特殊函数的广义超几何相干态：数学与物理性质

Isiaka Aremua[1,2], Messan MédardAkouetegan[1] , Komi Sodoga[1,2], Mahouton NorbertHounkonnou[3],以及 Yaogan Mensah[4,2]1洛美大学（*UL*），理学院（*FDS*），物理系，材料与半导体器件物理实验室，洛美大学（*UL*），*01 B.P. 1515*，洛美 *01*，多哥。[2]国际数学物理与应用讲席，*ICMPA-UNESCO*教席，阿波美-卡拉维大学，*072 B.P. 50*，科托努，贝宁共和国。[3]国际数学物理与应用讲席，*ICMPA-UNESCO*教席，阿波美-卡拉维大学，*072 B.P. 50*，科托努，贝宁共和国；以及数学与计算机科学及应用国际高级研究中心（*CIREASMIA*），*072 B.P. 50*，科托努，贝宁共和国[4]数学系，洛美大学，洛美，多哥。电子邮箱：*claudisak@gmail.com*、*akouteganmessanmedard@gmail.com*、*antoinekomisodoga@gmail.com*、*mensahyaogan2@gmail.com*、*norbert.hounkonnou@cipma.uac.bj*

arXiv:2305.02194v1 [math-ph] 2 Apr 2023

2023年5月4日

摘要

在我们此前的研究工作 [*J. Phys. A: Math. Gen.* **35,** 9355-9365 (2002)], [*J.Phys. A: Math. Gen.* **38,** 7851 (2005)] 以及 [《欧洲物理学杂志*D*》**72,** 172 (2018)], 的基础上，我们研究了一类与伴随雅可比多项式和超几何函数相关的广义相干态，该类态满足关于一个以梅杰尔G函数表示的权函数的单位分解关系。我们扩展了所构造态的态希尔伯特空间，并讨论了再生核的性质及其解析展开。此外，我们给出了与该量子模型相关的可观测量的期望值。我们还对复平面进行了量子化，计算并分析了这些态下的概率密度和时间稳定性。利用相干态所提供的完备关系，我们在密度算符的对角 P-表示下进行了热力学分析。

关键词： 超几何相干态；Meijer G函数；贝塞尔函数；再生核；多项式；量子化；概率密度。

1 引言

在过去几十年中，相干态（相干态）的概念引起了极大的科学兴趣。这一概念由薛定谔 [1] 于20世纪60年代初针对量子谐振子（HO）提出，作为一种具有与经典HO最为相似动力学行为的特殊量子态。

Glauber [2] 和 Sudarshan [3] 重新审视了这些薛定谔相干态的定义，而 Klauder [4]则详细阐述了任何态要成为相干态必须满足的条件（即复标记连续性、归一化、非正交性、具有唯一正权函数的积分测度所对应的单位算符分解、时间稳定性和作用量恒等式）。有关相干态及其各种推广形式的更多细节，可参阅相关文献。例如，参见 [5, 6, 7, 8]。不同类型的相干态也已推广至量子系统。值得一提的有 Barut-Girardello相干态 [9], Perelomov相干态 [6], Gazeau-Klauder相干态 [10], Penson-Solomon相干态 [11]Klauder-Penson-Sixdeniers相干态 [12], 以及由 Appl 引入的广义超几何相干态（GHCSs）。

以及 Schiller [13]。自这些相干态被引入以来，许多研究都对其进行了考量。关于相干态的非经典性质，还可以参阅 [14]。广义超几何光子添加相干态、光子耗减相干态以及变形光子添加非线性相干态分别在 [15] 和 [16] 中被提出。值得注意的是，光子添加相干态（PACSs）和低阶截断相干态是经过适当变形的光子添加相干态的极限情形 [17]。针对可精确求解的哈密顿量，光子添加 Gazeau-Klauder 相干态和 Klauder-Perelomov 相干态在 [18], 中得到了研究，而赝谐振子的光子添加 Barut-Girardello 相干态则在 [19] 中得以构造。此外，在 [19] 中，广义超几何相干态被推广至混合态（热态），并特别应用于赝谐振子的情形。

一般而言，广义超几何相干态由以下表达式给出 [13, 19]:

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}_pF_q(\{a_i\}_1^p;\{b_j\}_1^q;|z|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\rho_{p,q}(n)}}|n\rangle, \tag{1}$$

其中， ${}_pF_q(\{a_i\}_1^p;\{b_j\}_1^q;|z|^2)$ 表示广义超几何函数 [20]:

$${}_pF_q(\{a_i\}_1^p;\{b_j\}_1^q;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p}(a_i)_n}{\prod_{j=1}^{p}(b_j)_n} \frac{x^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_{p,q}(n)} x^n, \tag{2}$$

p 和 q 是整数；$\rho_{p,q}(n)$ 表示通过 Pochhammer 符号 $(a)_n = {}^{\Gamma_{(n+a)\,\Gamma(a)}}$ 和欧拉伽马函数 $\Gamma(x)$ 表示的广义阶乘。广义超几何相干态这一名称指的是由广义超几何函数给出的归一化函数。

Cotfas 在其研究中 [21], 提出了相伴超几何算子的因子分解方法，并推导出相伴代数及相应的相干态。这些态是湮灭算符的本征态，记为 a_m。遵循 Aleixo 等人 [22], 的方法，我们引入了右逆算符 a_m^{-1}，以[23] 定义广义相伴超几何相干态（GAH-CSs）。这些态满足一组相干态所需的 Klauder条件，并在给定物理系统的量子与经典表述之间建立了紧密联系。最近， [24], 我们中的一些人将相干态量子化的一般过程（也称为 Berezin-Klauder-Toeplitz量子化）应用于复平面上的一组 GPAH-CSs；这些相干态由单位分解导出，其正权函数以 Meijer G函数表示。此外，这些作者还通过考察以广义超几何函数表示的 Mandel Q参数，讨论了非经典行为。所有这些关于广义超几何相干态和 GPAH-CSs 的推广工作，同时也凸显了超几何函数和 Meijer G函数的应用（见 [13, 21, 23, 19, 15, 25], 及其中的参考文献），促成了本研究的开展。事实上，遵循 [21]-[23], 中提出的方法，我们为伴随雅可比多项式和超几何函数构造了一族广义超几何相干态（GHCSs）。这些相干态与 Appl 和 Schiller [13], 引入的 GHCSs 一致（见本文中的（1）），其展开式以 Fock基态表示。所有计算，包括积分测度的权函数，均以与超几何函数相关的 Meijer G函数和第一类修正贝塞尔函数表示，凸显了这些函数的重要性与实用价值。

密度算符的对角展开称为 Glauber-Sudarshan (GS)-P- 表示 [26], ，它在各种构造中的 Husimi 分布 [27]和 Wehrl 熵[28] 概念中发挥着重要作用（更多详情请参见 [19, 25, 29, 30, 31] ）。此外，在 [32],中，研究者使用相干态基下的密度算符对角表象，研究了谐振子量子系统，以及在磁场与谐振子耦合作用下运动于二维非对易

空间中的模型无自旋电子。研究者还考察了相关统计性质，例如 Q-Husimi 分布和 Wehrl 熵。此外，多矩阵向量相干态（VCSs）基成功应用于密度算符表示，并被用于研究电磁场与各向同性谐势耦合时电子的朗道能级 [33]。研究者推导并讨论了曼德尔Q参数和信号量子噪声比等主要相关统计性质。此外，最近 [34], 在超对称谐振子的背景下，研究者实现了用于构造双分量矢量相干态表示的密度算符矩阵表述。文中描述了相关统计性质，并通过量子比特的积分表示建立了与量子信息的联系。

本文结构安排如下。第 2 节回顾文献中采用的超几何相干态构造方法。第 3 节构造广义超几何相干态，并通过给出由梅杰尔 G 函数表示的适当权函数 [20], （该权函数求解斯蒂尔切斯矩问题），建立这些态满足的单位分解。第 4 节通过再生核以及希尔伯特空间中由这些态张成的空间内给定函数的解析表示，探讨广义超几何相干态的解析性质。第 5 节推导描述该量子系统的可观测量的期望值。第 6 节研究利用这些态对复平面进行量子化，即 Berezin-Klauder-Toeplitz 量子化（也称为相干态量子化或反维克量子化）。第 7 节讨论广义超几何相干态的概率密度和时间依赖性。第 8 节探讨该量子系统的热力学性质，并从密度算符的 Glauber-Sudarshan P 对角表象确定相关可观测量的热期望值。

2 广义超几何相干态的通用构造方法

我们从以下定义开始。

定义 2.1。广义伴随超几何型相干态（*GAH-CSs*）是与经典正交多项式的 m^{th} 导数 $\Phi_{l,m}=\kappa^m\Phi_l^{(m)}$ 相对应的相干态 Φ_l，这些多项式满足以下超几何型二阶微分方程：

$$\sigma(s)\Phi_l''(s)+\tau(s)\Phi_l'(s)+\lambda_l\Phi_l(s)=0, \tag{3}$$

其中 $\lambda_l=-\frac{1}{2}l(l-1)\sigma''-l\tau'$, $\kappa=\sqrt{\sigma}$,¯ 其中 σ 是非负函数； σ 和 τ 分别是次数至多为二次和恰为一次的多项式。

$\Phi_{l,m}$称为伴随超几何型函数（非简谐振子），它们是本征值问题的解$H_m\Phi_{l,m}=\lambda_l\Phi_{l,m}$，其中哈密顿算符 H_m 表示为如下二阶微分算符：

$$H_m = -\sigma\frac{d^2}{ds^2}-\tau\frac{d}{ds}+\frac{m(m-2)}{4}\frac{\sigma'^2}{\sigma}+\frac{m}{2}\tau\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{1}{2}m(m-2)\sigma''-m\tau'. \tag{4}$$

$\Phi_{l,m}$ 是正交的

$$\int_a^b\Phi_{l,m}\Phi_{k,m}\,\rho\,ds=0,\qquad l\neq k,\qquad l,\,k\in\{m,m+1,m+2,\ldots\}, \tag{5}$$

关于与多项式函数 σ 和 τ 相关的正权函数 ρ，其满足皮尔逊方程 $(\sigma\rho)'=\tau\rho$，定义在区间 (a,b) 上，该区间可以是有限的或无限的。算符 H_m 可因式分解为：

$$H_m-\lambda_m=A_m^\dagger A_m,\quad H_{m+1}-\lambda_m=A_mA_m^\dagger,$$

并满足交织关系

$$H_m A_m^\dagger = A_m^\dagger H_{m+1} \quad \text{and} \quad A_m H_m = H_{m+1} A_m.$$

互为形式伴随的一阶微分算子

$$A_m : \mathscr{H}_m \longrightarrow \mathscr{H}_{m+1} \quad \text{and} \quad A_m^\dagger : \mathscr{H}_{m+1} \longrightarrow \mathscr{H}_m,$$

定义为 [21]:

$$A_m = \kappa(s)\frac{d}{ds} - m\kappa'(s) \quad \text{and} \tag{6}$$

$$A_m^\dagger = -\kappa(s)\frac{d}{ds} - \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} - (m-1)\kappa'(s), \tag{7}$$

其中 $\kappa = \sqrt{\sigma}$。 $\mathscr{H}_m$ 是 $\{\Phi_{k,m}\}_{k\geq m}$，在 $m \in \mathbb{N}$，意义下关于内积（5）的希尔伯特空间。我们仅限于以下情形：对于每个 $m \in \mathbb{N}$， $\mathscr{H}_m$ 在希尔伯特空间$\mathscr{H} = \{\varphi \in L^2(\rho(s)ds)\}$ 中是稠密的，其中 L^2 是平方可积函数空间。以下形状不变关系成立

$$\begin{aligned} A_m A_m^\dagger &= A_{m+1}^\dagger A_{m+1} + r_{m+1}, \\ r_{m+1} &= \lambda_{m+1} - \lambda_m = -m\sigma'' - \tau', \end{aligned} \tag{8}$$

其中特征值 λ_l 和特征函数 $\Phi_{l,\ m}$ 为:

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \sum_{k=1}^{l} r_k, \\ \Phi_{l,m} &= \frac{A_m^\dagger}{\lambda_l - \lambda_m}\frac{A_{m+1}^\dagger}{\lambda_l - \lambda_{m+1}} \cdots \frac{A_{l-2}^\dagger}{\lambda_l - \lambda_{l-2}}\frac{A_{l-1}^\dagger}{\lambda_l - \lambda_{l-1}}\Phi_{l,l} \end{aligned} \tag{9}$$

对于满足关系 $A_l\Phi_{l,\ l} = 0$.的所有 $l \in \mathbb{N}$和 $m \in \{0, 1, 2, \ldots, l-1\}$， $\Phi_{l,\ l}$:
湮灭算符和产生算符定义为:

$$a_m,\, a_m^\dagger : \mathscr{H}_m \longrightarrow \mathscr{H}_m, \quad a_m = U_m^\dagger A_m \ \text{ and } a_m^\dagger = A_m^\dagger U_m \tag{10}$$

在幺正算子内

$$\underset{m}{U_m} : \mathscr{H}_m \longrightarrow \mathscr{H}_m, \quad U_m|l.m\rangle = |l+1, m+1\rangle. \tag{11}$$

这些态 $|l, m\rangle = \frac{\Phi_l}{||\Phi_l{}_{,m}||}$ 对所有 $l \geq m$ 以及每个 $m \in \mathbb{N}$均有定义。形式上互为伴随的算符 a_m 和 $a_m^\dagger$ 作用于态 $|l, m\rangle$ 如下

$$\begin{aligned} a_m|l, m\rangle &= \sqrt{\lambda_l - \lambda_m}\,|l-1, m\rangle \quad \text{and} \\ a_m^\dagger|l, m\rangle &= \sqrt{\lambda_{l+1} - \lambda_m}\,|l+1, m\rangle, \quad l \geq m, \end{aligned} \tag{12}$$

并满足对易关系:

$$[a_m, a_m^\dagger] = \mathscr{R}_m, [a_m^\dagger, \mathscr{R}_m] = \sigma'' a_m^\dagger, [a_m, \mathscr{R}_m] = -\sigma'' a_m, \tag{13}$$

其中 $\mathscr{R}_m = -\sigma'' N_m - \tau'$、 N_m： $\mathscr{H}_m \longrightarrow \mathscr{H}_m$ 是定义为 $N_m\Phi_{l,\ m} = l\Phi_{l,\ m}$.请注意，当 $deg(\sigma) = 1$ 时，由（13）中的生成元定义的代数同构于海森堡–魏尔代数 [21]。除了对易关系（13）外，我们还有

$$A_m \mathscr{R}_m = \mathscr{R}_{m+1} A_m, \tag{14}$$

以及相似变换

$$U_m\mathscr{R}_m U_m^\dagger = \mathscr{R}_{m+1} + \sigma'', \quad \text{for all} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$, $|n\rangle = |m+n, m\rangle$, $e_n = \lambda_{m+n} - \lambda_m, \quad m \in \mathbb{N},$, 取 $N_m = a_m^\dagger a_m$, 可得:

$$\begin{aligned} a_m|n\rangle &= \sqrt{e_n}|n-1\rangle, \\ a_m^\dagger|n\rangle &= \sqrt{e_{n+1}}|n+1\rangle, \\ (H_m - \lambda_m)|n\rangle &= e_n|n\rangle. \end{aligned} \tag{16}$$

非简谐振子的相干态由 Cotfas [21] 给出:

$$|z\rangle = \mathscr{N}(|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{\varepsilon_n}}|n\rangle, \ \mathscr{N}(|z|^2) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{\varepsilon_n}\right]^{-1/2} \tag{17}$$

对于开圆盘 $\mathscr{C}(O, \mathscr{R})$ 中任意的 z, 其圆心为 O, 半径为

$$\mathscr{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varepsilon_n} \neq 0 \tag{18}$$

$$\text{with} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 0 \\ e_1 e_2 \cdots e_n & \text{if} \quad n > 0 \end{cases}. \tag{19}$$

这些相干态是湮灭算符 a_m, 的本征态, 即 $a_m|z\rangle = z|z\rangle$。引入右逆算符 A_m^{-1}, a_m^{-1}后, 文献 [23] 证明, 相干态（17）可改写为

$$|z\rangle = \mathscr{N}(|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}(za_m^{-1})^n|0\rangle, \tag{20}$$

其推广形式为

$$|z;\mathscr{R}_m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(z\mathscr{R}_m a_m^{-1})^n|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{h_n(\mathscr{R}_m)}|n\rangle \tag{21}$$

其中

$$h_0(\mathscr{R}_m) = 1, \tag{22}$$

$$h_n(\mathscr{R}_m) = \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\prod_{k=0}^{n-1}(\mathscr{R}_m + k\sigma'')} \quad \text{for} \quad n \geq 1. \tag{23}$$

态 (21) 是 a_m 的本征态,

$$a_m|z;\mathscr{R}_m\rangle = z(\mathscr{R}_m - \sigma'')|z;\mathscr{R}_m\rangle, \tag{24}$$

并满足二阶微分方程

$$\{a_m - z(\mathscr{R}_m - \sigma'')\}\frac{d}{dz}|z;\mathscr{R}_m\rangle = (\mathscr{R}_m - \sigma'')|z;\mathscr{R}_m\rangle. \tag{25}$$

此外, 我们将相干态 (21) 推广为:

$$|z;\mathscr{R}_m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(zf(\mathscr{R}_m)a_m^{-1})^n|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{h_n(\mathscr{R}_m)}|n\rangle \tag{26}$$

对于任意解析函数 f，其中

$$\begin{aligned} h_0(\mathscr{R}_m) &= 1 \\ \text{and } h_n(\mathscr{R}_m) &= \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\prod_{k=0}^{n-1} f(\mathscr{R}_m + k\sigma'')} \text{ for } n \geq 1. \end{aligned} \tag{27}$$

相干态 (26) 是 a_m 的本征态,

$$a_m|z;\mathscr{R}_m\rangle = zf(\mathscr{R}_m - \sigma'')|z;\mathscr{R}_m\rangle, \tag{28}$$

并满足条件

$$\{a_m - zf(\mathscr{R}_m - \sigma'')\}\frac{d}{dz}|z;\mathscr{R}_m\rangle = f(\mathscr{R}_m - \sigma'')|z;\mathscr{R}_m\rangle. \tag{29}$$

考虑到 $\mathscr{R}_m$ 是一个作用于态 $|n\rangle$ 上的算符，其作用方式为

$$\mathscr{R}_m|n\rangle = [-(m+n)\sigma'' - \tau']|n\rangle = r_{m+n+1}|n\rangle, \tag{30}$$

我们将相干态 (26) 改写为如下形式:

$$|z;m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{h_n(m)}|n\rangle, \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned} h_0(m) &= 1 \\ \text{and } h_n(m) &= \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\prod_{k=0}^{n-1} f(r_{m+n+1-k})} \quad \text{for} \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{32}$$

性质 (28) 和 (29) 变为

$$\begin{aligned} a_m|z;m\rangle &= zf(r''_{m+n+2})|z;m\rangle, \\ \{a_m - zf(r_{m+n+2})\}\frac{d}{dz}|z;m\rangle &= f(r_{m+n+2})|z;m\rangle, \end{aligned} \tag{33}$$

分别地。我们在 [23] 中确立了广义相干态 (31) 验证了标签连续性、过完备性、时间稳定性和作用量恒等式等性质。

3 伴随雅可比多项式和超几何函数的广义超几何相干态

3.1 构造方法

本节中，我们为雅可比关联函数和超几何函数构造相干态。我们通过斯蒂尔切斯矩问题讨论这些态满足的单位分解，并利用梅林变换求解。合适的解以梅杰尔 G 函数表示。

对应于伴随雅可比函数多项式的多项式函数 $\sigma(x)$ 和 $\tau(x)$ 为

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = (\zeta - \gamma) - (\gamma + \zeta + 2)x \tag{34}$$

而对于超几何函数多项式，它们则表示为

$$\sigma(x) = (1-x)x, \quad \tau(x) = (\zeta+1) - (\gamma+\zeta+2)x. \tag{35}$$

$\tau(x)$ 的一阶导数和 $\sigma(x)$ 的二阶导数分别为：

$$\tau'(x) = -(\gamma+\zeta+2), \qquad \sigma''(x) = -2, \tag{36}$$

分别地。为简便起见，设

$$\mu = \gamma+\zeta+2. \tag{37}$$

由式（4）给出的哈密顿量 H_m 的特征值及其对应的特征向量 $\{\Phi_{l,m}\}_{l\geq 0}$, 可由式（36）和（37）得到如下结果：

$$\lambda_l = -\frac{1}{2}l(l-1)\sigma'' - l\tau' = l(l+\mu-1) \tag{38}$$

从而得到 [25]:

$$e_n = \lambda_{m+n} - \lambda_m = n(2m+n+\mu-1). \tag{39}$$

量 $h_n(R_m)$ 得到

$$h_n(R_m) = \sqrt{\Gamma(n+1)\frac{\Gamma(2m+n+\mu)}{c^{2n}\,\Gamma(2m+\mu)}}. \tag{40}$$

为了获得任意 c 值下的 $h_n(R_m)$，设

$$f(R_m) = f(R_m+\sigma'') = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}R_m\right)\left(-\frac{1}{2}R_m\right)} \tag{41}$$

with

$$R_m = -(m+n)\sigma'' - \tau' = 2\left(m+n+\frac{\mu}{2}\right).$$

然后，我们得到乘积

$$\prod_{k=0}^{n-1} f(R_m+k\sigma'') \quad = \quad \sqrt{\frac{\Gamma\left(n-\frac{R_m}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{R_m}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{R_m}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{R_m}{2}\right)}} = c^n. \tag{42}$$

固定 $\nu = \frac{\mu}{2}$，由式 (42) 可得：

$$h_n(R_m) \quad = \quad \left[\Gamma(n+1)\frac{\Gamma(n+2m+2\nu)}{\Gamma(2m+2\nu)}\frac{\Gamma\left(-\frac{R_m}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{R_m}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(-\frac{R_m}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{R_m}{2}\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

从而

$$h_n(m) = \left[\Gamma(n+1)\frac{(2m+2\nu)_n}{[(-(m+n)-2\nu)_n]^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

然后，相关的相干态 $|z;m\rangle$ （分别对应伴随雅可比多项式和超几何函数）如下所示：

$$|z;m\rangle = \left[N(|z|^2,m)\right]^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}}}\,|n\rangle \tag{45}$$

其中，归一化函数可用梅杰尔 G 函数表示为

$$N(|z|^2,m) = \frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu\\ 0, & 1-2m-2\nu\end{matrix}\right). \tag{46}$$

注 3.1. *1.* 所构造的广义超几何相干态 *(45)* 与 *Appl* 和 *Schiller (1)* 引入的广义超几何相干态一致，并且当 $c \neq 1$ 且所添加的量子（或光子）数为 $p = 0$ *[25]*时，对应于广义伴随超几何相干态。

2. 在 $c = 1$ 的情况下，广义超几何相干态 $|z; m\rangle$ 由以下形式给出

$$|z; m\rangle = \frac{1}{\sqrt{{}_0F_1(2m + 2\nu; |z|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\Gamma(n + 1)(2m + 2\nu)_n}} |n\rangle \tag{47}$$

归一化常数如下：

$$\begin{aligned} N(|z|^2; m) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{|h_n(m)|^2} =_0 F_1(2m + 2\nu; |z|^2) \\ &= \Gamma(2m + 2\nu)|z|^{1-2m-2\nu} I_{2m+2\nu-1}(2|z|). \end{aligned} \tag{48}$$

广义超几何相干态 *(47)* 与在 *[23]* 中获得的广义伴随超几何相干态相一致，所添加的量子（或光子）数为 $p = 0$。

此外，它们彼此并不正交，因为

$$\langle z', m|z, m\rangle = \frac{1}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z'|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-z\bar{z'} \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{49}$$

3.2 标记的连续性

广义超几何相干态 (47) 在标记 z 上是连续的。事实上，相干态参数 $z' \longrightarrow z$ 的变换会导致广义超几何相干态的变换 $|z';\ m\rangle \longrightarrow |z;\ m\rangle$:

$$\text{If} \quad |z - z'| \longrightarrow 0 \quad \text{then} \| |z, m\rangle - |z', m\rangle \|^2 = 2\left[1 - \text{Re}\left(\langle z', m|z, m\rangle\right)\right] \longrightarrow 0, \tag{50}$$

其中用到了式 (48) 和 (49)。

3.3 单位算符的分解

接下来，任何相干态的一项基本性质是单位算符的分解。我们有以下命题：

命题 3.2。 广义超几何相干态 $|z; m\rangle$ 满足以下单位分解

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi} |z; m\rangle \langle z; m| W(|z|^2, m) = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}} \tag{51}$$

其中希尔伯特空间 $\mathfrak{H} = span\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ 与福克基相同，而通过梅林变换得到的权函数$W(|z|^2, m)$为

$$\begin{aligned} W(|z|^2, m) &= \frac{1}{[\Gamma(-m - \nu)\Gamma(-m - n - \nu)]^2} G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right) \\ &\times G^{2,0}_{2,2}\left(|z|^2 \middle| \begin{matrix} m+\nu;\ m+\nu \\ 0;\ 2m+2\nu-1 \end{matrix}\right). \end{aligned} \tag{52}$$

证明。 参见附录。 □

在图1中，我们绘制了权函数（52）随 $x = |z|^2$ 变化的曲线，其中 m， n 以及 ν取不同值。所有曲线均为正值，这证实了参数 $\nu > 0$下权函数的正性。我们还注意到，多项式参数 ν 不会影响曲线的总体行为，但取较小值时会增强其渐近行为。

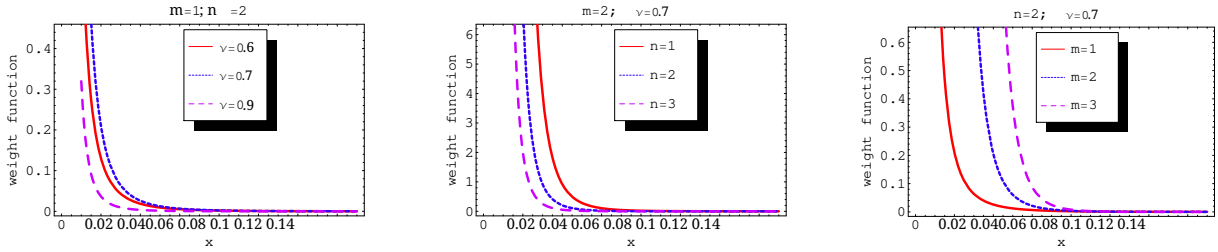

图1: 权函数 *(52)* 随 $x = |z|^2$ 变化的图像：参数为 $m = 1, n = 2$ 时，不同 ν 取值下的图像；参数为 $m = 2, \nu = 0.7$ 时，不同 n 取值下的图像；参数为 $n = 2, \nu = 0.7$ 时，不同 m 取值下的图像。

4 再生核与解析表示

4.1 再生核

所构造的广义超几何相干态 $|z,\ m\rangle$ 的过完备性 [8]使我们能够研究其与再生核的关系。

利用 Meijer G 函数与第一类修正贝塞尔函数 [35]-[38], 之间的联系，定义量 $K(z, z') := \langle z', m|z, m\rangle,$，如下所示:

$$\begin{aligned} K(z,z') &= \frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-z\bar{z'}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu\\ 0, & 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z'|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu\\ 0, & 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu\\ 0, & 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{|z\bar{z'}|}{z\bar{z'}}\right)^{m+\nu-\frac{1}{2}}\frac{I_{2m+2\nu-1}(2\sqrt{z\bar{z'}})}{\sqrt{I_{2m+2\nu-1}(2|z|)I_{2m+2\nu-1}(2|z'|)}}. \end{aligned} \tag{53}$$

$K(z,\ z')$ 是一个再生核。事实上，我们有如下结果。

命题 4.1。 以下性质

(i) hermiticity $\overline{K(z,z')} = K(z',z)$,

(ii) positivity $K(z,z) > 0$, *and*

(iii) idempotence $\int_{\mathbb{C}} K(z,z")K(z",z')\frac{W(|z"|^2)d^2z"}{\pi} = K(z,z')$

由 K 在希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 上满足。

证明。 参见附录。

□

4.2 GHCSs 基中的解析表示

根据单位分解性质 (51)，给定 $|\Psi\rangle \in \mathfrak{H}$，我们有

$$|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi} W(|z|^2, m)\Psi(z)\,|z; m\rangle \tag{54}$$

其中 $\Psi(z) := \langle z;\ m|\Psi\rangle$. 那么，下列再生性质

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z'}{\pi} W(|z'|^2, m)\Psi(z')K(z',z) \tag{55}$$

也成立。希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 可表示为变量 z 的解析函数希尔伯特空间。

∞给定一个归一化态$|\Phi\rangle = \sum C_k |k\rangle$， $C_k \in \mathbb{C}$在 $\mathfrak{H}$上，我们得到$_{k=0}$

$$\begin{aligned}\langle \bar{z}; m|\Phi\rangle &= \left[\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2} G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(-m-n-\nu)_n z^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}} \end{aligned} \tag{56}$$

使得整函数

$$\begin{aligned} f(z,m) &= \left[\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2} G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \langle \bar{z}; m|\Phi\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(-m-n-\nu)_n z^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}} \end{aligned} \tag{57}$$

在整个 复 z 平面上解析。然后，根据单位分解（51），我们可以写出 e

$$|\Phi\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} W(|z|^2, m)[N(|z|^2, m)]^{-1} f(\bar{z}, m)|z; m\rangle \tag{58}$$

并用公式表示在 $\mathfrak{H}$ 上给定的两个态 $|\Phi_1\rangle$ 和 $|\Phi_2\rangle$ 的内积

$$\langle \Phi_1|\Phi_2\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} W(|z|^2, m)[N(|z|^2, m)]^{-1} \overline{f_1(\bar{z}, m)} f_2(\bar{z}, m) \tag{59}$$

其中

$$\begin{aligned} \overline{f_1(\bar{z}, m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_n} \frac{(-m-n-\nu)_n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}} z^n, \\ f_2(\bar{z}, m) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{(-m-k-\nu)_k}{\sqrt{\Gamma(k+1)(2m+2\nu)_k}} \bar{z}^k. \end{aligned} \tag{60}$$

5 期望值

构造的相干态可用于不同的物理应用，以计算表征嵌入所考虑势场中的量子系统的任意重要物理可观测量 $\mathscr{O}$ 的期望（平均）值。我们有如下命题。

命题 5.1. 根据式（*45*）中相干态的定义，超几何型函数的广义相干态中的物理可观测量$\mathscr{O}$ 的平均值 $|z; m\rangle$ 可表示为

$$\begin{aligned} \langle A\rangle_{z,m} &= \left[\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2} G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)\right]^{-1} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} \langle n| A |n\rangle}{\frac{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}}. \end{aligned} \tag{61}$$

然后，我们得到

$$\langle N\rangle_{z,m} = -C_1^{(n)} \frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 1, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)}{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2 \middle| \begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-2\nu \end{matrix}\right)}, \tag{62}$$

and

$$\langle N^2\rangle_{z,m} = \frac{1}{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\quad 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}\left[-C_1^{(n)}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 1,\quad 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right.$$
$$\left.+C_2^{(n)}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 2,\quad 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right], \tag{63}$$

提供强度关联

$$(g^{(2)})_{z,m} = G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 2,\quad 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\quad 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 1,\quad 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)} \tag{64}$$

与 $C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = 1$。

证明。 参见附录。

□

6 广义超几何相干态的量子化

本段讨论 [7]中描述并应用于例如我们先前著作 [39]-[41]中的一般过程。有关更多细节，也可参阅其中引用的文献。

6.1 相干态量子化：一般方案

设 X 为一个参数集，配备测度 μ，且设 $L^2(X,\mu)$ 为其关于 μ 的复值平方可积函数所构成的希尔伯特空间。我们在 $L^2(X,\mu)$ 中选取一个有限或可数的正交归一集 $\mathscr{O} = \{\phi_n\,,\, n = 0,1,2,\dots\}$,

$$\langle\phi_m|\phi_n\rangle = \int_X \overline{\phi_m(x)}\,\phi_n(x)\,\mu(dx) = \delta_{mn}\,, \tag{65}$$

满足以下（关键）条件:

$$0 < \sum_n |\phi_n(x)|^2 := \mathscr{N}(x) < \infty \quad \text{a.e.}\,. \tag{66}$$

设 $\mathscr{H} := \overline{\text{span}(\mathscr{O})}$ 是希尔伯特空间 $L^2(X,\mu)$ 中的可分复希尔伯特空间，其标准正交基为 $\{|e_n\rangle\,,\ n = 0,1,2,\dots\}$，并与 $\mathscr{O} = \{\phi_n\,,\, n = 0,1,2,\dots\}$ 的元素一一对应。定义 $\mathscr{H}$ 中的态族 $\mathscr{F}_{\mathscr{H}} = \{|x\rangle\,,\ x \in X\}$ 如下:

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{N}(x)}}\sum_n \overline{\phi_n(x)}\,|e_n\rangle \ \in \mathscr{H}. \tag{67}$$

由条件（ 65）和（66）可知，这些 CS 已归一化，$\langle x|x\rangle = 1$ 并且在 $\mathscr{H}$ 中满足恒等式分解:

$$\int_X \mathscr{N}(x)\,|x\rangle\langle x|\,\mu(dx) = \mathbb{I}_{\mathscr{H}}\,. \tag{68}$$

关系式 (68) 使我们能够通过将满足适当条件的函数 $X \ni x \mapsto f(x)$ 与 $\mathscr{H}$ 中的算符 A_f 对应起来，实现对参数集 X的相干态量子化，如下:

$$f(x) \mapsto A_f := \int_X \mathscr{N}(x)\,f(x)\,|x\rangle\langle x|\,\mu(dx). \tag{69}$$

A_f 关于基 $|e_n\rangle$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned}(A_f)_{nm} &= \langle e_n|A_f|e_m\rangle \\ &= \int_X f(x)\,\overline{\phi_n(x)}\,\phi_m(x)\,\mu(dx).\end{aligned} \tag{70}$$

算符 A_f 是

1. 若 $f(x)$ 为实值函数，则称其为对称的；2. 若 $f(x)$ 有界，则称其为有界的；3. 若 $f(x)$ 为实值半有界函数（通过 Friedrichs 延拓或自伴延拓），则称其为自伴的。

6.2 初等经典可观测量的量子化

由（51）给出的单位分解使我们能够通过将函数 $\mathbb{C}\ni z\mapsto f(z)$ 与之关联，对复平面实施相干态量子化（亦称为 Berezin-Klauder-Toeplitz 量子化或反维克量子化）。为此，我们在希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 上定义算符

$$f(z)\mapsto A_f=\int_{\mathbb{C}} f(z)\,|z;m\rangle\,\langle z,m|\,\frac{d^2z}{\pi}W(|z|^2,m) \tag{71}$$

使得

$$A_f \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|n\rangle\,\langle k|}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}{[(-N_m-\nu)_n]^2}\,\frac{\Gamma(k+1)(2m+2\nu)_k}{[(-N_m^\dagger-\nu)_k]^2}}}\int_{\mathbb{C}}[N(|z|^2,m)]^{-1}f(z)z^n\bar{z}^k\frac{d^2z}{\pi}W(|z|^2,m) \tag{72}$$

其中 t 算符 $N_m, N_m^\dagger$ 作用于 Fock 希尔伯特空间 $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$，如（16）中所给).

基本经典变量 z 和 $\bar{z}$ 的 Berezin-Klauder-Toeplitz量子化通过定义在希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$上的映射 $z\mapsto A_z$ 和 $\bar{z}\mapsto A_{\bar{z}}$ 实现。经过一些代数运算后，我们在复平面上得到

$$A_z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-m-n-1-\nu)\sqrt{(n+1)(2m+2\nu+n)}\,|n\rangle\,\langle n+1|\,, \tag{73}$$

$$A_{\bar{z}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-m-n-\nu)\sqrt{n(2m+2\nu+n-1)}\,|n\rangle\,\langle n-1|\,, \tag{74}$$

其中矩阵元

$$(A_z)_{k,n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{rdrd\theta}{\pi}[N(r^2,m)]^{-1}\frac{e^{i(n+1-k)\theta}r^{n+1+k}W(r^2,m)}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)(2m+\mu)_n}{[(-N_m-\nu)_n]^2}\,\frac{\Gamma(k+1)(2m+\mu)_k}{[(-N_m^\dagger-\nu)_k]^2}}}\,|n\rangle\,\langle k|\,, \tag{75}$$

$$(A_{\bar{z}})_{k,n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{rdrd\theta}{\pi}[N(r^2,m)]^{-1}\frac{e^{i(n-k-1)\theta}r^{n+1+k}W(r^2,m)}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)(2m+\mu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}\,\frac{\Gamma(k+1)(2m+\mu)_k}{[(-m-k-\nu)_k]^2}}}\,|n\rangle\,\langle k|\,, \tag{76}$$

由（72）式可同时得到，且有以下关系。

$$z=re^{i\theta},\qquad \bar{z}=re^{-i\theta}\qquad \text{and}\qquad \frac{d^2z}{\pi}=\frac{rdrd\theta}{\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad m \neq n, \\ \\ 2\pi & \text{if} \quad m = n \end{cases} \tag{77}$$

使用了。

算符 A_z 和 $A_{\bar{z}}$ 的对易子具有如下形式

$$\begin{aligned}[A_z, A_{\bar{z}}] &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-m-n-1-\nu)^2(n+1)(2m+2\nu+n) - (-m-n-\nu)^2 n(2m+2\nu+n-1)\right\} \\ &\quad \times |n\rangle\langle n|. \end{aligned} \tag{78}$$

对 $f(z) = |z|^2$ 进行量子化时，利用积分公式（72），我们得到相应的算符

$$\begin{aligned} A_{|z|^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{rdrd\theta}{\pi}[N(r^2,m)]^{-1}\frac{e^{i(n-k-1)\theta}r^{n+1+k}}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)(2m+\mu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}\frac{\Gamma(k+1)(2m+\mu)_k}{[(-m-k-\nu)_k]^2}}}W(r^2,m)|n\rangle\langle k| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2m+\mu+n)|n\rangle\langle n|. \end{aligned} \tag{79}$$

它与 A_z 和 $A_{\bar{z}}$ 的对易子分别为

$$[A_z, A_{|z|^2}] = -2\sum_{n=0}^{\infty}(m+\nu+n+1)^2\sqrt{(n+1)(2m+2\nu+n)}\,|n\rangle\langle n+1|, \tag{80}$$

$$[A_{\bar{z}}, A_{|z|^2}] = 2\sum_{n=0}^{\infty}(m+\nu+n)^2\sqrt{n(2m+2\nu+n-1)}\,|n\rangle\langle n-1|, \tag{81}$$

分别。

7 概率密度与时间演化

本节讨论广义超几何相干态的半经典特性。我们分析这些态在描述该量子系统的物理哈密顿量所给出的时间演化算符作用下如何随时间演化。

我们首先将重叠积分（49）表示为第一类修正贝塞尔函数的形式，如下所示:

$$\langle z', m|z, m\rangle = \left(\frac{|zz'|}{z\bar{z'}}\right)^{m+\nu-\frac{1}{2}}\frac{I_{2m+2\nu-1}(2\sqrt{z\bar{z'}})}{\sqrt{I_{2m+2\nu-1}(2|z|)I_{2m+2\nu-1}(2|z'|)}}. \tag{82}$$

然后，取归一化态 $|z_0; m\rangle$，相关的相空间分布通过概率密度给出:

$$\begin{aligned} z \to \varrho_{z_0}(z) &:= |\langle z; m|z_0; m\rangle|^2 \\ &= \frac{I_{2m+2\nu-1}(2\sqrt{z\bar{z'}})I_{2m+2\nu-1}(2\sqrt{\bar{z}z'})}{I_{2m+2\nu-1}(2|z|)I_{2m+2\nu-1}(2|z'|)}. \end{aligned} \tag{83}$$

注释 7.1。 表达式 *(83)* 类似于为 *BGCSs* 定义的概率密度

$$|z\rangle_m = \frac{|z|^{m/2}}{\sqrt{I_m(2|z|)}}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{z^{n-m}}{\sqrt{\Gamma(n-m+1)\Gamma(n+1)}}|n,m\rangle \tag{84}$$

构建于 *[41]*, ，如下所示：

$$\overbrace{\varrho_{z_0}}(z) := |{}_m\langle z|z_0\rangle_m|^2 \quad = \quad \frac{I_m(2\sqrt{z_0\bar{z}})I_m(2\sqrt{\bar{z}_0 z})}{I_m(2|z|)I_m(2|z_0|)} \tag{85}$$

也可通过第一类修正贝塞尔函数给出。因此，我们可以强调，广义超几何相干态（*47*）的时间演化行为与 *BGCS*（*84*）相似。

于是，相应的时间演化行为可表示为

$$z \to \varrho_{z_0}(z,t) = |\,\langle z;m|\,e^{-iH_m t}\,|z_0;m\rangle\,|^2. \tag{86}$$

将演化算符 $U(t) = e^{-iH_m t}$（其中 H_m 由（4）给出，其特征值为$e_n = n(n+2\nu+2m-1)$，且 $\mu = 2\nu$ （见（39））） 作用于广义超几何相干态 $|z_0;m\rangle$，可得

$$\begin{aligned} |z_0;t;m\rangle &= e^{-iH_m t}\,|z_0;m\rangle \\ &= [N(|z_0|^2,m)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m-n-\nu)_n (z_0)^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}} e^{-iH_m t}\,|n\rangle \\ &= [N(|z_0(t)|^2,m)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m-n-\nu)_n (z_0 e^{-i(n+2\nu+2m-1)t})^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}}\,|n\rangle\,. \end{aligned} \tag{87}$$

于是，在基底 $\{|e^{-in^2 t}n\rangle := |\Phi_n(t)\rangle = |e^{-i\theta_n(t)}n\rangle,$
$\theta_n(t) = n^2 t\}_{n=0}^{\infty}$中，方程（87）变为

$$\begin{aligned} \overbrace{|z_0;t;m\rangle} &=: e^{-iH_m t}\,|z_0;m\rangle \\ &= [N(|z_0(t)|^2,m)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m-n-\nu)_n (z_0(t))^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}} |\Phi_n(t)\rangle \\ &= |z_0(t);m\rangle \end{aligned} \tag{88}$$

其中 $z_0(t) := z_0 e^{-i(2\nu+2m-1)t}$。然后，将广义超几何相干态改写为基底 $\{|\Phi_n(t)\rangle\}_{n=0}^{\infty}$，如下所示：

$$\overbrace{|z;m\rangle} \quad = \quad [N(|z|^2,m)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m-n-\nu)_n z^n}{\sqrt{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}} |\Phi_n(t)\rangle \tag{89}$$

由（83）可得

$$\begin{aligned} \varrho_{z_0}(z,t) &:= |\overbrace{\langle z;m|}\overbrace{z_0;t;m\rangle}|^2 \\ &= \frac{I_{2m+2\nu-1}(2\sqrt{\bar{z}z_0(t)})I_{2m+2\nu-1}(2\sqrt{z\overline{z_0(t)}})}{I_{2m+2\nu-1}(2|z|)I_{2m+2\nu-1}(2|z_0(t)|)}. \end{aligned} \tag{90}$$

因此，给定广义超几何相干态 $|z;m\rangle$ 的时间依赖性可表示为

$$\begin{aligned} \overbrace{|z;t;m\rangle} &= e^{-iH_m t}|z;m\rangle \\ &= |z(t);m\rangle,\ z(t) := e^{-i(2\nu+2m-1)t} z. \end{aligned} \tag{91}$$

关系式 (91) 表明，广义超几何相干态 $|z;m\rangle$ 的时间演化可归结为复平面上的一次旋转，其表达式为 $z \mapsto z(t) = e^{-i(2\nu+2m-1)t} z$。因此，广义超几何相干态的半经典特征由 (86) 给出，而其时间稳定性则由关系式 (91) 体现。后者指出，任意广义超几何相干态的时间演化始终保持为广义超几何相干态，并确定了广义超几何相干态 $|z;m\rangle$ 的相位行为，其中相位因子为 $e^{-i(2\nu+2m-1)t}$。

8 广义超几何相干态的热性质

本节将描述热平衡情形下该模型的广义超几何相干态的统计性质。考虑系统中的量子气体与温度为 T 的热库处于热力学平衡状态，并满足量子正则分布。相应的归一化密度算符表示为

$$\rho^{(m)} = \frac{1}{Z(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}\left|n\right\rangle\left\langle n\right|,\ E_n = n(n+\mu+1), \tag{92}$$

其中，配分函数记为 $Z(\beta)$，并作为归一化常数，其表达式为:

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n(n+\mu+1)} \tag{93}$$

确保满足归一化条件：$\mathrm{Tr}(\rho^{(m)}) = 1$。

密度算符的 GS-P-表示（也称为对角展开）表示为

$$\rho = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z}{\pi} W(|z|^2, m)\left|z;m\right\rangle P(|z|^2, m)\left\langle z;m\right|, \tag{94}$$

其中准分布函数 $P(|z|^2,\ m)$ 由归一化条件给出

$$\frac{1}{\pi}\int W(|z|^2, m)P(|z|^2, m)d^2z = 1, \tag{95}$$

as

$$P(|z|^2, m) = e^{\beta\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}\left(\frac{d}{da}\right)^{2k}\frac{\left[e^a G^{2,0}_{2,2}\left(e^a\left|z\right|^2\middle|\begin{matrix} m+\nu, & m+\nu \\ 0, & 2m+\mu-1\end{matrix}\right)\right]}{G^{2,0}_{2,2}\left(\left|z\right|^2\middle|\begin{matrix} m+\nu, & m+\nu \\ 0, & 2m+\mu-1\end{matrix}\right)}, \tag{96}$$

其中 $a = \beta\ (\mu+1)$。

利用恒等式（见 [19, 29]）

$$e^{-\beta E_n} = e^{-n\,\beta(\mu+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}(n)^{2k} \tag{97}$$

我们得到数算符 $\langle N^s\rangle$ 的整数次幂的热平均，其表达式用梅杰尔G函数表示:

$$\left\langle e^{\varepsilon N}\right\rangle_{|z;m\rangle} = \frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-e^{\varepsilon}|z|^2\middle|\begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-\mu\end{matrix}\right)}{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix} 1+m+n+\nu, & 1+m+n+\nu \\ 0, & 1-2m-\mu\end{matrix}\right)}. \tag{98}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^s}{\partial\varepsilon^s}\left\langle e^{\varepsilon N}\right\rangle_{|z;m\rangle} &= \left\langle N^s\right\rangle_{|z;m\rangle}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle e^{\varepsilon N}\right\rangle \\ &= \left\langle N^s\right\rangle_{|z;m\rangle}.\end{aligned} \tag{99}$$

于是，由

$$\left\langle N^s\right\rangle = \int_{\mathbb{C}}\frac{d^2z}{\pi}\,W(|z|^2, m)\,P(|z|^2, m)\,\left\langle N^s\right\rangle_{|z;m\rangle}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^s}{\partial\varepsilon^s}\int_{\mathbb{C}}\frac{d^2z}{\pi}\,W(|z|^2,m)\,P(|z|^2,m)\,\langle e^{\varepsilon N}\rangle_{|z;m\rangle}\,, \tag{100}$$

最终得到

$$\langle N^s\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}\left(\frac{d}{da}\right)^{2k}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^s}{\partial\varepsilon^s}(e^{\varepsilon})^n\,(e^{-a})^n. \tag{101}$$

在这种 方式下，数算符前两次幂的热平均为

$$\langle N\rangle = 1+2e^{\beta(2-\mu)}, \qquad \langle N^2\rangle = 1+4e^{\beta(2-\mu)}. \tag{102}$$

因此，热二阶关联函数 $g^{(2)}$ 和热曼德尔参数可表示如下:

$$g^{(2)} = \frac{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle}{\langle N^2\rangle} = \frac{2e^{\beta(2-\mu)}}{(1+2e^{\beta(2-\mu)})^2}, \tag{103}$$

$$Q = \langle N\rangle\,(g^{(2)}-1) = -\left[1+4\frac{e^{2\beta(2-\mu)})}{1+2e^{\beta(2-\mu)}}\right]. \tag{104}$$

9 结语

在这项工作中，我们首先探讨了 [21]-[25]，中为广义伴随超几何相干态发展出的构造方法，随后提出了一种构造伴随雅可比多项式和超几何函数的广义超几何相干态（GHCSs）的方法。所构造的 GHCSs 与 Appl 和 Schiller 引入的 GHCSs 一致，并对应于 $c \neq 1$ 的 GPAH-CSs，以及添加量子（或光子）数为 $p = 0$ [25] 的情况。我们利用梅林变换，通过适当的权函数（以梅杰尔 G 函数乘积的形式表示）求解斯蒂尔切斯矩问题，从而建立了单位分解性质。随后，通过再生核以及希尔伯特空间中由这些相干态张成的函数的解析表示，讨论了 GHCSs 的解析特性。接着，在所构造的 GHCSs 基中推导了描述该量子模型的可观测量的期望值。此外，我们还在复平面上以 GHCSs 基为基础，应用了相干态量子化程序，即 Berezin-Klauder-Toeplitz 量子化（亦称相干态量子化或反维克量子化）。我们还分析了 GHCSs 在由量子哈密顿量构造的时间演化算符作用下的时间依赖性及其概率密度，以此研究其性质。利用 GS-P-表示（亦称密度算符的对角表象），我们在 GHCSs 基中研究并讨论了该量子系统相关的热力学性质。

附录

命题 3.2 的证明

根据相干态 (45) 的定义，我们有

$$\int_{\mathbb{C}}\frac{d^2z}{\pi}\,|z;m\rangle\,\langle z;m|\,W(|z|^2,m) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}[N(x,m)]^{-1}\frac{x^nW(x,m)dx}{\frac{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}}\,|n\rangle\,\langle n| \tag{105}$$

其中使用了以下关系式

$$z = re^{i\theta},\ \frac{d^2z}{\pi} = \frac{rdrd\theta}{\pi}\ \text{and}\ |z|^2 = x \tag{106}$$

使用了上述关系式。(105) 式最后一行中的第二项给出

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty [N(x,m)]^{-1}\frac{x^n}{\frac{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}}W(x,m)dx\\ =&\int_0^\infty \frac{[\Gamma(-m-\nu)]^2\Gamma(2m+2\nu)[N(x,m)]^{-1}W(x,m)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2\Gamma(n+1)\Gamma(2m+2\nu+n)}x^n dx\\ =&\ 1.\end{aligned}\tag{107}$$

然后，令

$$\begin{aligned}n &= s-1,\\ g^{(m)}(x) &= [\Gamma(-m-\nu)]^2\Gamma(2m+2\nu)[N(x,m)]^{-1}W(x,m)\end{aligned}$$

并利用 Meijer G函数和梅林反演定理 [42, 43]

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dx x^{s-1}G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha x\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n;a_{n+1},\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_m;b_{m+1},\ldots,b_q\end{matrix}\right)\\ =&\ \frac{1}{\alpha^s}\frac{\prod_{j=1}^m\Gamma(b_j+s)}{\prod_{j=m+1}^q\Gamma(1-b_j-s)}\frac{\prod_{j=1}^n\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=n+1}^p\Gamma(a_j+s)},\end{aligned}\tag{108}$$

式(107)得出

$$\int_0^\infty \frac{g^{(m)}(x)}{[\Gamma(-m-s+1-\nu)]^2\Gamma(s)\Gamma(2m+2\nu+s-1)}x^{s-1}dx=1,$$

这意味着

$$\int_0^\infty g^{(m)}(x)x^{s-1}dx = [\Gamma(1-\nu-m-s)]^2\Gamma(s)\Gamma(2m+2\nu+s-1).\tag{109}$$

利用超几何函数与 Meijer G 函数之间的联系 [20, 35]，可得：

$$g^{(m)}(x)=G_{2,2}^{2,0}\left(x\middle|\begin{matrix}m+\nu;\ m+\nu\\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right),$$

$$[\Gamma(-m-\nu)]^2\Gamma(2m+2\nu)[N(x,m)]^{-1}W(x,m)=G_{2,2}^{2,0}\left(x\middle|\begin{matrix}m+\nu;\ m+\nu\\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right),$$

从而得到

$$W(x,m) = \frac{N(x,m)}{[\Gamma(-m-\nu)]^2\Gamma(2m+2\nu)}G_{2,2}^{2,0}\left(x\middle|\begin{matrix}m+\nu;\ m+\nu\\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right).$$

因此，将 x 替换为 $|z|^2$，可得

$$W(|z|^2,m) = \frac{G_{2,2}^{2,0}\left(|z|^2\middle|\begin{matrix}m+\nu;\ m+\nu\\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right)}{[\Gamma(-m-\nu)\Gamma(-m-n-\nu)]^2}G_{2,2}^{1,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ \ 1+m+n+\nu\\ 0,\ \ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right).\tag{110}$$

□

命题 4.1 的证明

（i）和（ii）的证明很容易得到。事实上，经过直接计算，我们得到：

$$\overline{K(z,z')} = \frac{1}{\left[G_{2,2}^{1,2}\left(-|z'|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ \ 1+m+n+\nu\\ 0,\ \ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{G_{2,2}^{1,2}\left(-z'\bar{z}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ \ 1+m+n+\nu\\ 0,\ \ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{\left[G_{2,2}^{1,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ \ 1+m+n+\nu\\ 0,\ \ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \quad K(z',z) \tag{111}$$

and

$$K(z,z) = 1 > 0. \tag{112}$$

我们首先利用再生核（53）的表达式来证明幂等性，然后写出:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} K(z,z")K(z",z)W(|z"|^2)\frac{d^2z"}{\pi} &= \int_{\mathbb{C}} G^{2,0}_{2,2}\left(|z"|^2\middle|\begin{matrix} m+\nu;\ m+\nu \\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right)\frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-z\bar{z"}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\\ &\times\frac{1}{[\Gamma(-m-\nu)\Gamma(-m-n-\nu)]^2}\\ &\times\frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-z"\bar{z'}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z'|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\frac{d^2z"}{\pi}.\end{aligned} \tag{113}$$

Let

$$\mathfrak{S}(z,z') \quad = \quad G^{1,2}_{2,2}\left(-z\bar{z"}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)G^{1,2}_{2,2}\left(-z"\bar{z'}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right) \tag{114}$$

and

$$\mathfrak{X}(z") = \int_{\mathbb{C}}\frac{G^{2,0}_{2,2}\left(|z"|^2\middle|\begin{matrix} m+\nu;\ m+\nu \\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right)}{[\Gamma(-m-\nu)\Gamma(-m-n-\nu)]^2}\mathfrak{S}(z,z')\frac{d^2z"}{\pi}. \tag{115}$$

From

$$\mathfrak{S}(z,z') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\Gamma(-m-\nu)]^4}{\Gamma(2m+2\nu+n)\Gamma(2m+2\nu+k)}\frac{(\bar{z"}z)^n(\bar{z'}z")^k}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)} \tag{116}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(z") &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\Gamma(-m-\nu)]^4}{\Gamma(2m+2\nu+n)\Gamma(2m+2\nu+k)}\frac{(z)^n(\bar{z'})^k}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)}\\ &\times\int_{\mathbb{C}}\frac{G^{2,0}_{2,2}\left(|z"|^2\middle|\begin{matrix} m+\nu;\ m+\nu \\ 0;\ 2m+2\nu-1\end{matrix}\right)}{[\Gamma(-m-\nu)\Gamma(-m-n-\nu)]^2}(\bar{z"})^n(z")^k\frac{d^2z"}{\pi}\\ &= G^{1,2}_{2,2}\left(-z\bar{z'}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right).\end{aligned} \tag{117}$$

由此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} K(z,z")K(z",z)W(|z"|^2)\frac{d^2z"}{\pi} &= \frac{1}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\\ &\times\frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-z\bar{z'}\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{\left[G^{1,2}_{2,2}\left(-|z'|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,\ 1+m+n+\nu\\ 0,\ 1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}\\ &= K(z,z').\end{aligned} \tag{118}$$

□

命题 5.1 的证明

根据关系式 (45)，给定可观测量 A 在相干态 $|z$的基底中； $m\rangle$ 的期望值如下：

$$\begin{aligned}\langle z;m|\,A\,|z;m\rangle=\langle A\rangle_{z,m} &= \left[\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-k-\nu)]^2}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+k+\nu,&1+m+k+\nu\\0,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right.\\ &\left.\times\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\0,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\\ &\times\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{z^n\bar{z}^k}{\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)(2m+2\nu)_n}{[(-m-n-\nu)_n]^2}\frac{\Gamma(k+1)(2m+2\nu)_k}{[(-m-k-\nu)_k]^2}}}\langle k|\,A\,|n\rangle\,.\end{aligned}\tag{119}$$

因此，如果 $n=k$，则有

$$\langle A\rangle_{z,m} = [N(|z|^2,m)]^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(-m-n-\nu)_n]^2}{(2m+2\nu)_n}\frac{z^{2n}}{\Gamma(n+1)}\langle n|\,A\,|n\rangle\,.\tag{120}$$

对于数算符 N，在福克基 $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ 中，我们有： $\langle n|\,N^i\,|n\rangle=n^i$和 $\langle n'|\,N^i\,|n\rangle=0$。使用试探形式 [19], 设定

$$S_i = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(-m-n-\nu)_n]^2}{(2m+2\nu)_n}\frac{x^n}{\Gamma(n+1)}n^i \text{ with } x=|z|^2.\tag{121}$$

对于 $i>0$，我们得到关于 n^i 的以下关系。

$$n^i = \sum_{l=1}^{i}C_l^{(i)}\frac{n!}{(n-l)!}=\sum_{l=0}^{i}(-1)^lC_l^{(i)}\frac{n!}{(n-l)!}.\tag{122}$$

然后，我们得到

$$S_i=\left(x\frac{d}{dx}\right)^i S_0=\sum_{l=1}^{i}C_l^{(n)}x^l\left(\frac{d}{dx}\right)^l S_0,\tag{123}$$

其中

$$S_0=\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2}G^{1,2}_{2,2}\left(-x\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\0,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\tag{124}$$

这样，通过应用梅杰尔G函数的 nth 阶导数，我们得到：

$$\begin{aligned}S_i &= \sum_{l=1}^{i}(-1)^lC_l^{(n)}\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2}G^{2,2}_{3,3}\left(-x\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu,&0\\0,&l,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\\ &= \sum_{l=1}^{i}(-1)^lC_l^{(n)}\frac{\Gamma(2m+2\nu)}{[\Gamma(-m-n-\nu)]^2}G^{1,2}_{2,2}\left(-x\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\l,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right).\end{aligned}\tag{125}$$

由（125）可得，算符 N 和 N^2 的期望值为：

$$\langle N\rangle_{z,m} = [N(|z|^2,m)]^{-1}S_1=-C_1^{(n)}\frac{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\1,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\0,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)},\tag{126}$$

and

$$\begin{aligned}\langle N^2\rangle_{z,m} &= [N(|z|^2,m)]^{-1}S_2\\ &= \frac{1}{G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\0,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)}\left[-C_1^{(n)}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\1,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right.\\ &\left.+C_2^{(n)}G^{1,2}_{2,2}\left(-|z|^2\middle|\begin{matrix}1+m+n+\nu,&1+m+n+\nu\\2,&1-2m-2\nu\end{matrix}\right)\right].\end{aligned}\tag{127}$$

□

致谢

ICMPA-UNESCO教席与法国的DanielIagolnitzer基金会（DIF）合作，支持非洲数学物理的发展。

参考文献

[1] E. Schrödinger, 《从微观力学到宏观力学的连续过渡》, Naturwissenschaften 14 (1926), 664.[2] R. J. Glauber, 《光学相干量子理论》, Phys. Rev. 130 (1963), 2529；同上，131，2766.[3] E. C. G. Sudarshan, 《统计光束的半经典与量子力学描述的等价性》, Phys. Rev. Lett. 10 (1963), 277.[4] J. R. Klauder, 《连续表示理论。一、连续表示理论公设》, J. Math. Phys. 4 (1963), 1055.[5] J. R. Klauder 和 B. S. Skagerstam, 《相干态：在物理学和数学物理中的应用》, 世界科学出版公司，新加坡（编），1985.[6] A. M. Perelomov, 《任意李群的相干态》, Commun. Math. Phys. 26 (1972), 222-236；A. M. Perelomov, 《广义相干态及其应用》, 施普林格，柏林，1986.[7] J. P. Gazeau, 《量子物理中的相干态》, Wiley-VCH，柏林，2009.[8] S. T. Ali、J. P. Antoine 和 J. P. Gazeau, 《相干态、小波及其推广》, 第2版, 《理论与数学物理》, 施普林格，纽约，2014.[9] A. O. Barut 和 L. Girardello, 《与非紧群相关的新相干态》, Commun. Math. Phys. 21 (1971), 41.[10] J-P. Gazeau 和 P. Monceau, 《任意量子系统的广义相干态》, Klauer Academic Publishers，荷兰，2000；J. R. Klauder, 《离散谱动力学的相干态》, quant-ph/9810044 (1998)；J. R. Klauder, 《相干态的当前状况》, 第7届 ICSSUR 会议论文集（2001）。[11] K. A. Penson 和 A. I. Solomon, 《新型广义相干态》, J. Math. Phys. 40 (1999), 2354.[12] J. R. Klauder、K. A. Penson 和 J. M. Sixdeniers, 《通过求解Stieltjes与Hausdorff矩问题构造相干态》, Phys. Rev. A 64 (2001), 013817.[13] T. Appl 和 D. H. Schiller, 《广义超几何相干态》, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 2731.[14] V. V. Dodonov, 《量子光学中的非经典态：对前75年的精要回顾》, J. Opt. B: Quant. Semiclass. Optics 4 (2002), R1.[15] M. N. Hounkonnou 和 E. B. Ngompe Nkouankam, 《广义超几何光子添加与光子耗减相干态》, J. Phys. A: Math. Gen. 42 (2009), 025206.[16] O. Safaeian 和 M. K. Tavassoly, 《变形光子添加非线性相干态及其非经典性质》, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011), 225301.[17] S. Sivakumar, 《截断相干态与光子添加》, Int. J. Theor. Phys. 53 (2014), 1697.[18] M. Daoud, 《可精确求解的哈密顿量的光子添加相干态》, Phys. Lett. A 305 (2002), 135-143.[19] D. Popov, 《赝谐振子的光子添加Barut-Girardello相干态》, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002), 7205.[20] A. M. Mathai 和 R. K. Saxena, 《广义超几何函数及其在统计学和物理科学中的应用》, 《数学讲义》第348卷，施普林格，柏林，1973。

[21] N. Cotfas，超几何型方程中的形状不变性、升降算符，J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002), 9355-9365. [22] A. N. F. Aleixo 和 A. B. Balantekin，形状不变势的广义相干态代数构造，J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 8513.[23] M. N. Hounkonnou 和 K. Sodoga，伴随超几何型函数的广义相干态，J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005), 7851.[24] I. Aremua、K. Sodoga 和 P. K. Tchakpélé，关于相干态量子化的若干方面及相关示例，Adv. Math. Sci. J. 10(11) (2021), 3381-3393.[25] K. Sodoga、I. Aremua 和 M. N. Hounkonnou，广义光子添加的伴随超几何相干态：表征及相关性质，《欧洲物理学杂志D》72 (2018), 172.[26] C. Brif 和 Y. Ben-Aryeh，非经典光子态的次相干 p表示，Quantum Opt. 6 (1994), 391-396.[27] K. Husimi，密度矩阵的一些形式性质，Proc. Phys. Math. Soc. Jpn 22 (1940), 264.[28] A. Wehrl，经典熵与量子熵之间的关系，Rep. Math. Phys. 16 (1979), 353.[29] D. Popov，广义超几何热相干态的一些性质，Electr. J. Theor. Phys. 3 (2006), 123-132 (www.ejtp.com/articles/ejtpv3i11p123.pdf).[30] I. Aremua、M. N. Hounkonnou 和 E. Baloïtcha，关于电子-声子动力学中非线性相干态的性质，J. Nonlinear Math. Phys. 21(1) (2014), 89-119.[31] S. Curilef、F. Pennini 和 A. Plastino，费 Fisher 信息、Wehrl 熵与朗道抗磁性，Phys. Rev. B 71 (2005), 024420.[32] I. Aremua、M. N. Hounkonnou 和 E. Baloïtcha，磁系统的密度算符表述：物理与数学方面，J. Math. Phys. 62 (2021), 013503. doi: 10.1063/5.0012588.[33] I. Aremua、M. N. Hounkonnou 和 K. Sodoga，多矩阵向量相干态中的密度算符表示：谐势背景下的朗道问题，Rep. Math. Phys. 88(3) (2021), 327-350.[34] I. Aremua、M. N. Hounkonnou、K. Sodoga 和 P. K. Tchakpélé，超对称谐振子的密度算符表述：向量相干态构造与统计性质，Rep. Math. Phys. 90(3) (2022), 399-418.[35] L. Y. Luke，《特殊函数及其近似》，第 2 卷，Academic Press，纽约，1969。（见第五章“超几何广义函数与 G 函数”，第 136 页）。[36] W. Magnus、F. Oberhettinger 和 R. P. Soni，《数学物理特殊函数公式与定理》，Springer-Verlag，纽约，1966.[37] G. N. Watson，《贝塞尔函数理论论著》，剑桥大学出版社，剑桥，1995.[38] M.J. Kampe de Periet，《超几何函数》，Gauthier Memorial Des Sciences，Villars，巴黎，1937；
http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/ HypergeometricPFQ/20/02/04/.[39] I. Aremua、J. P. Gazeau 和 M. N. Hounkonnou，具有圆柱相空间的量子系统的作用-角相干态，J. Phys. A. 45 (2012), 335302.[40] N. Cotfas、J. P. Gazeau 和 K. Gorska，复与实埃尔米特多项式及相关量子化，J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010), 305304；J. P. Gazeau 和 F. H. Szafraniec，全纯埃尔米特多项式与非交换平面，J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011), 495201；K. Thir- ulogasanthar、N. Saad 和 G. Honnouvo，二维泽尼克多项式与单位圆盘的相干态量子化，Math. Phys. Anal. Geom. 18 (2015), 13. https://doi.org/10.1007/s11040-015-9172-y.[41] I. Aremua、M. N. Hounkonnou 和 E. Baloïtcha，朗道能级的相干态：代数与热力学性质，Rep. Math. Phys. 76(2) (2015), 247-269。

[42] O. I. Marichev, 《高等超越函数积分变换手册：理论与算法表》, Ellis Harwood，英国奇切斯特, 1983年。[43] A.P. Prudnikov、Y.A. Brychkov 和 O.I. Marichev, 《积分与级数》, Gordon and Breach，纽约，1998年。