仿射映射 f 被视为相应线性包 A、B 之间的线性映射$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ f，满足 f (A) $\subseteq$B $\subset \widehat{\ }$B。使用 A 上相对于参照系$\mathcal{R} =$($R_0, \ldots, R_n$)的重心坐标正交系统，以及 B 上相对于另一参照系 $\mathcal{S} =$($S_0, \ldots, S_m$)的重心坐标正交系统，仿射映射的仿射空间 f: A $\to$ B 可识别为矩阵的仿射子空间 W$_{m,n}$ $C \in M_{(m+1)(n+1)}$(R)，满足 $\mathbb{1}_m \cdot C = \mathbb{1}_n$ （称为权重矩阵）。若 $P \in$ A 的重心坐标向量为 $p \in$ W$_n$ ，则$\sim f$(P) $\in$B 的重心坐标向量为 $C \cdot p \in$W$_m$。与 f相关联的线性映射 f $\widehat{\ }$，在 A 的线性基 $z_{R_0}, \ldots, z_{R_n}$和 $\widehat{\ }$B 的线性基 $z_{S_0}, \ldots, z_{S_m}$中，用与 C的矩阵乘积表示。诱导于 $\vec{A}$上的线性映射 $\vec{f}$，只是将该矩阵乘积限制到空心权重子空间 H$_n$ (3) 上。常值仿射映射由矩阵 $C = c \cdot \mathbb{1}_n$表示，其中 $c \in$ W$_m$可任意选取。仿射映射的复合由矩阵乘积表示。

注 2.3。任意仿射子空间 F $\subseteq$ A 的包含映射诱导出一个投影算子$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$Aff A $\to$ Aff F，使得 u_{A} 映射到 u_{F}，以及一个浸入 F $\subseteq$ A，使得 $\vec{F} = \langle u_{\mathrm{F}} \rangle^\circ$ 是 $\vec{A} = \langle u_{\mathrm{A}} \rangle^\circ$ 的子空间。仿射子空间 F $\subseteq$ A 的方向向量空间是一个线性子空间 $\vec{F} \subseteq \vec{A}$。

具有特定方向子空间 $\vec{F} \subseteq \vec{A}$ 的这组仿射子空间，按照显然的重心定义，同样构成一个仿射空间:

$$(1-\alpha)(P + \vec{F}) + \alpha(Q + \vec{F}) = (1-\alpha)P + \alpha Q + \vec{F},$$

并称为商仿射空间 A$/\vec{F}$。其方向向量空间是商向量空间 $\vec{A}/\vec{F}$。

3 仿射空间上的二次函数

二次映射的一个显著特征是，它在一条直线上的所有取值都可以由该直线上两个点及其中点处的取值插值得到。另一方面，

在任意仿射空间上，二次性的条件都可以表述为在每条直线上都是二次的，因此有如下定义：

定义 3.1. 仿射空间之间的映射 δ: A $\to$ B 称为二次映射，如果对于任意点对 P, $Q \in$ A 以及一维权重 $[\alpha\,\beta]^t \in \mathsf{W}_1$，都有：

$$\delta(\alpha P + \beta Q) = \alpha(\alpha-\beta)\cdot\delta(P) + \beta(\beta-\alpha)\cdot\delta(Q) + 4\alpha\beta\cdot\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right). \quad (4)$$

这个公式仅在 $\alpha+\beta=1$ 时才有意义，此时 $\alpha(\alpha-\beta)+\beta(\beta-\alpha)+4\alpha\beta = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 = 1$，且由二维权重 $[\alpha^2-\alpha\beta\;\beta^2-\alpha\beta\;4\alpha\beta]^t \in \mathsf{W}_2$ 确定的这 3 个点的仿射组合有意义。

由此定义可以轻易证明以下性质：

- 仿射映射是二次映射。二次映射 δ 是仿射映射，当且仅当 $\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta(P) + \frac{1}{2}\delta(Q)$。
- 仿射映射与二次映射的复合是二次的。
- 二次映射的任意仿射组合都是二次的：仿射空间之间的二次映射构成一个仿射子空间 Quad(A,B) $\subseteq$Map(A, B)。

在有限维情形下，为二次映射给出坐标矩阵表示是很方便的。在存在仿射参照系时，这一表示由重心坐标中的二次齐次多项式得到。我们关于二次映射的无坐标概念导出了如下坐标刻画。本文附录中给出了证明：

定理 3.1。考虑两个仿射空间 A 和 B。固定 A 的一个仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, R_1, \ldots, R_n)$ 及其中点 $R_{ij} = \frac{R_i+R_j}{2}$。对于给定的 $\binom{n+2}{2}$ 点 $Q_{ij} \in$ B（其中 $Q_{ij} = Q_{ji}$, $0 \le i,j \le n$），存在唯一的二次映射 δ: A $\to$B，使得 $\delta(R_{ij}) = Q_{ij}$。该二次映射可表示为：

$$\delta(P) = \delta(p_0R_0 + \ldots + p_nR_n) = \sum_{i,j} p_ip_j\Delta_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = 2Q_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ii} - \frac{1}{2}Q_{jj} \in \mathrm{B}. \quad (5)$$

注意到 $2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$，并且对于任意 $p \in \mathsf{W}_n$，$\sum p_ip_j = 1$，因此定理中的所有公式都是有效的仿射组合。

换言之，如果我们在 A 上固定一个参照系 $\mathcal{R}$，那么 Quad(A, B) 可以与 B 值对称矩阵 $\Delta \in$Sym$_{n+1}$(B) 的仿射空间等同起来。如果 $\delta \in$ Quad(A, B) 由一个 B 值对称矩阵 Δ 表示，那么 $P \in$A 的像可以用显然的 B 值矩阵记法写为：

$$\delta(P) = p^t \cdot \Delta \cdot p$$

其中 $p \in \mathsf{W}_n$ 是与 P 相关联的重心坐标向量，取参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，且 $\Delta_{ij} = 2\delta\left(\frac{R_i+R_j}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta(R_i) - \frac{1}{2}\delta(R_j) \in$B。

现在我们将重点讨论二次函数（取值于 R 的映射），它们构成 A 上函数空间的一个向量子空间 Quad A $\subseteq$ Map(A, R)。

注记 3.2. 仿射函数是二次函数的一种特殊情形。若 $c \in M_{1(n+1)}$(R) 是某个仿射函数 $f \in$ Aff A 相对于某个参照系 $\mathcal{R}$ （见定义 2.7）的系数行向量，则定理 3.1 给出另一种表示 $\delta(Q) = q^t \cdot \Delta \cdot q$，其中对称矩阵为 $\Delta = \frac{1}{2}($ $\mathbb{1}^t \cdot c + c^t \cdot \mathbb{1})$（这里 q 表示 Q相对于给定参照系的重心坐标）。

定义 3.2. 如果对于任意一对不同的点 $P \neq Q \in$ A 以及任意严格正权重 $w = [\alpha\, \beta] \in$ W_1（因此有 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$），都满足严格不等式，则称二次函数 $\delta \in$ Quad A 是凸的:

$$\delta(\alpha \cdot P + \beta \cdot Q) < \alpha \cdot \delta(P) + \beta \cdot \delta(Q).$$

对给定的二次函数加上一个仿射函数后，凸性得以保持。

备注 3.3. 在任意向量空间 $\overrightarrow{V}$上，都可以考虑双线性形式的空间 Lin($\overrightarrow{V}$, Lin($\overrightarrow{V}$, R)) $=$Lin($\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V}^*$)。对于每个双线性形式 g，都存在一个由 $\langle \overrightarrow{x}, g^*(\overrightarrow{y}) \rangle = \langle \overrightarrow{y}, g(\overrightarrow{x}) \rangle$ 定义的伴随双线性形式 g^*。自伴双线性形式（也称为对称双线性形式）构成一个子空间 $S^2\overrightarrow{V}^*$，其任意元素都可以视为 $\overrightarrow{V}$上的对称标量积，并由此确定一个二次函数 $\delta(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{x}, g(\overrightarrow{x}) \rangle$；该函数在零向量处为零，并且是偶函数（$\delta(\overrightarrow{x}) = \delta(-\overrightarrow{x})$）。

通过在 $\overrightarrow{V}$上选取一组基 $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$，可以得到 $\overrightarrow{V}$上对称双线性形式的向量空间 $S^2\overrightarrow{V}^*$与对称 $n \times n$ 矩阵的向量空间之间的同构。每个对称矩阵 G 都确定一个对称双线性形式和一个二次函数，其在线性坐标下的表达式为:

$$\langle \overrightarrow{x}, g(\overrightarrow{y}) \rangle = x^t \cdot G \cdot y, \qquad \delta(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2} x^t \cdot G \cdot x$$

其中， $x, y \in M_{n1}$(R)是给定基中与向量 $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$对应的坐标向量；反过来，每个对称双线性形式 g 都确定数值 $G_{ij} = g(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j})$，它们是该基下与此双线性形式相关联的所谓格拉姆矩阵的分量。

若对任意非零列向量 $x \neq 0$都有 $x^t \cdot G \cdot x > 0$，则称对称矩阵 G 为正定矩阵；这等价于说，与之关联的二次函数 δ 是凸函数。

定义 3.3. 设 A 是仿射空间， $P \in$ A 是 A 上的一点，且 inv_P: $Q \in$A $\mapsto 2P - Q \in$ A 是以该点 P为中心的反演。满足 $\delta \circ \mathrm{inv}_P = \delta$ 的二次函数δ 称为关于中心 P的偶函数。我们记 Quad^h_P A $\subseteq$ Quad A，并称关于 P 的齐次二次函数子空间为所有在 P 处取值为零且关于该点为偶函数的二次函数构成的集合。

定义 3.4. 对于任意二次函数 $\delta \in$ Quad A，我们将 δ 相对于 P 的齐次化称为由下式定义的元素 $\delta^h_P \in$Quad^h_P A:

$$\delta^h_P(Q) = \frac{1}{2}\left(\delta(Q) + \delta(\mathrm{inv}_P\, Q)\right) - \delta(P).$$

从这个定义可以清楚地看出，齐次化是从向量空间 Quad A 到 Quad^h_P A 的线性收缩。利用二次性条件 (4)：

$$\delta(\mathrm{inv}_P\, Q) = \delta(2P - Q) = 6\delta(P) + 3\delta(Q) - 8\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right)$$

因此：

$$\delta^h_P(Q) = 2\delta(P) + 2\delta(Q) - 4\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right)$$

注记 3.4. 在仿射空间 A 上固定一个仿射参照系 $\mathcal{R}$。若 δ: A $\to$ R 根据定理 3.1 确定为 $\delta(Q) = q^t \cdot \Delta \cdot q$，其中 Δ 是某个对称矩阵（ $q \in \mathsf{W}_n$ 是相对于某个仿射参照系与 Q 关联的重心坐标向量），则对于任意具有重心坐标向量 $p \in \mathsf{W}_n$ 的点 $P \in$A，二次函数 δ^h_P 在同一参照系下由下式确定：

$$\delta^h_P(Q) = 2p^t\Delta p + 2q^t\Delta q - 4\left(\frac{p+q}{2}\right)^t \Delta \left(\frac{p+q}{2}\right) = (q-p)^t\Delta(q-p). \quad (6)$$

这也可以写成：

$$\delta^h_P(Q) = q^t(\mathrm{Id} - p\cdot\mathbb{1})^t \cdot \Delta \cdot (\mathrm{Id} - p\cdot\mathbb{1})q.$$

因此，二次函数 δ^h_P 在该参照系下表示为：

$$\Delta^h_p = (\mathrm{Id} - p\cdot\mathbb{1})^t \cdot \Delta \cdot (\mathrm{Id} - p\cdot\mathbb{1}). \quad (7)$$

因此，函数 $\delta - \delta^h_P$ 是仿射函数，可以写成（见注记 3.2）$_{1\,2}(\mathbb{1}^t \cdot c + c^t \cdot \mathbb{1})$，其系数行向量如下：

$$\delta - \delta^h_P \in \mathrm{Aff\ A}\ \textit{has coefficient row vector}\ c = 2p^t\Delta - p^t\Delta p\mathbb{1} \quad (8)$$

这确定了一个分解：

$$\mathrm{Quad\,A} = \mathrm{Aff\ A} \oplus \mathrm{Quad}^h_P\,\mathrm{A}$$

其中 $\delta \mapsto (\delta - \delta^h_P, \delta^h_P)$ 是自然分裂态射。

当我们考虑 Quad A $=$ Aff A $\oplus \mathrm{Quad}^0_{\mathcal{R}}$A 时，可以得到另一种分解，其中 $\mathrm{Quad}^0_{\mathcal{R}}$A 表示在参照系 $\mathcal{R}$ 的所有点处都取零的二次函数空间。对于二次函数 δ，其分量$\delta^0_{\mathcal{R}} \in \mathrm{Quad}^0_{\mathcal{R}}$A 就是 δ 与唯一的仿射函数 f 之差，该仿射函数取值为 $f(R_i) = \delta(R_i)$。这个仿射函数由行向量 $c = \mathsf{diag}\,\Delta$ 表征，其中行系数向量 diag Δ 是 Δ 的对角线。因此，根据注记 3.2，二次函数 $\delta^0_{\mathcal{R}} = \Delta - f$ 表示为：

$$\Delta^0_{\mathcal{R}} = \Delta - \frac{1}{2}\left((\mathrm{diag}\,\Delta)^t\mathbb{1} + \mathbb{1}^t(\mathrm{diag}\,\Delta)\right) \quad (9)$$

定义 3.5. 在任意仿射空间 A 上，考虑一个点 $P \in$ A 和一个二次函数 $\delta \in$ Quad A。仿射函数 $\delta - \delta^h_P \in$ Aff A 确定一个元 $\nabla_P\delta \in$ Aff A/R $= \overrightarrow{A}^*$，称为与二次函数 δ 在点 P 处相关联的梯度余向量。我们将与 δ 相关联的梯度余向量场称为仿射映射：

$$\nabla\delta\colon P \in \mathrm{A} \mapsto \nabla_P\delta \in \overrightarrow{A}^*.$$

注意，仿射函数 $\delta \in \mathsf{Aff}\,\mathrm{A} \subset \mathsf{Quad}\,\mathrm{A}$ 具有由定义 3.5 给出的常值梯度余向量场，并且其（常数）值与定义 2.4 中与仿射函数相关联的梯度余向量的概念一致。

正如我们从坐标表示式 (8) 中看到的，尽管 $P \in \mathrm{A} \mapsto \delta - \delta^h_P \in \mathsf{Aff}\,\mathrm{A}$ 是一个二次映射（它对所选的 P 存在二次依赖），但它的线性主分量（即模 1 意义下诱导出的元素）仅以仿射方式依赖于 P：$\nabla\delta\colon\ P \mapsto \nabla_P\delta$ 是 A 上的仿射映射，因此是仿射余向量场。此外，$\nabla\colon \mathsf{Quad}\,\mathrm{A} \to \mathsf{Aff}(\mathrm{A} \overrightarrow{\ } \mathrm{A}^*)$ 是一个线性映射。

定义 3.6。我们将与仿射余向量场 $\omega \in \mathsf{Aff}(\mathrm{A} \overrightarrow{\ } \mathrm{A}^*)$ 相关联的主分量称为由其线性主分量（视为仿射空间 A 上的映射）确定的相关双线性形式（不一定对称）$\overrightarrow{\omega} \in \mathsf{Lin}(\overrightarrow{\mathrm{A}}\ \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$。对于任意 $\overrightarrow{x}$、$\overrightarrow{y} \in \overrightarrow{A}$：

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\omega}(\overrightarrow{y})\rangle = \langle \omega_{P+\overrightarrow{y}}, \overrightarrow{x}\rangle - \langle \omega_P, \overrightarrow{x}\rangle \quad (\textit{arbitrary choice of } P \in \mathrm{A}).$$

我们将与二次函数 $\delta \in \mathsf{Quad}\mathrm{A}$ 相关联的海森主分量 $\mathsf{Hess}\ \delta$，称为与其梯度余向量场 $\omega = \nabla\delta$ 相关联的主分量 $\overrightarrow{\nabla\delta}$。

引理 3.5. 对于任意二次函数 $\delta \in \mathsf{Quad}\,\mathrm{A}$ 及其海森矩阵主分量 $\mathsf{Hess}\ \delta \in \mathsf{Lin}(\overrightarrow{\mathrm{A}}, \mathsf{Lin}(\overrightarrow{\mathrm{A}}, \mathrm{R}))$，有：

$$\delta^h_P(Q) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess}\,\delta(\overrightarrow{PQ}), \overrightarrow{PQ}\rangle.$$

证明. 只需考虑在某个参照系 $\mathcal{R}$ 中用某个对称矩阵 Δ 表示 δ。若点 P, Q 由其重心坐标向量 p, q 表示，仿射函数由其系数行向量 $c \in M_{1(n+1)}(\mathrm{R})$ 表示，向量 $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ 由其空心坐标向量 $x, y \in \mathrm{H}_n$ 表示（即与 1 相关联的向量），而余向量由模 1 的行向量表示，那么我们先前的计算表明，由 δ 定义的所有元素都依赖于矩阵 Δ，如下所示：

$$\begin{aligned} \delta^h_P(Q) &= (q-p)^t\Delta(q-p), \qquad && p, q \in \mathbb{W}_n \text{ (from (6))},\\ \nabla\delta\colon p &\mapsto 2p^t\Delta \pmod{\mathbb{1}}, && p \in \mathbb{W}_n \text{ (from (8))}, \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hess}\,\delta\colon \overrightarrow{x} \mapsto 2x^t\Delta \pmod{\mathbb{1}}, && \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{A} \text{ director vectors},\\ &\frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess}\,\delta(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = x^t\Delta y, && x, y \in \mathbb{H}_n \text{ coordinate hollow vectors}. \end{aligned} \tag{10}$$

注意到向量 $\overrightarrow{PQ}$ 由空心坐标向量 $x = q - p$ 表示，即可完成证明。

□

定义 3.7. 若仿射余向量场 $\omega \in \mathsf{Aff}(\mathrm{A} \overrightarrow{\ } \mathrm{A}^*)$ 的主分量 $\overrightarrow{\omega}$ 是自伴的，则称其为对称（或“闭的”）仿射余向量场：

$$\langle \omega_{P+\overrightarrow{y}}, \overrightarrow{x}\rangle - \langle \omega_P, \overrightarrow{x}\rangle = \langle \omega_{P+\overrightarrow{x}}, \overrightarrow{y}\rangle - \langle \omega_P, \overrightarrow{y}\rangle, \quad \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{A}. \tag{11}$$

对称（闭的）仿射余向量场构成一个线性子空间 $\mathsf{Aff}^S(\mathrm{A} \overrightarrow{\ } \mathrm{A}^*)$。特别地，与二次函数相关联的梯度余向量场属于此子空间。

注 3.6。对于任意仿射余向量场 $\omega\colon \mathrm{A} \to \overrightarrow{A}^*$，其在任意点 $P \in \mathrm{A}$ 处的外微分是一个交替双线性形式，在任意点 $P \in \mathrm{A}$ 处作用于切向量 $\vec{x}, \vec{y} \in T_P\mathrm{A} \simeq \overrightarrow{A}$，其定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_P^{ext}\omega(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) &= \langle \nabla_P(\omega(\overrightarrow{x})), \overrightarrow{y}\rangle - \langle \nabla_P(\omega(\overrightarrow{y})), \overrightarrow{x}\rangle = \\ &= \langle \omega_{P+\overrightarrow{y}}, \overrightarrow{x}\rangle - \langle \omega_P, \overrightarrow{x}\rangle - \langle \omega_{P+\overrightarrow{x}}, \overrightarrow{y}\rangle + \langle \omega_P, \overrightarrow{y}\rangle\end{aligned}$$

这说明可以将式 (11) 解释为仿射余向量场闭性的概念。

命题 3.7（仿射庞加莱引理）。梯度线性映射 $\nabla\colon \mathrm{Quad\,A} \to \mathrm{Aff}(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$ 的零空间为 $\mathrm{R} \subset \mathrm{Quad\,A}$，其像是仿射余向量场 $\omega\colon \mathrm{Aff}(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$ 中自伴主部构成的子空间 $\mathrm{Aff}^S(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$。

证明。显然，根据定义 3.5，常函数 $\delta \in \mathrm{R} \subset \mathrm{Quad\,A}$ 的梯度为零。另一方面，二次函数 $\nabla\delta = 0\ \mathrm{has} \delta - \delta_R^h$ 对每个点 $R \in \mathrm{A}$ 都是常函数。于是函数 δ 关于任意点 R 都是偶函数；又因为 P 是关于 $R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ 的对称点，所以我们得出，对于任意点对 P、$Q \in \mathrm{A}$，$\delta(P) = \delta(Q)$。至此，我们完成了对零空间的刻画。

关于像，$\mathrm{Hess}\,\delta$ 已在（10）中证明是对称的。因此我们得到如下线性映射的正合列：

$$0 \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{Quad\,A} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Im}\,\nabla \to 0,$$

其中 $\mathrm{Im}\ \nabla \subseteq \mathrm{Aff}^S(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$ 是一个线性子空间。

由 $\dim \mathrm{A} = n$ 可知 $\dim \mathrm{QuadA} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$，因此 $\dim \mathrm{Im}\ \nabla = \frac{n^2+3n+2}{2} - 1$。

注意，$\mathrm{Aff}^S(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$ 是 $S^2\overrightarrow{\mathrm{A}}^* \subset \mathrm{Lin}(\overrightarrow{\mathrm{A}}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$ 在映射 $\mathrm{d}\colon \omega \in \mathrm{Aff}(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*) \mapsto \overrightarrow{\omega} \in \mathrm{Lin}(\overrightarrow{\mathrm{A}}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$ 下的原像。该映射是一个满射线性映射，其零空间是由常数 $\overrightarrow{\mathrm{A}}^*$-值场构成的空间。因此：

$$\dim \mathrm{Aff}^S(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*) = \dim \overrightarrow{\mathrm{A}}^* + \dim S^2\overrightarrow{\mathrm{A}}^* = n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

根据维数，我们必然得出 $\mathrm{Im}\ \nabla = \mathrm{Aff}^S(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*)$，从而完成证明。

□

根据注 3.6，前一个命题是庞加莱引理在仿射几何中的表述。也就是说，若将 ω 视为光滑1-形式，将 d^{ext} 视为微分形式的外微分，并将 $\vec{x}$、$\vec{y}$ 视为切空间 $T_P\mathrm{A}$ 中的元素，则条件 (11) 可表述为外导数 $(\mathrm{d}^{ext}\omega)_P(\vec{x}, \vec{y})$ 为零。我们指出，任何闭仿射余向量场都是某个二次函数的微分，而微分为零的函数只有常函数。

正如我们接下来将看到的，与 A 上的（非齐次）仿射函数 $\widehat{f} \sim f$ 由其线性包 A 上的线性形式 $f \in \mathrm{A}^*$ 确定的方式相同，A 上的（非齐次）二次函数 δ 也由线性包上的对称双线性形式 $\widehat{g} \in S^2\widehat{\mathrm{A}}^* = S^2\,\mathrm{Aff\,A}$ 确定。

定理 3.8. 考虑某个仿射空间 A 的线性包 $\widehat{\mathrm{A}} = (\mathrm{Aff}\,\mathrm{A})^*$。将任意对称双线性形式 $\widehat{g} \in S^2\widehat{\mathrm{A}}^* = S^2\,\mathrm{Aff}\,\mathrm{A}$ 映射为 A 上与之对应的二次函数 $\delta(P) = \frac{1}{2}\widehat{g}(z_P, z_P)$ 的映射，是一个线性同构，并使由线性态射构成的交换图闭合，其中每一行都是正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathrm{Quad}\,\mathrm{A} & \xrightarrow{\nabla} & \mathrm{Aff}^S(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{A}}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \nearrow & \wr\uparrow & \searrow^{\mathrm{Hess}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Aff}\,\mathrm{A} & \xrightarrow[\mathrm{Id}\otimes u + u\otimes\mathrm{Id}]{} & S^2\,\mathrm{Aff}\,\mathrm{A} & \xrightarrow[\mathrm{d}\otimes\mathrm{d}]{} & S^2\overrightarrow{\mathrm{A}}^* & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{12}$$

这个同构 $\mathrm{Quad}\,\mathrm{A} \simeq S^2\,\mathrm{Aff}\,\mathrm{A}$ 将二次函数 $\delta \in \mathrm{Quad}\mathrm{A}$ 与 $(\mathrm{Aff}\,\mathrm{A})^* = \widehat{\mathrm{A}}$ 上的对称双线性形式 $\widehat{g} \in S^2\,\mathrm{Aff}\,\mathrm{A}$ 联系起来；采用参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，它又将其与 $(n+1)\times(n+1)$ 对称矩阵 $G \in \mathrm{Sym}^{n+1}(\mathrm{R})$ 联系起来（$\widehat{g}$ 在基 $z_{R_0}, \ldots, z_{R_n}$ 下的格拉姆矩阵），其对应规则如下：

$$\begin{aligned} \delta(P) &= \frac{1}{2}\widehat{g}(z_P, z_P) = \frac{1}{2}p^t \cdot G \cdot p, \\ \widehat{g}(z_P, z_Q) &= 4\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right) - \delta(P) - \delta(Q) = p^t \cdot G \cdot q, \\ G_{ij} &= \widehat{g}(z_{R_i}, z_{R_j}) = 4\delta\left(\frac{R_i + R_j}{2}\right) - \delta(R_i) - \delta(R_j), \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $p, q \in \mathrm{W}_n$ 表示参照系 $\mathcal{R}$ 中与点 P, Q 对应的重心坐标向量，而 G 是基 $z_{R_0}, \ldots, z_{R_n}$ 下与 $\widehat{g}$ 对应的格拉姆矩阵。

定理 3.8 将在下述注释之后证明。

注 3.9. 回顾 $\mathrm{Aff}\,\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$。因此，$\mathrm{A}$ 上的仿射函数可视为定义在 A 上的线性函数在 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}$ 上的限制（使用浸入 $P \mapsto z_P$）。微分 d 就是该线性函数在子空间 $\overrightarrow{A} \subset \widehat{\mathrm{A}}$ 上的限制。同理，确定海森主分量 $\mathrm{Hess}\,g$ 的映射 $\mathrm{d}\otimes\mathrm{d}$，可视为与 δ 相关联并限制在子空间 $\overrightarrow{A} = \langle u \rangle^\circ$ 上的对称双线性形式。梯度映射和海森映射也是自然的。它们自然导出注 3.3 中使用的因子 $1/2$，以便与浸入 z 一起定义 (12) 中的垂直同构 $S^2\,\mathrm{Aff}\,\mathrm{A} \to \mathrm{Quad}\,\mathrm{A}$。其他选择会导致图不交换。

坚持采用正合列 (12)，可将 R^3 中的经典双线性形式 $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ 与二次函数 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c_1 x + c_2 y + c_3 z + d$ 的等价类对应起来，其中用到了 $1/2$-因子。

(13) 中的矩阵 G 称为仿射参照系 $\mathcal{R}$ 下二次函数 δ 的线性包格拉姆矩阵表示。它与同一参照系下 (5) 中给出的 δ 的重心矩阵表示 Δ 之间满足关系 $\Delta = \frac{1}{2}G$。

定理 3.8 的证明。(12) 中上方一行的正合性由仿射庞加莱引理（命题 3.7）给出。对于下方一行的正合性：由于 $\mathrm{d}\colon \mathrm{Aff}\,\mathrm{A} \to \overrightarrow{A}^*$ 是满射，故 $\mathrm{d}\otimes\mathrm{d}$ 也是满射。另一方面，由于 $u \neq 0$，只有当 $f = 0$ 时才有 $f \otimes u + u \otimes f = 0$。因此 $\mathrm{Id}\otimes u + u \otimes \mathrm{Id}$ 是单射。

当 $\mathrm{d}u = 0$ 时，$\mathrm{Id} \otimes u + u \otimes \mathrm{Id}$ 的像包含于 $\mathrm{d} \otimes \mathrm{d}$ 的零空间中。通过计算维数，我们得出下方一行是正合的。

左上方三角形的交换性显然，因为所有态射都是自然包含态射。根据 $\mathrm{Hess}\,\delta$ 被定义为仿射协向量场 $\nabla\delta$ 的线性主分量，右上方三角形的交换性显然。

对于左下三角形的交换性：对于任意 $f \in \mathrm{Aff\,A}$，元素 $f \otimes u + u \otimes f \in S^2\,\mathrm{Aff\,A}$ 确定二次函数 $\delta(P) = \frac{1}{2}(f \otimes u + u \otimes f)(z_P, z_P) = \frac{1}{2}(f(P) \cdot u(P) + u(P) \cdot f(P)) = f(P)$，因此该二次函数恰好就是原仿射函数 f。

关于右下方三角形的交换性：由 $\widehat{g} = (f \otimes h + h \otimes f) \in S^2\,\mathrm{Aff\,A}$（由两个仿射函数 $f, h \in \mathrm{Aff\,A}$ 确定），我们得到二次函数 $\delta(P) = \frac{1}{2}\widehat{g}(z_P, z_P) = f(P) \cdot h(P)$。因此 $\delta = f \cdot h$。于是，P 处关联的齐次二次函数为 $\delta_P^h = (f - f(P)) \cdot (h - h(P))$。因此 $\delta - \delta_P^h = f(P) \cdot h + h(P) \cdot f - f(P) \cdot h(P)$。在 $\mathrm{Aff\,A}/\mathrm{R} = \overrightarrow{\mathrm{A}}^*$ 中取商，我们推得梯度余向量场是仿射映射 $P \mapsto \nabla_P\delta = f(P) \cdot \mathrm{d}h + h(P) \cdot \mathrm{d}f$，其主分量为 $\mathrm{Hess}\ \delta = \mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}h + \mathrm{d}h \otimes \mathrm{d}f = (\mathrm{d} \otimes \mathrm{d})(f \otimes h + h \otimes f)$，这正是我们要证明的。由于这些特殊的双线性形式 $f \otimes h + h \otimes f$ 张成了整个空间 $S^2\,\mathrm{Aff\,A}$，我们得出右下方三角形是交换的。

为证明 $S^2\,\mathrm{Aff\,A} \to \mathrm{Quad\,A}$ 是单射，注意任何被变换为 $\delta = 0$ 的元素 $\widehat{g}$ 都具有零海森矩阵，因此由图表的交换性可知 $(\mathrm{d} \otimes \mathrm{d})(\widehat{g}) = 0$。由于下排是正合的，这意味着 $\widehat{g} = f \otimes u + u \otimes f$，其中 $f \in \mathrm{Aff\,A}$ 是某个仿射函数。但我们还知道，$f \otimes u + u \otimes f$ 决定了二次函数 $\delta(P) = \frac{1}{2}(f(P) \cdot u(P) + u(P) \cdot f(P)) = f(P)$。因此，$\widehat{g}$ 决定零二次函数 $\delta = 0$ 当且仅当 $\widehat{g} = 0 \otimes u + u \otimes 0 = 0$。将 $\widehat{g}$ 映射为 δ 的映射是线性的、单射的，并且根据维数计算，它是一个同构。

我们进一步注意到，$P \mapsto z_P$ 是一个仿射变换，因此

$$z_{\frac{1}{2}(P+Q)} = \frac{1}{2}(z_P + z_Q),$$

根据 $\widehat{g}$ 的对称性和双线性，我们得到与之相关的 $\delta \in \mathrm{Quad\,A}$：

$$\begin{aligned} &4\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right) - \delta(P) - \delta(Q) = \\ &\quad = 2\widehat{g}\left(\frac{1}{2}(z_P + z_Q), \frac{1}{2}(z_P + z_Q)\right) - \frac{1}{2}\widehat{g}(z_P, z_P) - \frac{1}{2}\widehat{g}(z_Q, z_Q) = \widehat{g}(z_P, z_Q). \end{aligned}$$

利用此公式，以及将 G 和 δ 与 $\widehat{g}$ 联系起来的（定义性）恒等式，(13) 中给出的所有规则都显而易见。 □

在这种表述中，如果两个仿射函数 $f, h \in \mathrm{Aff\,A}$ 相对于某个仿射参照系的系数行向量为 $a, b \in M_{1(n+1)}(\mathrm{R})$，那么 $f \cdot h$ 作为二次函数具有线性包格拉姆矩阵表示 $G = a^t \cdot b + b^t \cdot a$。特别地，系数行向量为 $c \in M_{1(n+1)}(\mathrm{R})$ 的仿射函数具有线性包格拉姆矩阵表示（作为二次函数）

$$G_c = c^t \cdot \mathbb{1}_n + \mathbb{1}_n^t \cdot c.$$

4 仿射空间上的度量

向量空间上的对称双线性形式会导出该空间上的二次函数；这些二次函数尤其是齐次的（相对于零向量）。回想一下，在仿射情形中，无法挑选出一族齐次二次函数。换言之，向量空间态射的正合列不存在自然的分裂选择：

$$0 \to \operatorname{Aff} \mathrm{A} \hookrightarrow \operatorname{Quad} \mathrm{A} \to \operatorname{Quad} \mathrm{A} / \operatorname{Aff} \mathrm{A} \to 0. \tag{14}$$

定义 4.1。商向量空间 Quad A/ Aff A 称为仿射空间 A 上的度量空间，记作 Met A。其纤维是仿射子空间 Quad$_m$A，其中的元素称为 m-二次函数（它们都具有相同的海森主分量，即与度量 m 相关的海森主分量 g_m ）。

由定理 3.8 中的正合列 (12)，我们得出，度量 $m \in$Quad A/ Aff A 可以通过与其任一代表元 δ 相关的海森主分量 g =Hess δ 来确定。每个代表元 δ 都可以$\widehat{\ }$与线性包 A 上的一个对称双线性形式 $\widehat{g}$ 相对应。根据注 3.9，将 $\widehat{g}$ 限制到 $\overrightarrow{A} \subset \widehat{\ }$A 上得到 g。

正合列 (14) 有不同的分裂选择。

- 对于点 $P \in$ A 的任意选择，将 δ 变换为仿射函数 $\delta - \delta_P^h$ 的线性变换 $\delta \in$ QuadA $\to f \in$ Aff A，是正合列 (14) 中浸入的一个收缩。

- 对于 A 上任意选定的参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，将任意二次函数$\delta$ 映射为唯一仿射函数 f 的线性变换 $\delta \in$ Quad A $\mapsto f \in$ Aff A（满足 $f(R_i) = \delta(R_i)$）是正合列 (14) 中浸入的一个回缩。

将任意二次函数 δ 与通过上述任一回缩得到的仿射函数相减，可得到新的二次函数δ_P^h （P-齐次分量 δ），或称 $\delta_{\mathcal{R}}^0$ （$\mathcal{R}$-约化分量 δ）。因此，度量空间可自然地与所选回缩的零空间等同：

$$\operatorname{Met} \mathrm{A} \simeq \operatorname{Quad}_P^h \mathrm{A} = \{\delta \in \operatorname{Quad} \mathrm{A} : \ \delta \text{ homogeneous at } P\},$$

$$\operatorname{Met} \mathrm{A} \simeq \operatorname{Quad}_{\mathcal{R}}^0 \mathrm{A} = \{\delta \in \operatorname{Quad} \mathrm{A} : \ \delta \text{ vanishes at } \mathcal{R}\}.$$

利用二次函数的格拉姆表示（定理 3.8）以及由仿射参照系 $\mathcal{R}$确定的特定浸入 Met A $\simeq$Quad$_{\mathcal{R}}^0$ A $\hookrightarrow$Quad A，可将度量表示为对角线为零的对称矩阵：

$$\operatorname{Quad}_{\mathcal{R}}^0 \simeq \{G \in \operatorname{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}) : \ \operatorname{diag} G = \mathbb{0}_n\} := \mathbb{H} \operatorname{Sym}_{n+1}(\mathbb{R})$$

其中，diag: M_{kk}(R) $\to M_{1k}$(R) 表示将对角线视为行向量进行识别，而 $\mathbb{0}_n \in M_{1n+1}$(R) 是零行向量。对角线为零的对称矩阵称为空心对称矩阵。

度量空间可识别为满足 $\delta = \delta_P^h$ 的二次函数子空间。我们可以考虑二次函数的格拉姆表示

相对于某个仿射参照系 $\mathcal{R}$，以及由某个点 $P \in \mathsf{A}$（其重心坐标向量为 $p \in \mathsf{W}_n$）确定的特定浸入 $\mathsf{MetA} \hookrightarrow \mathsf{Quad}_P^h\mathsf{A} \subset \mathsf{Quad\ A}$。利用 (8)、注 3.9 中给出的关系 $G = \frac{1}{2}\Delta$，并考虑到只有当 $p^tG = \mathbb{0}_n$ 时才会出现 $2p^tG = p^tGp\mathbb{1}$（右乘 p，此时 $\mathbb{1}p = 1$ 成立），我们得到：

$$\mathrm{Quad}_P^h \simeq \{G \in \mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}) :\ p^tG = \mathbb{0}_n\} =: \mathbb{Z}_p\,\mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}). \tag{15}$$

（14）的回缩确定相应的截面：

命题 4.1. 设 $m \in \mathsf{Met\ A} = \mathsf{QuadA}/\mathsf{Aff\ A}$ 是任意度量。

- 对于每个点 $P \in \mathsf{A}$，都存在唯一的 m-二次函数 $\delta_P^m \in \mathsf{Quad\ A}$，它在 P 处是齐次的（m 的 P-齐次代表元）。
- 对于每个参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，存在唯一一个 m-二次函数 $\delta_{\mathcal{R}}^m \in \mathsf{QuadA}$，它在参照系的每个点处均为零（$m$ 的 $\mathcal{R}$-约化表示）。

定义 4.2. 我们称与度量 $m \in \mathsf{Met\ A}$ 相关、相对于点 $P \in \mathsf{A}$ 的半平方伪距离函数为唯一表示该度量且关于 P 齐次的二次函数$\delta_P^m \in \mathsf{Quad\ A}$。

我们将相对于 A 的参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，与度量 $m \in \mathsf{Met\ A}$ 相关联的 $\mathcal{R}$-约化二次函数，定义为唯一一个表示该度量且在参照系的每个点处均取零值的二次函数 $\delta_{\mathcal{R}}^m \in \mathsf{QuadA}$。

函数 δ_P^m 可通过对度量 $m \in \mathsf{QuadA}/\mathsf{Aff\ A}$ 的任意代表函数 $\delta \in \mathsf{QuadA}$ 在 P 处进行齐次化得到。正如引理 3.5 中所见：

$$\delta_P^m(Q) = \frac{1}{2}g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\widehat{g}(z_Q - z_P, z_Q - z_P),$$

利用与该度量相关的海森主分量 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$，或利用与该度量相关、对应于其任意代表 $\delta \in \mathsf{QuadA}$ 的对称双线性形式 $\widehat{g} \in S^2\mathsf{Aff\ A}$。

函数 $\delta_{\mathcal{R}}^m$ 可通过取度量 $m \in \mathsf{QuadA}/\mathsf{Aff\ A}$ 的任意代表函数 $\delta \in \mathsf{Quad\ A}$，并减去唯一一个在参照系的每个点 R_i 处都与 δ 取值相同的仿射函数得到。

对于任意 m 次函数 δ，若 $G \in \mathsf{Sym}^{n+1}\mathsf{(R)}$ 是参照系 $\mathcal{R} = (R_0, .., R_n)$ 中与 δ 相关的格拉姆矩阵，我们可以利用关系 $G = 2\Delta$、δ 的重心矩阵表示以及公式 (7)，证明 δ_P^m在同一参照系中的格拉姆矩阵为：

$$G_p^h = (\mathrm{Id}_n - p \cdot \mathbb{1}_n)^t \cdot G \cdot (\mathrm{Id}_n - p \cdot \mathbb{1}_n) \in \mathbb{Z}_p\,\mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}), \tag{16}$$

其中，$p \in \mathsf{W}_n$ 是与 P 在参照系 $\mathcal{R}$中的重心坐标向量。利用（9），我们得到与 $\delta_{\mathcal{R}}^m$ 相关联的格拉姆矩阵：

$$G^0 = G - \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_n^t \cdot \mathrm{diag}\,G + (\mathrm{diag}\,G)^t \cdot \mathbb{1}_n\right) \in \mathbb{H}\,\mathrm{Sym}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

备注 4.2。仿射函数 f 尤其是 Quad A 中的一个元素 $f \in$ ，根据定理 3.8，它与一个对称双线性形式 $\widehat{g} = f \otimes u + u \otimes f$相关联：

$$\widehat{g}(z_{R_i}, z_{R_j}) = (f \otimes u + u \otimes f)(z_{R_i}, z_{R_j}) = f(R_i) + f(R_j).$$

因此，若我们取任意一个 m二次函数 $\delta \in \text{Quad}_m$A以及 f 仿射函数，使得 $f(R_i) = \delta(R_i)$，就可以表示出唯一的二次函数 $\delta^m_{\mathcal{R}} = \delta - f$，它与 δ 度量等价，并且在参照系 $\mathcal{R}$上为零。根据（13），它确定了A上的对称双线性形式 $\widehat{g}_{\mathcal{R}}$，其中以 z_{R_0}、.....、 z_{R_n}为A的基$\widehat{}$。于是得到：

$$\begin{aligned} \widehat{g}^m_{\mathcal{R}}(z_{R_i}, z_{R_j}) &= \left(4\delta\left(\frac{R_i + R_j}{2}\right) - \delta(R_i) - \delta(R_j)\right) - (\delta(R_i) + \delta(R_j)) = \\ &= 4\delta\left(\frac{R_i + R_j}{2}\right) - 2\delta(R_i) - 2\delta(R_j), \end{aligned} \tag{17}$$

它由一个对角线元素均为零的格拉姆矩阵表示。

任意仿射映射 B $\to$ A 都会诱导出 QuadA $\to$ QuadB，将二次函数映为二次函数，并将仿射函数子空间映入仿射函数子空间。因此，它确定了相应商空间之间的线性映射 Met A $\to$Met B。因此，给定任意仿射浸入 B $\subseteq$ A，我们可以将任意度量 $m \in$ Met A 限制为度量$m|_B \in$ Met B；或者，给定任意仿射投影 B $\to$ A，我们可以将任意度量 $m \in$ Met A 拉回到更大的仿射空间 B。

定义 4.3。度量 $m \in$Met A 的根基是最大的向量子空间 $\overrightarrow{R} \subseteq \overrightarrow{A}$，使得 m 是 A/$\overrightarrow{R}$ 上某个度量的拉回。非退化度量是指根基平凡的度量。

如果 m 由自伴双线性形式 g: $\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}^*$ 确定，那么 m 的根基就是该双线性形式的零空间，即由双线性形式变换为零余向量的向量 $\vec{x} \in \overrightarrow{A}$ 所构成的子空间。

命题 4.3。对于 A 上由对称双线性形式 g 确定的给定度量 m，当且仅当 $\overrightarrow{PQ}$ 属于该双线性形式的零空间 g 时，成立 $\delta^m_P = \delta^m_Q$。

证明。注意：

$$\delta^m_Q(R) = \frac{1}{2} g(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QR}),$$

$$\begin{aligned} \delta^m_P(R) = \frac{1}{2} g(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PR}) = \frac{1}{2} g(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \\ = \frac{1}{2} g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) + g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}) + \frac{1}{2} g(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QR}). \end{aligned}$$

因此，陈述 $\delta^m_P = \delta^m_Q$ 等价于陈述：

$$g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}) = -\frac{1}{2} g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}), \quad \forall \overrightarrow{QR} \in \overrightarrow{A}.$$

根据线性， $g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR})$ R 独立的唯一可能性是$\overrightarrow{PQ}$ 属于 g的零空间，正如我们所要证明的那样。 □

推论 4.4。映射 $P \in \mathsf{A} \mapsto \delta_P^m \in \mathsf{Quad}_m\mathsf{A}$ 是一个二次映射。当且仅当 m 具有平凡根基时，它是一个浸入。

证明。注意，对任意点 $X, Y \in \mathsf{A}$，都有 $\delta_X^m(Y) = \delta_Y^m(X)$。下面证明映射 $P \mapsto \delta_P^m$ 是二次的。对于任意点对 P, Q 和一维权重 (α, β)，$\alpha \cdot P + \beta \cdot Q$ 的像是二次函数：

$$\delta^m_{\alpha P+\beta Q}(X) = \delta^m_X(\alpha P + \beta Q) = \dots$$

由于 δ_X^m 是二次的，我们得到：

$$\dots = \alpha(\alpha-\beta)\delta^m_X(P) + \beta(\beta-\alpha)\delta^m_X(Q) + 4\alpha\beta\delta^m_X\left(\frac{P+Q}{2}\right).$$

因此，再次注意到 $\delta_X^m(Y) = \delta_Y^m(X)$，我们得出：

$$\delta^m_{\alpha P+\beta Q}(X) = \left(\alpha(\alpha-\beta)\delta^m_P + \beta(\beta-\alpha)\delta^m_Q + 4\alpha\beta\delta^m_{\frac{P+Q}{2}}\right)(X),$$

这表示映射 $\delta^m\colon \mathsf{A} \to \mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}$ 的二次性条件。

映射 δ^m 的单射性与度量 m 的非退化性等价，这一点已在命题 4.3 中证明。 □

定义 4.4。对于非退化度量 $m \in \mathsf{Met}\,\mathsf{A}$，我们称 $\delta^m\colon \mathsf{A} \to \mathsf{QuadA}$ 为仿射空间 A 的凯莱-门格尔浸入。

注记 4.5。我们可以确定二次浸入 $P \mapsto \delta_P^m$ 的坐标表示。固定 A 上的仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \dots, R_n)$，并考虑在该参照系中表示 m 的空心对称矩阵 G。每个元素 $P \in \mathsf{A}$ 都由其重心坐标向量 $p = [p_0 \dots p_n]^t \in \mathsf{W}_n$ 确定。公式 (16) 表明，δ_P^m 依赖于 P（推论 4.4），并且线性依赖于 m。

回忆一下，二次函数的凸性概念（定义 3.2）在加上一个仿射函数后保持不变。因此，可以对等价类 $m \in \mathsf{Quad}\,\mathsf{A}/\,\mathsf{Aff}\,\mathsf{A}$ 定义这一概念。

定义 4.5。如果度量 $m \in \mathsf{Met}\,\mathsf{A} = \mathsf{QuadA}/\,\mathsf{Aff}\,\mathsf{A}$ 的某个/任意一个代表元 $\delta \in \mathsf{QuadA}$ 是凸的，我们就称该度量为正定的。如果度量的某个/任意一个代表元是仿射函数，则称该度量为零度量。

如果 g_m 是度量 m的海森主分量，那么度量在仿射子空间 F 上的正性／零性分别对应于双线性形式 g_m 在方向向量子空间 $\overrightarrow{F}$上的正定性和消失。度量的限制为零的仿射空间称为各向同性空间。

定义 4.6。在其限制为正定的最大仿射子空间的维数，称为度量的正惯性指数 $\pi(m)$。在其限制为正定的最大仿射子空间的维数，称为度量的负惯性指数 $\nu(m)$。根基的维数称为度量的零度 $\rho(m)$。这些整数值（$\pi(m)$ $\nu(m)$ $\rho(m)$）构成度量的惯性指数。

注 4.6。考虑仿射空间 A 上的任意度量 $m \in \mathsf{Met}\,\mathsf{A}$，其关联的海森主分量为 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$。利用正合列 (12)，所有表示该度量的二次函数 δ 均可视为元素 $\widehat{g} \in S^2\,\mathsf{Aff}\,\mathsf{A} = S^2\widehat{\mathsf{A}}^*$，而在 $\overrightarrow{A} \subset \widehat{\mathsf{A}}$ 上的限制是与 m 相关联的 $\overrightarrow{A}$ 上的对称双线性形式 g。

对度量 $m \in \mathsf{Met}\,\mathsf{A}$ 的惯性进行研究，等价于研究与其任一代表元 δ 相关联的、定义在 A 上的对称双线性形式 $\widehat{g}^{\widehat{}}$ 限制到 $\langle u\rangle^\circ = \overrightarrow{A}$ 后的惯性。研究限制在子空间上的双线性型惯性的主要工具见 *[22]*。对于在点 P 处齐次的二次函数，这一关系是直接的：$\widehat{}$按照（15），定义在 A 上的双线性形式 $\widehat{g}$ 表示一个在 $P \in$ 处齐次的二次函数，当且仅当 z_P 属于其零空间。由于 $\overrightarrow{A} \oplus \langle z_P\rangle = \widehat{\mathsf{A}}$ 及其在子空间 $\overrightarrow{A}$ 上的限制 $\widehat{g}$ 分别作为海森主分量 g，对于惯性指数为（π，ν，ρ）且在 P 处齐次的 g，我们有 $\widehat{g}$，其惯性指数为（π，ν，$\rho+1$）。

如果我们选择一个仿射参照系 $\mathcal{R} =$（R_0，...，R_n），则 A 有一个基 z_{R_0}，...，$\sim z_{R_n}$，而公式（13）确定了与对应于 $\delta \in \mathsf{Quad}_m\mathsf{A}$ 的双线性二次型 $\widehat{g}$ 相关联的格拉姆矩阵 $G_{ij} = 4\delta$（R_{ij}）$-\delta$（R_i）$-\delta$（R_j）。$\widehat{}$元素 u 是 A 上的一个线性函数，由行向量$\mathbb{1}_n$表示。

$\delta \in \mathsf{Quad}\mathsf{A}$ 表示非退化度量的充要条件是以下对称矩阵为非退化：

$$\begin{bmatrix} -G & \mathbb{1}_n^t \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}, \qquad G_{ij} = 4\delta\left(\frac{R_i + R_j}{2}\right) - \delta(R_i) - \delta(R_j).$$

事实上，要使 g 退化，$\langle \mathbb{1}_n\rangle^\circ$ 中必须存在一个元素，该元素与 $\langle \mathbb{1}_n\rangle^\circ$ 中的所有其他元素均关于 G 正交。因此，方程组 $\mathbb{1}_n \cdot x = 0, G \cdot x = \alpha \cdot \mathbb{1}_n^t$ 必须存在一个非平凡解，这可以表示为矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} -G & \mathbb{1}_n^t \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix} = 0.$$

这个矩阵方程的非平凡解决定了度量的根基。

上面的矩阵 G 取决于对表示度量 m 的特定二次函数 δ 的选择，以及对仿射参照系 $\mathcal{R}$ 的选择。我们知道，事实上，这一参照系的选择会导出一个表示度量 m 的特定二次函数 $\delta^m_{\mathcal{R}}$。该函数在所有参照点处均为零。回顾 (17)，使用任意 $\delta \in \mathsf{Quad}_m\mathsf{A}$，其 $\mathcal{R}$-约化分量 $\delta^0_{\mathcal{R}} = \delta^{m\widehat{}}_{\mathcal{R}}$ 在 A 上都有一个关联的双线性形式 $\widehat{g}^m_{\mathcal{R}}$，其格拉姆矩阵为：

$$\widehat{g}^m_{\mathcal{R}}(z_{R_i}, z_{R_j}) = G^0_{ij} = 4\delta\left(\frac{R_i + R_j}{2}\right) - 2\delta(R_i) - 2\delta(R_j).$$

由于 g是 $\widehat{g}^m_{\mathcal{R}}$在子空间 $\overrightarrow{A}$上的限制，且 $\widehat{g}^m_{\mathcal{R}}(z_{R_i}, z_{R_i}) = 0$，我们得到：

$$G^0_{ij} = -\frac{1}{2}\widehat{g}(z_{R_j} - z_{R_i}, z_{R_j} - z_{R_i}) = -\frac{1}{2}g(\overrightarrow{R_iR_j}, \overrightarrow{R_iR_j}). \tag{18}$$

命题 4.7. 在仿射空间 A 上固定一个参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$。度量 $m \in \mathrm{Met}\,\mathrm{A}$ 是非退化的，当且仅当以下空心对称矩阵是非退化的：

$$\begin{bmatrix} D_{ij} & \mathbb{1}_n^t \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{ij} = g(\overrightarrow{R_i R_j}, \overrightarrow{R_i R_j}). \tag{19}$$

证明。只需应用前面的评注，将 $\delta_{\mathcal{R}}^m$ 用作表示该度量的二次函数，并将前几行乘以 $-1/2$、最后一列乘以 -2。 □

注意，对于任意度量 m 和参照系 $\mathcal{R}$，其平方距离矩阵为 D，以及与 $\delta_{\mathcal{R}}^m$ 相关联的重心表示 Δ 和格拉姆表示 G，都有 $2\Delta = G = -\frac{1}{2}D$。

评注 4.8。矩阵 (19) 最早见于 Cayley *[1],* 的一些结果，他研究了在n维欧几里得空间中任取 $n+3$ 个点时该矩阵的退化情形。随后，Menger 在其著作*[2]* 中也讨论了这一矩阵，并证明了若干关于欧几里得空间中点的等距浸入的结果。在欧几里得几何中，该矩阵通常称为与欧几里得度量 m 及参照系$\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$相关联的凯莱-门格尔矩阵。还有许多其他著作探讨了这个行列式和矩阵。对于正定度量，该矩阵 D 称为欧几里得距离矩阵（EDM）。感兴趣的读者可参阅 *[9]* 了解这一主题。关于从欧几里得几何角度处理凯莱-门格尔行列式（及双行列式），请参阅 Berger 的《几何学》讲义第 9.7 节 *[21]*

所有这些研究都是从矩阵演算的角度处理 EDM 或凯莱-门格尔矩阵的。在（18）中，我们还赋予 EDM 另一种含义：它（相差一个因子 $-1/2$）是 A 上由 m 和参照系的选择所确定的特定对称$\widehat{}$双线性形式所对应的格拉姆矩阵。它是唯一的 m二次函数 $\delta_{\mathcal{R}}^m$ 的格拉姆矩阵表示，该函数在参照系处为零。对称 EDM 矩阵 D 取决于参照系的选择 $\widehat{}$，并且不对应于 A 上任何内在定义的度量。

5 与度量相关联的凯莱-门格尔双线性形式

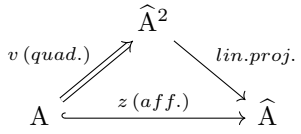
$\widehat{}$回顾一下，每个仿射空间 A 都有一个与之相关的向量空间 A（线性$\widehat{}$包络）以及一个仿射浸入 $z\colon \mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{A}$，因此 A 上的所有仿射函数都可表示为某个线性函数 $f\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ 与 z 的复合。

以同样的方式，我们可以引入与 A 相关联的二次包。

定义 5.1. 二次函数空间上的线性算子向量空间 $\widehat{\mathrm{A}}^2 = (\mathrm{Quad}\,\mathrm{A})^*$ 称为与 A 相关的二次包。每个点 $P \in \mathrm{A}$ 都会在 $\widehat{\mathrm{A}}^2$, 上诱导一个由 $\langle v_P, \delta\rangle = \delta(P)$ 确定的元素 v_P，其中任意二次函数 $\delta \in \mathrm{QuadA}$。元素 v_P 称为二次函数在 P 处的求值算子。

命题 5.1。映射 $P \in \mathrm{A} \mapsto v_P \in (\mathrm{Quad}\,\mathrm{A})^* = \widehat{\mathrm{A}}^2$ 是二次浸入。线性包含 $\mathrm{Aff}\,\mathrm{A} \subset \mathrm{Quad}\,\mathrm{A}$ 确定一个线性投影算子

$\widehat{\mathrm{A}}^2 = (\mathrm{Quad}\,\mathrm{A})^* \to (\mathrm{Aff}\,\mathrm{A})^* = \widehat{\mathrm{A}}$，它与仿射浸入$P \mapsto z_P$一起构成一个交换三角形



（其中双箭头用于表示二次映射）。

证明。为说明 $P \mapsto v_P$ 是二次的，我们使用二次性条件 (4)。对于任意点对 $P, Q \in \mathrm{A}$、任意一维权重 $(\alpha, \beta) \in \mathrm{W}_1$，，以及任意二次函数 $\delta \in \mathrm{QuadA}$，我们观察到：

$$\begin{aligned}\langle v_{\alpha P+\beta Q}, \delta\rangle &= \delta(\alpha P + \beta Q) = \\ &= \alpha(\beta-\alpha)\cdot\delta(P) + \beta(\alpha-\beta)\cdot\delta(Q) + 4\alpha\beta\cdot\delta\left(\frac{P+Q}{2}\right) = \\ &= \left\langle \alpha(\beta-\alpha)\cdot v_P + \beta(\alpha-\beta)\cdot v_Q + 4\alpha\beta\cdot v_{\frac{P+Q}{2}}, \delta\right\rangle.\end{aligned}$$

因此 $v_{\alpha P+\beta Q} = \alpha(\beta-\alpha)\cdot v_P + \beta(\alpha-\beta)\cdot v_Q + 4\alpha\beta\cdot v_{\frac{P+Q}{2}}$，且映射$v$是二次的。

显然，对于 $f \in \mathrm{Aff}\,\mathrm{A}$，有 $\langle z_P, f\rangle = f(P) = \langle v_P, i(f)\rangle$。这里$i$表示 Aff A 到 Quad A 的包含映射，它诱导出线性投影算子 $(\mathrm{Quad}\,\mathrm{A})^* \to (\mathrm{Aff}\,\mathrm{A})^*$，从而得到我们陈述中的交换三角形。

由于 z 是单射，且可经由 v 分解，我们得出 v 也是单射，因此是二次浸入。□

每个线性函数 $\widehat{\mathrm{A}}^2 \to \mathrm{R}$ 通过与二次浸入 $v\colon \mathrm{A} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{A}}^2$，的复合，在 A 上确定一个二次函数。反之，注意到任意二次函数 $\delta \in \mathrm{Quad}\,\mathrm{A}$ 都表示对偶空间 $(\mathrm{Quad}\,\mathrm{A})^* = \widehat{\mathrm{A}}^2$，上的一个线性形式；也就是说，它是一个线性映射 $\widehat{\mathrm{A}}^2 \to \mathrm{R}$，将定义在 Quad A 上的任意线性泛函 F 变换为实数值 $\langle F, \delta\rangle$。此外，该线性映射与二次浸入 v 的复合正是二次函数 δ 本身：$P \mapsto \langle v_P, \delta\rangle = \delta(P)$。

所有二次函数都可以表示为二次包的线性形式与自然二次浸入 $v\colon \mathrm{A} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{A}}^2$ 的复合。

注 5.2。我们可以使用一个参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 将 A 与仿射子空间 W_n 识别，即将任意点 $P \in \mathrm{A}$ 映射为其重心坐标向量$p = [p_0 \ldots p_n]^t$，使得 $\mathbb{1}_n \cdot p = 1$。如同在（13）中已经观察到的，同一个参照系还允许我们将 A 上的二次函数 δ 与 Gram 对称矩阵 $G \in \mathrm{Sym}^{n+1}(\mathrm{R})$ 识别，从而 $\delta(P) = \frac{1}{2}p^t \cdot G \cdot p$。

如果我们使用迹对偶性 $\langle C, D\rangle = \mathrm{tr}(C \cdot D) = \sum c_{ij} \cdot d_{ij}$，则 $\mathrm{Sym}^{n+1}(\mathrm{R})$ 的对偶空间可与其自身等同。在这种情况下，注意到

$$\langle \delta, v_P\rangle = \frac{1}{2}p^t \cdot G \cdot p = \frac{1}{2}\sum G_{ij}p_i \cdot p_j = \sum G_{ij} \cdot H_{ij},$$

只需取元素为 $H_{ij} = \frac{1}{2}p_i \cdot p_j$ 的矩阵。因此，在我们的仿射坐标系中，二次浸入 $P \mapsto v_P$ 可写作 $p \mapsto \frac{1}{2}p \cdot p^t$，显然这是仿射空间 A 上的二次表达式。

考虑某个 n 维仿射空间 A 上的度量 $m \in \mathrm{Quad\ A}/\mathrm{Aff\ A}$。纤维 Quad_m A $\subset$ Quad A 是一个仿射子空间，其方向向量子空间是 $n+1$ 维子空间 Aff A $\subset$ Quad A。换言之，投影 Quad A $\to$ Met A 可视为度量（向量）空间上的仿射丛，其方向向量丛是 Met A 上以 Aff A 为纤维的平凡丛。

存在一个线性映射 π_m: (Quad A)* $\to$ Aff Quad_m A，它将 Quad A 上的线性形式（“泛函”）映射为其在仿射子空间 Quad_mA 上的限制；该限制是定义在 m-二次函数的仿射空间上的仿射泛函。因此，存在一个自然的二次映射 $\pi_m \circ v$: A $\to$(Quad A)* $\to$ Aff Quad_m A，我们仍将其记为 v。

现在，考虑任意固定的度量 $m \in$ Met A，以及二次维向量空间 Aff Quad_mA；它由定义在 $n+1$ 维仿射空间 Quad_mA 上的仿射函数构成。我们将讨论定义在 m-二次函数的仿射空间上的（仿射）泛函。

定义 5.2。Aff Quad_m A 的特定元素包括 $v_P \in$ Aff Quad_mA：对于任意点 $P \in$ A，该算子定义为将定义 5.1 中给出的 $v_P \in$ (Quad A)* 限制在仿射子空间 Quad_m A $\subset$ Quad A 上；还包括单位算子 v_m，其定义为对每个 $\delta \in \mathrm{Quad}_m$A，$v_m(\delta) = 1$。

备注 5.3. 在零度量 $m = 0 \in$ Met A 的特殊情形下，仿射空间 Quad_mA 与 Aff A（这是一个向量空间）相认。在此空间中，我们有零函数 $\delta = 0 \in \mathrm{Quad}_m$A。然而，这个函数并不是线性包 Quad_mA 的零元素，因为它属于仿射子空间 $\widehat{\mathrm{Quad}_m\ \mathrm{A}} \subset \mathrm{Quad}_m$ A，且在此情形下有 $\langle \delta, v_m \rangle = 1$。当我们考虑具有向量空间结构的仿射空间的线性包时，总会出现这一不便。在这种情况下，我们必须区分线性包的零元素与由原向量（及仿射）空间的零向量确定的点。

梯度余向量映射 d_B: Aff B $\to \vec{B}^*$ 在特殊情形 B $=$ Quad_m A（其中 $\vec{B}$ = Aff A）确定了一个自然的线性投影算子和浸入：

$$\mathrm{d}_m\colon\ \mathrm{Aff\ Quad}_m\ \mathrm{A} \to (\mathrm{Aff\ A})^*, \qquad \mathrm{d}_m^*\colon\ \mathrm{Aff\ A} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{Quad}_m}\ \mathrm{A}, \tag{20}$$

其中，$\widehat{\mathrm{Quad}_m \mathrm{A}}$ = (Aff Quad_m A)* 是仿射空间 Quad_mA 的线性包（定义 2.5 ）。

回顾一下，投影算子 d_m 的零空间是常泛函的子空间 R $= \langle v_m \rangle$，因此 d_m^* 的像是 Aff Quad_mA 上在 $v_m \in$ Aff Quad_m A 上为零的线性形式空间。

更具体地说，对于 Quad_mA 上的任意仿射泛函 $\bar{v}$ 和任意仿射函数 $s \in$ Aff A，有：

$$\langle \mathrm{d}_m \bar{v}, s \rangle = \langle \mathrm{d}_m^* s, \bar{v} \rangle = \bar{v}(\delta + s) - \bar{v}(\delta), \qquad \text{any } \delta \in \mathrm{Quad}_m\ \mathrm{A}. \tag{21}$$

回顾一下，Quad_mA 可以看作其线性包 $\widehat{\mathrm{Quad}_m \mathrm{A}}$ 上的一个仿射超平面。在这个线性包上存在一个特殊元素：

定义 5.3。单位仿射函数 $u \in$ Aff A 确定一个元素 $\widehat{u_m} = \mathrm{d}_m^* u = u \circ \mathrm{d}_m$，我们称之为线性包 Quad_mA 的单位元素。

满足 $\langle u_m, \bar{v}\rangle = 1$ 的仿射泛函 $\bar{v} \in \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 称为归一化仿射泛函。它们构成泛函的一个仿射子空间：

$$\bar{v} \in \mathrm{Aff}_1\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \Leftrightarrow \bar{v}(\delta + \alpha \cdot u) = \alpha + \bar{v}(\delta),\ \forall \delta \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

仿射空间 $\mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 上的仿射泛函 $\bar{v} \in \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ $\langle u_m, \bar{v}\rangle = 0$ 是可通过仿射商空间 $\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}/\mathrm{R}$ 因子化的函数，构成子空间 $\mathbf{Aff}_0\,\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$，称为 R-可投影仿射泛函空间。

仿射空间 $\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}/\mathrm{R}$ 上的仿射泛函空间 $\mathbf{Aff}_0\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$，是 m-余向量场仿射空间的方向空间，该空间由归一化仿射泛函构成：

$$\bar{v} \in \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} = \langle u_m\rangle^\circ \Leftrightarrow \bar{v}(\delta + \alpha \cdot u) = \bar{v}(\delta),\ \forall \delta \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

这是仿射空间 $\mathbf{Aff}_1\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 的方向空间。

根据正合列 (12)，$\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}/\mathrm{R}$ 中的元素可视为 A 上的仿射余向量场，它们经 d 投影到由度量 $m \in \mathbf{Met}\,\mathrm{A} = \mathbf{Quad}\mathrm{A}/\mathbf{Aff}\,\mathrm{A}$ 在 $\overrightarrow{A}$ 上确定的对称双线性形式。这些余向量场是闭的（对称的），因为相应的海森主分量与 m 相关联。因此，我们可以将 $\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}/\mathrm{R}$ 称为 A 上的 m-余向量场空间。

对于常值单位算子 $v_m \in \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$ 以及 $u_m = \mathrm{d}_m^* u$，有

$$\langle v_m, u_m\rangle = \langle \mathrm{d}_m v_m, u\rangle = v_m(\delta + u) - v_m(\delta) = 1 - 1 = 0, \quad \text{any } \delta \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}, \tag{22}$$

常值单位算子 v_m 属于 $\mathbf{Aff}_0\,\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$，即方向向量子空间。

另一方面，对于点 $P \in \mathrm{A}$，泛函 $v_P \in \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$ 具有如下性质（任意 $\delta \in \mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$）：

$$\langle v_P, u_m\rangle = \langle \mathrm{d}_m v_P, u\rangle = v_P(\delta + u) - v_P(\delta) = \delta(P) + u(P) - \delta(P) = 1. \tag{23}$$

因此，二次浸入 v: $P \in \mathrm{A} \hookrightarrow v_P \in \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 的像包含于归一化仿射函数的仿射超平面 $\mathbf{Aff}_1\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 中。

引理 5.4。设有一个度量 $m \in \mathbf{Met}\,\mathrm{A}$，其海森主分量为 $g_m \in S^2\overrightarrow{A}^*$。通过与二次映射 v: $\mathrm{A} \to \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 复合得到的映射 $\widehat{\delta} \mapsto \widehat{\delta \circ v}$ 是一个线性映射 $\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A} \to \mathbf{Quad}\,\mathrm{A}$。该线性映射限制在超平面 $\mathbf{Quad}_m\mathrm{A} \subset \mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 上时，就是自然浸入 $\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A} \hookrightarrow \mathbf{Quad}\,\mathrm{A}$；而 $\mathbf{Quad}\,\mathrm{A}$ 的海森主分量 $\widehat{}\ \widehat{}\ \widehat{}\ \frown$ 恰好是 $\langle \delta, v_m\rangle \cdot g_m$，对于任意 $\delta \in \mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$

$\widehat{}\ \frown$ 证明。任意元素 $\delta \in \mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$ 都是 $\mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\mathrm{A}$ 上的线性形式。因此，将该线性形式与二次映射 v: $\mathrm{A} \to \mathbf{Aff}\,\mathbf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 复合，得到从 A 到 R 的二次映射，故其为一个元素 $\delta \circ v \in \mathbf{Quad}\,\mathrm{A}$。其海森主分量不一定为 g_m。

显然，$(\widehat{\delta_1 + \alpha\delta_2}) \circ v = \widehat{\delta_1 \circ v + \alpha\, \delta_2 \circ v}$ 因此该映射 $\delta \mapsto \delta \circ v$ 是一个线性映射。

$\widehat{}$对于任意仿射空间 B，元素 $y \in \mathrm{B}$ 确定 $\widehat{y} \in \mathrm{B} = (\mathrm{Aff}\,\mathrm{B})^*$，其特征由 $\langle \widehat{y}, f\rangle = f(y)$ 给出。对于特殊情形 $\mathrm{B} = \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$，每个元素 $\widehat{\delta} \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 确定一个线性形式 $\delta \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$，使得 $\delta \circ v(P) = \widehat{\delta}\langle \delta, v_P\rangle = v_P(\delta) = \delta(P)$。因此，映射 $\delta \mapsto \delta \circ v$ 限制在 $\widehat{\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}} \subset \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 上是恒等映射。$\delta \circ v$ 的海森主分量是 $\delta \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 的海森主分量，即 g_m、$\widehat{}$，并且与 $\langle \delta, v_m\rangle \cdot g_m$ 重合，因为 $\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 是由$v_m = 1$定义的超平面。

不属于超平面 $\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 的元素是 $u_m \in \widehat{\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}}$。根据 (23)，有 $u_m \circ v(P) = 1$。因此，u_m 被变换为常值单位函数 $u \in \mathrm{Quad\ A}$。这个常函数的海森主分量 $\widehat{}$为 0，这再次与 $\langle \delta, v_m\rangle \cdot g_m$ 一致，适用于$\widehat{}$情形 $\delta = u_m$（由 (22) 可知）。

求二次函数的海森主分量是一种线性映射。因此，所提出的海森主分量公式在 $\widehat{\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \oplus \langle u_m\rangle} = \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 上成立。

□

注 5.5。对于非零度量 $m \in \mathrm{Met\ A}$，前述引理确定了一个从 $\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 到 $\mathrm{Quad\ A}$ 的线性浸入，其像为二次函数构成的子空间，其中这些函数的海森主分量是 g_m 的倍数。对于零度量 $m = 0$，这种对应关系不成立。

$\widehat{}$引理 5.6。在式 (20) 中描述的投影算子 $\mathrm{d}_m\colon \mathrm{Aff\ Quad}_m\,\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ 将二次函数上 P 处的求值算子 v_P 变换为仿射函数上 P 处的求值算子 z_P。它还将常值单位算子 v_m 变换为 0。

证明。由式 (21) 显然有，

$$\langle \mathrm{d}_m v_P, s\rangle = v_P(\delta+s) - v_P(\delta) = (\delta+s)(P) - \delta(P) = s(P) = \langle z_P, s\rangle, \quad \forall s \in \mathrm{Aff\ A}.$$

$\widehat{}$因此 $\mathrm{d}_m v_P = z_P \in (\mathrm{Aff\ A})^* = \mathrm{A}$。

关于 v_m，有 $\langle \mathrm{d}_m v_m, s\rangle = v_m(\delta + s) - v_m(\delta) = 1 - 1 = 0$ 对$s \in \mathrm{Aff\ A}$ 成立。

□

因此，所有元素 $v_P \in \mathrm{Aff\ Quad}_m\mathrm{A}$ 都属于仿射子空间 $\widehat{\mathrm{d}_m^{-1}(\mathrm{A})}$（使用浸入 $z\colon \mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{A}$）。此外，仅当$z_P = z_Q$时才有 $v_P = v_Q$，因此对于 $P = Q$ 成立。对于任意度量 $m \in \mathrm{Met A}$，仿射空间 A 都自然地浸入某个仿射超平面 $\mathrm{d}_m^{-1}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{Aff\ Quad}_m$中。

命题 5.7. 设 $m \in \mathrm{Met\ A}$ 是仿射空间 A 上的一个度量，$\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 是该空间上的任意仿射参照系。泛函 v_{R_0}、...、v_{R_n}、v_m（见定义 5.2）构成 $\mathrm{Aff\ Quad}_m\mathrm{A}$ 的一个基。

相应的对偶基为 w_0、...、w_n、$\delta^m_{\mathcal{R}} \in \widehat{\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}}$，其中 w_0、...、$w_n \in \mathrm{Aff\ A}$ 是与该参照系相关联的重心仿射坐标系，而 $\delta^m_{\mathcal{R}}$ 是与该度量相关联的 $\mathcal{R}$-约化二次函数（见定义 4.2）。

证明。设这些仿射泛函的一个给定线性组合为零：

$$\alpha_0 \cdot v_{R_0} + \ldots + \alpha_n \cdot v_{R_n} + \beta \cdot v_m = 0.$$

考虑投影 d_m：Aff Quad$_m$ A $\to$ (Aff A)*。我们已经知道（引理 5.6），这是一个线性投影算子，它将 v_P 变换为 z_P，并将 v_m变换为 0。因此：

$$\alpha_0 \cdot z_{R_0} + \ldots + \alpha_n \cdot z_{R_n} + \beta \cdot 0 = 0.$$

但我们已经知道（命题 2.1），z_{R_0}..... z_{R_n} 是 (Aff A)* 的线性基，因此可得 $\alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$。最后，由于 $v_m \neq 0$，我们还必须得出 $\beta = 0$。

元素 v_{R_0}、.....、v_{R_n}、v_m 于是线性无关。利用维数，我们得出它们构成 Aff Quad$_m$A 的基。

关于对偶基的陈述，请回忆，仿射函数通过式（20）中定义的浸入 d_m^* 被看作 Quad$_m$A 上的元素。于是只需观察：

$$\langle \delta^m_{\mathcal{R}}, v_{R_j} \rangle = \delta^m_{\mathcal{R}}(R_j) = 0, \quad \langle \delta^m_{\mathcal{R}}, v_m \rangle = 1,$$

并利用引理 5.6：

$$\langle \mathrm{d}^*_m w_k, v_{R_j} \rangle = \langle w_k, \mathrm{d}_m v_{R_j} \rangle = \langle w_k, z_{R_j} \rangle = \delta_{kj},$$
$$\langle \mathrm{d}^*_m w_k, v_m \rangle = \langle w_k, \mathrm{d}_m v_m \rangle = \langle w_k, 0 \rangle = 0.$$

□

命题 5.8。如果 m 是一个非退化度量，则 A 上的任意仿射参照系 $\mathcal{R} =$ (R_0、.....、R_n) 都确定 Quad$_m$A 上的一个基 ($\delta^m_{R_0}$、.....、$\delta^m_{R_n}$、u_m)。

证明。根据命题 5.7，我们知道 $v_{R_0}, \ldots, v_{R_n}, v_m$ 是仿射空间 Aff Quad$_m$A 上的一组基，因此也是 Quad$_m$A 上的一个线性坐标系。要证明给定的元素构成一组基，只需证明它们线性无关。按照 $\langle v_{R_i}, \delta^m_{R_j} \rangle = \delta^m_{R_j}(R_i) = \frac{1}{2} g(\overrightarrow{R_i R_j}, \overrightarrow{R_i R_j}) = \frac{1}{2} D_{ij}$,$\langle v_{R_i}, u_m \rangle = 1$, $\langle v_m, \delta^m_{R_j} \rangle = 1$ 和 $\langle v_m, u_m \rangle = 0$，我们只需证明以下矩阵是非退化的：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} D_{ij} & \mathbb{1}_n^t \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

然而，根据命题 4.7，我们已经知道 g 的非退化性意味着以下矩阵是非退化的：

$$\begin{bmatrix} D_{ij} & \mathbb{1}_n^t \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

将首行乘以因子 2，并将末列乘以因子 1/2，即可完成证明。

□

注意，Quad$_m$ A 和 Aff Quad$_m$A 互为对偶空间，但前一个空间的基 ($\delta^m_{R_0}, \ldots, \delta^m_{R_n}, u_m$) 并非后一个空间的基 ($v_{R_0}, \ldots, v_{R_n}, v_m$) 的对偶基。特别地，若我们将 $\delta^m_{R_i}, u_m$用作 Aff Quad$_m$A 上的线性坐标函数，那么 v_m 对应的坐标向量为 $[1 \ldots 1\, 0]^t \in M_{(n+2)1}$(R)。若我们将 v_{R_i}, v_m用作 Quad$_m$A 上的线性坐标函数，那么单位元 u_m 对应的坐标向量为$[1 \ldots 1\, 0]^t \in M_{(n+2)1}$(R)。

定义 5.4. 对于任意固定的非退化度量 $m \in \mathrm{Met\,A}$，以及某个 n 维仿射空间 A 上的任意仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，我们称函数 $\delta^m_{R_i} \in \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 为 A 上的凯莱-门格尔 o.d. 二次坐标系（或 CM 坐标）。

注 5.9. 根据命题 5.8，当 $m \in \mathrm{Met\,A}$ 非退化时，映射 $(\delta^m_{R_0}, \ldots, \delta^m_{R_n}, u_m) : \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A} \to \mathbb{R}^{n+2}$ 是一个线性坐标系。它在归一化泛函的仿射子空间上诱导出一个仿射坐标系 $(\delta^m_{R_0}, \ldots, \delta^m_{R_n}) : \mathrm{Aff}_1\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A} \to \mathbb{R}^{n+1}$。该坐标系与二次浸入 $v\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Aff}_1\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 的复合构成一个正交微分二次坐标系（定义 2.6），在欧几里得情形下称为半平方距离坐标函数。对于任意非退化度量，我们称之为凯莱–门格尔坐标。

这些 Cayley-Menger 坐标是二次函数，并且是超定的——
已确定。并非任意数值序列都是有效的 CM 坐标序列。
一个点。此外，指出 P 具有凯莱-门格尔坐标。
给定参照系中的向量（δ_0，...，δ_n）等价于表述 v_P具有坐标
向量$[\delta_0 \ldots \delta_n 1]^t$，其所在线性坐标系为$\delta^m_{R_0}$，...，$\delta^m_{R_n}$ u_m *of*
仿射二次形式$_m$ A. 此外，利用线性投影算子 d_m：$v_P \mapsto z_P$，可以恢复
P的重心坐标向量，即将其表示为（δ_0，...，δ_n，1）的线性组合，
因此也可将其表示为凯莱-门格尔坐标向量（δ_0，...，δ_n）的仿射表达式。
因此，坐标的二次性质并不是主要问题，而且重心-
重心坐标可以从 CM 坐标中线性恢复，而无需 the
无需进行开平方计算。

在现代技术应用中，机器人部件的位置由通过干涉测量或信号发送端与接收端之间的延迟所获得的相对距离测量值确定，基本位置信息就是相对距离；与不存在的固定笛卡尔参照系或仿射参照系相比，用凯莱-门格尔二次坐标可以更好地表达这种信息 *[10, 23, 12, 11, 13]*。

注意，由（21）式可知：

$$\bar{v} \in \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \Rightarrow \langle \mathrm{d}_m\bar{v}, u\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{d}_m\bar{v} \in \overrightarrow{A} \subset (\mathrm{Aff\,A})^*.$$

作为基本例子，我们有 $v_Q - v_P \in \mathrm{Aff}_0\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} = \langle u_m\rangle^\circ$（对于点$P$，$Q \in$A），因为它可以通过加上任意常数来分解。由于 $\mathrm{d}_m(v_P) = z_P$（引理 5.6），我们得到 $\mathrm{d}_m(v_Q - v_P) = z_Q - z_P = \overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{A}$。我们有正合列：

$$0 \longrightarrow \langle v_m\rangle \xhookrightarrow{i} \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{d}_m} \overrightarrow{A} \longrightarrow 0. \tag{24}$$

注意，对于任意的 $f \in \mathrm{Aff\,A}$ 和 $\bar{v}_0 \in \mathrm{Aff}_0\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} = \langle u_m\rangle^\circ$，根据定义，$\mathrm{d}_m\bar{v}_0$ 可通过任意选择 $\delta \in \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 得到：

$$\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}_m\bar{v}_0\rangle = \bar{v}_0(\delta + f) - \bar{v}_0(\delta).$$

另一方面，根据（20），我们可以考虑 $\mathrm{Aff\,A} \subset \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$，并将 $\bar{v}_0$用作该空间上的线性形式。我们有

$$\bar{v}_0(\delta + f) - \bar{v}_0(\delta) = \langle \delta + f, \bar{v}_0\rangle - \langle \delta, \bar{v}_0\rangle = \langle f, \bar{v}_0\rangle.$$

因此

$$\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}_m H\rangle = \langle f, H\rangle, \qquad \forall f \in \mathrm{Aff\,A}, \quad \forall H \in \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}. \tag{25}$$

命题 5.10。设仿射空间 A 上有度量 $m \in \mathrm{Met\,A}$，其海森主分量为 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$。对于 $\mathrm{Aff\,Quad}_m\mathrm{A}$ 上的任意对称双线性形式 CM，以下条件等价：

1. CM 在 $\langle u_m\rangle^\circ = \mathrm{Aff}_0\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 上的限制可由 d_m as$-g$ 投影；

1'. 对于 A 的某个仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，有：

$$\mathrm{CM}(v_{R_i} - v_{R_0}, v_{R_j} - v_{R_0}) = -g(\overrightarrow{R_0R_i}, \overrightarrow{R_0R_j}),$$
$$\mathrm{CM}(v_m, v_{R_i} - v_{R_0}) = 0, \quad \mathrm{CM}(v_m, v_m) = 0;$$

1''. 对于 A 的任意仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，前述条件均成立。

证明。对于给定的参照系 $\mathcal{R}$, $v_{R_i} - v_{R_0}, v_m$，它们构成 $\langle u_m\rangle^\circ = \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 的一组基。

若要使 CM 在 $\langle u_m\rangle^\circ/\langle v_m\rangle$ 上限制为可投影的对称双线性形式，元素 v_m 必须属于 CM 在 $\langle u_m\rangle^\circ$ 上限制的零空间；这一条件由条件 $\mathrm{CM}(v_m, \cdot) = 0$ 表示。

差向量 $v_{R_i} - v_{R_0}$ 可由 d_m 投影为 $z_{R_i} - z_{R_0} = \overrightarrow{R_0R_i}$。众所周知，这些向量构成 $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ 的一组基，由此得证。 □

一个有趣的观察是，对于任意 $P \in \mathrm{A}$，都有 $\langle v_P, u_m\rangle = 1 \neq 0$，因此存在如下分解：

$$\mathrm{Aff\,Quad}_m\,\mathrm{A} = \langle v_P\rangle \oplus \langle u_m\rangle^\circ.$$

现在我们将考虑 $\mathrm{Aff\,Quad}_m\mathrm{A}$ 上的一个特殊对称双线性形式。

定理 5.11. 对于仿射空间 A 上任意具有海森主分量 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$ 的非零度量 $m \in \mathrm{Met\,A}$，存在唯一一个定义在 $\mathrm{Aff\,Quad}_m\mathrm{A}$ 上的对称双线性形式 CM_m，使得：

1. CM_m 在 $\langle u_m\rangle^\circ = \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$上的限制可通过$\mathrm{d}_m$ to$-g$投影。

$$\mathrm{CM}_m(v_1, v_2) = -g(\mathrm{d}_m(v_1), \mathrm{d}_m(v_2)), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A};$$

2. 对每个点 $P \in \mathrm{A}$，泛函 $v_P \in \mathrm{Aff}_1\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 关于 CM_m 是各向同性的：

$$\mathrm{CM}_m(v_P, v_P) = 0, \quad \forall P \in \mathrm{A}.$$

此外，在假设（1.）成立的条件下，剩余条件（2.）等价于以下任意一个条件：

2'a. 对每个点 $P \in \mathrm{A}$，都有 $\mathrm{CM}_m(v_P) = \delta_P^m$；

2'b. 在某个点 $P \in \mathrm{A}$ 处，有 $\mathrm{CM}_m(v_P) = \delta_P^m$；

2''a. 对于 A 中的每个仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，元素 v_{R_i} 均为各向同性，且 $\mathrm{CM}_m(v_{R_i}, v_m) = 1$；

2”b. 对于某个仿射参照系 $\mathcal{R}=(R_0,\ldots,R_n)\in\mathsf{A}$，元素 v_{R_i} 均为各向同性，且其中一个点满足 $\mathsf{CM}_m(v_{R_0},v_m)=1$。

证明。我们从条件 (1)+(2’b) 开始。

• 存在性与唯一性：由于 $\mathsf{Aff}\,\mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}=\langle v_P\rangle\oplus\langle u_m\rangle^\circ$，该空间中的任意元素都可以唯一地写成 αv_P+v（其中 $\alpha\in\mathsf{R}$ 且 $v\in\langle u_m\rangle^\circ$）给定条件：

$$\mathrm{CM}_m \text{ symmetric bilinear},$$
$$\mathrm{CM}_m(v_P)=\delta_P^m,$$
$$\mathrm{CM}_m=-\mathrm{d}_m^*(g)\text{ on }\langle u_m\rangle^\circ,$$

唯一确定了双线性形式。也就是说，这些条件蕴含 $\mathsf{CM}_m(v_P,v_P)=\delta_P^m(P)=0$，而它必须是：

$$\mathrm{CM}_m(\alpha v_P+v,\bar\alpha v_P+\bar v)=\alpha\langle\bar v,\delta_P^m\rangle+\bar\alpha\langle v,\delta_P^m\rangle-g(\mathrm{d}_m(v),\mathrm{d}_m(\bar v))\quad v,\bar v\in\langle u_m\rangle^\circ,$$

它是对称的，并满足我们的所有条件。

对于等价刻画，我们接下来给出一个证明，其中使用了两组循环论证 (2’b)⇒ (2)⇒(2’a)⇒(2’b) 和 (2”b)⇒(2)⇒(2”a)⇒(2”b)，并以 (1) 为假设。

• 等价性（$2'b$） ⇒ (2) ⇒ ($2'a$) ⇒ ($2'b$)，在假设 (1) 下

我们来证明 (1)+(2’b)⇒ (1)+(2)

我们知道，对于某个特定的点 $P\in\mathsf{A}$，有 $\mathsf{CM}_m(v_P)=\delta_P^m$。因此：

$$\begin{aligned}\mathrm{CM}_m(v_Q,v_Q)&=\mathrm{CM}_m(v_P+(v_Q-v_P),v_P+(v_Q-v_P))=\\&=\mathrm{CM}_m(v_P,v_P)+2\,\mathrm{CM}_m(v_P,v_Q-v_P)+\mathrm{CM}_m(v_Q-v_P,v_Q-v_P)=\\&=0+2\,(\delta_P^m(Q)-\delta_P^m(P))-g(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ})=\\&=0+g(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ})+0-g(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ})=0,\end{aligned}$$

由此我们得出，所有元素 v_Q 对于 CM_m 都是各向同性的。

我们来证明 (1)+(2)⇒ (1)+(2’a)。

如果所有元素 v_Q 都是各向同性的，则有：

$$-2\,\mathrm{CM}_m(v_P,v_Q)=\mathrm{CM}_m(v_P-v_Q,v_P-v_Q)=-g(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ}),$$

因此 $\mathsf{CM}_m(v_P,v_Q)=\frac12 g(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ})=\delta_P^m(Q)$。这证明了 $\mathsf{CM}_m(v_P)\circ v=\delta_P^m$ 是一个 m-二次函数。根据引理 5.4，由于 $m\neq 0$，我们得出$\langle v_m,\ \mathsf{CM}_m(v_P)\rangle=1$，因此 $\mathsf{CM}_m(v_P)$ 属于超平面 $\mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}\subset\widehat{\qquad}\mathsf{Quad}_m\mathsf{A}$，并且恰好表示函数 δ_P^m。

蕴含关系 (1)+(2’a)⇒ (1)+(2’b) 是显然的。在假设 (1) 的条件下，我们已经证明了 (2)、(2’a) 和 (2’b) 等价。

• 等价关系 ($2''b$) ⇒ (2) ⇒ ($2''a$) ⇒ ($2''b$) 在假设 (1) 下

我们现在证明 (1)+(2”b)⇒ (1)+(2’b)（这等价于 (1)+(2)）

取 (1)+(2”b) 中指出的特定参照系，其中：

$$\mathrm{CM}_m(v_{R_0},v_m)=1,\quad \mathrm{CM}_m(v_{R_i},v_{R_i})=0.$$

于是我们有：

$$2\,\mathrm{CM}_m(v_{R_0},v_{R_j})=-\,\mathrm{CM}_m(v_{R_j}-v_{R_0},v_{R_j}-v_{R_0})=g(\overrightarrow{R_0R_j},\overrightarrow{R_0R_j})=2\delta_{R_0}^m(R_j).$$

如果我们结合这两个性质：

$$\mathrm{CM}_m(v_{R_0}, v_m) = 1 = \langle \delta^m_{R_0}, v_m \rangle,$$

$$\mathrm{CM}_m(v_{R_0}, v_{R_j}) = \langle \delta^m_{R_0}, v_{R_j} \rangle,$$

考虑到命题 5.7，我们得出 $\mathrm{CM}_m(v_{R_0}) = \delta^m_{R_0} \in \widehat{\quad}\mathrm{Quad}_m\mathrm{A} \subset \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$，因此，至少对于某个点，我们得到了 (2'b) 中给出的性质，而正如先前所证明的，该性质与 (1) 一起蕴含 (2)。

接下来让我们证明 (1)+(2)⇒ (1)+(2"a)。

其中一个方面已由 (2) 给出，即所有 v_{R_i} 都是各向同性的。另一方面，则需要证明 $\mathrm{CM}_m(v_m, v_R) = 1$。根据 (2'a)，我们知道 $\mathrm{CM}_m(v_P) \circ v = \delta^m_P \circ v$，这是一个 m-二次函数。因此，根据引理 5.4，$\mathrm{CM}_m(v_m, v_P) = \langle v_m, \mathrm{CM}_m(v_P) \rangle = 1$，这正是我们希望证明的结论，对任意点均成立。

最后，蕴含关系 (1)+(2"a)⇒(1)+(2"b) 显然成立。 □

定义 5.5. 定理 5.11 中所刻画的仿射二次包 $\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 上的对称双线性形式 CM_m 称为与度量 $m \in \mathrm{Met\ A}$ 相关联的凯莱-门格尔积。

利用仿射浸入 $\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{Quad\ A}$，我们得到一个诱导的线性投影算子 $\widehat{\mathrm{A}^2} = (\mathrm{Quad\ A})^* \to \mathrm{Aff\ Quad}_m\,\mathrm{A}$，从而可以将凯莱-门格尔积 CM_m 视为二次包 $\widehat{\mathrm{A}^2}$，上的对称双线性形式，该形式可由此映射投影得到。这称为定义在二次包 $\widehat{\mathrm{A}^2}$上、与 $m \in \mathrm{Met\ A}$ 相关联的凯莱-门格尔积。

注记 5.12. 如注记 5.3 所述，对于零度量 $m \in \widehat{\quad}\mathrm{Met\ A}$，切勿将 $\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 中的（零二次函数）δ^m_P与该向量空间的零元素混淆。定理 5.11 中的条件 *[1.]* 和 *[2'a.]* 也能在此情形下确定唯一的（非零）凯莱-门格尔双线性形式 CM_0，且该双线性形式满足我们的所有条件。然而，条件*[2.]* 并不等价于其他条件；例如，$\mathrm{Aff\ Quad}_m\mathrm{A}$ 上的零双线性形式也满足 *[1.]* 和 *[2.]*，却从未在$\delta^m_P \in \mathrm{Aff}_1\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 上取值。由于 $m = 0$ 在应用中相当无趣，我们可以始终假设 $m \neq 0$。不过，在 A 上不存在任何度量结构时，"空"的凯莱-门格尔（退化）双线性形式 CM_0 在某些情形下可能是有用的工具。

命题 5.13. 对于与度量 $m \in \mathrm{Met\ A}$ 相关的 Cayley-Menger 乘积 CM_m，以下性质成立：

1. 在子空间 $\mathrm{Aff}_0\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 上，$\mathrm{d} \circ \mathrm{CM}_m = -g \circ \mathrm{d}_m$ 成立。2. 对于 A 的任意参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$，$\mathrm{CM}_m$ 将 $\mathrm{Aff\ Quad}_m\mathrm{A}$ 的基 $(v_{R_0}, \ldots, v_{R_n}, v_m)$ 映射为 $\widehat{\quad}\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 的元素 $(\delta^m_{R_0}, \ldots, \delta^m_{R_n}, u_m)$（根据命题 5.8，若 m 非退化，则它们是该向量空间的一组基）。3. 对于 A 上任意一对仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 和 $\mathcal{S} = (S_0, \ldots, S_n)\widehat{\quad}$，线性态射 CM_m: $\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \to \mathrm{Aff\ Quad}_m\mathrm{A}$ 的矩阵表示，以第一个空间上的基 $(v_{R_0}, \ldots, v_{R_n}, v_m)$ 以及线性

第二个空间上的坐标 $(v_{S_0}, \ldots, v_{S_n}, v_m)$ 如下（混合参照凯莱-门格尔矩阵）：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}D^{\mathcal{RS}} & \mathbb{1}^t \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{ij}^{\mathcal{RS}} = g(\overrightarrow{R_iS_j}, \overrightarrow{R_iS_j}).$$

4. 以（v_{R_0}，...，v_{R_n}，v_m）为基，CM_m关联的格拉姆矩阵如下（凯莱-门格尔矩阵）：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}D^{\mathcal{R}} & \mathbb{1}^t \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{ij}^{\mathcal{R}} = g(\overrightarrow{R_iR_j}, \overrightarrow{R_iR_j}).$$

5. 如果 P、Q 在参照系 $\mathcal{R}$ 中具有重心坐标向量 p、$q \in \mathsf{W}_n$，则它们的伪距离平方由下式确定：

$$d^2(P,Q) = -\frac{1}{2}(q-p)^t \cdot D^{\mathcal{R}} \cdot (q-p).$$

证明。对于任意泛函 $\bar{v}_0 \in \mathsf{Aff}_0\mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}$，我们希望证明余向量 $-\mathsf{d} \circ \mathsf{CM}_m\,\bar{v}_0$ 与 $g \circ \mathsf{d}_m\bar{v}_0$ 重合。只需对任意向量 $\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{\mathsf{A}}$ 应用对偶性即可。由（24）可知，所有这些向量都具有 $\overrightarrow{x} = \mathsf{d}_m\bar{w}$ 的形式，其中 $\bar{w} \in \mathsf{Aff}_0\,\mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}$ 的选取是任意的。在这种情况下：

$$\langle -\mathrm{d} \circ \mathrm{CM}_m\,\bar{v}_0, \mathrm{d}_m\bar{w}\rangle = \langle -\,\mathrm{CM}_m\,\bar{v}_0, \bar{w}\rangle = \langle g \circ \mathrm{d}_m\bar{v}_0, \mathrm{d}_m\bar{w}\rangle,$$

其中我们使用公式 (25) 以及以下事实：CM_m 在 $\mathsf{Aff}_0\mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}$ 上通过 d_m 投影为 $-g$。

因此，这两个余向量在形如 $\mathsf{d}_m\bar{w}$ 的元素上相同，由此我们得出 $g \circ \mathsf{d}_m = -\mathsf{d} \circ \mathsf{CM}_m$。

定理 5.11 中的性质 (2'a) 表明，$\mathsf{CM}(v_{R_i}) = \delta_{R_i}^m$。为了证明 $\mathsf{CM}_m(v_m)$ 等于 u_m，只需根据 u_m 的定义注意到 $\langle u_m, v_{R_i}\rangle = 1$ 和 $\langle u_m, v_m\rangle = 0$，而 $\mathsf{CM}_m(v_m, v_{R_i}) = 1$ 且 $\mathsf{CM}(v_m, v_m) = 0$，这遵循同一定理中的 (2"a) 和 (1')。

当我们使用题述给出的两个参照系 $\mathcal{R}$、$\mathcal{S}$ 时，我们得到：

$$\langle \mathrm{CM}_m(v_{R_i}), v_{S_j}\rangle = \langle \delta_{R_i}^m, v_{S_j}\rangle = \frac{1}{2}\delta_{R_i}^m(S_j) = \frac{1}{2}g(\overrightarrow{R_iS_j}, \overrightarrow{R_iS_j}),$$

$$\mathrm{CM}_m(v_{R_i}, v_m) = \langle \delta_{R_i}^m, v_m\rangle = 1, \quad \mathrm{CM}_m(v_m, v_m) = \langle u_m, v_m\rangle = 0.$$

因此，使用给定的两个参照系与 CM_m 相关联的矩阵，就是陈述中给出的矩阵；而我们陈述下一部分中的 Gram 矩阵，则对应于二次包上的单个参照系 $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ 的情形。

最后，如果我们将 g 称为……上的对称双线性形式 $\overrightarrow{A}$ 与度量 m 相关联，我们从 CM_m 定义中的性质 (1.) 可以观察到：

$$d^2(P,Q) = \langle z_P - z_Q, g(z_P - z_Q)\rangle = -\langle v_P - v_Q, \mathrm{CM}_m(v_P - v_Q)\rangle,$$

因为 $v_P - v_Q$ 属于 $\langle u_m\rangle^\circ$。使用相对于 $\mathcal{R}$所诱导的基的坐标表示：

$$d^2(P,Q) = -\left[\alpha_0 \ldots \alpha_n\beta\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}D^{\mathcal{R}} & \mathbb{1}^t \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\alpha_0 \ldots \alpha_n\beta\right]^t.$$

其中 α_0、$\ldots$、α_n、β表示 $v_P - v_Q$在基 v_{R_0}、$\ldots$、$\sim v_{R_n}$、 v_m中的坐标。由于 v_Q在 A 上的投影为 z_Q，分量 α_0、$\ldots$、α_n是 $z_P - z_Q$的线性坐标，因此它们等于相应重心坐标向量之差 $p - q$。此外，由于 $\mathbb{1}_n \cdot p = \mathbb{1}_n \cdot q = 1$，我们得出结论$\mathbb{1}_n \cdot \alpha = 0$，上述表达式因而与分量 β无关：

$$d^2(P,Q) = -\frac{1}{2}(q-p)^t \cdot D^{\mathcal{R}} \cdot (q-p).$$

考虑到 $\delta_P^m(Q) = \frac{1}{2}d^2(P,Q)$ 以及前面为我们的矩阵表示所述的关系 $-\frac{1}{2}D^{\mathcal{R}} = G = 2\Delta$，该公式与已知的 (6) 一致。

□

注 5.14. 文献中已知，某些空间上存在具有与定理 5.11 所述性质类似的双线性形式，有时通过专门构造得到，有时则有更内在的描述。 *[17]* 中的定理 5.5 就是一个很好的例子，适用于非退化度量 $m \in$ Met A 的情形。我们可以用本文的术语表述该定理：在某个向量空间（由二次函数 δ_P^m 生成）上确定一个双线性形式 G，并以满足 $G(\delta_P^m, \delta_Q^m) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\|^2$ 为其性质。正如我们将在下文看到的，对于非退化度量的情形，这实际上是与我们的 Cayley–Metric 二次形式相关联的逆二次形式。

此外，在某些应用中， *[11]* 作者考虑将一个空间构造为某个点集的自由仿射张成（称为与该点集相关联的粘合空间），其中距离确定了一个双线性形式（作者称之为 Schoenberg 二次型 *[24]*）。然而，这种表述不具有函子性，并且在很大程度上依赖于点的选择。

我们可以利用凯莱-门格尔双线性形式来关联二次映射 $v\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 和 $\delta^m\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 的两个仿射收缩：

引理 5.15. 考虑由度量 $m \in$ Met A 的选取所确定的映射 $v\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Aff}_1\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 和 $\delta^m\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$。对于任意点对 $P, Q \in$ A 和一维权重 $(\alpha, \beta) \in \mathrm{W}_1$，有：

- $v(\alpha P + \beta Q) - \alpha v(P) - \beta v(Q) \in \langle v_m \rangle = \mathbb{R}$,
- $\delta^m(\alpha P + \beta Q) - \alpha\delta^m(P) - \beta\delta^m(Q) \in \langle u_m \rangle = \mathbb{R}$.

两种情况下的常数值均为 $\frac{-\alpha\beta}{2} \cdot \mathrm{CM}_m(v_P, v_Q)$。

证明。我们首先考虑 $\bar{v} = v(\alpha P + \beta Q) - \alpha v(P) - \beta v(Q)$.

F或任意 $\delta \in \mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ and any $f \in {}^{\mathrm{Aff\,A}}$ there holds:

$$\langle \bar{v}, \delta + f \rangle = \langle \bar{v}, \delta \rangle + \langle v_{\alpha P+\beta Q}, f \rangle - \alpha\langle v_P, f \rangle - \beta\langle v_Q, f \rangle.$$

对于仿射 f，我们知道

$$\langle v_{\alpha P+\beta Q}, f \rangle = f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q) = \alpha\langle v_P, f \rangle + \beta\langle v_Q, f \rangle.$$

因此，对于任意仿射函数 $f \in$ Aff A， $\langle \bar{v}, \delta + f \rangle = \langle \bar{v}, \delta \rangle$。回想一下，与 Quad_mA 相关联的方向向量空间是 Aff A。因此， $\bar{v}$ 是一个在 Quad_mA 上取常数值的仿射算子。由于 Quad_mA 是一个超平面

$\widehat{}$ 在 $\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 上，由 $v_m(\delta) = 1$ 确定，这意味着 $\bar{v} \in \langle v_m \rangle$，这正是我们结论的第一部分。

这现在意味着 $\mathrm{CM}_m(\bar{v}) \in \langle \mathrm{CM}_m(v_m) \rangle$，这就是我们的第二个陈述：

$$\delta^m(\alpha P + \beta Q) - \alpha\delta^m(P) - \beta\delta^m(Q) \in \langle u_m \rangle.$$

要确定两个陈述中的常数值，请注意，根据推论4.4，δ^m 是一个二次映射，因此：

$$\begin{aligned}\delta^m(\alpha P + \beta Q) - \alpha\delta^m(P) - \beta\delta^m(Q) &= \alpha(\alpha-\beta)\delta^m(P) + \beta(\beta-\alpha)\delta^m(Q) + \\ &+ 4\alpha\beta\delta^m\left(\frac{P+Q}{2}\right) - \alpha(\alpha+\beta)\delta^m(P) - \beta(\alpha+\beta)\delta^m(P) = \\ &= -2\alpha\beta\left(\delta^m(P) + \delta^m(Q) - 2\delta^m\left(\frac{P+Q}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

我们知道这是一个常函数（取决于 P、Q、α、β 的选择）。例如，取点 $(P+Q)/2$ 处的值，并根据 δ^m 的定义可知，$\delta^m_P((P+Q)/2) = \delta^m_Q((P+Q)/2) = \frac{1}{4}\delta^m_P(Q)$，我们得到：

$$\begin{aligned}\delta^m(\alpha P + \beta Q) - \alpha\delta^m(P) - \beta\delta^m(Q) &= -2\alpha\beta \cdot \frac{1}{4}\delta^m_P(Q) = -\frac{1}{2}\alpha\beta\delta^m_P(Q) = \\ &= \frac{-\alpha\beta}{2}\,\mathrm{CM}_m(v_P, v_Q)\end{aligned}$$

□

因此，二次映射 δ^m 与仿射投影算子 p 的复合：$\mathrm{Quad}_m\mathrm{A} \to \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}/\mathrm{R}$ 确定了一个仿射映射 $p\circ\delta^m\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}/\mathrm{R}$。我们也可以说，$v\colon \mathrm{A} \to \mathrm{Aff}_1\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 与投影算子 d_m 的复合是一个仿射映射。然而，在这种情况下，这个复合显然就是映射 $z\colon \mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{A}$，而我们已经知道它是仿射的。

命题5.16。考虑一个度量 $m \in \mathrm{Met}\,\mathrm{A}$，其关联的海森矩阵主分量为 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$。对于任意固定点 $Q \in \mathrm{A}$，考虑二次函数的梯度在 Q 处所定义的仿射映射 $\nabla_Q\colon \mathrm{Quad}_m\mathrm{A} \to \overrightarrow{A}^*$，它自然线性延拓到线性包 $\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$，并记为 $\widehat{}$。考虑所诱导的对偶映射 $\nabla^*_Q\colon \overrightarrow{A} \to \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$。这些映射构成如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}\overrightarrow{A} & \xrightarrow{\nabla^*_Q} & \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\mathrm{A} \\ \downarrow{\scriptstyle -g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{CM}_m} \\ \overrightarrow{A}^* & \xleftarrow[\nabla_Q]{} & \widehat{\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}}.\end{array}$$

此外，∇_Q 的零空间由 u_m 和 δ^m_Q 生成，而 ∇^*_Q的像是这样一组仿射泛函：它们可通过 R 因子化，并且在 $\delta^m_Q \in \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 处为零。

证明。注意到 ∇_Q 可按 R 分解（加上一个常数不会改变二次函数在任一点处的梯度）。因此，∇^*_Q 取值于子空间 $\mathrm{Aff}_0\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$。

回顾一下，任意仿射函数在任一点处的梯度都是该仿射函数的线性主分量。因此，对于任意方向向量 $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{A}$ 和任意仿射函数 $f \in \mathsf{Aff}\,\mathrm{A}$，根据（25）有：

$$\langle \mathrm{d}_m(\nabla_Q^*(\overrightarrow{a})), \mathrm{d}f\rangle = \langle f, \nabla_Q^*(\overrightarrow{a})\rangle = \langle \overrightarrow{a}, \nabla_Q f\rangle = \langle \overrightarrow{a}, \mathrm{d}f\rangle,$$

因此，对于任意方向向量 $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{A}$，$\mathsf{d}_m \circ \nabla_Q^*(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$。

回忆一下，根据定义，CM_m 在 $\mathsf{Aff}_0\,\mathsf{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 上的限制是 $-g$ 在 d_m：$\mathsf{Aff}_0\,\mathsf{Quad}_m\,\mathrm{A} \to \overrightarrow{A}$ 下的拉回。因此我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\overrightarrow{A} & \xrightarrow{\nabla_Q^*} & \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} & \xrightarrow{\mathrm{d}_m} & \overrightarrow{A} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{CM}_m} & & \downarrow{\scriptstyle -g} \\
\overrightarrow{A}^* & \xleftarrow[\nabla_Q]{} & \widehat{\mathrm{Quad}_m}\,\mathrm{A} & \xleftarrow[\mathrm{d}_m^*]{} & \overrightarrow{A}^*,
\end{array}$$

考虑到 $\mathsf{d}_m \circ \nabla_Q^* = \mathrm{Id}$ 意味着 $-g$：$\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}^*$，这使左侧的图表闭合。

对于该陈述的第二部分，在 $\mathsf{Aff}\,\mathrm{A} \subset \mathsf{Quad}_m\mathrm{A}$ 上，梯度映射就是主分量的计算。因此 ∇_Q 满射到 $\overrightarrow{A}^*$，根据维数，其零空间是一个 2 维子空间。

由于 ∇_Q 被 R 除尽，元素 $u_m \in \widehat{\mathrm{Quad}_m}\mathrm{A}$ 属于∇_Q的零空间。此外，根据定义，δ_Q^m 在 Q处的梯度为零，因此 δ_Q^m 也属于此零空间。我们知道 $\langle \delta_Q^m, v_m\rangle = 1$，因此 δ_Q^m与u_m线性无关。因此，∇_Q 的零空间由这两个元素生成，而∇_Q^*的像是所有在 u_m 上为零（因此属于 $\mathsf{Aff}_0\,\mathsf{Quad}_m\,\mathrm{A}$）且同时在 δ_Q^m上为零的仿射算子的集合。 □

命题 5.17。考虑一个度量 $m \in \mathsf{Met}\,\mathrm{A}$，其海森矩阵主分量为 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$，凯莱-门格尔双线性形式为 $\mathsf{CM}_m : \mathsf{Aff}\,\mathsf{Quad}_m\,\mathrm{A} \to \widehat{\mathrm{Quad}_m}\,\mathrm{A}$。考虑双线性形式 $\mathsf{swap}(a, b) = (b, a)$，其定义域为 $(a, b) \in \mathrm{R} \oplus \mathrm{R}$。以下是一个交换图，其中水平箭头互为伴随同构：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \overrightarrow{A} & \xrightarrow{v_m \oplus v_Q \oplus \nabla_Q^*} & \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} \\
\downarrow{\scriptstyle (swap, -g)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{CM}_m} \\
\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \overrightarrow{A}^* & \xleftarrow[(v_m, v_Q, \nabla_Q)]{} & \widehat{\mathrm{Quad}_m}\,\mathrm{A}.
\end{array}$$

因此，带有凯莱-门格尔度量的 $\mathsf{Quad}_m\mathrm{A}$ 与标准双曲平面（$\mathrm{R}^2, \mathsf{swap}$）和度量向量空间（$\overrightarrow{A}$，$-g$）的直和等距。

证明。由线性性可知，我们只需研究这些线性映射在 $\mathrm{R} \oplus \mathrm{R} \oplus \overrightarrow{A}$ 的元素 $(1, 0, \overrightarrow{0})$、$(0, 1, \overrightarrow{0})$ 和 $(0, 0, \overrightarrow{a})$ 上的作用。

首先，由于 u_m 的海森主分量为零，且在任意点 Q处的梯度为零、函数值为 1：

$$(1, 0, \overrightarrow{0}) \xrightarrow{v_m \oplus v_Q \oplus \nabla_Q^*} v_m \xrightarrow{\mathrm{CM}_m} u_m \xrightarrow{(v_m, v_Q, \nabla_Q)} (0, 1, 0).$$

其次，由于 δ_Q^m 以 g 为海森主分量，且在 Q处的函数值和梯度均为零：

$$(0,1,\overrightarrow{0}) \xrightarrow{v_m\oplus v_Q\oplus\nabla_Q^*} v_Q \xrightarrow{\mathrm{CM}_m} \delta_Q^m \xrightarrow{(v_m,v_Q,\nabla_Q)} (1,0,0).$$

最后，由命题5.16可知，$\mathrm{CM}_m\,\nabla_Q^*(\overrightarrow{a})$ 在点 Q 处的梯度为 $-g(\overrightarrow{a})$。此外，由于 CM_m 是自伴的，我们观察到

$$\langle v_m, \mathrm{CM}_m\,\nabla_Q^*(\overrightarrow{a})\rangle = \langle u_m, \nabla_Q^*(\overrightarrow{a})\rangle = 0$$

and

$$\langle v_Q, \mathrm{CM}_m\,\nabla_Q^*(\overrightarrow{a})\rangle = \langle \delta_Q^m, \nabla_Q^*(\overrightarrow{a})\rangle = \langle \nabla_Q\delta_Q^m, \overrightarrow{a}\rangle = 0,$$

由此得出：

$$(0,0,\overrightarrow{a}) \xrightarrow{v_m\oplus v_Q\oplus\nabla_Q^*} \nabla_Q^*(\overrightarrow{a}) \xrightarrow{\mathrm{CM}_m} \mathrm{CM}_m\,\nabla_Q^*(\overrightarrow{a}) \xrightarrow{(v_m,v_Q,\nabla_Q)} (0,0,-g(\overrightarrow{a})).$$

从而证明了我们的结果。

关于(v_m, v_Q, ∇_Q)的满射性，我们可以观察到，它将δ_Q^m变换为$(1, 0, \overrightarrow{0})$，并且还将任意仿射函数 $f \in \mathrm{Aff\,A} \subset \widehat{\ }\mathrm{Quad}$

m $0\ f\ Q\ ,\ f$ $v_m\ v_Q\ \nabla_Q$ $v_m \oplus \mathrm{A}$变

$v_Q \oplus \nabla_Q^*$ $\oplus$ $\oplus \overrightarrow{A}^*$

换为(, ( ) d)。根据维数计算，(, ,)和将是同构。利用R R与R⊕R⊕ $\overrightarrow{A}$之间的自然对偶配对，显然(v_m, v_Q, ∇_Q)是 $v_m \oplus v_Q \oplus \nabla_Q^*$的伴随，从而完成证明。 □

$\widehat{\ }$注记 5.18. 根据命题 5.17，在固定仿射空间中的一个原点（即本命题中的参照点） Q后，$\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 的元素可以更简单地视为 R $\times$ R $\times$ $\overrightarrow{A}^*$ 中的元素。这一映射表示一个函数 $\delta_P^m - \frac{1}{2}r^2 \in \mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ as $\left(1, \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP}\|^2 - \frac{1}{2}r^2, -g(\overrightarrow{OP})\right) \in$ R $\times$ R $\times$ $\overrightarrow{A}^*$。它还将一个仿射函数 $f(X) = \omega(\overrightarrow{OX}) + c \in \mathrm{Aff\,A}$ 表示为 $(0, c, \omega) = (0, f(O), \mathrm{d}f)$。

在莫比乌斯几何中（例如参见 *[25]*），在具有欧几里得结构 $g \in S^2\overrightarrow{A}^*$ 的 n 维空间 A 上，每个超球面都表示为某个 $n+2$ 维洛伦兹度量空间中的一条直线。这种浸入是通过一个特定的点和立体投影构造的。莫比乌斯给出的表示将一个中心为 P、半径为 r 的超球面（我们可以将其视为一个函数 $\delta_P^m - \frac{1}{2}r^2$）映射到由以下元素生成的一条直线上。

$$(u, v, \vec{x}) = \left(\frac{1+\|\overrightarrow{OP}\|^2 - r^2}{2}, \frac{1-\|\overrightarrow{OP}\|^2 + r^2}{2}, \overrightarrow{OP}\right) \in \mathbb{R}^2 \oplus \overrightarrow{\mathrm{A}}.$$

在空间 $\mathrm{R}^2_{u,\ v} \oplus \overrightarrow{\ }\mathrm{A}$ M ¨obius 几何中，洛伦兹结构由 (d

$u^2 - \ v^2 \ \oplus g$ $u\ v\ \vec{x} \ \mapsto \ u + \mathrm{d}$)

$v\ \frac{u-v}{2}\ -g\ \vec{x} \ \in \ ^2 \oplus \overrightarrow{A}^*$

给出。只需结合映射 (, ,) (, , ( )) R 以及命题 5.17 中给出的同构，即可看出，M ¨obius 对超球面的特设表示，只是 $\mathrm{Quad}_m\mathrm{A}$ 在凯莱-门格尔度量下的一种特定表示（若 g 是欧几里得的，该度量便是洛伦兹度量）。在这种表示中，超球面被识别为 $\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A}$ 中的 $\delta_P^m - \frac{1}{2}r^2 \in$ 二次函数 $\subset \widehat{\ }^m\mathrm{Quad\,A}$。

Pedoe 在研究平面圆的乘积时，也使用了这种浸入洛伦兹空间及其射影化的方法 *[16]* 。在我们的形式体系中，这个 Pedoe 乘积就是将凯莱-门格尔度量 $\widehat{}$ 应用于 Quad$_m$A 的某些特定元素。

借助定理 5.11 中给出的自然凯莱-门格尔双线性形式，我们以内蕴的方式表述了经典的 M ¨obius 几何（以及 Lie 球面几何）。我们将在一篇配套论文中重点讨论这些结果对射影空间上极性的影响。

推论 5.19. 对任意点 $Q \in$ A，向量子空间 $\overrightarrow{H}_Q = \langle v_Q, v_m \rangle \subset$Aff Quad$_m$ A 配备限制在其上的凯莱-门格尔双线性形式 CM$_m$ 后，是一个双曲平面（惯性指数为 (1, 1, 0)），其 CM$_m$-正交补 $\overrightarrow{H}_Q^{\perp}$ 与 $(\overrightarrow{A}, -g)$ 等距，等距映射为 ∇_Q^*: $\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{H}_Q^{\perp} \subseteq$ Aff Quad$_m$ A。

推论 5.20. 若 m 是 A 上惯性指数为 (π, ν, ρ) 的度量，则 CM$_m$ 是 Aff Quad$_m$ A 上惯性指数为 $(\nu + 1, \mu + 1, \rho)$ 的对称双线性形式。

推论 5.21. 若 m 是 A 上的非退化度量，则 CM$_m$ 是 Aff Quad$_m$A 上的非退化度量。

现在我们可以将凯莱一门格二次曲面（即二次浸入 $A \subset$ Aff Quad$_m$A 的像）上的点刻画为 CM$_m$ 各向同性向量锥与一个垂直于 v_m 的仿射超平面的交:

定理 5.22. 对任意非零度量 $m \in$ Met A，考虑 Aff Quad$_m$ A 上的凯莱-门格双线性形式 CM$_m$。对任意元素 $\bar{v} \in$ Aff Quad$_m$A，以及二次浸入 v: $P \in$ A $\mapsto v_P \in$ Aff Quad$_m$ A，有:

$$\bar{v} \in \operatorname{Im} v \Leftrightarrow \mathrm{CM}_m(\bar{v}, \bar{v}) = 0, \quad \mathrm{CM}_m(\bar{v}, v_m) = 1.$$

证明. 一个方向的蕴含是显然的。若 $\bar{v} = v_P$，我们知道:

$$\mathrm{CM}_m(\bar{v}, \bar{v}) = \mathrm{CM}_m(v_P, v_P) = \langle v_P, \delta_P^m \rangle = \delta_P^m(P) = 0,$$

$$\mathrm{CM}_m(\bar{v}, v_m) = \mathrm{CM}_m(v_P, v_m) = \langle v_m, \delta_P^m \rangle = 1.$$

让我们证明反方向。取 $z = \mathrm{d}_m(\bar{v}) \in$ A $=$ (Aff A)*，其中 d$_m$: Aff Quad $_m$ A $\to$ A 是引理 5.6 中研究的自然投影算子。注意，这个投影的零空间是 v_m。

现在假设 $\langle u_m, \bar{v} \rangle =$ CM$_m$($v_m, \bar{v}$) $= 1$。因此，回想起 $u_m = \widehat{u} \circ \mathrm{d}_m$，我们有 $\langle u, z \rangle = 1$。我们知道，这意味着对于某个点 $P \in$A，有 $z = z_P \in$ A $\subset$ A。

我们来证明，使用 CM$_m$($\bar{v}, \bar{v}$) $= 0$，可得 $\bar{v} = v_P$。

由于并且由于 $\in \widehat{v_m}$ 生成 d$_m$ 的零空间，我们可以得出结论：对于某个元素 $c \in$ R，有 $\bar{v} = v_P + c \cdot v_m \in$ Aff Quad$_m$A。

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{CM}_m(\bar{v}, \bar{v}) &= \mathrm{CM}_m(v_P + c \cdot v_m, v_P + c \cdot v_m) = \\ &= \mathrm{CM}_m(v_P, v_P) + 2c \cdot \mathrm{CM}_m(v_m, v_P) + c^2 \cdot \mathrm{CM}_m(v_m, v_m) = 2c, \end{aligned}$$

因此 $c = 0$，我们得出结论 $\bar{v} = v_P$。 □

推论 5.23. 对于非退化度量，相应的凯莱-门格尔$\widehat{\quad}$双线性形式 CM_m: Aff Quad_m A $\to \mathrm{Quad}_m$ A 是可逆的，而凯莱-门格尔二次映射 δ^m: A $\to \mathrm{Quad}_m$ A 是一个浸入（推论 4.4）。δ^m 的像由以下条件刻画：

$$\delta \in \operatorname{Im} \delta^m \Leftrightarrow \mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, \delta) = 0, \quad \mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, u_m) = 1.$$

证明。根据命题 5.13 和 5.8，CM_m 的像是整个空间$\widehat{\quad}$$\mathrm{Quad}_m$ A。此外，我们知道 $v \circ \mathrm{CM}_m = \delta^m$（定理 5.11 中的性质 2），也知道定理 5.22 中 CM_m 如何刻画 v 的像。因此，δ 具有δ_P^m的形式，当且仅当 $\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta)$ 具有 $\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta_P^m) = v_P$的形式。因此：

$$\delta \in \operatorname{Im} \delta^m \Leftrightarrow \mathrm{CM}_m\left(\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta), \mathrm{CM}_m^{-1}(\delta)\right) = 0, \quad \mathrm{CM}_m\left(\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta), v_m\right) = 0.$$

考虑到 $u_m = \mathrm{CM}_m(v_m)$，可将其写为：

$$\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, \delta) = 0, \quad \mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, u_m) = 1.$$

□

注 5.24。考虑一个度量 $m \in$ Met A，其格拉姆矩阵在参照系 $\mathcal{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ 中的表示为 $G = G_{\mathcal{R}}^m$。我们知道它与平方距离矩阵 $D_{ij} = \hat{g}(\overrightarrow{R_i R_j}, \overrightarrow{R_i R_j})$之间的关系为$G = -\frac{1}{2} D$。根据命题 5.13，双线性形式 CM_m 在基 $v_{R_0}, \ldots, v_{R_n}, v_m$下的格拉姆矩阵为

$$\begin{bmatrix} -G & \mathbb{1}^t \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

当 m 非退化时，CM_m 有逆。如果我们将 $\delta_{R_i}^m = \mathrm{CM}_m(v_{R_i})$ 和 $u_m = \mathrm{CM}_m(v_m)$ 用作$\widehat{\quad}$$\mathrm{Quad}_m$A 上的基，那么 CM_m^{-1} 在该基下的格拉姆表示仍为 (26)；但若使用 v_{R_i}、v_m 的对偶基作为基，那么 CM_m^{-1} 的格拉姆表示就是 (26) 的逆。

定义 5.5 中凯莱-门格尔双线性形式的表述，是根据定理 5.11 中列举的内在性质加以刻画的。所有这些性质都使用了由度量仿射空间 (A, m) 函子性地导出的空间和对象。人们会预期，凯莱-门格尔双线性形式 CM_m 相对于仿射变换具有协变性。

考虑任意仿射变换 φ: B $\to$ A。仿射映射与二次映射的复合仍为二次映射。因此，我们得到诱导映射：

- 线性映射 φ_{Quad}: Quad A $\to$ Quad B，由 $(\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta)(P) = \delta(\varphi(P))$ 定义，其中任意 $P \in$ B 和 $\delta \in$ Quad A 均成立。
- 线性映射 φ_{Aff}: Aff A $\to$ Aff B，是前一个映射在子空间 Aff A $\subset$ Quad A 上的限制，且取值于 Aff B（仿射函数的复合仍是仿射函数）。
- 线性映射 φ_{Met}: Met A $\to$ Met B，由 φ_{Quad}从商空间 Met A $=$ Quad A/ Aff A 到 Met B $=$ Quad B/ Aff B 诱导而来。
- 仿射映射 φ_{Quad}: Quad_m A $\to \mathrm{Quad}_{\bar{m}}$ B，是 φ_{Quad} 在子空间 Quad_m A 上的限制，其取值于 $\mathrm{Quad}_{\bar{m}}$ B，且 $\bar{m} = \varphi_{\mathrm{Met}} m$，根据 $\varphi_{\mathrm{Met}} m$ 的定义。

- Linear mapping $\varphi^*_{\mathrm{Quad}}$: $\mathrm{Aff\,Quad}_{\varphi_{\bar{m}}}\,\mathrm{B} \to \mathrm{Aff\,Quad}_m\,\mathrm{A}$, obtained by composition with φ_{Quad}.

- Linear mapping $\widehat{\varphi}\colon \widehat{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathrm{A}}$, dual to φ_{Aff}.

- Linear mapping $\mathrm{d}\varphi\colon \overrightarrow{B} \to \overrightarrow{A}$, restriction of the previous one to $\overrightarrow{B}$.

引理 5.25. 对任意仿射映射 φ: B $\to$ A、任意点 $P \in$ B 以及单位函数 $u_A \in$ QuadA、 $u_B \in$ Quad B，均有:

$$\varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P = v_{\varphi(P)}, \quad \varphi_{\mathrm{Quad}} u_A = u_B$$

证明。对于任意 $\delta \in$ QuadA，我们有:

$$\langle \varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P, \delta \rangle = \langle v_P, \varphi_{\mathrm{Quad}}(\delta) \rangle = (\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta)(P) = \delta(\varphi(P))$$

因此， $\varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P$对任意二次函数 δ的取值，恰好等于 δ在点 $\varphi(P)$ 处的值。这正是 $v_{\varphi(P)}$的定义。

关于单位函数，显然对于任意 $P \in$ B， $u_A(\varphi(P)) = 1$，因此 $\varphi^*_{\mathrm{Quad}} u_A = u_B$。 □

由 $\varphi_{\mathrm{Quad}} u_A = u_B$ 可推知， $\varphi^*_{\mathrm{Quad}}$ 将 $\mathrm{Quad}_{\bar{m}}$ A 上的 R-可投影仿射算子变换为 Quad_mB 上的 R-可投影仿射算子；又由于在这些空间上，式 (20) 中给出的 d^A_m 和 $\mathrm{d}^B_{\bar{m}}$ 只是对主线性分量的计算，因此得到如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_m\,\mathrm{A} & \xrightarrow{\mathrm{d}^A_m} & \overrightarrow{A} \\ {\scriptstyle \varphi^*_{\mathrm{Quad}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}\varphi} \\ \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_{\bar{m}}\,\mathrm{B} & \xrightarrow{\mathrm{d}^B_{\bar{m}}} & \overrightarrow{B}. \end{array} \tag{27}$$

引理 5.26。若 g_m 是度量 $m \in$MetA 的海森主分量，则度量 $\bar{m} = \varphi_{\mathrm{Met}} m$ 的海森主分量为 $\mathrm{d}\varphi^* g_m$。

证明。取任意一个表示 $m \in$ Met A 的二次函数 $\delta \in$ QuadA。度量 $\varphi_{\mathrm{Met}} m$ 由二次函数 $\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta$ 表示

二次函数 δ 与 $\widehat{\ }$A 上的双线性二次型 $\widehat{g}$ 相关，该二次型由 δ 通过公式 (13) 给出。此外，对于任意 $P, Q \in$ B，我们知道$z_{\varphi(P)} = \widehat{\varphi}(z_P)$。因此:

$$\widehat{g}(\widehat{\varphi}(z_P), \widehat{\varphi}(z_Q)) = \widehat{g}(z_{\varphi(P)}, z_{\varphi(Q)}) = 4\delta\left(\frac{\varphi(P)+\varphi(Q)}{2}\right) - \delta(\varphi(P)) - \delta(\varphi(Q))$$

同理， $\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta$ 是由另一个双线性型表示的二次函数:

$$\begin{aligned} \widehat{g}_2(z_P, z_Q) &= 4(\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta)\left(\frac{P+Q}{2}\right) - (\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta)(P) - (\varphi_{\mathrm{Quad}}\delta)(Q) = \\ &= 4\delta\left(\varphi\left(\frac{P+Q}{2}\right)\right) - \delta\left(\varphi(P)\right) - \delta\left(\varphi(Q)\right) \end{aligned}$$

考虑到 φ 是仿射的，我们得出 $\widehat{g}_2 = \widehat{\varphi}^* \widehat{g}$。由于两个海森主分量都是将这些双线性型限制到 $\overrightarrow{A} \subseteq \widehat{A}$和 $\overrightarrow{B} \subseteq \widehat{B}$上得到的，并且 $\widehat{\varphi}$的限制： $\widehat{\mathrm{B}} \to \widehat{\mathrm{A}}$是线性映射$\mathrm{d}\varphi$： $\overrightarrow{B} \to \overrightarrow{A}$，因此我们完成了证明。

□

定理 5.27. 对于任意仿射映射 φ: B $\to$ A，其中 B 是某个仿射空间，且 (A m) 是度量仿射空间（其中 $m \in$ Met A），若诱导度量 $\bar{m} = \varphi_{\mathrm{Met}} m \in$ Met B 非零，则与 m 相关联的凯莱-门格尔双线性形式 CM_m 和与 $\bar{m}$ 相关联的凯莱-门格尔双线性形式 $\mathrm{CM}_{\bar{m}}$ 满足以下关系：

$$\mathrm{CM}_{\bar{m}}(\bar{v}, \bar{w}) = \mathrm{CM}_m(\varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}, \varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{w}),\ \forall \bar{v}, \bar{w} \in \mathrm{Aff}\,\mathrm{Quad}_{\bar{m}}\,\mathrm{B}$$

证明. 只需证明，在元素 $\bar{v}, \bar{w} \in$Aff $\mathrm{Quad}_{\bar{m}}$ B 上定义的双线性形式 $\mathrm{CM}_m(\varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}$, $\varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{w})$ 满足定理 5.11 中对 $\mathrm{CM}_{\bar{m}}$ 所要求的条件 (1) 和 (2)。我们需要证明：

$$\mathrm{CM}_m(\varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}_1, \varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}_2) = -g_{\bar{m}}(\mathrm{d}^B_{\bar{m}} \bar{v}_1, \mathrm{d}^B_{\bar{m}} \bar{v}_2), \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathrm{Aff}_0\,\mathrm{Quad}_{\bar{m}}\,\mathrm{B}$$

$$\mathrm{CM}_m(\varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P, \varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P) = 0, \qquad \forall P \in \mathrm{B}$$

第二个条件由引理 5.25 立即得出，因为 CM_m 满足定理 5.11 的条件 (2)：

$$\mathrm{CM}_m(\varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P, \varphi^*_{\mathrm{Quad}} v_P) = \mathrm{CM}_m(v_{\varphi(P)}, v_{\varphi(P)}) = 0$$

对于第一个条件，我们注意到与 $\bar{m}$ 相关联的海森主分量是 $\mathrm{d}\varphi^* g_m$ （其中 g_m 是与 $m \in$ MetA 相关联的海森主分量），因此：

$$-g_{\bar{m}}(\mathrm{d}^B_{\bar{m}} \bar{v}_1, \mathrm{d}^B_{\bar{m}} \bar{v}_2) = -g_m(\mathrm{d}\varphi \circ \mathrm{d}^B_{\bar{m}} \bar{v}_1, \mathrm{d}\varphi \circ \mathrm{d}^B_{\bar{m}} \bar{v}_2) = \dots$$

利用交换图 (27)，我们得到：

$$\dots = -g_m(\mathrm{d}^A_m \circ \varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}_1, \mathrm{d}^A_m \circ \varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}_2) = \dots$$

现在利用定理 5.11 中定义 CM_m 的性质 (1)：

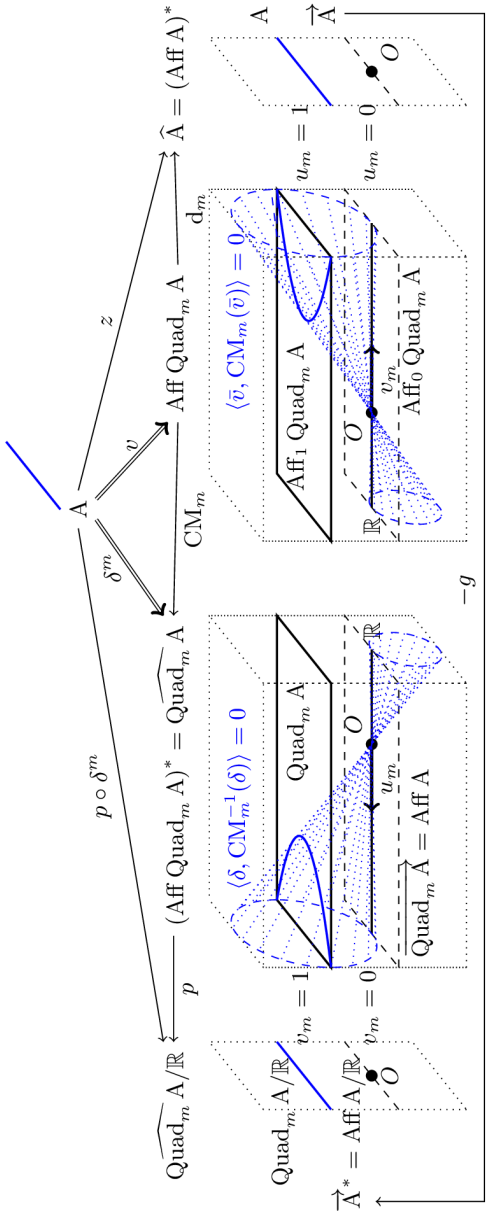
$$\dots = \mathrm{CM}_m(\varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}_1, \varphi^*_{\mathrm{Quad}} \bar{v}_2)$$

由此完成证明 □

推论 5.28. 若 φ: A $\to$ A 是度量仿射空间 (A m) 上的仿射等距映射，则 $\varphi^*_{\mathrm{Quad}}$ 是向量空间 Aff Quad_m A 上关于凯莱 - 门格尔双线性形式 CM_m 的线性等距映射。若 CM_m 可逆，则其对偶映射 φ_{Quad} 是 Quad_mA 上的仿射变换，并可扩展为线性包 Quad_mA 上的线性变换 $\widehat{}$，它表示 Quad_mA 关于凯莱-门格尔逆双线性形式 CM_m^{-1} 的等距映射。

注 5.29. 我们可以用图 1 中的示意图说明本节所述各对象之间的映射关系，具体考虑 dim A $= 1$ （仿射直线）的情形。双箭头表示仿射空间之间的二次映射，单箭头表示仿射映射（由线性映射确定）

图 1：凯莱-门格尔双线性形式与自然态射。



在相应的线性包上）。在 Aff Quad$_m$A 上，我们表示凯莱-门格尔积 CM$_m$ 的$\widehat{\quad}$各向同性锥；在对偶空间 Quad$_m$A 上，则表示与逆凯莱-门格尔积 C M$_m^{-1}$相关的各向同性锥（当 m 非退化时，该逆积存在）。请注意，尽管 v: A $\hookrightarrow$ Aff Quad$_m$ A$\widehat{\ }$是一个二次浸入，但它有一个线性收缩 d$_m$: Aff Quad A $\to$ A。此线性收缩将仿射子空间（$u_m = 1$） $\equiv$ Aff$_1$Quad$_m$ A $\subset\widehat{\ }$Aff Quad$_m$A 映射到仿射子空间（$u = 1$） $\equiv$ A $\subset$ A。同理，对于非退化度量，尽管 δ^m 是一个二次映射，若将仿射空间 Quad$_m$A/R（A 上的 m-余向量场构成的空间）与仿射空间 A 等同起来， p 便起到线性收缩的作用：它将每个 m-余向量场映射到其梯度余向量为零的唯一点。

6 例

我们将在一个简单情形中展示前几节介绍的所有工具的适用性。为了更广泛地应用 Cayley-Menger 矩阵（以及我们将其具体表述为双线性形式的方式），我们建议考虑 [26]。

考虑一个二维实仿射空间 A 和给定的参照系 $\mathcal{R} =(R_0, R_1, R_2)$。我们可以使用其重心坐标向量（一个权重）表示 A 上的点，并使用其空心坐标向量表示 $\overrightarrow{A}$ 的方向向量。例如，对于中点 $R_{02} = (R_0 + R_2)/2 \in$ A 、 $P = \mathrm{inv}_{R_0} R_1 = 2R_0 - R_1 \in$ A 关于 R_0 的反演 R_1 （见定义 3.3），以及方向向量 $\overrightarrow{R_0R_2} \in \overrightarrow{A}$，其矩阵表示分别为 $r_{02}, p \in$ W$_2$,$x_{02} \in$H$_2$:

$$R_{02} \to r_{02} = [1/2\,0\,1/2]^t, \quad P \to p = [2\ -1\,0]^t, \quad \overrightarrow{R_0R_2} \to x_{02} = [-1\,0\,1]^t$$

考虑一个特定的二次函数 $\delta \in$ Quad A，其特征由一个矩阵 S给出，该矩阵包含其在参照系 $s_{ij} = \delta\left(\frac{R_i+R_j}{2}\right)$ 及其中点处的值，如下所示。利用（5），我们得到其重心坐标表示 Δ:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta = 2S - \frac{1}{2}\left((\mathrm{diag}\, S)^t \mathbb{1} + \mathbb{1}^1 (\mathrm{diag}\, S)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -7 \\ -5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

值 $\delta(P)$ 可以利用该点的重心坐标表示为$\delta(P) = p^t \cdot \Delta \cdot p$。仿射函数 $f \in$ Aff A 在 R_0、 R_1、 R_2 处与 δ 具有相同的值，其特征由行系数向量 $c =$ diag $S =$ diag $\Delta =$[1 9 1]给出。 δ 在 R_{02}处的齐次分量、在 P处的分量以及 $\mathcal{R}$-约化分量 δ都是新的二次函数 $\delta^h_{R_{02}}$、 δ^h_P、 $\delta^0_{\mathcal{R}}$，其重心表示分别由（7）和（9）给出:

$$\Delta^h_{R_{02}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 5 & 11 & -5 \\ -3 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta^h_P = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \Delta^0_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -12 \\ -6 & -12 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

根据定理 3.8，这些函数 $\delta^h_{R_{02}}, \delta^h_P, \delta^0_{\mathcal{R}}, \delta$分别与 A 上的一个双线性$\widehat{\ }$形式相关联。在该向量空间的基 $z_{R_0}, z_{R_1}, z_{R_2}$下，这些双线性型

的格拉姆矩阵分别为 $G = 2\Delta$, $G^h_{R_{02}} = 2\Delta^h_{R_{02}}$, $G^h_P = 2\Delta^h_P$, $G^0_{\mathcal{R}} = 2\Delta^0_{\mathcal{R}}$。简单计算可知，这些对称矩阵的惯性指数并不相同。前两个（在一点处齐次）的惯性为 (2, 0, 1)。根据注4.6，这意味着海森主分量的指数为 (2, 0, 0)，且 δ 是凸的。

二次函数 δ、$\delta^h_{R_{02}}$、δ^h_P、$\delta^0_{\mathcal{R}}$ 彼此相差一个仿射函数。它们表示相同的度量 $m \in \mathsf{Quad\,A}/\mathsf{Aff\,A}$。$\widehat{\mathsf{A}}$ 上相应的二次型在子空间 $\overrightarrow{A} \subset \widehat{\mathsf{A}}$ 上具有相同的限制。以 $\overrightarrow{R_0R_1}$、$\overrightarrow{R_0R_2}$ 作为 $\overrightarrow{A}$ 的基，其限制的格拉姆矩阵为：

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \cdot G \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 24 \end{bmatrix} \quad (\text{same for } G^h_{R_{02}}, G^h_P, G^0_{\mathcal{R}})$$

$\widehat{\mathsf{A}}$它是正定的。然而，与表示同一度量的其他二次函数相关联的 A 上的双线性型，其惯性指数未必相同。

我们有一个度量的唯一代表 $\delta^0_{\mathcal{R}}$，它在参照系处取值为零；当我们以 v_{R_0}、v_{R_1}、v_{R_2} 作为基时，$G = 2\Delta^0_{\mathcal{R}}$ 就是该度量的线性包格拉姆矩阵表示。

根据命题 5.8，二次函数 $\delta^m_{R_0}, \delta^m_{R_1}, \delta^m_{R_2}, u_m$ 在 $\mathsf{Quad}_m\mathsf{A}$ 上确定一个$\widehat{\quad}$基。在这个空间中，我们有逆凯莱－门格度量 CM_m^{-1}，其在该基下的格拉姆矩阵由 (26) 给出：

$$\mathrm{CM}_m \to \begin{bmatrix} -G^0_{\mathcal{R}} & \mathbb{1}^t \\ \mathbb{1}^t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \\ 12 & 24 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

我们想知道 δ 是否属于凯莱-门格尔二次曲面，即它是否具有某个点的形式 δ^m_Q。

m-二次函数 δ 在点 R_0、R_1、R_2处的取值分别为 1、9、1，因此它在 v_{R_0}、v_{R_1}、v_{R_2}、v_m的对偶基下的坐标为 $d = [1\,9\,1\,1]$，且：

$$\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, \delta) = [1\,9\,1\,1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \\ 12 & 24 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$$

因此，在这种情况下，δ 不属于凯莱－门格二次曲面，无法对任何点写成 δ^m_Q。

我们知道 $\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, \delta) = -4$ 和 $\mathrm{CM}_m^{-1}(u_m, u_m) = 0$。对于任意 $c \in \mathsf{R}$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{CM}_m^{-1}(\delta + cu_m, \delta + cu_m) &= -4 + c^2 \cdot 0 + 2c\,\mathrm{CM}_m^{-1}(\delta, u_m) = \\ &= -4 + 0 + 2c \cdot \langle \delta, v_m \rangle = -4 + 2c \end{aligned}$$

我们得出，$\delta + 2u_m$ 属于凯莱－门格二次曲面，其形式为δ^m_Q。存在一个点 $Q \in \mathsf{A}$ 和一个常数 $r = 2$，使得 $\delta = \delta^m_Q - \frac{1}{2}r^2$。我们为例子选取的函数 δ 形式为 $\delta^m_Q - \frac{1}{2}r^2$，它在以某个点 Q 为球心、半径为 $r = 2$的 m-球面上为零。由此可以推断

该点的位置。由于 $\delta_Q^m = \delta + 2$ 在点 R_0、R_1、R_2处分别取值 $1+2$、$9+2$、$1+2$，以 v_{R_0}、v_{R_1}、v_{R_2}、v_m为线性坐标，$\widehat{\quad}$元素 $\delta_Q^m \in \mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A} \subset \mathsf{Quad}_m\,\mathsf{A}$ 的坐标为 (3, 11, 3, 1)。我们知道$v_Q = \mathsf{CM}_m^{-1}(\delta_Q^m)$，因此乘以矩阵 (29) 的逆矩阵，即可确定 v_Q在基 v_{R_0}、v_{R_1}、v_{R_2}、v_m中的坐标：

$$v_Q = \frac{1}{2}v_{R_0} + 0v_{R_1} + \frac{1}{2}v_{R_2} - 3v_m$$

通过 d_m 投影可知 $z_Q = 1/2v_{R_0} + 0v_{R_1} + 1/2v_{R_2}$，且 m 球心在我们的参照系中的重心坐标为（1/2, 0, 1/2），因此该球心恰好是 $R_{02} \in$A。事实上，我们可以查阅矩阵表达式 (28)，发现

$$\Delta^h_{R_{0,2}} - 2\mathbb{1}^t \cdot \mathbb{1} = \Delta,$$

这反映了 $\delta = \delta^h_{R_{02}} - 2u$。

在任意（伪）度量空间中，可以相对于任意参照系使用凯莱-门格尔矩阵，运用线性代数方法解决若干度量问题。大多数应用 [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 23, 26] 都针对欧几里得情形，但正如本文所示，借助适当的几何概念，可以将这一理论推广到任意仿射空间，甚至推广到仿射丛，并适用于具有任意惯性指数的度量。

附录：二次函数的刻画

在本附录中，我们将证明一些结果，表明二次性条件（4）刻画了这样一类定义在仿射空间上的函数：其仿射坐标表示遵循经典的二次多项式表达式。为了将这些结果理解为“非平凡的”，请回想定义 3.1 依赖于点的重心组合（4），而不是依赖于任何仿射坐标多项式表示。

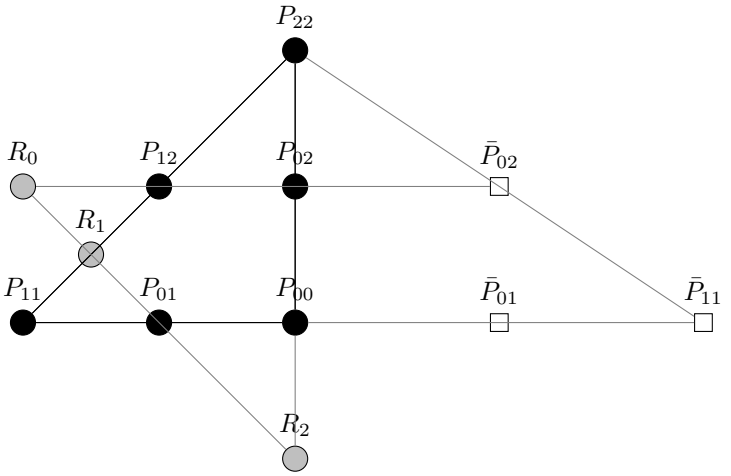
˜引理 Ap.1. 如果 δ, δ 是仿射空间 A 和 B 之间的二次映射，并且它们在 A 中的两个点 $P, Q \in$ 及相应的中点$\frac{P+Q}{2} \in$ 处重合，那么它们在经过$\langle P, Q\rangle \subseteq$ 的仿射直线上的所有点处也重合。

证明。仿射直线上的点具有 $\alpha \cdot P + \beta \cdot Q$ with $\alpha + \beta = 1$ 的形式。由此，该引理可直接由二次性条件 (4) 得出。 □

˜引理 Ap.2。（位似替换规则）如果 δ、δ 是仿射空间 A 和 B 之间的二次映射，并且在三个点 P_0、P_1、P_2 及其中点 $P_{ij} = \frac{P_i+P_j}{2}$ 处重合，那么对于任意实数值 α，二次函数 $\bar{\delta}_1$、$\bar{\delta}_2$ 在点 $P_0 = P_0$、$P_1 = P_0 + \alpha(P_1 - P_0)$、$P_2 = P_2$ 及其中点 $\bar{P}_{ij} = \frac{\bar{P}_i+\bar{P}_j}{2}$处也重合。

证明。我们将考虑如下图所示的若干辅助点：

$$R_0 = -\frac{1}{2}P_0 + P_1 + \frac{1}{2}P_2, \quad R_1 = \frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2, \quad R_2 = \frac{3}{2}P_0 - \frac{1}{2}P_2$$



由于 δ、δ 是二次的，且在 P_{00} 处重合，在其中点 P_{01} 处也重合，因此我们得出它们在仿射直线 $\langle P_{00}$、$P_{11}\rangle$ 上重合，故：

$$\delta(\bar{P}_{11}) = \tilde{\delta}(\bar{P}_{11}), \qquad \delta(\bar{P}_{01}) = \tilde{\delta}(\bar{P}_{01})$$

我们仍需证明它们在 P_{02} 处重合。

由于 δ 是二次的，且在 P_{00} 处重合；又在其中点 P_{02} 处重合，因此我们得出

$$\delta(R_2) = \tilde{\delta}(R_2)$$

由于 δ，δ 是二次的，且在 P_{11} 处重合；又在其中点 P_{12} 处重合，因此我们得出

$$\delta(R_1) = \tilde{\delta}(R_1)$$

考虑到 P_{01} 是 R_0 和 R_2 的中点，且 $R_1 = \frac{3}{4}R_0 + \frac{1}{4}R_2$ 在同一直线上，δ 的二次性条件 (4) 表明：

$$\delta(R_1) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\delta(R_0) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\delta(R_2) + 4\frac{3}{4}\frac{1}{4}\delta(P_{01}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta(R_0) = \frac{1}{3}\delta(R_2) - 2\delta(P_{01}) + \frac{8}{3}\delta(R_1)$$

对于 δ，同样的论证和公式也成立。考虑到 δ，δ 在 R_1，R_2 处重合，我们得出

$$\delta(R_0) = \tilde{\delta}(R_0)$$

最后，由于 δ、δ 是二次函数，且在 R_0处重合，并在其中点P_{12}处也重合，因此它们在直线 $\langle P_{12}$、$P_{02}\rangle$上重合，于是

$$\delta(\bar{P}_{02}) = \tilde{\delta}(\bar{P}_{02})$$

这就完成了我们的证明。 □

引理 Ap.3。（一般代换规则）设 δ、δ 是仿射空间 A、B 之间的二次映射，在点 P_0、P_1、.....、P_k 以及相应的中点 $P_{ij} = \frac{1}{2}(P_i + P_j)$ 处重合，则对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$，在点 $\bar{P}_0 = P_0$、$\bar{P}_1 = P_1$、$\bar{P}_2 = P_1 + x(P_2 - P_0)$、$\bar{P}_i = P_i\ (\forall i > 2)$ 及相应的中点处，这两个二次映射也重合。

证明。考虑点 P_0、 P_1、 P_2、 P_i $(i > 2)$。

使用位似替换规则，取比为 2，将点 P_0、 P_1 与原列表中的每一个其余点一起处理，我们可以替换并取 $P_1 = P_0 + 2(P_1 - P_0)$。随后， δ、 δ 在以下各点重合:

$$P_0, P_0 + 2(P_1 - P_0), P_2, P_i. \quad i > 2$$

以及在相应的中点处。

使用位似替换规则，取比为 $2x$，将点 P_0、 P_2 与新列表中的每一个其余点一起处理，我们得出 δ、 δ 随后在以下各点重合:

$$P_0, P_0 + 2(P_1 - P_0), P_0 + 2x(P_2 - P_0), P_i$$

以及在相应的中点处。

对该列表中的第二个点和第三个点使用位似替换规则，取 $\alpha = \frac{1}{2}$，并与每一个其余点一起处理，我们得出 δ、 δ 均在以下各点重合:

$$P_0, P_0 + 2(P_1 - P_0), P_1 + x(P_2 - P_0), P_i$$

以及在相应的中点处。

最后，应用以第一个点为中心、比例因子为 1/2的位似替换规则，我们得出 δ与 δ 在这些点处重合

$$P_0, P_1, P_1 + x(P_2 - P_0), P_i$$

并且在相应的中点处也重合。

□

上述替换规则是线性代数中常见的基本变换的仿射描述。由此性质，我们最终得出主要结果:

命题 Ap.4. 若 δ、 δ 是仿射空间 A、B 之间的二次映射，且它们在所有点 P_0、 P_1、 . . .、 P_k 及相应的中点$P_{ij} = \frac{P_i + P_j}{2}$处重合，那么它们在这些点的任意仿射组合 $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k$ 处也重合（其中 $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$）

证明。我们先应用位似替换。

由在 δ、 P_0、 P_1、 ....、 P_k 处重合，并且在相应的中点处，针对 P_0、 P_1、 P_i 应用位似替换规则，标量为 α_1，可知它们也在以下位置重合:

$$P_0, \bar{P}_1 = (1 - \alpha_1)P_0 + \alpha_1 P_1, P_2, \ldots, P_k$$

并且在相应的中点处。

对前三个点应用一般代换规则和标量 α_2，即可得出 δ、 δ 也在以下位置重合:

$$P_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2 = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, P_3, \ldots, P_k$$

并且位于相应的中点。

对第一、第三和~第四个点应用一般代换规则，取标量 α_3，可得 δ、δ 也重合于:

$$P_0, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3 = (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3,\, P_4, \ldots, P_k$$

以及在相应的中点处。

~反复应用同一论证，最终我们得到一个点，在此处 δ 和 δ 重合:

$$(1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_k)P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k$$

这个点是我们陈述中的仿射组合（回忆 $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_k = 1$，因此这一加法的第一项是 $\alpha_0 P_0$） □

定理 Ap.5. 考虑两个仿射空间 A 和 B。固定一个仿射参照系 $\mathcal{R} = (R_0, R_1, \ldots, R_n)$ 及其中点 $R_{ij} = \frac{R_i+R_j}{2}$。对于给定的任意 $\binom{n+2}{2}$点 $Q_{ij} \in$ B（其中 $Q_{ij} = Q_{ji}$, $0 \le i, j \le n$），存在唯一的二次映射 δ: A $\to$B，使得 $\delta(R_{ij}) = Q_{ij}$。这个二次映射可表示为:

$$\delta(x_0 R_0 + \ldots + x_n R_n) = \sum_{i,j} x_i x_j \Delta_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = 2Q_{ij} - \frac{1}{2}Q_{ii} - \frac{1}{2}Q_{jj} \in \mathrm{B}$$

证明。唯一性依赖于前面的引理。任何一对在点 R_{ij} 处取相同已知值 Q_{ij} 的二次映射，在这些点 R_i 的每个仿射组合上都必定相同。

关于其存在性，只需证明所提出的公式是一个二次映射，且在上述点处取给定值。令 x表示任意点 P的重心坐标向量。对于行矩阵 $\mathbb{1} = [1 \ldots 1]$，有 $\mathbb{1} \cdot x = 1$。

我们可以将陈述中提出的公式写为

$$\delta(P) = x^t \cdot \Delta \cdot x$$

其中，Δ 是一个以点 $\Delta_{ij} \in$B 为取值的方阵。

注意，当 $\sum_{ij} x_i x_j = 1$ 时，$\sum x_i = 1$，因此，δ 的给定表达式是点 $\Delta_{ij} \in$ B 的仿射组合。还要注意，对于这些点，有 $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ 和 $\Delta_{ii} = Q_{ii}$。所提出的公式是一个定义良好的仿射组合，并且显然在所有点 $R_{ij} = \frac{1}{2}R_i + \frac{1}{2}R_j$ 处取给定值 Q_{ij}。

我们想证明我们对 δ 的定义是二次的，也就是说，当我们考虑两个点 R、S，并考虑满足 $\alpha+\beta=1$ 的 α、β 时:

$$\delta(\alpha R + \beta S) = \alpha(\alpha-\beta)\delta(R) + \beta(\beta-\alpha)\delta(S) + 4\alpha\beta\delta\left(\frac{R+S}{2}\right) \tag{30}$$

取重心坐标向量 x、y。仿射组合 $\alpha R + \beta S$ 的重心坐标为 $\alpha x + \beta y$。因此:

$$\delta(\alpha R + \beta S) = (\alpha x + \beta y)^t \Delta (\alpha x + \beta y)$$

二次性条件（30）因此可写为:

$$(\alpha x + \beta y)^t \Delta (\alpha x + \beta y)^t =$$

$$= \alpha(\alpha-\beta)x^t \Delta x + \beta(\beta-\alpha)y^t \Delta y + 4\alpha\beta \left(\frac{x+y}{2}\right)^t \Delta \left(\frac{x+y}{2}\right)$$

现在利用矩阵乘积的线性性即可轻松得出这一结论。 □

换言之，该定理证明，定义 3.1 恰好确定了这样一类映射：它们可以用坐标表示为经典的二次矩阵乘积。

对于特殊情形 B = R，我们得出二次函数空间 Quad(A, R) =Quad A 是一个向量空间，并且与对称的 $(n+1)$-阶方阵线性对应：Quad A $\simeq$ Sym^{n+1} (R)（使用一个参照系）。因此，它是一个维数为 $\binom{n+2}{2}$ 的向量空间。

参考文献

[1] A. Cayley, 《位置几何中的一个定理》, 《剑桥数学杂志》2（1841）267–271。doi:10.1017/CBO9780511703676.002.[2] K. Menger, 《一般度量研究》, 《数学年刊》103（1-P）（1930）466–501。doi:10.1007/978-3-7091-6110-4_20.[3] R. Lachlan, 《关于圆与球面系统》, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》177（1886）481–625.[4] G. Darboux, 《关于平面与空间中点、圆和球面群之间的关系》, 载于: 《高等师范学校科学年鉴》, 第1卷, 1872年, 第323–392页。doi:10.24033/asens.87.[5] H. Cox, 《关于圆系统与双圆四次曲线》, 第19卷, Longmans and co., 1883年.[6] J. L. Coolidge, 《圆与球面论》, Clarendon Press, 1916年.[7] A. F. M¨obius, 《纯几何表述的圆变换理论》, 《皇家萨克森科学学会论文集》4（1855）531–595.[8] S. Lie, 《关于复形, 尤其是直线复形和球复形, 并应用于偏微分方程理论》, 《数学年刊》5（1）（1872）145–208。doi:10.1007/BF01446331.[9] A. Y. Alfakih, 《欧几里得距离矩阵及其在刚性理论中的应用》, 施普林格, 2018年。doi:10.1007/978-3-319-97846-8.[10] M. Cao, B. D. Anderson, A. S. Morse, 《具有不精确距离的传感器网络定位》, 《系统与控制快报》55（11）（2006）887–893。doi:10.1016/j.sysconle.2006.05.004.[11] G. M. Crippen, T. F. Havel 等, 《距离几何与分子构象》, 第74卷, Research Studies Press Taunton, 1988年。[12] I. Dokmanic, R. Parhizkar, J. Ranieri, M. Vetterli, 《欧几里得距离矩阵: 基本理论、算法与应用》, 《IEEE信号处理杂志》32（6）（2015）12–30。doi:10.1109/MSP.2015.2398954.[13]F. Thomas, L. Ros, 《重新审视机器人定位中的三边测量》, 《IEEE机器人学汇刊》21（1）（2005）93–101。doi:10.1109/TRO.2004.833793.

[14]F. Thomas、J. M. Porta，《克利福德恒等式与广义凯莱-门格尔行列式》，载于：《国际机器人运动学进展研讨会》，施普普林格，2020年，第285–292页。doi:10.1007/978-3-030-50975-0_35。

[15]L. Liberti, C. Lavor, N. Maculan, A. Mucherino，《欧几里得距离几何及其应用》，SIAM评论 56 (1) (2014) 3–69。doi:10.1137/120875909。[16] D. Pedoe，《利用三维空间中的点表示圆》，《数学公报》21 (244) (1937年) 210–215。doi:10.2307/3605400。[17]W. Bertram，《从线性代数经由仿射代数到射影代数》，《线性代数及其应用》378 (2004年) 109–134。doi:10.1016/j.laa.2003.06.021。[18] M. Buliga，《具有膨胀结构的度量空间的无穷小仿射几何》，《休斯敦数学杂志》36 (1) (2010年) 91–136。[19] C. Tisseron，《仿射、射影与欧几里得几何》，Hermann Paris，1983年。[20] X. Gr`acia, R. Mart´ın，《仿射空间与仿射丛的向量包》，《应用数学学报》103 (1) (2008年) 101–129。doi:10.1007/s10440-008-9222-6。[21] M. Berger，《几何学 I》，施普林格出版社，1991年。[22]J. Maddocks，《受限二次型、惯性定理与舒尔补》，《线性代数及其应用》108 (1988年) 1–36。doi:10.1016/0024-3795(88)90177-2。[23]J. C. Gower，《欧几里得与非欧几里得距离矩阵的性质》，《线性代数及其应用》67 (1985年) 81–97。doi:10.1016/0024-3795(85)90187-9。[24] I. Schoenberg，《对 Maurice Fr´echet 文章“论一类可向量地映射到希尔伯特空间的距离空间的公理化定义”的评论》，Ann. of Math 36 (1935年) 724–732。[25]T. E. Cecil，《李球面几何》，施普林格，1992年。doi:10.1007/978-1-4757-4096-7。[26] T. F. Havel，《距离作为欧几里得几何坐标的一些示例》，《符号计算杂志》11 (5-6) (1991年) 579–593。doi:10.1016/S0747-7171(08)80120-4。