arXiv:2305.02188v1 [math-ph] 3 May 2023

双色随机平面映射上的哈密顿回路

Bertrand Duplantier*、Olivier Golinelli† 和Emmanuel Guitter‡

法国吉夫-叙尔-伊韦特 91191，巴黎-萨克雷大学、法国原子能和替代能源委员会、法国国家科学研究中心、理论物理研究所

2023年5月3日

我们研究了具有球面拓扑的多类双色随机平面图上的哈密顿回路统计。这些类分为两组，分别对应两个不同的普适类，其中心荷分别为 $c = -1$ 和 $c = -2$。第一组包括顶点度固定为 $p \geq 3$的通用 p正则映射；第二组则包括顶点具有混合度的映射，以及所谓的刚性 $2q$-正则映射情形（$q \geq 2$）：在这种情形下，每个顶点处未被访问的边在回路两侧均匀分布。我们预测了各类对应的普适构型指数 γ，以及一个刻画哈密顿回路上长程接触数目的新普适临界指数 ν 。这些指数在理论上通过运用 Knizhnik、Polyakov 和 Zamolodchikov（KPZ）关系得到；该关系采用相应的中心荷数值，并在 ν 的情形下应用于规则（六边形或正方形）晶格上相应的临界指数。我们通过分析 $p = 3$、4、.....、7-正则映射以及度为（2，3）、（2，4）和（3，4）的混合度映射的精确枚举结果，对这些预测进行了数值验证。

1. 引言

平面地图是嵌入二维球面且边不相交的连通图，并视同于同胚变换下的等价类。一个映射由其

*bertrand.duplantier@ipht.fr
†olivier.golinelli@ipht.fr
‡emmanuel.guitter@ipht.fr

顶点、边和面刻画，其中面都具有圆盘的拓扑结构。在本文中，映射的规模定义为其顶点数。如果一个平面地图的顶点被着成黑色和白色，且边只连接不同颜色的顶点，则称该平面地图是双色的。哈密顿回路是沿映射的边绘制的闭合无自交路径，并且经过映射的所有顶点。本文研究在各种双色平面地图族上枚举哈密顿回路的组合问题。注意，双色平面地图上的哈密顿回路长度必然是偶数，我们将其记为 $2N$，这同时也是底层映射的规模。

对于给定的一类双色平面图，我们用 z_N 表示这类大小为 $2N$、带有一条哈密顿回路和一条标记的已访问边的映射的构型数量。量 z_N 称为所研究模型的配分函数[1] 。当 N较大时，我们预期其渐近行为为

$$z_N \underset{N\to\infty}{\sim} \varkappa \frac{\mu^{2N}}{N^{2-\gamma}} , \tag{1}$$

其中， $\varkappa$ 和 μ 取决于所研究的具体映射类别，而构型指数 γ 则具有更普适的性质：正如我们将要看到的，只会出现 γ 的两种可能取值，而本文的目的正是弄清楚何时会观察到其中一种取值，以及原因何在。

正如文献 [1] 对双三价映射（即仅含三价顶点的双色映射）所做的那样，我们将在下一节论证，可以将这一问题视为某种特定临界统计模型与引力耦合的问题，从而刻画平面双色映射上哈密顿回路的渐近性质。该模型由一个共形场论（CFT）描述，其中心荷 c 本身可通过对问题进行高度重构来推导。更准确地说，根据著名的 Knizhnik–Polyakov–Zamolodchikov（KPZ）公式 [2, 3, 4] ，中心荷为 $c \le 1$ 的共形场论与引力耦合后，对应于固定大小的（有根）配分函数 z_N，其渐近形式为（1），其中（在本文讨论的平面情形下）：

$$\gamma = \gamma(c) := \frac{1}{12}\left(c - 1 - \sqrt{(1-c)(25-c)}\right) . \tag{2}$$

正如后文将会看到的，我们要研究的各种双色映射族可分为两类：赋予哈密顿回路后，其中一些映射族对应于中心荷为 $c = -1$ 的共形场论，因此呈现构型指数$\gamma = \gamma(-1) = -(1+\sqrt{13})/6$；而另一些映射族对应于中心荷为 $c = -2$的共形场论，其构型指数为 $\gamma = \gamma(-2) = -1$。

在我们的讨论中，将哈密顿回路问题推广到更一般的平面双色映射上的完全填充环（FPL）问题会很有帮助。在给定映射上的完全填充环构型，定义为一组绘制在映射的边上的环；这些环彼此不相交，且每个顶点都被某个环经过。所有环的长度

[1]更准确地说，这应称为“有根配分函数”，因为我们决定标记构型的一条边。这样的标记很方便，因为它能避免构型具有内部对称性。

仍然都是偶数，总长度等于 $2N$，最后我们为每个环赋予权重n： 这就定义了所讨论的这族双色映射上的所谓 FPL(n) 模型。哈密顿回路的情形可由 FPL(n) 模型的 $n \to 0$ 极限得到。

备注1。FPL(n)模型本身可以看作二维 O(n) 模型的一个特殊临界点。回想一下，后一种模型描述的是自避且彼此避开的环构型，每个环带有权重 n ，每个被环访问的顶点带有逸度 x 。因此，在 O(n) 模型框架下，只要令 $x \to \infty$ ，使所有顶点都被环访问，就能得到 FPL(n) 模型。正如我们稍后将回顾的，FPL(n) 模型与 O(n) 模型的稠密临界相密切相关。

备注2。我们要强调的是，本文考虑的所有映射都是双色的。正如 [5, 1], 所解释的，这一着色约束对于确定相关共形场论的中心荷至关重要。我们将在下文的备注 10 中对此作进一步说明。

我们还探讨随机平面图上哈密顿回路中的长程接触问题。沿回路选取相距 N 的两个点，会将回路分成两段等长部分，并定义出一组接触边，也就是同时与回路两部分相邻接的边；这些接触边可视为由对偶图上的对偶接触回路连接起来。其平均数量按 N^{ν} 标度增长，其中新指数 ν 取决于底层映射族。理论上，可通过对规则（六边形或正方形）晶格上的类似指数应用 KPZ公式来预测 ν 的取值；相应指数是规则 FPL($n \to 0$) 模型的环内接触的豪斯多夫维数的一半，其中中心荷取适当的值 c。正如我们将看到的，在标度极限下，配有哈密顿回路的双色随机平面映射预计会收敛到一个刘维尔量子引力（*LQG*）球面 [6], ，其上装饰着一条独立的（空间填充）整平面 *Schramm-Loewner* 演化SLE_8 [7], ；对偶接触回路本身则收敛到一条对偶整平面SLE_2。LQG 参数为 $\gamma_{\mathrm{L}} = 2/\sqrt{1-\gamma}$，根据所选映射族的不同，取 $\gamma = \gamma(c=-1)$ 或 $\gamma = \gamma(c=-2)$。这些预测与文献 [1, 8, 9] 中的预测一脉相承。

本文组织如下：第2节讨论双色平面图上的哈密顿回路，其中所有顶点的度都相同，并给出我们对这种情况下构型指数 γ 的预测。第3节则讨论具有多个允许顶点度的映射，其构型指数 γ取值不同。第4节通过分析有限规模映射的精确枚举结果，对这两节中的预测进行数值验证。第5节引入刚性哈密顿回路的概念，并预测其构型指数不同于非刚性情形。通过推导任意 N下 z_N 的精确表达式，验证了这一结果。第6节探讨哈密顿回路中的长程接触问题，其平均数量按 N^{ν} 标度变化，指数 ν 取决于底层映射族。理论上预测了 ν 的两个可能取值，并在第7节进行数值检验。最后，我们在第8节给出几点评论。

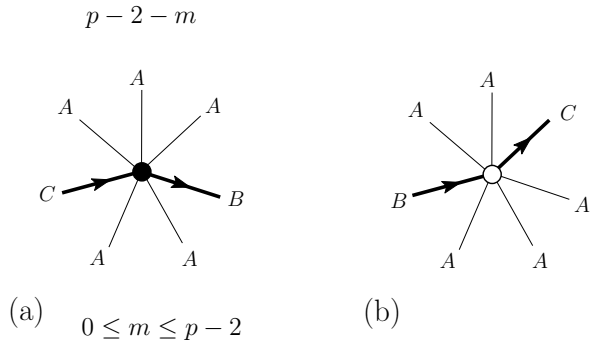

图1： 黑色顶点（a）和白色顶点（b）的边邻域示例。每个顶点周围都有一条 B-边、一条 C-边，以及总共（$p-2$）条 A-边（此处为 $p=7$、$m=2$ 和 $m'=3$）。

2. p-正规双色映射的情形

回想一下， p-正则映射是指所有顶点的度均为 p的映射。本节致力于枚举固定整数 $p \ge 3$下 p-正则双色平面地图上的哈密顿回路。特别地，其中包括 [1, 5]研究的双三次地图情形（$p=3$）。

因此，从现在开始，我们假设 p 取一个固定值，并首先考虑 p-正规双色平面图上的 FPL(2)模型。为每个环赋予权重 $n=2$ ，等价于考虑无权重的有向 环（其中权重 2 来自每个环的两种可能取向）。这样我们可以定义三种类型的边（见图1）：未访问边，称为 A-边；由环访问且其取向指向白色关联顶点的边，称为 B-边；最后是由环访问且其取向指向黑色关联顶点的边，称为 C-边。于是，黑色顶点周围的边构型如图1-(a)所示，其中有一条指向内的 C-边、一条指向外的 B-边，以及总共 $p-2$ 条未访问的 A-边，这些边以所有可能的方式分布在环的两侧。类似地，白色顶点周围的边构型如图1-(b)所示，此时有一条指向内的 B-边、一条指向外的 C-边，以及 $p-2$ 条未访问的 A-边。

现在，我们可以通过为映射的每个面指定一个高度 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$ ，将 FPL(2)模型转换为 d-分量高度模型 。相邻面的高度差 $\Delta\boldsymbol{X}$ 取决于它们之间边的类型，并遵循图2中的规则：若穿过的边属于类型 A （分别为 B、 C），且行进方向使其相邻的白色顶点位于右侧，则要求 $\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ （分别为 $\boldsymbol{B}$、 $\boldsymbol{C}$）。为了确保整个映射上的高度定义良好，我们必须保证绕映射的任意顶点完整转一圈后，得到的 $\boldsymbol{X}$值与原值相同。这要求满足以下必要且充分条件（见图2）：

$$(p-2)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

这实际上意味着 $\boldsymbol{X}$ 位于（$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$）二维平面中。为明确起见——

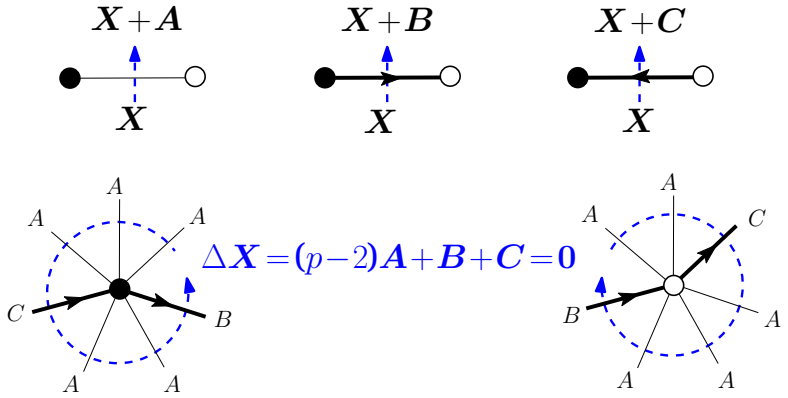

图2： 上：穿过映射的一条边时，高度变量 $\boldsymbol{X}$ 的变化规则。下：绕黑色（分别为白色）顶点逆时针（分别为顺时针）完整旋转一周，会产生高度变化 $\Delta\boldsymbol{X}=(p-2)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，为保持一致性，该变化必须取为 $\mathbf{0}$。

我们选取 $d=2$，使得 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中满足条件 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=-1/2$ 的两个单位向量。特别地，性质 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{C}|$ 意味着 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=0$，因此，如果我们定义

$$\boldsymbol{b_2}:=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\ , \tag{4}$$

由 (3) 可推得 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{b_2}=0$，一种自然的约定是用正交 基底 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b_2})$ 表示我们的双分量高度变量 $\boldsymbol{X}$ 。因此，在连续极限下，我们预期 FPL(2)模型由与引力耦合的二维共形场论描述，其中包含双分量矢量场 $\boldsymbol{\Psi}=\psi_1\boldsymbol{A}+\psi_2\boldsymbol{b_2}$（即分量分别沿 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b_2}$方向），用于局部测量“粗粒化”的平均值 $\boldsymbol{\Psi}=\langle\boldsymbol{X}\rangle$，并且 ψ_1 和 ψ_2均由自由场作用量支配，见 [1]。由此可得:

断言 3. *p 正则双色平面图上的 $FPL(2)$ 模型，通过与中心荷为以下数值的共形场论耦合到引力来描述*

$$c=2\ . \tag{5}$$

现在，我们希望了解：如果为每个环赋予任意权重n ，那么这一结果会如何改变；因此，我们考虑 p-正则双色平面图上的 FPL(n) 模型。文献 [1]详细讨论了 $p=3$ 双三次地图的情形。在那里，底层共形场论被确定为描述蜂窝格，即六角晶格上的 FPL(n) 模型的共形场论（该晶格是 3-正则的，且可以自然地进行双色着色）；这一模型已通过贝特拟设或库仑气体方法得到深入研究[10, 11, 12, 13] 。对于这一晶格模型，从 $n=2$ 到任意 $n\in[-2,2]$ 的变化，在连续极限下会通过添加一个将二分量场 $\boldsymbol{\Psi}$ 的分量 ψ_2 与底层曲面的局部内禀曲率耦合的项，来修正高斯自由场作用量；而分量 ψ_1 的作用量仍是自由场的作用量。对于 $n\in[-2,2]$，最终

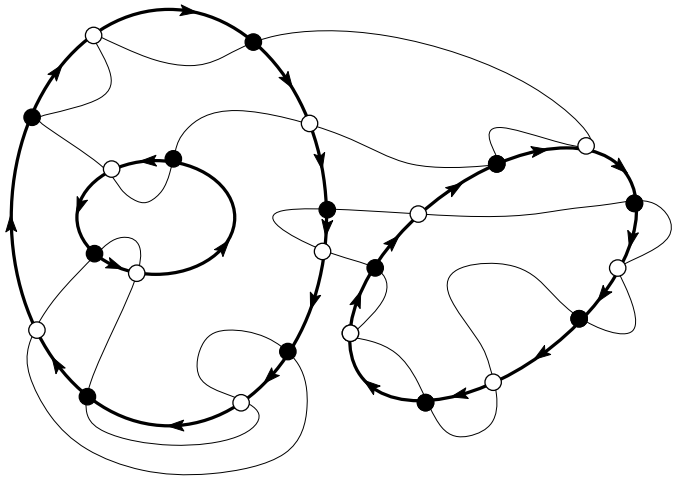

图 3：一个配备了一组完全填充的有向环（粗线）的 4-正则双色平面映射示例。未访问边（细线）自动构成映射上的一组互补的完全填充无向环。

结果是中心荷从$c = c_{\rm fpl}(2) = 2$ 移至较低值$c = c_{\rm fpl}(n)$ [11]，其表达式将在下文回顾。

由于 p-正则双色平面图上的 FPL(2)模型对于任意整数 $p \geq 3$ 都具有相同的双分量场描述，我们预计，从 $n = 2$ 到任意 $n \in [-2, 2]$ 的转变会导致中心荷以完全相同的方式降低。这促使我们表述如下：

断言 4. 对于 $-2 \leq n \leq 2$，在 p 正则双色平面地图上的 *FPL*(n) 模型，对于任意 $p \geq 3$，均可由中心荷为.....的共形场论与引力耦合来描述。

$$c = c_{\rm fpl}(n) := 2 - 6\frac{(1-g)^2}{g} \quad \text{where } n = -2\cos(\pi\, g) \text{ with } 0 \leq g \leq 1 \ . \tag{6}$$

在 $n \to 0$ 极限下，我们特别推导出：

推论 5. p-正则双色平面图上的哈密顿回路模型，可由中心荷为.....的共形场论与引力耦合来描述。

$$c = c_{\rm fpl}(0) = -1 \ . \tag{7}$$

特别地，利用 *KPZ* (2)，大小为 $2N$ 的 p-正则双色平面图上的哈密顿回路配分函数 z_N 具有如下渐近行为 (1)：

$$\gamma = \gamma(-1) = -\frac{1+\sqrt{13}}{6} \ . \tag{8}$$

这将 [5] 的猜想（另请参见 [14, 1]）从 $p = 3$ 推广到了整数 $p \geq 3$的任意值。

值得注意的是，对于 $p = 4$ ，我们可以通过如下不同途径得到断言 4 和推论 5 的表述。对于 $p = 4$，每个顶点恰好与 2 条未访问边关联：因此，未访问边自然形成环，访问双色平面图中的所有顶点，见图 3。由此，根据构造，我们有两个互补的完全填充环系统：原始的完全填充环获得权重 $n_1 = n$ ，而由未访问边形成的环获得中性权重 $n_2 = 1$。因此，4-正则双色平面图上的 FPL(n) 模型可以看作所谓 FPL^2(n_1, n_2) 模型与引力耦合的一个特殊实例；后者涉及方格上的两个互补完全填充环系统，其相应权重分别为 n_1 和 n_2 （方格是 4-正则的，并且可以进行规范双色着色）。该方格上的 FPL^2(n_1, n_2) 模型已在[15, 16, 17, 18] 中通过库仑气体和 Bethe Ansatz 技术进行了详细研究。其中心荷被发现等于 $c_{\mathrm{fpl}^2}(n_1, n_2) = 3 - 6(1 - g_1)^2/g_1 - 6(1 - g_2)^2/g_2$，其中，对于 $i = 1, 2, n_i = -2\cos(\pi g_i)$，且 $0 \le g_i \le 1$。取 (6) 中的 $g_1 = g$，并令 $g_2 = 2/3$ 使得 $(n_1, n_2) = (n, 1)$，我们便恢复了 $c_{\mathrm{fpl}^2}(n, 1) = 2 - 6(1 - g)^2/g = c_{\mathrm{fpl}}(n)$ 的值，这正如断言 4 和推论 5 中所述。

请注意，对于 $p \ge 5$，我们不再能依赖某种规则晶格上的完全填充环模型的假设性结果，因为不存在一种这样的双色规则晶格，其顶点仅具有 p 度[2]。此外，对于 $p \ge 5$，即使只针对这些未访问边中的一部分，也没有一种规范的方式将未访问边排列成环。

3. 混合价数双色映射的情形

本节讨论顶点度属于固定集合$\mathcal{S} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 的平面地图，其中 $k \ge 2$，且整数 p_i 满足 $2 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_k$。这类映射统称为混合价数映射。我们同样关注如何计算带有哈密顿回路，或更一般地带有一组完全填充环（每个环的权重为 n ）的此类双色映射的数量。由于这些（自避且相互避让的）环访问所有顶点，底层映射按构造具有偶数规模 $2N$，其中恰有 N 个黑色顶点和 N 个白色顶点。我们考虑的统计系综为固定 N ，并为每个度为 p_i的顶点赋予权重 $w_i \in \mathbb{R}^+$ 。这里需要强调的是，度为 p_i 的顶点数 m_i 并非分别固定，而是它们的总和 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = 2N$固定。我们将 z_N 称为相应的配分函数，并像之前一样标记一条访问边。配分函数 z_N 隐含地依赖于集合 $\mathcal{S}$ 和权重 w_i。请注意，由于对于所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 都有 $w_i > 0$，我们预期顶点的平均数量$\langle m_i \rangle = w_i \frac{\partial}{\partial w_i} \mathrm{Log} z_N$ 对于所有 i's 都是 N 量级，即每种度的数量都是广延的 p_i。

—

与上一节一样，我们首先研究固定大小为 $2N$ 的双色映射上的 FPL(2)模型，其中包含混合价数。和之前一样，每个环赋予权重 2 可以通过给环定向来实现；我们也可以再次用一个 d 分量的高度变量 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^d$ 来描述构型，该变量根据环的内容，按照

[2]对于 $p = 6$，只有 6 正则顶点的一个自然候选是三角晶格，但这种晶格不可二着色。

图2顶部所示的规则定义。请注意，价数仅属于 $\mathcal{S}$ 的一个真子集的构型也可能出现。然而，由于所有权重 w_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 均被选为严格正值，配分函数z_N 的渐近行为将由所有价数都在宏观上出现的构型以指数级优势主导。考虑两个不同的价数，例如 p_{i_1} 和 p_{i_2}，为了使高度定义良好且为单值，我们必须同时施加两个条件（ $p_{i_1}-2$ ） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\mathbf{0}$（这是价数为 p_{i_1} 的顶点周围所必需的）和（$p_{i_2}-2$）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\mathbf{0}$（这是价数为 p_{i_2} 的顶点周围所必需的）。由于我们假设 $p_{i_1} \neq p_{i_2}$，这两个条件意味着

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{0} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\mathbf{0}\ . \tag{9}$$

这就意味着 $\boldsymbol{X}$ 仍与 $\boldsymbol{B}$共线，或者等价地，与 $\boldsymbol{b_2} := \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{B}$共线。在连续极限下，我们预期 FPL(2)模型现在由一个涉及单分量场 $\boldsymbol{\Psi}=\psi_2\boldsymbol{b_2}$ 的二维共形场论与引力耦合来描述（即只有沿 $\boldsymbol{b_2}$ 方向的一个分量，因此实际上可以固定 $d=1$），该场如前一样测量“粗粒化”的平均值 $\boldsymbol{\Psi}=\langle \boldsymbol{X} \rangle$，并由高斯自由场作用量支配。由此得到：

断言 6. 混合价数双色平面图上的 *FPL*(2) 模型由一个中心荷为

$$c=1\ . \tag{10}$$

与任意 $n \in [-2,2]$的情形一样，相关连续共形场论的作用量仍然通过在 ψ_2 的自由场作用量中加入一项来得到，该项将其与底层曲面的局部内蕴曲率耦合。由于不再有分量 ψ_1，所得中心荷变为 $c=c_{\text{dense}}(n) := c_{\text{fpl}}(n)-1$。于是得到：

断言 7. 对于 $-2 \le n \le 2$，混合价数双色平面地图上的 *FPL*(n) 模型由与中心荷为 的共形场论的引力耦合来描述。

$$c=c_{\text{dense}}(n) := 1-6\frac{(1-g)^2}{g} \quad \text{where } n=-2\cos(\pi\, g) \text{ with } 0 \le g \le 1\ . \tag{11}$$

在 $n \to 0$ 极限下，我们特别推导出：

推论 8. 混合价数双色平面图上的哈密顿回路模型由与中心荷为 的共形场论耦合的引力理论描述。

$$c=c_{\text{dense}}(0)=-2\ . \tag{12}$$

特别地，利用 *KPZ*，相关配分函数 z_N 具有如下渐近行为(1) 其中

$$\gamma=\gamma(-2)=-1\ . \tag{13}$$

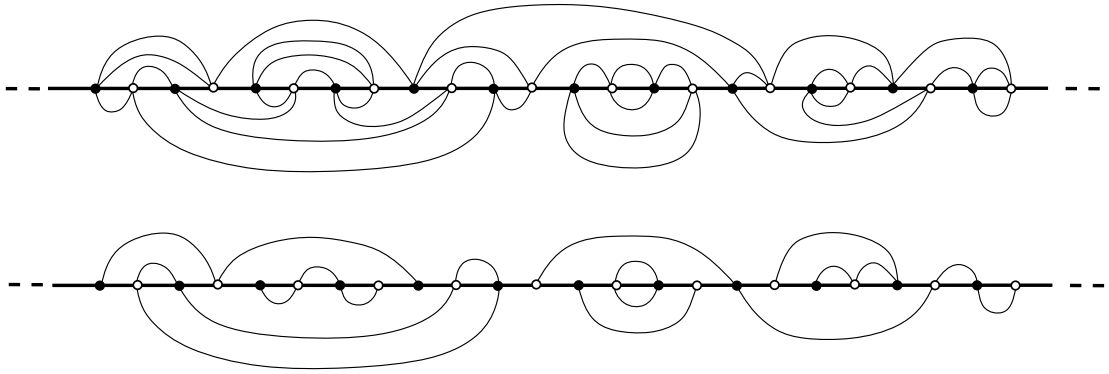

图4： 哈密顿回路（打开其标记的已访问边后）表示为一条无限直线，直线上分布着交替的黑白顶点，直线两侧通过互不交叉的双色拱相连。上图：p-正则情形下的示例，其中 $p = 5$。下图：价数为3和4的混合情形下的示例，即 $k = 2$ 和 $\mathcal{S} = \{3, 4\}$。

注 9。“稠密”这一称谓指的是，中心荷的值 $c_{\mathrm{dense}}(n)$ 恰好对应于二维 O(n) 模型处于稠密临界相时的中心荷。在该相中，被占据顶点的数量是宏观的，而环不再需要遍历所有顶点（详见第6.1节）。在这里，尽管在我们的问题中，环按定义会遍历所有顶点，我们仍然得到了这一数值。顶点度数的多种选择所带来的随机性，在某种程度上消除了完全填充约束；这一约束对应于 O(n) 模型 [11] 参数空间中的一个不稳定流形。

注记 10. 请注意，在没有双色约束的情况下， p-正则映射也会出现类似的中心荷从 $c_{\mathrm{fpl}}(n)$ 降至 $c_{\mathrm{dense}}(n) = c_{\mathrm{fpl}}(n) - 1$ 的现象。事实上，在这种情况下，已无法区分一条 A-边的两侧（见图2-上），因此必须令 $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$，从而得到如式（9）中的 $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = \mathbf{0}$；关于3-正则映射情形的详细讨论，见 [1]。

4. 数值验证

为了验证推论5和推论8中的断言，我们对各种 p正则映射族以及度数混合的各种映射族中的哈密顿回路进行了直接数值枚举。在所有情况下，将哈密顿回路沿其标记的已访问边所在的位置剪开并展开成一条直线后，我们得到图4所示形式的构型：一条无限直线上承载着 $2N$ 交替的黑白顶点。度为 p_i 的顶点会产生总数为 $(p_i - 2)$ 的关联未访问半边，这些半边以所有可能的方式分布在无限直线的两侧。最后，将这些半边两两连接，形成一组双色非交叉拱。为求得给定映射族的可能构型数量 z_N，我们采用转移矩阵方法，并将 [1], 的方法加以推广；该方法中

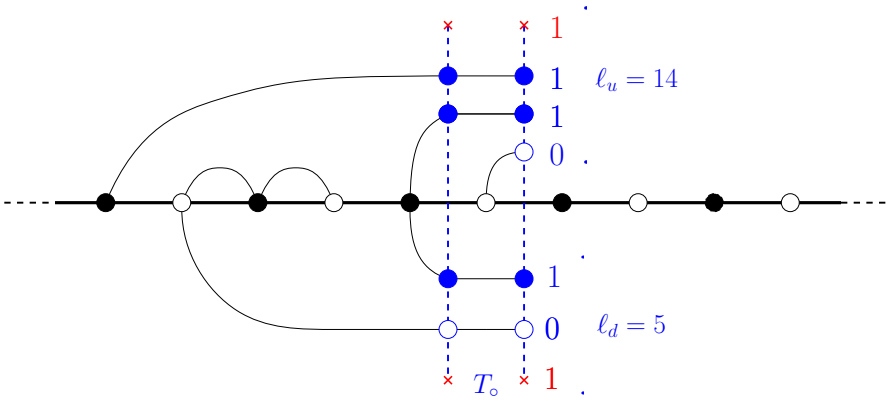

图 5: 混合价数为 $\mathcal{S} = \{3, 4\}$ 时转移矩阵方法的示意图。这里展示了基本转移矩阵 $T_\circ$ 在穿过一个白色顶点时可能产生的结果之一。

拱形构型沿着由交替的黑白顶点组成的直线从左向右构建。转移矩阵状态由那些已打开但尚未闭合的拱的颜色序列描述，每个拱继承其起始顶点的颜色（见图5）。上部拱颜色序列自下而上读取，下部拱颜色序列自上而下读取。颜色为 $a_1, \ldots, a_s$ 的一列 s 个拱（其中黑色取值为 $a_j = 1$，白色取值为 0）编码为整数 $\ell = 2^s + \sum_{j=1}^{s} a_j 2^{(j-1)}$，因此转移矩阵中间状态由两个正整数 ℓ_u（上部序列）和 ℓ_d（下部序列）编码，并记作 $|\ell_u, \ell_d\rangle$。采用这些记号，配分函数 z_N 可写为

$$z_N = \langle 1, 1|(T_\circ T_\bullet)^N|1, 1\rangle \tag{14}$$

其中，$|1,\ 1\rangle$ 对应于空构型（真空态），而 $T_\bullet$ 和 $T_\circ$ 是两个基本转移矩阵，分别将状态转移穿过黑色顶点和白色顶点。注意，对于 N 为偶数的情况，我们可以写成

$$\begin{aligned} z_N &= \sum_{\ell_u, \ell_d} \langle 1, 1|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|\ell_u, \ell_d\rangle\langle \ell_u, \ell_d|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|1, 1\rangle \\ &= \sum_{\ell_u, \ell_d} \left(\langle \ell_u, \ell_d|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|1, 1\rangle\right)^2 , \end{aligned} \tag{15}$$

其中，求和遍历经过 N 步后可达状态的有限 个数（每种颜色$N/2$ 个）。这里我们利用了该问题在顶点颜色的左右反转与黑白反转组合操作下的对称性。类似地，对于奇数 N，我们有

$$\begin{aligned} z_N &= \sum_{\ell_u, \ell_d} \langle 1, 1|(T_\circ T_\bullet)^{(N-1)/2} T_\circ|\ell_u, \ell_d\rangle\langle \ell_u, \ell_d|T_\bullet (T_\circ T_\bullet)^{(N-1)/2}|1, 1\rangle \\ &= \sum_{\ell_u, \ell_d} \left(\langle \ell_u, \ell_d|T_\bullet (T_\circ T_\bullet)^{(N-1)/2}|1, 1\rangle\right)^2 . \end{aligned} \tag{16}$$

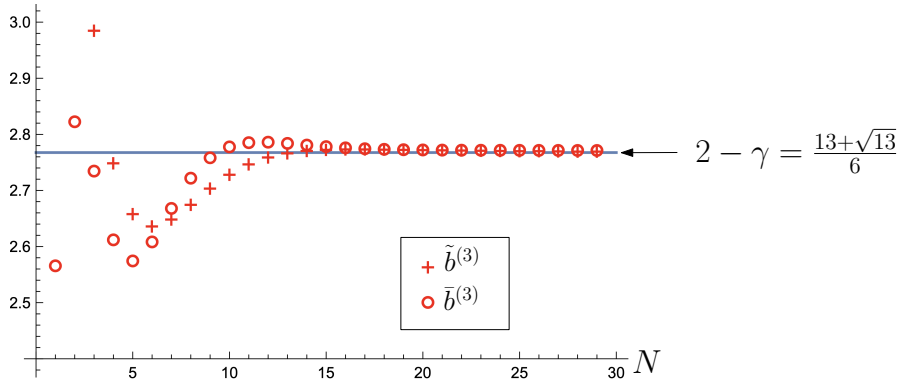

图6：通过式（17）和（18）中定义的相关加速级数 $\tilde{b}_N^{(3)}$ 和 $\bar{b}_N^{(3)}$，得到 $2-\gamma$ 关于三正则双色平面图上哈密顿回路的估计。这些估计证实并拓展了 [5]和 [1] 的结果。

因此我们看到，对于两种奇偶性以及映射构型的总大小 $2N$，我们只需执行 N 个初等转移矩阵的作用。

根据 z_N，我们可以将（1）中的 μ 和 γ 视为适当序列的极限而得到：例如，序列

$$b_N := N^2 \operatorname{Log} \frac{z_{N+2} z_N}{(z_{N+1})^2} \tag{17}$$

当 $N \to \infty$ 趋于 $2-\gamma$ 时。因此，我们可以根据某个有限且足够大的 N 对应的 b_N 的值，估算 γ。为了得到更准确的估算，我们还可以采用级数加速方法，通过递归使用有限差分算子 Δ（定义为 $(\Delta f)_N := f_{N+1} - f_N$），从 b_N 构造出一系列数列；这些数列以比 $N \to \infty$ 更快的速度收敛到同一极限 $2-\gamma$。在实际应用中，我们使用两个“加速”级数$\tilde{b}_N$ 和 $\bar{b}_N$，定义为[3]

$$\begin{aligned} \tilde{b}_N &:= \frac{1}{3!}(\Delta^3 \hat{b})_N \quad \text{with} \quad \hat{b}_N := N^3 b_N \ , \\ \bar{b}_N &:= b_{N+2} - 2\frac{(\Delta b)_{N+2}(\Delta b)_{N+1}}{(\Delta^2 b)_{N+1}} \ . \end{aligned} \tag{18}$$

附录B给出了我们对 z_N进行计数的数值结果。具体而言，我们研究以下图族：

- p正则双色平面图，其中 $p = 3$、4、.....、7；

- 具有混合价数的双色平面图：对于 $\mathcal{S} = \{2,3\}$，$\{2,4\}$，其权重为$w_2 = w_3 = w_4 = 1$；对于 $\mathcal{S} = \{3,4\}$，其权重为（w_3，w_4）=，取值为（1，1）、（1，2）和（2，1）。

根据这些数值，我们提取了表1中列出的 μ^2 估计值。

图6和图7分别给出了 p-正则双色平面图中 $p = 3$ 且 $p = 4$ 至 7 时 $2-\gamma$ 的估计（对于每个 p，我们用 $b_N^{(p)}$ 表示相应的级数

[3]这两个级数的定义方式使得其第 N项包含了 M 不超过 $N+5$时 z_M 的取值。

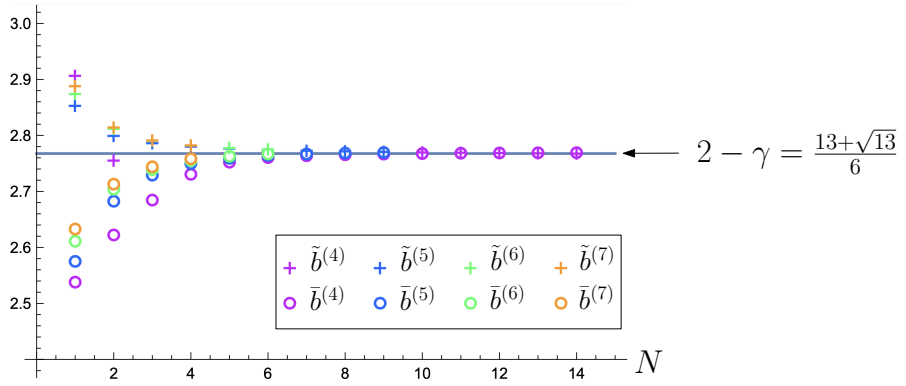

图 7：由相关加速级数 $\tilde{b}_N^{(p)}$ 和 $\bar{b}_N^{(p)}$ 得到的 $2-\gamma$ 估计值，适用于 $p=4$，5，6 和 7 的 p 正则双色平面地图上的哈密顿回路。

p-正则映射	μ^2	具有混合价数的映射	μ^2
3-正则	10.113 ± 0.001	$\{2,3\}$ $(w_2=w_3=1)$	16.204 ± 0.001
4-正则	41.60 ± 0.02	$\{2,4\}$ $(w_2=w_4=1)$	49.9 ± 0.1
5-正则	117.0 ± 0.2	$\{3,4\}$ $(w_3=w_4=1)$	86.02 ± 0.05
6-正则	$265.5 \pm 1.$	$\{3,4\}$ $(w_3=1,\ w_4=2)$	244.0 ± 0.2
7-正则	$522.8 \pm 2.$	$\{3,4\}$ $(w_3=2,\ w_4=1)$	151.0 ± 0.2

表1： 指数增长因子 μ^2 的估计值。

(17))。这些估计与推论5中预期的值 $\gamma=-(1+\sqrt{13})/6$ 完全吻合。

图8给出了我们对具有混合价数的双色平面图上、 $\mathcal{S}=\{2,3\}$ 和 $\{2,4\}$ 的 $2-\gamma$估计值（所有权重均为 $w_i=1$）；而图9给出了我们对 $\mathcal{S}=\{3,4\}$ 中具有混合价数的双色平面图的估计值，其中（w_3，w_4）=分别为（1，1）、（1，2）和（2，1）。现在，这些估计值与推论8的预期值 $\gamma=-1$ 一致。

5. $2q$-正则双色平面图上的刚性哈密顿回路

5.1. 定义和性质

现在我们讨论一类受限的哈密顿回路，或者更一般地说，完全填充环；与 [19], 中一样，我们称之为刚性。其定义如下：刚性完全填充环（RFPL）构型是 $2q$-正则双色平面图上的一组完全填充环，其中 $q\geq 2$ 为一个固定整数，并且在每个顶点处，未访问边在环的两侧均等分布，即每侧恰有（$q-1$）条未访问边，见图10。与之前一样，每个环赋予一个权重 n：这定义了 $2q$-正则双色平面图上的RFPL（n）模型。同样， $n\to 0$ 极限会选出构型

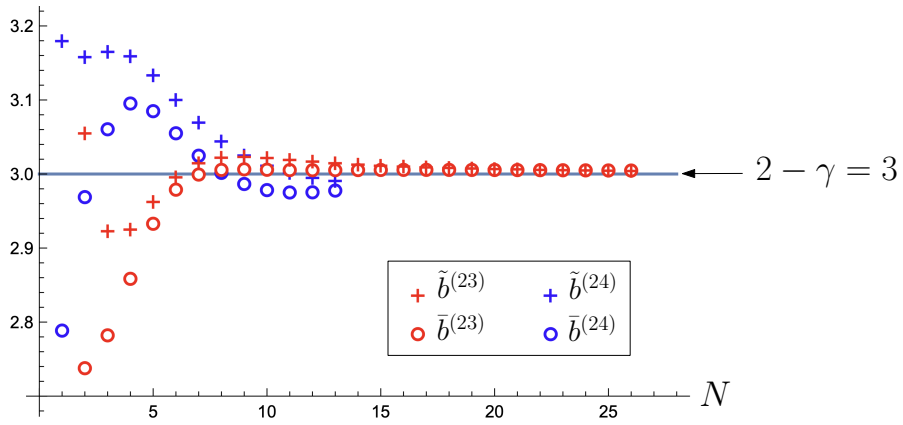

图8：在 $\mathcal{S}=\{2,3\}$ （ $w_2=w_3=1$下的 $\tilde{b}_N^{(23)}$ 和 $\bar{b}_N^{(23)}$ 加速级数）及$\mathcal{S}=\{2,4\}$ （ $w_2=w_4=1$下的 $\tilde{b}_N^{(24)}$ 和 $\bar{b}_N^{(24)}$ 加速级数）中，具有混合价数的双色平面地图上哈密顿回路的 $2-\gamma$ 估计。

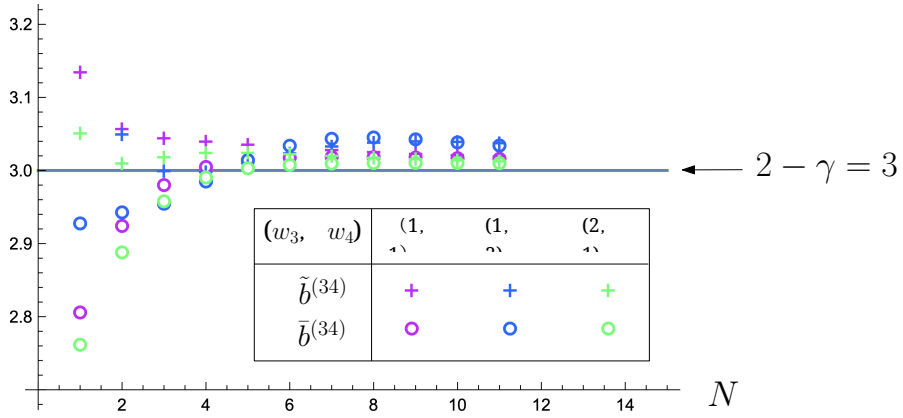

图9： $2-\gamma$ 在具有混合价的双色平面图上哈密顿回路的估计值，其中 $\mathcal{S}=\{3,4\}$ 分别对应（w_3，w_4）、（1，1）、（1，2）和（2，1）。

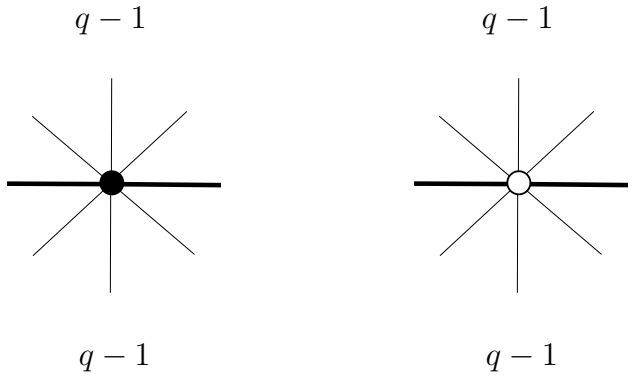

图10： RFPL模型中黑色顶点与白色顶点边环境的示例。每个顶点都由一个环（粗边）穿过，且环的每一侧恰好有 $q-1$ 条未访问边（细边）（此处为 $q=4$）。

刚性哈密顿回路，即由一个自避环访问映射中所有顶点的构型。

对于 $2q=4$，刚性哈密顿回路构型就是 [20, 9]中所称的**弯曲系统**。注意，配备刚性哈密顿回路的4-正则平面映射自动具有双色性。

我们再次从RFPL(2)模型开始，该模型对应于（无权重的）有向环。与第2节中的做法相同，我们可以区分 A-（未访问）、 B-（访问方向朝向黑色顶点）和 C-（访问方向朝向黑色顶点）边，从而为映射的每个面指定一个 d分量的高度 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^d$；相邻面的高度变化$\Delta\boldsymbol{X}$ 取决于它们之间的边的类型，具体规则见图2。与之前一样，只需要求满足以下必要且充分条件，即可保证该高度定义良好（对应于 $p=2q$的式(3)）：

$$2(q-1)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0} \tag{19}$$

这实际上固定了 $d=2$，其中 $\boldsymbol{X}$ 位于 $(\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$ 平面内， $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是两个单位向量，例如 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=-1/2$。和之前一样，用正交基 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b_2})$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 很方便，其中 $\boldsymbol{b_2}:=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$；并且与第 2 节一样，将相应的粗粒化平均值 $\boldsymbol{\Psi}=\langle\boldsymbol{X}\rangle$ 写成一个双分量矢量场 $\boldsymbol{\Psi}=\psi_1\boldsymbol{A}+\psi_2\boldsymbol{b_2}$，其分量分别沿 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b_2}$方向。重复第 2 节的论证，我们很容易推断断言 3 和 4 的结论成立，即 RFPL(n) 模型是中心荷为$c_{\mathrm{fpl}}(n)$ 的共形场论与引力耦合的结果。我们现在将论证，这一结论实际上是不正确的，RFPL(n) 模型是中心荷为 $c_{\mathrm{dense}}(n)=c_{\mathrm{fpl}}(n)-1$ 的共形场论与引力耦合的结果。事实上，尽管我们可以沿 $\boldsymbol{A}$ 方向定义坐标 ψ_1，但实际上该坐标的值是固定的，在整个映射上都等于一个固定值（我们可以取为 0）。因此我们陈述如下：

命题 11。二维分量向量场 $\boldsymbol{\Psi}$ 仅沿 $\boldsymbol{b_2}$ 方向通过其坐标 ψ_2发生变化，因此实际上是一个单分量向量场。

这实际上使中心荷减少了 1，因此我们得到：

断言 12. 对于 $-2 \le n \le 2$， $2q$正则双色平面图上的 *RFPL*(n) 模型可描述为中心荷为……的共形场论与引力耦合

$$c = c_{\text{dense}}(n) = 1 - 6\frac{(1-g)^2}{g} \quad \text{where } n = -2\cos(\pi\, g) \text{ with } 0 \le g \le 1\ . \tag{20}$$

在 $n \to 0$ 极限下，我们尤其可以推出：

推论 13. $2q$正则双色平面图上的刚性哈密顿回路模型可描述为中心荷为……的共形场论与引力耦合

$$c = c_{\text{dense}}(0) = -2\ . \tag{21}$$

特别地，利用 *KPZ* (2)，相应的配分函数 z_N 具有渐近行为 (1)，其中

$$\gamma = \gamma(-2) = -1. \tag{22}$$

5.2. 命题 11 的证明

证明。以下论证将 [14,第 11 节3] 中针对情形 $q = 2$给出的论证推广到任意 q 。首先注意，双色 p正则平面地图的面集自然分成 p 个子集，方法如下[4]：选取一个参考面 f_0，并将图中的每个面 f 标记为 $\ell(f) = (L(f) \bmod p) + 1$，其中 $L(f)$ 是连接 f_0 和 f 、且仅沿白色顶点位于右侧的边行进的任意路径所穿过的边数（等价地说，沿白色顶点顺时针转向、沿黑色顶点逆时针转向）。容易看出， $L(f)$确实与所选路径无关。由此，面集被分成 p个子集，记作 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、……、$\mathcal{F}_p$，其中 $\mathcal{F}_j$是标记为 j的面的集合。此外，容易看出，按构造，白色顶点周围的标签顺时针排列、黑色顶点周围的标签逆时针排列时，其循环顺序均为 (1, 2, ..., p)。对于 $p = 2q$，也可以改用标签 $\ell \in \{1, 2, \ldots, q, \hat{1}, \hat{2}, \ldots\ldots, \hat{q}\}$，此时这些子集记作$\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$、……、$\mathcal{F}_q$、$\mathcal{F}_{\hat{1}}$、$\mathcal{F}_{\hat{2}}$、……、$\mathcal{F}_{\hat{q}}$，标签的循环顺序为 (1, 2, ..., p, $\hat{1}$, $\hat{2}$, ..., $\hat{q}$)。存在刚性完全填充有向环时，我们最终可以选取面 f_0，使得这些环总是将 $\mathcal{F}_1$ 中的面与 $\mathcal{F}_{\hat{q}}$ 中的面分隔开，并将 $\mathcal{F}_{\hat{1}}$ 中的面与$\mathcal{F}_q$ 中的面分隔开（只需在一个顶点处施加这一条件；由于环是刚性的，该条件便会自动传播[5] 至所有顶点）。情形$q = 3$的示例见图11。

[4]读者或许对其对偶图景更为熟悉：双色 p-正则平面地图与平面欧拉 p-剖分对偶（其中黑色和白色面均为 p 度），这是 p-星图 [21] 的一个特例。[5]请注意，集合 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{\hat{1}}$ 不一定是连通的。不过，可以验证这一性质会从一个连通分支传递到另一个连通分支。这是因为，对于任意给定的 $j \in \{2, \ldots q\}$，分隔 $\mathcal{F}_j$ 与 $\mathcal{F}_{j-1}$ 以及$\mathcal{F}_{\hat{j}}$ 与$\mathcal{F}_{\widehat{j-1}}$的边也构成一组刚性完全填充环。

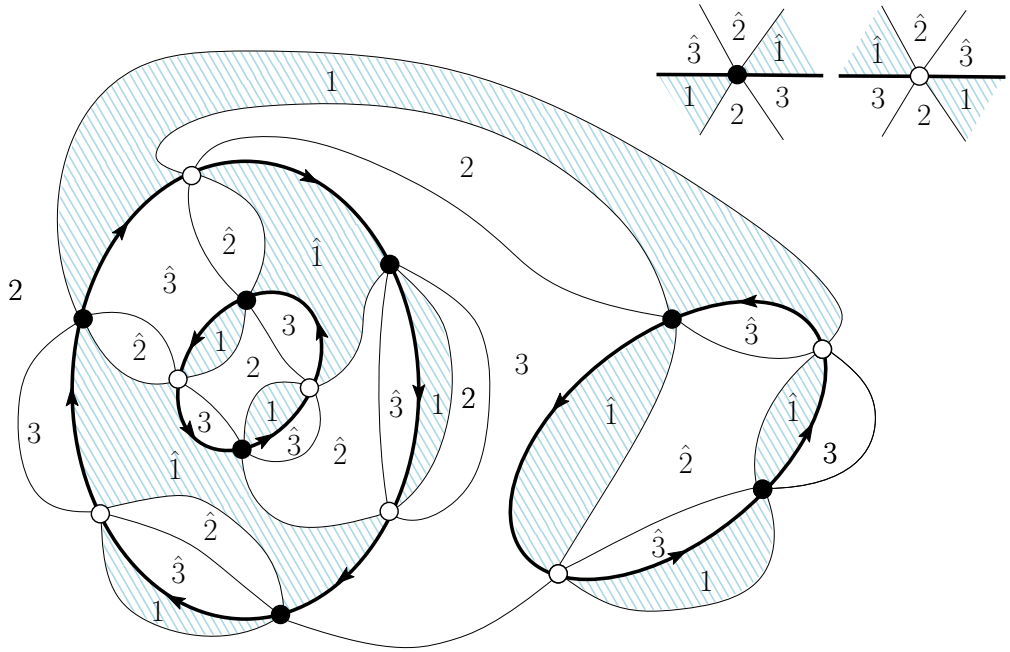

图11： 将一个六正则双色平面映射的面集划分为子集 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$，$\mathcal{F}_3$，$\mathcal{F}_{\hat{1}}$，$\mathcal{F}_{\hat{2}}$，$\mathcal{F}_{\hat{3}}$。面沿白色顶点顺时针、沿黑色顶点逆时针出现的顺序为 (1，2，3，ˆ1，ˆ2，ˆ3)（如右上角所示）；存在刚性完全填充环时，我们可以选择ˆ编号，使环总是将标记为 1 的面与标记为 3 的面分隔开，并将标记为 ˆ1 的面与标记为 ˆ3 的面分隔开。

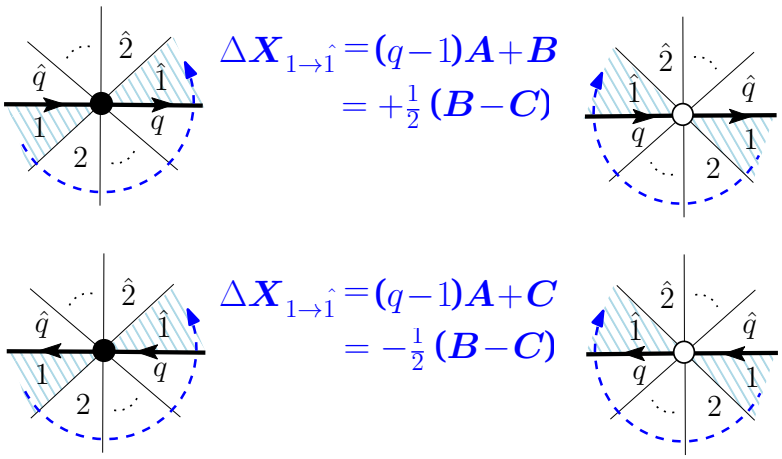

图 12： 从标记为 1 的面转到与其相对、标记为 ˆ1 的面时，给定顶点处的高度变化 $\Delta X_{1\to\hat{1}}$ 为 $\Delta X_{1\to\hat{1}} = (q-1)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 或 $\Delta X_{1\to\hat{1}} = (q-1)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}$，具体取决于环的取向。根据关系式 (19)，$\Delta X_{1\to\hat{1}}$ 因此等于 $\pm\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}) = \pm\frac{1}{2}\boldsymbol{b_2}$，在 $\boldsymbol{A}$ 方向上没有分量。

现在聚焦于子集 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_{\hat{1}}$，我们注意到，如图 12 所示，在给定顶点处，从标记为 1 的面转到标记为 1 的面时，高度 $\Delta X_{1\to\hat{1}}$ 的变化 ˆ 总是为

$$\Delta X_{1\to\hat{1}} = \pm\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}) = \pm\frac{1}{2}\boldsymbol{b_2}\ , \tag{23}$$

其符号取决于回路的取向。最后请注意，在任意给定的顶点处，从相邻且标记为 ℓ 的面转到标记为 ℓ 的面时，高度 $\Delta X_{\ell\to\hat{\ell}}$ 的变化 ˆ 实际上与 ℓ无关：总而言之，粗粒化高度 $\boldsymbol{\Psi}$（无论其精确定义是什么）只沿 $\boldsymbol{b_2}$ 方向变化。

□

5.3. 精确枚举

刚性哈密顿回路在 $2q$-正则双色平面图上的 $\gamma = \gamma(-2) = -1$ 这一事实，可以通过对允许构型进行精确枚举来验证。将该平面图嵌入黎曼球面，即将回路展开为一条由交替的黑白顶点组成的直线，我们立即看到，刚性约束（要求任意顶点相 incident 的未访问边数量在直线两侧均为 $(q-1)$）使我们可以利用对称性写出

$$z_N = c_N^2\ , \tag{24}$$

其中，c_N 枚举了仅位于直线一侧、连接黑色顶点与白色顶点的不相交双色弧构型，每个顶点恰好关联 $(q-1)$ 条拱，图 13 上图给出了一个示例。

至于 c_N，可通过以下论证轻松求得：首先将每个顶点拆分成 $(q-1)$ 个相同颜色的副本，每个副本连接一条拱；应连接哪条拱，完全由拱的不相交约束决定。现在我们得到一个序列，其中 N 组连续的 $(q-1)$ 个黑色顶点与 N 组连续的 $(q-1)$ 个白色顶点交替出现。在一个大小为 $(q-1)$ 的单色组中，我们可以从左到右将顶点标记为 1 到 $(q-1)$：不相交约束规定，标签为 j 的黑色顶点必然与标签为 $(q-j)$ 的白色顶点相连，对任意 $j \in \{1,\dots,q-1\}$ 均如此，见图 13 中图。

现在来看左侧的前 $(q-1)$ 个黑色顶点，记为 $u_1,\dots,u_{q-1}$（使得 u_j 具有上述标记 j），并将与 u_j 相连的白色顶点称为 v_{q-j}（使得 v_{q-j} 具有上述标记 $(q-j)$）。这些后面的顶点将剩余的 $2(q-1)(N-1)$ 个顶点分成若干子序列，分别位于 u_{q-1} 和v_1之间、v_1 和 v_2 之间、…、v_{q-2}和 v_{q-1}之间，最后一段则位于 v_{q-1}的右侧。由此得到 q 个子序列，其非负整数长度分别为 $2(q-1)m_1,\dots,2(q-1)m_q$，其中 $m_j \geq 0$ 对应 $j = 1,..,q$。由于存在前 $(q-1)$ 个拱，每个这样的 q 子序列都与其他子序列彼此分隔；具体而言，顶点之间通过拱形成配对的过程在每个子序列内独立进行。此外，只需对其顶点进行循环置换，第 j 个子序列便由 m_j 组连续的 $(q-1)$ 个黑色顶点和 m_j 组连续的 $(q-1)$ 个白色顶点交替组成，见图 13 下图。因此，第 j 个子序列的拱形构型数

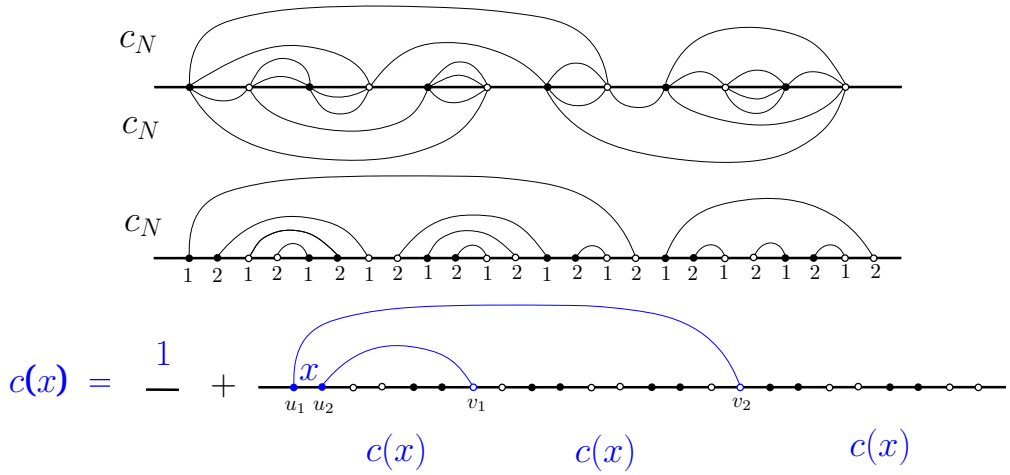

图13： 上：一个 $2q$价双色平面映射上的刚性哈密顿回路示例（此处 $q=3$），将其展开为一条由交替的黑白顶点组成的直线。上部和下部是彼此独立的拱系统，均由 c_N枚举。中：将每个顶点拆分为（$q-1$）个连续的同色副本后，上部拱系统的另一种表示。一个标记为 j 的黑色（分别为白色）顶点与一个标记为 $q-j$ 的白色（分别为黑色）顶点相连（此处为$q=3$ 和 $j=1,2$）。下：由 $c(x)$枚举的拱构型的分解示意图（每组 q 个拱的权重为 x ）：将其分解为 q个拱构型序列，其中每个序列也由 $c(x)$枚举。注意，不同子序列中颜色的顺序始终相同，但允许循环置换。

因此，子序列的拱形构型数由 c_{m_j} 给出（与所需的循环置换无关）。由此得到递推关系

$$c_N = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_q\geq 0 \\ m_1+\cdots+m_q=(N-1)}} \prod_{j=1}^{q} c_{m_j} \ , \quad N \geq 1 \tag{25}$$

采用约定 $c_0 = 1$。引入生成函数 $c(x) := \sum_{N\geq 0} c_N\, x^N$，我们推得

$$c(x) = 1 + x\,(c(x))^q \ , \tag{26}$$

其中我们识别出确定第 q 阶广义 Fuss-Catalan 数 [22] 的生成函数 $c(x)$ 的方程

$$c_N = \frac{1}{(q-1)N+1}\binom{qN}{N} \ , \quad N \geq 0 \ . \tag{27}$$

特别地，当 $q=2$ 时，我们便得到著名的卡特兰数。作为（27）的推论，我们得到

$$z_N = \left(\frac{1}{(q-1)N+1}\binom{qN}{N}\right)^2 \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{q}{2\pi(q-1)^3}\,\frac{\left(\frac{q^q}{(q-1)^{q-1}}\right)^{2N}}{N^3} \ . \tag{28}$$

正如预期， z_N 具有渐近行为 (1)，并且

$$\gamma = \gamma(-2) = -1 \ , \quad \mu = \frac{q^q}{(q-1)^{q-1}} \quad \text{and } \varkappa = \frac{q}{2\pi(q-1)^3} \ . \tag{29}$$

6. 哈密顿回路中的长程接触

6.1. 规则晶格上的O(n)模型和FPL(n)模型的标度极限 s

人们普遍认为，二维规则晶格（例如六角晶格或正方晶格）上临界 O(n) 模型的标度极限 由著名的*Schramm-Loewner* 演化 SLE$_\kappa$ [7, 23] 描述，而其临界环的集合则由所谓的共形环系综 CLE$_\kappa$ [24] 描述。这种共形不变随机过程仅依赖一个参数 $\kappa \geq 0$；对于 O(n) 模型，该参数为 $\kappa = 4/g$ [24, 25, 26, 27] ，因此：

$$\begin{aligned} n = -2\cos(4\pi/\kappa), \ \kappa \in [8/3, 4] \quad & \text{for the } \textit{dilute} \text{ critical point}, \\ \kappa \in (4, 8] \quad & \text{for the } \textit{dense} \text{ critical phase}. \end{aligned} \tag{30}$$

对于 $n \in (0, 2]$,，有 $\kappa \in (8/3,\ 8)$，即 CLE$_\kappa$ 的定义范围，而 SLE$_\kappa$ 过程实际上定义于 $\kappa \in [0, \infty)$。注意，对于 $n \to 0$，在稀疏情形下，当 $\kappa \searrow 8/3$ 时 CLE$_\kappa$ 的极限为 SLE$_{8/3}$ ；在稠密情形下，当 $\kappa \nearrow 8$ 时 CLE$_\kappa$ 的极限为空间填充 SLE$_8$。临界 O(n) 模型的完整范围 $n \in [-2, 2]$ 对应于 $\kappa \in [2, \infty)$ SLE$_\kappa$ 。这些路径始终不会自交；当 $\kappa \in [0, 4]$ 时，它们是简单的，即彼此不相交；而当 $\kappa \in$ 时则是非简单的（4，∞） [23]。

在若干情形下，这一标度极限已得到严格证明：均匀生成树，其中 $n = 0,\ g = 1/2,$ $\kappa = 8$ [28]；环擦除随机游走（形式上），其中 $n = -2,\ g = 2,\ \kappa = 2$ [28, 29]；离散高斯自由场的等高线，其中 $n = 2,\ g = 1,\ \kappa = 4$ [30]；三角晶格上的临界点渗流 [31, 32], ，其中 $n = 1,\ g = 2/3,\ \kappa = 6$；以及方格上的临界伊辛模型及其相关的 Fortuin-Kasteleyn随机簇模型 [33, 34] ，二者分别满足 $n = 1,\ g = 4/3,\ \kappa = 3$ 和 $n = \sqrt{2},\ g = 3/4,\ \kappa = 16/3$。

相应的 SLE$_\kappa$ 中心荷为

$$c = c_{\text{sle}}(\kappa) := \frac{1}{4}(6-\kappa)\left(6 - \frac{16}{\kappa}\right) \in (-\infty, 1] \quad \text{for} \quad \kappa > 0 \ . \tag{31}$$

No注意中心荷 (31) 在 SLE$_\kappa$ 对偶性 [35, 25, 26, 36, 37]下的不变性 ,

$$\kappa \leftrightarrow 16/\kappa =: \widetilde{\kappa} \ . \tag{32}$$

这种对偶性的几何解释如下。在标度极限中，稠密 O(n) 模型中的环是豪斯多夫维数为 [38, 39] $D = 1 + (2g)^{-1} = 1 + \kappa/8 > 3/2$ （对于 $g \in [1/2, 1)$ $\kappa \in (4, 8]$ 的非简单路径；其外周界是 $\widetilde{\ }$ 条豪斯多夫维数为 [35] $D = 1 + g/2 = 1 + \widetilde{\kappa}/8 < 3/2$ 的简单临界路径。因此，这些豪斯多夫维数满足普适对偶关系

$$(D-1)(\widetilde{D}-1) = \frac{1}{4} \ , \tag{33}$$

这已通过临界渗流 [40]直接得到证实。对于 $\kappa \in (4,8]$ ，非简单 SLE$_\kappa$ 路径确实已被证明存在对应的外边界，其对偶为简单 SLE$_{\widetilde{\kappa}}$路径，其中 $\widetilde{\kappa} = 16/\kappa \in [2,4)$ [36, 37]。

所谓的西瓜指数（共形权重），对应于多个共形不变的 SLE$_\kappa$ 路径 [26]，（特别是稠密或稀疏 O(n) 模型中的 ℓ 条临界线）的合并，其中 ℓ 表示路径数量，且 n 如式（30）所示，其表达式为 [38, 39, 41, 42, 43, 44,45, 46, 47]。

$$h_\ell^{(\kappa)} = \frac{1}{16\kappa}\left[4\ell^2 - (4-\kappa)^2\right], \quad \ell \in \mathbb{Z}^+. \tag{34}$$

正如上文所预期，SLE$_\kappa$ 的豪斯多夫维数为 [48]

$$D = \inf\{2(1-h_2^{(\kappa)}), 2\} = \inf\{1+\kappa/8, 2\}\ . \tag{35}$$

六角晶格 [11, 12, 13] 或方格 [15, 16] 上的完全填充 FPL(n) 模型，与相应的密集 O(n) 模型相关，其中心荷按 (6) 和 (11) 平移一个单位。FPL(n) 和密集 O(n) 模型中，偶数条路径对应的西瓜指数相同，尤其是决定路径豪斯多夫维数的二腿指数；而奇数条路径对应的西瓜指数则在六角晶格 (⬡) [11, 12, 13] 和方格 (□)[15, 16] 晶格上都不同，

$$\begin{aligned} h_{2k}^{\mathrm{fpl}(n)} &= h_{2k}^{(\kappa)}, \\ h_{2k-1}^{\mathrm{fpl}(n)} &= h_{2k-1}^{(\kappa)} + \frac{3}{4\kappa} \quad (⬡), \\ h_{2k-1}^{\mathrm{fpl}(n)} &= h_{2k-1}^{(\kappa)} + \frac{1}{6+\kappa} \quad (\square), \quad k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \tag{36}$$

因此，即使中心荷 (6) 与 (11) 不匹配，我们仍不禁猜想， [1, 8, 9] 全填充 FPL(n) 环模型本身在蜂窝格或方格上的标度极限，由共形环系综 CLE$_\kappa$ 描述，κ 对应于密集 O(n) 模型相 [10, 11, 12, 13, 15, 16],

$$\kappa = \frac{4\pi}{\arccos(-n/2)} \in (4,8] \quad \text{for} \quad n \in [0,2)\ . \tag{37}$$

6.2. 哈密顿回路的标度极限

现在考虑由 $2N$ 个顶点构成的单条哈密顿回路 $\mathcal{C}$ 的 FPL($n = 0$) 情形。该回路绘制在具有球面拓扑的规则双色六边形（或正方形）晶格上。在沿着 $\mathcal{C}$ 相距 N 的位置标记两点，会将此回路分成两个相等的部分~$\mathcal{C}_i$，$i = 1$，2，使得 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$。它们由一条绘制在对偶三角格上的单条闭合路径 $\mathcal{C}$ 分隔；这条路径穿过所有接触边，即关联到 $\mathcal{C}_1$ 中某个顶点和 $\mathcal{C}_2$ 中某个顶点的边~。稍微滥用一下记号，我们用 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ 表示它。在球面拓扑下，这条对偶路径可以看作 $\mathcal{C}$ 的两个半部 $\mathcal{C}_i$，$i = 1$，2 共有的外周界（见图14）。

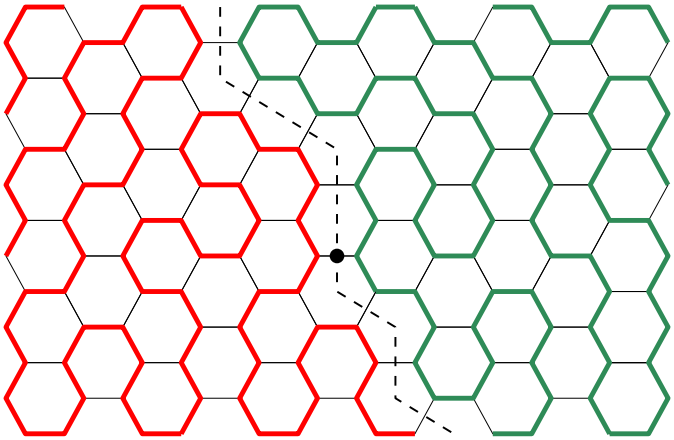

图14： 在具有球面拓扑的六角晶格上，哈密顿回路的两个（红色和绿色）半边$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2$ 由对偶晶格上的一条（点状）对偶环$\tilde{\mathcal{C}}=\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$ 隔开，这条对偶环穿过它们所有的接触边。这条分界线可以看作 $\mathcal{C}$每一半的外周界 。沿着这条对偶环的一个点，可以视为 $\ell=4$ 条紧致 O($n=0$) 半直线或 $\ell=2$ 条对偶半直线的起点。在标度极限下，完全填充环 $\mathcal{C}$ 收敛到$\tilde{\mathcal{C}}$ 空间填充 SLE$_{\kappa=8}$ ，其豪斯多夫维数为 $D=2$；其分形接触集 $\tilde{\mathcal{C}}$ 则收敛到全平面 SLE$_{\tilde{\kappa}=2}$，豪斯多夫维数为 $D=5/4$。

在标度极限下，有 $g=1/2$，$\kappa=8$，因此回路 $\mathcal{C}$ 应收敛为一条绘制在黎曼球面上的保角不变的SLE$_8$ 路径。它是一条皮亚诺曲线，即豪斯多夫维数为 $D=2$ 的空间填充曲线。根据对偶性 (32) (33)，路径 $\tilde{\mathcal{C}}$ 随后应收敛为一条豪斯多夫维数为 $D=5/4$ 的全平面 SLE$_2$ 曲线。

通过观察接触点位于 4 完全填充验证这线的起源，即在标度极限下，$\tilde{\mathcal{C}}$ $\ell=4$空间填充型 SLE$_8$ 路径的起源，同时也是具有相同共形权重的 $\ell=2$ SLE$_2$ 对偶路径的起源（34）

$$h_{1\cap 2}:=h_{\ell=4}^{\mathrm{fpl}(0)}=h_{\ell=4}^{(\kappa=8)}=h_{\ell=2}^{(\tilde{\kappa}=2)}=\frac{3}{8}\ . \tag{38}$$

$\tilde{\mathcal{C}}$在哈密顿回路 $\mathcal{C}$的两半之间的接触边 $|\mathcal{C}|=|\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2|$ 的期望数量，在规则双色晶格上面积为 $A=|\mathcal{D}|$ 的大区域 $\mathcal{D}$ 中，在标度极限下由下式给出。

$$\mathbb{E}\,|\mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2|\asymp A^{\widetilde{D}/2}=A^{1-h_{1\cap 2}},\ \ h_{1\cap 2}=3/8,\quad A\to\infty\ , \tag{39}$$

其中，渐近等价 $\asymp$ 意味着对数之比趋于 1.

6.3. 与量子引力耦合

随机平面图按临界统计模型的配分函数加权后，普遍被认为其标度极限是与下列对象耦合的 *Liouville*量子引力 （LQG）：

描述这些临界模型的共形场论 [2, 3, 4], , 或者等价地，对应的 SLE 过程 [49, 50, 51, 6]。随机平面图面积的连续描述涉及一个（正则化的）Liouville 量度 d^2x ： $e^{\gamma_{\mathrm{L}}\varphi_{\mathrm{L}}(x)}$ ： 用高斯自由场（GFF） φ_{L} [52]表示，并且可能像刘维尔作用量中那样加权 [2, 3, 4]。对于中心荷为 c的共形场论与引力耦合，Liouville 参数 γ_{L} 为 [2, 3, 4, 6, 49, 50, 51]

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \gamma_{\mathrm{L}}(c) := \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{25-c} - \sqrt{1-c}\right) \in (0,2] \quad \text{for} \quad c \in (-\infty, 1] \ . \tag{40}$$

一个豪斯多夫维数为 $D = 2(1-h)$ 的欧几里得分形测度，在刘维尔量子引力中通过形如 $e^{\alpha\varphi_{\mathrm{L}}}$: 的局部乘法因子转化为量子分形测度，其中 $\alpha := \gamma_{\mathrm{L}}(1-\Delta)$，而量子标度指数 Δ 是欧几里得标度指数 h [3, 4, 51]的对应量。它由著名的 KPZ 关系给出： [2],

$$\Delta = \Delta(h,c) := \frac{\sqrt{1-c+24\,h} - \sqrt{1-c}}{\sqrt{25-c} - \sqrt{1-c}} \ , \tag{41}$$

该关系用中心荷为 c 的共形场论（CFT）的原始标度指数 h （例如，共形权重）表示。借助 Liouville 参数 (40)，可以将式 (41) 反解为简单的二次公式:

$$h(\Delta) = \frac{\gamma_{\mathrm{L}}^2}{4}\Delta^2 + \left(1 - \frac{\gamma_{\mathrm{L}}^2}{4}\right)\Delta \ . \tag{42}$$

其严格证明 [52, 53, 54, 55] 基于这样的假设：高斯自由场（GFF）或刘维尔场 φ_{L} 与（任意）随机分形曲线（可能由共形场论描述）是独立地抽样的。

另一个关于 $\gamma(c)$ 的 KPZ 结果 (2)，即构型或“弦易感指数”,

$$\gamma = 1 - 4/\gamma_{\mathrm{L}}^2, \tag{43}$$

或者等价地，关于 $\gamma_{\mathrm{L}}(c)$ 的结果 (40)，给出了刘维尔量子引力与共形场论或 SLE 参数之间的精确耦合。代入 SLE 中心荷 $c = c_{\mathrm{sle}}(\kappa)$ (31)，确实可以得到简洁的表达式

$$\gamma = 1 - \sup\{4/\kappa, \kappa/4\}, \quad \gamma_{\mathrm{L}} = \inf\{\sqrt{\kappa}, \sqrt{16/\kappa}\} \ . \tag{44}$$

通过将刘维尔量子引力中的高斯自由场与 SLE 鞅 [49, 51] 耦合，这一结果已在概率方法中得到严格证明。在标度极限下，可以证明随机平面图上的随机簇模型收敛（从树的配对视角来看，即所谓的 Peanosphere 拓扑），并趋于刘维尔量子引力-SLE [6, 56]。

这一匹配 性质（44）适用于随机平面图上临界、密集或稀疏的 O(n) 模型的标度极限，也适用于随机（非双色）三次映射上的完全填充 FPL(n) 模型 [1]。对于随机双色映射上的完全填充模型，这一结论也适用于混合价数 的情况（断言（7）），或 $2q$ 正则映射的刚性 情况（断言（12）），其中

$$c = c_{\mathrm{dense}}(n) = c_{\mathrm{sle}}(\kappa) \ . \tag{45}$$

然而，对于随机双三次 平面地图，如参考文献 [1], 所示，以及 p正则双色 平面地图的一般非刚性 情况（断言（4）），对应关系（44）不再成立，因此会出现不匹配 [8, 9], ，其中（2）、（40）和（41）中的（45）被替换为

$$c = c_{\mathrm{fpl}}(n) = 1 + c_{\mathrm{sle}}(\kappa) \ , \tag{46}$$

其中 κ 仍由式 (37) 给出。注意，KPZ关系中的约束 $c \leq 1$ 将双三次图上 FPL(n) 模型的环逸度限制在范围 $n \in [0,1]$ ，其中$\kappa \in [6,8]$; 而互补范围 $n \in (1,2)$ 且 $\kappa \in (4,6)$ 则很可能对应随机树统计。

具有这类不匹配参数的刘维尔量子引力与 SLE 之间的耦合尚未得到严格描述。遵循 [1], ，我们在此可以简单地猜想，对于 $n \in [0,1]$ ，无刚性条件的双颜色 p-正则平面映射上 FPL(n) 模型的标度极限将由 CLE_κ [6] 给出，其中 $\kappa \in [6,8]$ 如式 (37)，并定义在 Liouville 参数为 γ_{L} 的刘维尔量子引力球面上

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(\sqrt{3\left(\kappa + \frac{16}{\kappa}\right) + 22} - \sqrt{3\left(\kappa + \frac{16}{\kappa}\right) - 26} \right) \ , \tag{47}$$

这与 [8, 9] 中提出的猜想一致。

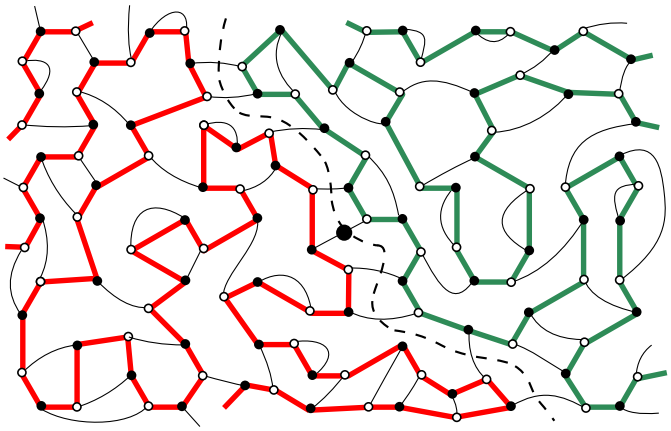

图15： 在具有球面拓扑的随机双三次平面映射上，哈密顿回路的两个（红色和绿色）部分 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 由对偶图上的一条（虚线）对偶环 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ 分隔；这条对偶环穿过它们所有最近邻接触边组成的集合。在标度极限下，随机映射、完全填充环 $\mathcal{C}$ 和分界线 $\mathcal{C}$ （在 Peanosphere 拓扑 [6]下）收敛到一个由空间填充 SLE_8 和全平面 SLE_2装饰的 γ_{L}-刘维尔量子引力球面。在这种（$p = 3$）正则双色映射的情形下， $c = -1$ 和 $\gamma_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{13} - 1\right)$。

6.4. 哈密顿回路与刘维尔量子引力

随机平面图上的 FPL($n = 0$) 模型收敛于与 Liouville量子引力耦合的空间填充型 $\mathrm{SLE}_{\kappa=8}$, 这是其中一条哈密顿回路的缩放极限。

球面拓扑对应于 SLE$_8$ 装饰在独立的 γ_{L}-刘维尔量子引力球面上（严格定义见 [6, 57, 58]），其中 Liouville 参数和中心荷取决于映射的顶点统计选择。对于一般的（即非双色）三次映射 [1], 、具有混合价数顶点的双色映射（推论（8）），以及满足局部刚性条件的 $2q$-正则双色映射（推论（13））, 由（44）和（45）可得，对于 $\kappa = 8$,

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \sqrt{2}, \quad \gamma = -1, \quad c = -2 \ . \tag{48}$$

对于双三次地图 [1] 或更一般地，对于 p-正则双色映射（推论（5））, 由（46）和（47）可得 $\kappa = 8$,

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{13} - 1 \right), \quad \gamma = -\frac{1+\sqrt{13}}{6}, \quad c = -1 \ . \tag{49}$$

~考虑固定大小为 $2N$ 的双色随机平面映射上，哈密顿回路 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 两半之间的接触点集合 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ （见图15）。在热力学极限 $N \to \infty$ 下，经过重缩放后，该集合在 Peanosphere 拓扑 [6] 中收敛到一条无限 SLE$_8$ 路径两半的交集，即一条装饰着固定 γ_{L}-LQG 面积量子球面 $\mathcal{A}$ [6, 57, 58] 的全平面 SLE$_2$, 。在标度极限中，与基数 $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2|$ 相对应的是一种基于 SLE 自然参数化 ~ 的 SLE$_{\kappa=2}$ 量子长度测度 [51, 6] [59] 。其期望的标度关系为

$$\mathbb{E}_{\mathrm{LQG}} |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2| \asymp \mathcal{A}^{\nu} := \mathcal{A}^{1-\Delta_{1\cap 2}} \ , \tag{50}$$

一个与标度形式（39）完全类似的表达式，但此处的量子指数$\Delta_{1\cap 2} := \Delta(h_{1\cap 2},\ c)$由 KPZ 关系（41）根据 $h_{1\cap 2} = 3/8$ (38) 给出。因此，其取值关键取决于中心荷 c，也就是说，取决于双色映射上的顶点统计。对于情形（48），我们得到

$$\begin{aligned} &\Delta_{1\cap 2} = \Delta(3/8, c=-2) = 1/2 \ , \\ &\nu = 1 - \Delta_{1\cap 2} = 1/2 \ ; \end{aligned} \tag{51}$$

而对于情形（49），我们预测

$$\begin{aligned} &\Delta_{1\cap 2} = \Delta(3/8, c=-1) = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{26}-\sqrt{2}} \ , \\ &\nu = 1 - \Delta_{1\cap 2} = \frac{\sqrt{26}-\sqrt{11}}{\sqrt{26}-\sqrt{2}} = 0.483715\cdots \ . \end{aligned} \tag{52}$$

现在将通过对精确计数进行外推，以数值方式检验这两个关于 ν 的预测。

7. 长程接触的数值分析

我们的哈密顿回路有一条标记的已访问边 e。因此，我们可以按照沿着回路 $\mathcal{C}$ 的自然顺序为所有顶点编号，从与 e 相邻的黑色顶点开始

（编号为 1），并在与 e 相邻的白色顶点处结束（若映射的大小为$2N$，则编号为 $2N$）。这样，我们便可以明确定义两个半周回 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$：它们分别是 $\mathcal{C}$中包含顶点 1 至 N，以及顶点 $N+1$ 至 $2N$ 的部分。我们用 k_N 表示这两个半部之间接触边的平均数量，见图15。我们有

$$k_N = \frac{y_N}{z_N} \tag{53}$$

其中，y_N 表示长度为 $2N$ 的哈密顿回路的配分函数（其中有一条标记的已访问边），并按其两半之间的接触边数量加权。在图4所示的表示中，接触数量就是沿直线的前半段打开、仅在后半段闭合的（向上或向下）拱的数量。在转移矩阵形式中，该数量由整数部分给出

$$\lfloor \log_2(\ell_u) \rfloor + \lfloor \log_2(\ell_d) \rfloor \tag{54}$$

其中，与式（15）中一样，$|\ell_u,\ \ell_d\rangle$ 表示“中间”状态（即经过 N 个初等转移矩阵 $T_\circ$ 或 $T_\bullet$ 作用后得到的状态）。因此，当 N 为偶数时，我们可以写成

$$\begin{aligned} y_N &= \sum_{\ell_u,\ell_d} \langle 1,1|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|\ell_u,\ell_d\rangle \big(\lfloor \log_2(\ell_u) \rfloor + \lfloor \log_2(\ell_d) \rfloor \big) \langle \ell_u,\ell_d|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|1,1\rangle \\ &= \sum_{\ell_u,\ell_d} \lfloor \log_2(\ell_u) \rfloor \left(\langle \ell_u,\ell_d|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|1,1\rangle \right)^2 + \sum_{\ell_u,\ell_d} \lfloor \log_2(\ell_d) \rfloor \left(\langle \ell_u,\ell_d|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|1,1\rangle \right)^2 \\ &= 2 \sum_{\ell_u,\ell_d} \lfloor \log_2(\ell_u) \rfloor \left(\langle \ell_u,\ell_d|(T_\circ T_\bullet)^{N/2}|1,1\rangle \right)^2 , \end{aligned} \tag{55}$$

从第一行到第二行时，我们利用了问题在左右反转并交换黑白颜色后的对称性；从第二行到第三行时，则利用了其上下对称性。当 N 为奇数时，我们则有

$$y_N = 2 \sum_{\ell_u,\ell_d} \lfloor \log_2(\ell_u) \rfloor \left(\langle \ell_u,\ell_d|T_\bullet (T_\circ T_\bullet)^{(N-1)/2}|1,1\rangle \right)^2 . \tag{56}$$

当 N 较大时，我们预期其渐近行为

$$k_N \underset{N\to\infty}{\sim} \varrho\ N^\nu \tag{57}$$

其中 ϱ 取决于相应的双色映射族，ν 如 (51) 或 (52) 中所示。然而，我们预计，这一主导行为的修正取决于 N的奇偶性。数值数据证实了这一点：为了从序列 $(k_N)_{N\geq 1}$ 中正确估计 ν，我们现在必须将该序列拆分为两个子序列，即“偶数”子序列 $(k_{2M})_{M\geq 1}$ 和“奇数”子序列 $(k_{2M-1})_{M\geq 1}$。因此，我们定义以下两个相互独立的加速级数 $(\tilde\nu_{2M}(s))_{M\geq 1}$ 和 $(\tilde\nu_{2M-1}(s))_{M\geq 1}$:

$$\tilde\nu_{2M}(s) = \frac{1}{3!}(\Delta^3\,\hat\nu)_M \quad \text{with} \quad \hat\nu_M := M^3 \left(M \times \mathrm{Log} \frac{k_{2M+2}+2s}{k_{2M}+2s} \right) \tag{58}$$

and

$$\tilde{\nu}_{2M-1}(s) = \frac{1}{3!}(\Delta^3 \check{\nu})_M \quad \text{with} \quad \check{\nu}_M := M^3 \left(M \times \mathrm{Log} \frac{k_{2M+1}+2s}{k_{2M-1}+2s} \right) . \tag{59}$$

这里为了今后使用方便，引入了任意的偏移参数 s。无论偏移量 s 如何，当 M 较大时，这两个级数都趋于 ν。最终将针对每个级数以数值方式确定 s 的值，从而优化收敛加速（见下文）。

以刚性 4-正则的情形作为分析的起点很有启发性，因为我们可以为 k_N 写出显式表达式。事实上，在这种情形下（见附录 A），我们有

$$\begin{aligned} k_{2M} + 2s &= \frac{2\binom{2M}{M}^2}{\frac{1}{2M+1}\binom{4M}{2M}} + 2(s-1) , \\ k_{2M-1} + 2s &= \frac{2\binom{2M}{M}\binom{2M-2}{M-1}}{\frac{1}{2M}\binom{4M-2}{2M-1}} + 2(s-1) . \end{aligned} \tag{60}$$

从这些精确表达式很容易验证，正如预期的那样，“偶数”和“奇数”加速级数 $(\tilde{\nu}_{2M}(s))_{M\geq 1}$ 和 $(\tilde{\nu}_{2M-1}(s))_{M\geq 1}$ 确实收敛到 $\nu = 1/2$，因为当 N 很大时，$k_N + 2s \sim 4\sqrt{N/\pi}$ 对于任意固定的 s，在 N 很大时。为了使 (58)（分别为 (59)）定义的级数确实得到加速，即快速收敛到ν，必须要求 $\hat{\nu}_M$（分别为 $\check{\nu}_M$）只含有形如 M^{3-i} 的修正项，其中 $i \geq 1$ 为整数，从而前 3 个此类修正项（$i = 1$、2、3）会被 3 个迭代有限差分算子 Δ 消去。从 (60) 很容易验证，在当前情形下，只有选择 $s = 1$ 才满足这一条件：对于 $s \neq 1$，$\hat{\nu}_M$（分别为 $\check{\nu}_M$）还含有涉及 M 半整数次幂的修正项，这些修正项不会被有限差分算子Δ消去，因而导致收敛速度慢得多。换言之，$(\tilde{\nu}_{2M}(s))_{M\geq 1}$（分别为 $(\tilde{\nu}_{2M-1}(s))_{M\geq 1}$）快速且可靠地收敛到 $\nu = 1/2$，只有在选择 $s = 1$ 时才成立。

现在假设我们不知道精确表达式 (60)，只能获得 $\tilde{\nu}_{2M}(s)$（分别为 $\tilde{\nu}_{2M-1}(s)$）在某个有限值 $N_{\max} = 2M_{\max}$（分别为 $N_{\max} = 2M_{\max} - 1$）之前的前几项。我们可以通过要求估计值在 $N_{\max}$ 处稳定下来，来数值估计 s 的最佳值 s^*，也就是说

$$\tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*) = \tilde{\nu}_{N_{\max}-2}(s^*) . \tag{61}$$

如图16所示，以 (60) 的“偶数”加速级数为输入，令 N 不超过 $N_{\max} = 26$，我们数值上得到以下数值

$$s^* = 1.000 , \qquad \nu = \tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*) = 0.5000 , \tag{62}$$

这与上述基于精确渐近公式的分析所得 s^* 和 ν 的值完全吻合。因此，这也从事后验证了我们用于选择平移量 s 的数值方法 (61)，其中选择值为 s^*。

我们分别使用“偶数”数据和“奇数”数据，对若干类双色平面图上的哈密顿回路重复了这项分析。例如，图17展示了我们对三正则双色映射所得的结果：我们得到以下估计值

$$s^* = 1.161 , \qquad \nu = \tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*) = 0.4837 , \tag{63}$$

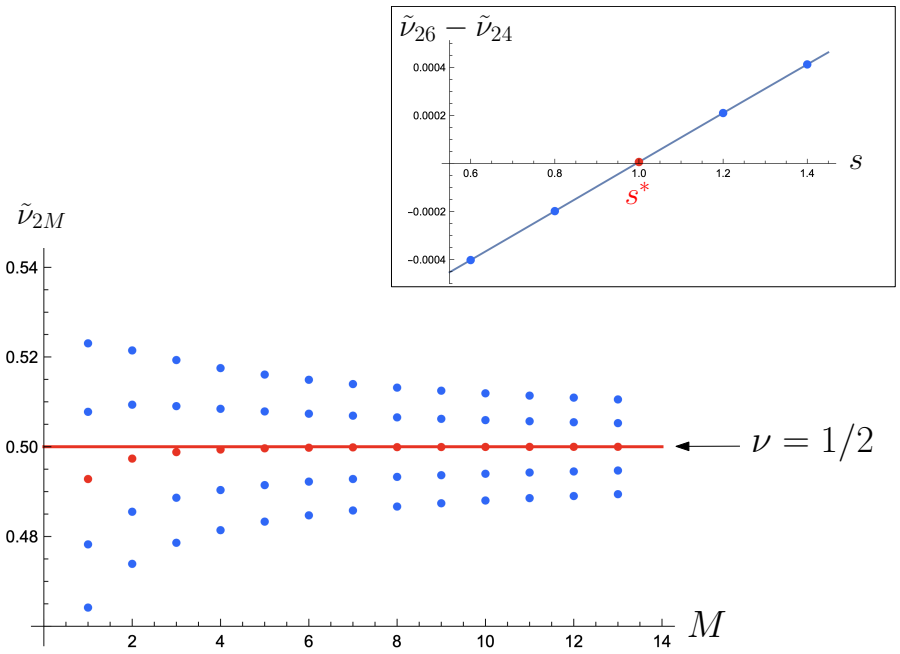

图16： 插图：根据条件 $\tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*) = \tilde{\nu}_{N_{\max}-2}(s^*)$，确定 4-正则双色映射上刚性哈密顿回路的位移 s^* （此处取 $N_{\max} = 26$）。我们展示了 5 个不同 s 值对应的序列 $(\tilde{\nu}_{2M}(s))_{1 \le M \le N_{\max}/2}$。从上到下依次为： $s = s^* - 0.4$、 $s = s^* - 0.2$、 $s = s^*$ （红色）、 $s = s^* + 0.2$ 和 $s = s^* + 0.4$。最终根据 $\tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*)$ 估算 ν 的值，其中 $s^* = 1.000$， $\nu = \tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*) = 0.5000$

.

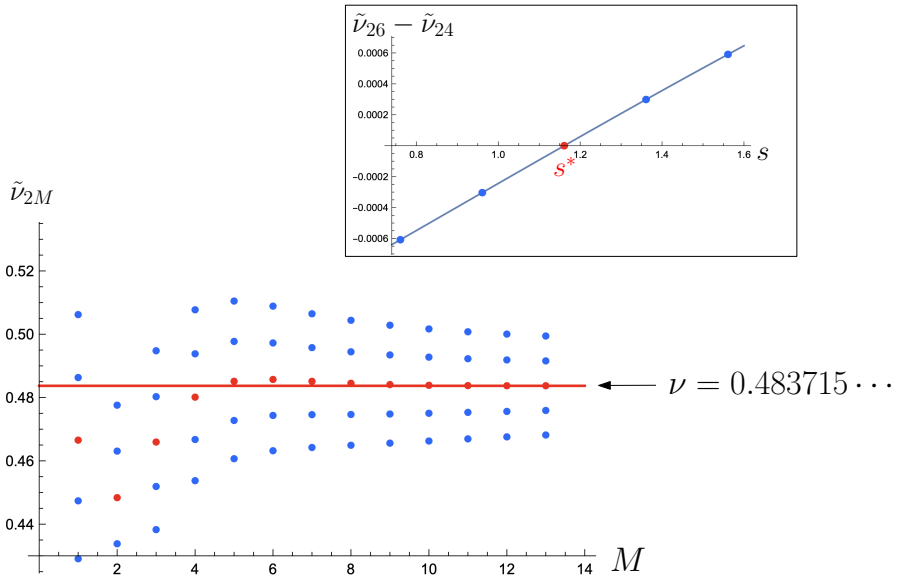

图17：在三正则双色映射上确定哈密顿回路的平移量 s^* 和指数 ν （其中 $N_{\max} = 26$）。详情请参见图16的说明。

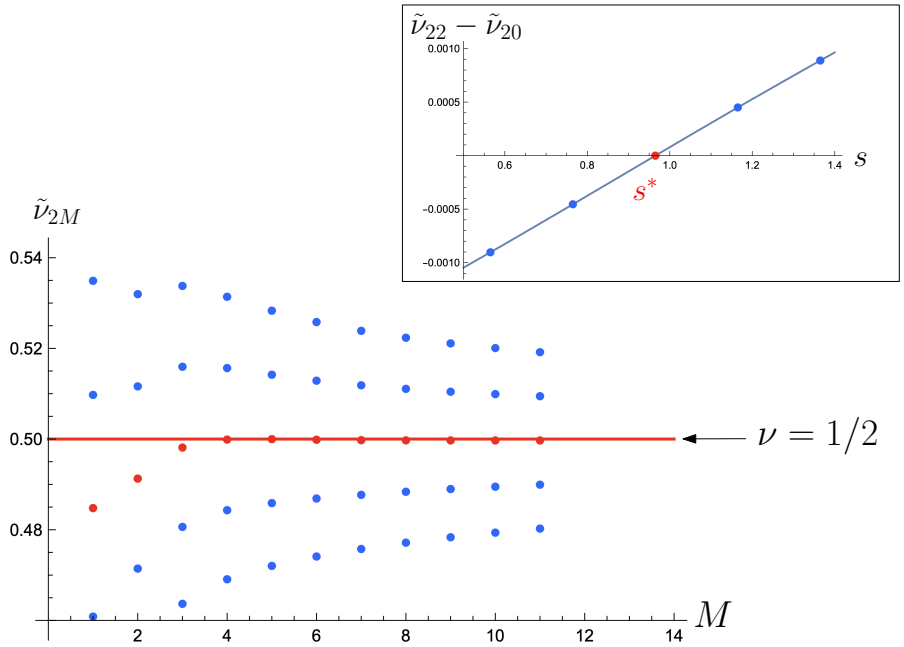

图18： 确定混合价数为2和3的双色映射上哈密顿回路的平移量 s^* 和指数 ν（其中 $N_{\max} = 22$）。详情请参见图16的图注。

因此， ν 的值与预测值（52）非常接近。图18展示了混合价数为2和3的映射（以及 $w_2 = w_3 = 1$）的类似结果，此时 $s^* = 0.965$ 和 $\nu = 0.4997$ 与预测值 $1/2$ （51）非常接近。表2总结了我们对六种不同双色图族上哈密顿回路的 ν 以及 N 的两种奇偶性的估计结果。所有结果都与预期值完全一致。

8. 结论

在本文中，我们研究了多种双色随机平面映射族上的哈密顿回路统计性质，以及更一般的完全填充环统计性质，并发现相应模型属于两个不同的普适类。第一个也是最常见的普适类，对应于与中心荷为$c_{\text{dense}}(n)$的共形场论耦合引力，如式（11）所定义。对于具有混合价数的双色映射上的完全填充环、 $2q$-正则双色映射上的刚性完全填充环，以及非双色映射上的完全填充环（见注释10），均可发现这一普适类。对于双色或非双色映射上的非刚性或刚性稠密环（即处于稠密临界相的 O(n) 环），也会发现这一普适类。所有这些模型的共同特点是都可以用单个高度场 $\mathbf{\Psi} = \psi_2 \boldsymbol{b_2}$ 来描述。规则晶格上的相应共形场论描述的是 O(n) 模型的稠密相，其共形维数可以在任意一种（六边形 [39], 方形 [46] 或

映射族	N的奇偶性	$N_{\max}$	s^*	测量值 $\nu = \tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*)$	预测的 ν
3-正则	even	26	1.161	0.4837	$0.483715\cdots$
	odd	25	1.185	0.4829	
4-正则	even	10	1.008	0.4844	$0.483715\cdots$
	odd	11	1.054	0.4828	
刚性 4-正则	even	$26^\dagger$	1.000	0.5000	0.5
	odd	$25^\dagger$	1.000	0.5000	
刚性六正则	even	22	0.817	0.5000	0.5
	odd	21	0.825	0.4999	
混合价数 2 和 3	even	22	0.965	0.4997	0.5
	odd	21	0.975	0.4992	
混合价数 3 和 4	even	8	0.815	0.4962	0.5
	odd	7	0.855	0.4987	

表 2： 指数 ν 的估计值。位移量 s^* 的取值通过条件 $\tilde{\nu}_{N_{\max}}(s^*) = \tilde{\nu}_{N_{\max}-2}(s^*)$ 数值确定。在混合价数的情况下，我们分别取$w_2 = w_3 = 1$ 和 $w_3 = w_4 = 1$。 †[对于四正则图上的刚性哈密顿回路，我们的显式表达式（60）使得 $N_{\max}$ 可以任意增大。选择 26（分别为 25）是为了更好地与 3-正则情形进行比较。]

曼哈顿 [45, 60]规则晶格。例如，对于任意（偶数或奇数） ℓ，西瓜指数 $h_\ell^{(\kappa)}$ 由（34）给出，其中 κ 如（37）所示，其引力对应物[61, 62, 63, 26] 为

$$\Delta\big(h_\ell^{(\kappa)}, c_{\rm sle}(\kappa)\big) = \frac{\ell}{4} + \frac{1}{8}(4-\kappa)\ . \tag{64}$$

更有趣的是第二个普适类，它对应于中心荷为$c_{\rm fpl}(n) = 1 + c_{\rm dense}(n)$的共形场论与引力耦合，如（6）中所定义。对于任意$p \geq 3$，在 p正则双色映射上的完全填充环都属于这一普适类；这一类对应的模型现在可以用双分量高度场 $\boldsymbol{\Psi} = \psi_1 \boldsymbol{A} + \psi_2 \boldsymbol{b_2}$来描述。特别是，我们可以构造对应于（磁）缺陷（即高度位错）的可观测量，其分量沿着 $\boldsymbol{A}$ 方向：例如，含有奇数个 ℓ 线的西瓜构型就是这种情况。

正如我们在第6节中已经注意到的，这类可观测量很特殊：在（自然地采用双色着色的）正方形和正则六角晶格上计算时，它们的共形权重并不相同，见式（36）。从这个意义上说，第二类（带有 $c = c_{\rm fpl}(n)$）的普适性不如第一类强，似乎只有那些不涉及 $\boldsymbol{A}$ 方向 的可观测量的谱才完全普适：具体而言，式（38）中涉及的、与我们在本文中考察的指数 ν 相关联的 2 线或 4 线可观测量便是如此。至于那些特殊的可观测量（涉及 $\boldsymbol{A}$ 方向），它们似乎在标度极限中仍保留着对原始晶格的记忆，人们或许会想知道，在 SLE$_\kappa$ 形式体系中应如何恰当地对其作连续描述。

当考察具有奇数条线的 p-正则双色随机映射上的西瓜构型时，完全

填充共形权重 $h = h_{2k-1}^{\mathrm{fpl}(n)}$ in (36) 有两个可能值，这使得直接使用 KPZ公式 (41) 来获得稠密情形公式 (64) 的类比结果不免令人怀疑。即使某种选择看起来“自然”（例如，在处理三正则双色映射时选择 (36) 中六角晶格的取值），也有人在 [1] 中观察到，相应的引力指数 Δ 不再通过 KPZ公式 (41) 与 h 直接相关，而必须预先对共形权重进行某种“重整化”。

因此，关于 p 正则双色映射上的哈密顿路径，一个附带的问题是，这类特殊指数是否依赖于 p，就像它们在具有$p = 3$ 和 $p = 4$的规则晶格上的情形一样，从而导向一种较弱的普适性概念。我们将这个问题留待今后研究。

致谢

我们感谢 P. Di Francesco 在本研究早期与我们进行了许多有益的讨论。

A. 四正则双色映射上的刚性哈密顿回路：精确枚举公式

四正则双色映射上的刚性哈密顿回路（在 [20, 9] 中也称为曲折系统）的情形尤其简单，因为我们可以得到 z_N 和 y_N的精确表达式，进而得到（53）中的 k_N。如第 5.3 节所述，将刚性回路展开成一条由交替的黑白顶点构成的直线，会使上半部分和下半部分完全解耦，这意味着

$$z_N = c_N^2 \ , \tag{65}$$

其中 c_N 枚举沿一条直线连接 $2N$ 个顶点的非交叉拱形构型，且仅位于一侧。值得注意的是，在非交叉拱形构型中，拱连接不同颜色顶点这一事实是自动成立的，因此在这种特殊情形下，我们可以忽略颜色。众所周知， c_N 不过就是著名的卡特兰数

$$c_N = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N} \ , \tag{66}$$

与 $q = 2$ 的式 (27) 一致。现在让我们讨论量 y_N。解耦

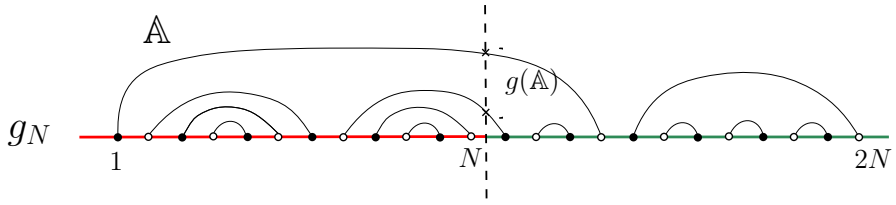

图19： </style}一个拱构型 $\mathbb{A}$，对 g_N 有贡献（此处 $N = 12$），以及经过中点上方的拱的数量$g(\mathbb{A})$（此处为 $g(\mathbb{A})=2$），其奇偶性与 N 相同。

上半部分和下半部分（连同上下对称性）的对称性意味着这一点。

$$y_N = 2g_N c_N \tag{67}$$

其中， g_N 枚举沿直线连接 $2N$ 个顶点的拱形构型 $\mathbb{A}$ （仅在一侧），并以经过该直线中点上方的拱的数量加权，其中拱的数量为 $g(\mathbb{A})$（也就是说，连接第 N个顶点与第$(N+1)$个顶点的边的中点），见图19。首先假设 N 为偶数，并记作 $N = 2M$。这意味着 $g(\mathbb{A})$也为偶数。更具体地说，对于 $0 \le p \le M$，满足 $g(\mathbb{A}) = 2p$ 的那些拱形构型 $\mathbb{A}$ 由[6]枚举。

$$\left(\binom{2M}{M+p} - \binom{2M}{M+p+1}\right)^2 = \left(\frac{2p+1}{M+p+1}\binom{2M}{M+p}\right)^2 . \tag{68}$$

由此得到

$$\begin{aligned} g_N &= \sum_{p=0}^{M} \left(\frac{2p+1}{M+p+1}\binom{2M}{M+p}\right)^2 (2p) \\ &= \sum_{p=0}^{M} \left(\frac{2p+1}{M+p+1}\binom{2M}{M+p}\right)^2 (2p+s) - s\, c_N \ , \end{aligned} \tag{69}$$

其中，我们使用了总拱形构型数的求和公式 $\sum_{p=0}^{M} \left(\frac{2p+1}{M+p+1}\binom{2M}{M+p}\right)^2 = c_N$。注意到

$$\left(\frac{2p+1}{M+p+1}\binom{2M}{M+p}\right)^2 (2p+1) = \Delta_p \left(-\frac{(M+2p^2)}{M}\binom{2M}{M+p}^2\right) \tag{70}$$

其中， Δ_p 是关于 p 的向前有限差分算子。由此可见，对于取值 $s=1$，(69) 式第二行中的求和是望远镜式的。

最终得到

$$g_N = \binom{2M}{M}^2 - c_N \quad \text{for } N = 2M \ , \tag{71}$$

and

$$k_N = \frac{y_N}{z_N} = \frac{2g_N}{c_N} = \frac{2\binom{2M}{M}^2}{\frac{1}{2M+1}\binom{4M}{2M}} - 2 \quad \text{for } N = 2M \ . \tag{72}$$

现在假设 N 为奇数，类似的计算可得

$$k_N = \frac{2\binom{2M}{M}\binom{2M-2}{M-1}}{\frac{1}{2M}\binom{4M-2}{2M-1}} - 2 \quad \text{for } N = 2M-1 \ . \tag{73}$$

公式 (72) 和 (73) 可得所需的公式 (60)。

[6]在非交叉拱系统的戴克路径表示中， [64], 这些构型对应于由以下两部分构成的配对：(i) 一条从高度 0 到高度 $2p$ 、长度为 $2M$ 的路径（因此有 $M+p$ 个上步）；(ii) 一条从高度 $2p$ 到高度 0、长度为 $2M$ 的互补路径（因此有 $M+p$ 个下步）。两条路径的高度均非负。

B. 数值数据

N	z_N	$y_N/2$
1	2	1
2	8	4
3	40	28
4	228	182
5	1424	1376
6	9520	10256
7	67064	82256
8	492292	657258
9	3735112	5483168
10	29114128	45720644
11	232077344	392225248
12	1885195276	3367237302
13	15562235264	29496561288
14	130263211680	258689070208
15	1103650297320	2303183835424
16	9450760284100	20532423715862
17	81696139565864	185194267822952
18	712188311673280	1672505538588120
19	6255662512111248	15246126785026456
20	55324571848957688	139146249302900840
21	492328039660580784	1279654964632731016
22	4406003100524940624	11781309072368013800
23	39635193868649858744	109156077594746888256
24	358245485706959890508	1012371771569816836390
25	3252243000921333423544	9439721149094472748640
26	29644552626822516031040	8810016933767112840982 4
27	271230872346635464906816	8260125474723078095578 96
28	2490299924154166673782584	7751024033279177862804200
29	229392945795864031445274 40	7302245975216333620256235 2
30	211949268051816569236796848	6884685591559256608465965 44
31	196391912842679125877027 6024	6513579576440364032532422976
32	182464820083152074785242 87044	6166757298360506226840020 0798
33	169953210523325203868381 657400	5856301980265398533416801 21888
34	158675949106977517947482 3509344	5565011094981145493511752402704

表 3：双着色 3-正则平面地图上哈密顿回路的 z_N（OEIS [65] 中的序列 A116456）和 y_N 的值。

N	z_N	$y_N/2$
1	3	3
2	34	34
3	583	797
4	12370	18962
5	299310	541218
6	7914962	15658990
7	223112249	492077299
8	6599227954	15610597634
9	202656932134	519177791710
10	6413548643796	17387351622688
11	208040580206216	600403799410348
12	6888733433298402	20842604582620710
13	232117149975205154	739230697828101014
14	7939206408814949506	26327452538168278582
15	2750983650656178216 21	9526535214347400722 27
16	9641385973628938712306	34586535913246138331782
17	341313811643888153301006	12711312097961133955734 06
18	121912800532566233021857 04	46844535638524226902706228
19	438954593201892408379178942	17431848821864660695525672 70

表 4：双着色 4-正则平面地图上哈密顿回路的 z_N 和 y_N 值。

N	5-正则	6-正则	7-正则
1	4	5	6
2	104	259	560
3	4640	25094	104024
4	266084	3192155	25715048
5	17669760	474183765	7462790096
6	1292292432	77907665840	2401948332096
7	101201942512	13740308705438	831180015105160
8	8340015146964	2554205527336363	303462839364701128
9	714995787362600	494475099243189329	115462177891927344416
10	63259444105430512	988673021268128555 15	
11	5742719613679409832	20294465583102673352590	
12	532599319939460085760		
13	5029589806843258352422 4		
14	4823733144104904305892304		

表 5：双着色 5-正则、6-正则和 7-正则平面地图上哈密顿回路的 z_N 值。

N	z_N	$y_N/2$
1	3	1
2	17	6
3	125	67
4	1077	676
5	10335	8047
6	107151	93898
7	1176999	1184387
8	13518677	14869772
9	160872323	195389839
10	1970329025	2566924518
11	24715305741	34751956495
12	316322082895	471076136766
13	4118646279649	6523535179149
14	54428554176853	90491263299716
15	728662270487961	1275474547319661
16	9866887839946229	18009066127518820
17	134967673222112567	257454410282564295
18	1862969746410518745	3686602712849035850
19	25924506623086706277	53316166797618448047
20	363415643231059957421	772238458092154850980
21	5128518034166712107763	11276238109326334073237
22	72814980427431398768943	164883291621449041519854
23	1039603583945087464438759	2427283275342458095362671
24	14918925552410770296750503	35777211288494249743148062
25	215108422239328159518817305	530360761101151938386907819
26	3115114976238433506239203399	7870933845679033785904203612
27	45295058700528813260672278919	117382878931669305354337886003
28	661097024940535265310437647345	1752373351490083766149516091464
29	9682937008170057158267261746831	26271697196196181749006295843637
30	142290916972981046011294091297071	394231951670046541461277392969298
31	2097420196208084754056265923088015	5937785334543529526068890061788573

表 6：具有混合价数 2 和 3（含 $w_2 = w_3 = 1$）的双色平面图上哈密顿回路的 z_N 和 y_N 值。

N	z_N	N	z_N
1	4	10	24584694155437
2	47	11	930530200722914
3	872	12	36039351335158162
4	20579	13	1423250588260168692
5	562346	14	57153474076536198864
6	16959202	15	2328611379453123805998
7	549029380	16	96085895789053111221723
8	18750074923	17	40094334044743890443180 28
9	667653126308	18	16897669128049697923732 9801

表 7：混合价数为 2 和 4 的双色平面图上的哈密顿回路的 z_N 值（带有 $w_2 = w_4 = 1$）。

N	z_N	$y_N/2$
1	5	4
2	98	80
3	3089	3572
4	124622	163552
5	5844034	9159648
6	303138220	522941716
7	16901630655	32699927584
8	994850903414	2071909682642
9	61080867353216	138275419169022
10	3878907227559258	9315849112395598
11	253224873797465540	649064156160267680
12	16915976848381443504	45541980819371884184
13	1152241256370476649482	3271499179479967664002
14	79806203708523623827632	23628787790540462633317 4
15	5608021949255349143950993	17365297252695426225180534
16	399095475044872817013511142	12817257112683357728625714 94

表 8：混合价数为 3 和 4 的双色平面图上的哈密顿回路的 z_N 和 y_N 值（带有 $w_3 = w_4 = 1$）。

如第5节（公式（24）、（27））和附录A中 $q = 2$所示，对于任意 $q \geq 2$ ，在 $2q$-正则双色平面图上的刚性哈密顿回路情形下，采用图4所示的拱形表示，可使上方和下方的拱形构型完全解耦。这意味着以下两个恒等式（分别推广了（65）和（67））：

$$z_N = c_N^2 \quad \text{with } c_N = \frac{1}{(q-1)N+1}\binom{q\,N}{N} \tag{74}$$

and

$$y_N = 2g_N c_N \ , \tag{75}$$

其中， g_N 枚举仅在一侧的拱形构型，权重取决于从直线中点上方经过的拱数，参见 $q = 2$时的图19。对于任意 $q \geq 3$ ，我们没有 g_N 的精确表达式（这将推广公式（71））。下表给出了 $q = 3$情况下 g_N 的前几个值，据此我们可以通过（75）得到 y_N。

N	g_N	N	g_N
1	2	16	429765359266
2	6	17	2747996363358
3	32	18	17558452105246
4	162	19	112880676289328
5	930	20	725294746632006
6	5260	21	4683479629941570
7	31432	22	30229921171815208
8	186606	23	195925602453080976
9	1142582	24	1269396826660493508
10	6971466	25	8252873289420323592
11	43385904	26	53640502233395278680
12	269429292	27	349671835181599650032
13	1696338360	28	2278921678933838458548
14	10665144516	29	14890267787292439785072
15	67735129000	30	97273104239590589753820

表9：在6-正则双色平面图上的刚性哈密顿回路（即 $q = 3$）中， g_N 的取值（其中 $y_N = 2g_N c_N$ 和 c_N 如（74）所示）。

参考文献

[1]Philippe Di Francesco、Bertrand Duplantier、Olivier Golinelli 和 Emmanuel Guitter。随机双三次地图上的哈密顿路径与 KPZ。《核物理B》，987:116084，2023 年。[2]V.G. Knizhnik、A.M. Polyakov 和 A.B. Zamolodchikov。共形规范下二维量子引力的分形结构。《现代物理快报A》，03(08):819–826，1988 年。[3] F. David。共形规范下与二维引力耦合的共形场论。《现代物理快报A》，03(17):1651–1656，1988 年。[4] Jacques Distler 和 Hikaru Kawai。共形场论与二维量子引力。《核物理B》，321(2):509–527，1989 年。[5] E. Guitter、C. Kristjansen 和 J.L. Nielsen。随机欧拉三角剖分上的哈密顿回路。《核物理B》，546(3):731–750，1999 年。[6] Bertrand Duplantier、Jason Miller 和 Scott Sheffield。作为树的配对的 Liouville量子引力。《Astérisque》，427:1–258，2021 年。[7] Oded Schramm。环擦除随机游走和均匀生成树的标度极限。《Israel J. Math.》，118:221–288，2000 年。[8] Jacopo Borga、Ewain Gwynne 和 Xin Sun。置换测度、曲折系统与 SLE 装饰的 Liouville量子引力。《arXiv:2207》。$02319\ [math.PR]$, 2022。[9] Jacopo Borga、Ewain Gwynne 和 Minjae Park。论均匀曲折系统的几何。《arXiv:2212》。$00534\ [math.PR]$, 2022。[10] N. Y. Reshetikhin。六角晶格上 O(n) 模型的一个新的精确可解情形。《物理学杂志A：数学与一般》，24(10):2387，1991 年 5 月。[11] H. W. J. Blöte 和 B. Nienhuis。蜂窝格上的完全填充环模型。《物理评论快报》，72:1372–1375，1994 年 2 月。[12] M. T. Batchelor、J. Suzuki 和 C. M. Yung。由蜂窝格上完全填充环模型的解得到的哈密顿游走精确结果。《物理评论快报》，73:2646–2649，1994 年 11 月。[13] Jane Kondev、Jan de Gier 和 Bernard Nienhuis。完全填充环模型的算符谱与精确指数。《物理学杂志A：数学与一般》，29(20):6489–6504，1996 年 10 月。[14] P. Di Francesco 和 E. Guitter。规则与随机晶格上的几何约束统计系统：从折叠到曲折系统。《Physics Reports》，415(1):1–88，2005 年。

[15] M. T. Batchelor、H. W. J. Blöte、B. Nienhuis 和 C. M. Yung。《方格上完全填充环模型的临界行为》。《物理学杂志*A*：数学与一般》，29(16):L399，1996年8月。[16] Jesper Lykke Jacobsen 和 Jane Kondev。《方格上紧致聚合物的场论》。《核物理*B*》，532(3):635–688，1998年。[17] David Dei Cont 和 Bernard Nienhuis。《方格上两种多边形的堆积》。《物理学杂志*A*：数学与一般》，37(9):3085，2004年2月。[18] J. Jacobsen 和 P. Zinn-Justin。《完全填充环模型的代数贝特假设》。《物理学杂志*A*：数学与一般》，37(29):7213，2004年7月。[19] G. Borot、J. Bouttier 和 E. Guitter。《通过嵌套环递归研究随机映射上的 O(n) 模型》。《物理学杂志*A*：数学与理论》，45(4):045002，2011年12月。[20] Valentin Féray 和 Paul Thévenin。《曲折系统与无限面条中的连通分支》。《国际数学研究通报》，2022年7月。rnac156。[21] Mireille Bousquet-Mélou 和 Gilles Schaeffer。《平面星图的计数》。《应用数学进展》，24(4):337–368，2000年。[22]Nikolaus Fuss。《问题之解：一个 n 边多边形可以用对角线分解成多少个 m 边多边形》。《彼得堡帝国科学院新纪要》，9:243–251，1793年。https://www.math.ucla.edu/~pak/lectures/Cat/Fuss1.pdf。[23] Steffen Rohde 和 Oded Schramm。《SLE 的基本性质》。《数学年刊》（第二辑），161(2):883–924，2005年。[24] Scott Sheffield。《探索树与共形环系综》。《杜克数学杂志》，147(1):79–129，2009年。[25] Bertrand Duplantier。《更高阶共形多重分形性》。《统计物理学杂志》，110(3-6):691–738，2003年。[26] B. Duplantier。《共形分形几何与边界量子引力》。载于 M. L. Lapidus 和 M. van Frankenhuysen 编，《分形几何及其应用：贝努瓦·曼德布罗诞辰纪念文集》，第2部分，第*72*卷，《纯数学研讨会论文集》，第365–482页。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2004年。[27] Wouter Kager 和 Bernard Nienhuis。《随机洛伊纳演化及其应用指南》。《统计物理学杂志》，115(5-6):1149–1229，2004年。[28] Gregory F. Lawler、Oded Schramm 和 Wendelin Werner。《平面环擦除随机游走与均匀生成树的共形不变性》。《概率年刊》，32:939–995，2004年。

[29] Gregory F. Lawler 和 Fredrik Viklund。《环擦除随机游走在自然参数化下的收敛》。《杜克数学杂志》，170(10):2289–2370，2021年。[30] Oded Schramm 和 Scott Sheffield。《二维离散高斯自由场的等高线》。《数学学报》，202(1):21–137，2009年。[31] Stanislav Smirnov。《平面上的临界渗流：共形不变性、卡迪公式与标度极限》。《法国科学院报告：数学》，333(3):239–244，2001年。[32] Federico Camia 和 Charles M. Newman。《二维临界渗流：完整的标度极限》。《数学物理通讯》，268(1):1–38，2006年11月。[33] Stanislav Smirnov。《随机簇模型中的共形不变性 I：伊辛模型中的全纯费米子》。《数学年刊》，172(2):1435–1467，2010年。[34] Dmitry Chelkak 和 Stanislav Smirnov。《二维伊辛模型的普适性与费米子可观测量的共形不变性》。《发明数学》，189(3):515–580，2012年。[35] Bertrand Duplantier。《共形不变分形与势理论》。《物理评论快报》，84(7):1363–1367，2000年。[36] Dapeng Zhan。《弦状 SLE 的对偶性》。《发明数学》，174(2):309–353，2008年。[37] Julien Dubédat。《Schramm-Loewner演化的对偶性》。《高等师范学院科学年刊》（第四辑），42(5):697–724，2009年。[38] Bernard Nienhuis。《二维 O(n) 模型的精确临界点与临界指数》。《物理评论快报》，49(15):1062–1065，1982年。[39] Bernard Nienhuis。《二维自旋模型的临界行为与库仑气体中的电荷不对称性》。《统计物理学杂志》，34:731–762，1984年。[40] Michael Aizenman、Bertrand Duplantier 和 Amnon Aharony。《二维渗流中的路径穿越指数与外周界》。《物理评论快报》，83:1359–1362，1999年。[41] Bernard Nienhuis。《二维相变的库仑气体表述》。载于 C. Domb、M. Green 和 J. Lebowitz 编，《相变与临界现象》第11卷，第1–53页。Academic Press，伦敦，1987年。[42] H. Saleur。《二维自避行走的新精确指数》。《物理学杂志*A*：数学与一般》，19(13):L807–L810，1986年。[43] B. Duplantier。《二维稠密聚合物的精确临界指数》。《物理学杂志*A*：数学与一般》，19(16):L1009–L1014，1986年。

[44] B. Duplantier 和 H. Saleur. 二维密集自回避行走的精确临界性质。《核物理*B*》，290(3):291–326，1987年。[45] Bertrand Duplantier. 从 Potts 模型和 O(n) 模型出发，研究二维曼哈顿哈密顿行走的临界指数。《统计物理学杂志》，49(3-4):411–431，1987年。[46] H. Saleur 和 B. Duplantier. 二维渗流边界指数的精确确定。《物理评论快报》，58:2325–2328，1987年。[47] Murray T. Batchelor 和 Henk W. J. Blöte. 通过蜂窝格上的精确解，研究 O(n) 模型的共形反常和标度维数。《物理评论快报》，61:138–140，1988。[48] Vincent Beffara. SLE曲线的维数。《概率年刊》，36(4):1421 – 1452，2008年。[49] Scott Sheffield. 随机曲面的共形焊接：SLE与量子引力拉链。《概率年刊》，44(5):3474 – 3545，2016年。[50]Scott Sheffield. 量子引力与库存累积。《概率年刊》，44(6):3804 – 3848，2016年。[51] B. Duplantier 和 S. Sheffield. Schramm-Loewner演化与Liouville量子引力。《物理评论快报》，107:131305，2011年。[52] B. Duplantier 和 S. Sheffield. Liouville量子引力与KPZ。*Invent. Math.*，185:333–393，2011年。[53] B. Duplantier 和 S. Sheffield. Liouville量子引力中的对偶性与KPZ。《物理评论快报》，102:150603，2009年。[54] R. Rhodes 和 V. Vargas. 对数无限可分多重分形随机测度的KPZ公式。《*ESAIM*: 概率与统计》，15:358–371，2011年。[55] Bertrand Duplantier、Rémi Rhodes、Scott Sheffield 和 Vincent Vargas. 临界高斯乘性混沌的重整化与KPZ 关系。《数学物理通讯》，330(1):283 – 330，2014年。[56] Ewain Gwynne、Nina Holden 和 Xin Sun. 随机平面图与Liouville量子引力的树的配对：综述。*arXiv:1910.04713 [math.PR]*, 2019.《全景与综合》，即将出版。[57] François David、Antti Kupiainen、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas. 黎曼球面上的Liouville量子引力。《数学物理通讯》，342(3):869–907，2016年。[58] Juhan Aru、Yichao Huang 和 Xin Sun. 二维单位面积量子球面的两种观点及其等价性。《数学物理通讯》，356(1):261–283，2017年。

[59] Gregory F. Lawler 和 Scott Sheffield. Schramm-Loewner演化的一种自然参数化。《概率年刊》，39(5):1896–1937，2011年。[60] Bertrand Duplantier 和 François David. 曼哈顿格上多个哈密顿游走的精确配分函数和关联函数。《统计物理学杂志》，51(3):327–434，1988。[61] Bertrand Duplantier 和 Ivan Kostov. 随机曲面上聚合物的共形谱。《物理评论快报》，61:1433–1437，1988。[62] Bertrand Duplantier 和 Ivan K. Kostov. 任意亏格随机曲面上的几何临界现象。《核物理*B*》，340:491–541，1990。[63] I. K. Kostov. 平面随机格上的 O(n) 向量模型：反常维数谱。《现代物理快报*A*》，04(03):217–226，1989。[64] Richard P. Stanley. 卡特兰数。剑桥大学出版社，2015。[65] OEIS基金会。《在线整数数列百科全书》，在线发布于 http://oeis.org，2023。