arXiv:2305.02211v1 [eess.SY] 24 Feb 2023

连续梁系统的影响区域

Adrien Gallet[1,*], Andrew Liew[1], Iman Hajirasouliha[1], 和 Danny Smyl[2]

[1]谢菲尔德大学土木与结构工程系，英国谢菲尔德 [2]南阿拉巴马大学土木、海岸与环境工程系，美国阿拉巴马州莫比尔

[*]通讯作者：*agallet1@sheffield.ac.uk*

版本：作者原稿（AO）

2023–02–23

摘要

与影响线不同，影响区的概念在结构工程领域中显著缺失，尽管它存在于密切相关的岩土工程领域。本文提出了与连续梁系统相关的结构影响区这一新概念，并针对适用于钢框架建筑的各种设计约束，通过数值方法探究其范围。关键挑战在于明确界定临界荷载布置，本文借助极性序列和极性区域这两个新概念加以解决。由此识别出弯曲荷载布置和（新发现的）剪切荷载布置，并给出了界定后者何时出现的方程。在开发出有助于识别这两类临界荷载布置的算法后，本文生成了设计数据集，并提取了影响区数值。结果表明，考虑极限状态时，影响区通常小于 3；对于任意给定的连续梁，其最大范围可达相邻 5 个构件。本文还阐述了影响区概念带来的其他见解，尤其是将其与影响线进行比较，并讨论了未来研究方向，例如针对新识别出的剪切荷载布置开展研究。

关键词：影响区域、影响线、荷载布置、连续梁、结构设计、模式荷载、极性区。

1 引言

影响线源自 1872 [1], 中确立的贝蒂定理，是结构工程中用于确定结构体系最不利荷载位置的成熟工具 [2, 3, 4], ，广泛应用于连续梁系统研究 [5, 6], 、刚架 [7], 、桥梁工程 [8] 和结构健康监测[9, 10]。另一方面，影响区域（也称影响区）是岩土工程领域中一个成熟的概念，有助于确定可能受地下结构和上部结构施工荷载影响的区域

工程土壤 [11], ，为岩土工程师在深基础设计 [12, 13]、沉降估算 [14]以及保护地下水资源 [15]方面提供有价值的设计参考。

尽管岩土工程与结构工程之间显然存在学科联系，但文献中尚未出现结构工程领域对影响区的等效应用。本文所说的结构影响区 是指这样一个区域：施加的力、刚度配置和支承条件，或它们的变化，会对周围结构系统的设计产生影响。

令人惊讶的是，关于此类影响区 的文献十分匮乏。例如，影响区这一概念也见于岩土工程文献以外的领域。相关研究案例包括咸淡水界面 [16], 交通交叉口的有害排放物浓度 [17], 反向k近邻算法[18, 19], 表面波的传播路径 [20] 以及地下植物竞争的生态学研究 [21]。

此外，我们很容易找到一些在设计中掌握影响区知识会带来益处的情形。例如，了解影响区的范围，工程师便能在设计单个构件时避免对整个结构建模，同时确信影响区以外的结构信息无关紧要；这在多学科项目中有直接应用 [22]。若能立即确定某项设计变更会影响哪些构件，就能更有效地应对设计后期的变更（因加载或结构配置的变化所致）；众所周知，完成相关工程分析往往需要较长时间 [23], 。同样，工程师通常需要验证初步设计中所作的假设 [24]。在这种情况下，基于影响区的方法可以指导我们在构建设计问题的独立模型时应纳入哪些信息。在所有这些情形中，影响区都能提供宝贵的设计见解。

本文旨在通过数值方式引入连续梁系统的影响区概念，弥补上述知识空白。第 2 节将首先介绍评估影响区的理论和方法，随后在第 3 节对临界荷载布置进行系统分析。临界荷载布置的显式公式可用于高效生成设计数据集，并在第 4 节评估各自的影响区，相关结果将在第 5 节讨论。除了影响区之外，本文还提出了极性区等新颖概念，确定了一组全新的临界模式荷载，并将其命名为剪切荷载布置；此外，本文还提出了适用于任意构件尺寸连续梁系统的高效荷载布置算法 。

2 方法

2.1 概述

考虑图 1 所示的连续梁系统，该系统由 m 个构件组成，构件索引为 i，承受来自向量 **w** 的 w_i 均布荷载（UDL），每个构件的跨长为来自向量 **L** 的 L_i 。在设计该

系统以确定构件所需的最小结构属性（尺寸优化），记为 I_i，并组成向量 **I** 时，需要针对荷载布置集合 **J** 中的最不利荷载布置（亦称模式荷载）进行设计，该集合的大小为 p。该结构系统的过度约束特性（由支座固结程度和结构连接性决定）使连续梁成为超静定结构。这意味着系统的性能取决于需要评估的结构属性，因此设计过程通常需要迭代。文献中已有成熟的公式用于设计此类超静定系统 [25]。

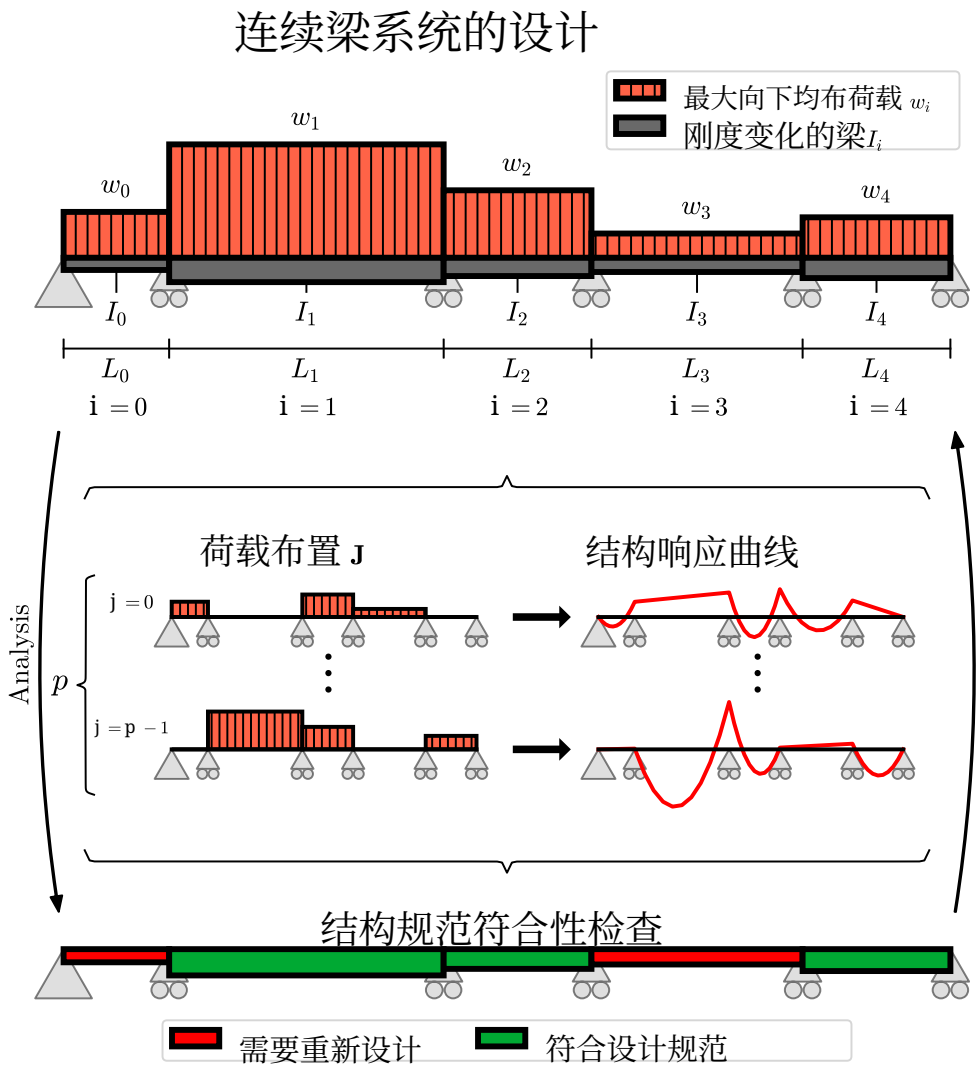

图 1：一个示例性连续梁系统，包含 $m = 5$ 个构件，承受均布荷载**w**，跨度为**L**，并具有设计的截面属性**I**，所有参数均以 i为索引。该系统的超静定性要求针对各种荷载布置 **J** 进行迭代设计，荷载布置的数量为 p，并以 j为索引。

2.2 影响区域表述

假设连续梁系统中的某个构件被指定为设计梁，其索引为 d；离散整数 $k \in \mathbf{Z}$ 表示相对于 d处设计梁的构件索引位置。如图 2 所示，若 $\mathbf{K}$ 表示根据 k 确定的、落在影响区内的构件列表，则影响区的大小记为 $k_{\max} = \max(|\mathbf{K}|)$，其中 $k_{\max} \in \mathbf{N}^0$, 表示包含 0 在内的所有非负整数集合。已提出两种不同的表述方法来评估影响区：

- 局部表述 根据设计梁 d 处的设计信息是否会对索引为 $d - k_{\max} \leq i \leq d + k_{\max}$ 的周边构件产生显著影响，来确定 $k_{\max}$ 的值。

- 全局表述根据索引为 $i < d - k_{\text{最大值}}$和 $i > d + k_{\text{最大值}}$的构件中的设计信息何时对 d 处的设计梁变得无关紧要，确定 $k_{\text{最大值}}$的值。

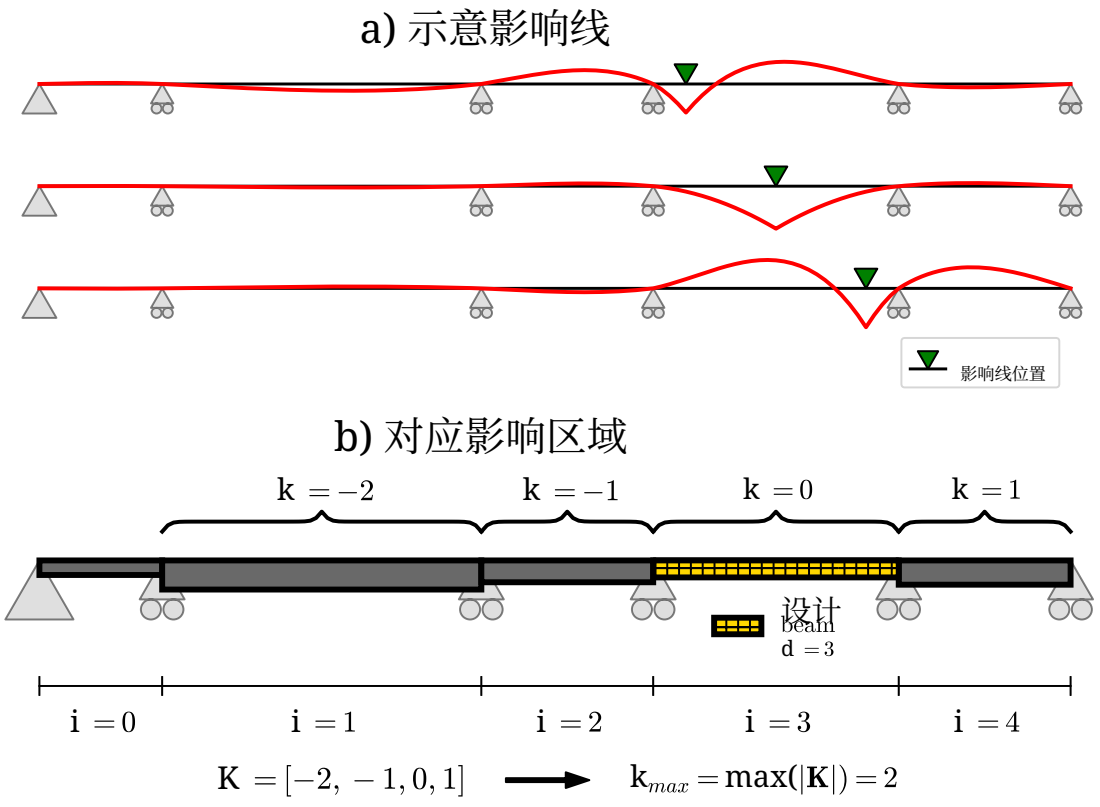

图 2：示例说明影响线与影响区域的关系，以及大小为 $k_{\max} = 2$ 的影响区相对于给定设计梁（此处为以黄色突出显示的 $d = 3$）所对应的范围。

对于图 1 中建立的连续梁系统，“设计信息”包括均布荷载 w_i 和跨径 L_i。虽然“显著影响”和“变得无关紧要”这两个术语目前尚未定义，但它们指的是一个稍后将予以说明的误差阈值。虽然局部 和全局 表述在设计信息影响的测量位置上有所不同（局部表述 是在设计梁处测量，而全局表述是在影响区之外测量），但只要设计约束相同，各种表述确定的影响区大小 $k_{\max}$ 就相同。

可以采用多种方法，通过任一表述确定影响区。例如，解析方法可利用扰动理论等概念，这些理论基于力向量与刚度矩阵之间的关系。另一方面，也可以通过物理模型进行实验研究，或采用有限元方法进行数值分析，以研究影响区。

每种方法都有各自的缺点。如果需要针对多种荷载布置进行较大的设计扰动，就难以直观地通过基于扰动的方法评估影响区的大小。实验方法受限于可测试的设计场景数量，而数值方法则需要对系统的材料特性和结构行为作出力学假设。

首选数值方法，因为它能够研究大量设计场景，并得出统计结论。我们尝试使用数值模型进行局部表述和全局表述，但只有后者得到了完整发展。这是因为采用全局表述时，可以直接依据设计梁d 的利用率测量影响区 $k_{\max}$ ，从而更容易评估和报告影响区。采用局部表述时，则必须监测影响区以外所有周边构件的利用率。

2.3 数学表述

从数学角度来看，全局表述可表示如下。对于图 1 所示的给定连续梁系统，以及式 1 中表示的设计约束，

$$\begin{aligned} w_{\min} &< w_i < w_{\max} \\ L_{\min} &< L_i < L_{\max} \\ I_{\min} &< I_i < I_{\max} \end{aligned} \tag{1}$$

当 d 的值为 $k_{\max} \in \mathbf{N}^0$ 时，可以确定给定设计梁的影响区大小： $k_{\max} \in [0, m]$ 且所有大于 $k_{\max}$ 的值均满足以下条件：

$$\begin{gathered} \left| 1 - \frac{u_{d,\text{cap}}}{u_{d,\text{true}}} \right| \leq \epsilon_{\max} \\ u_{d,\text{cap}} = \max \left(\sum_{i=-k_{\max}}^{k_{\max}} \mathbf{u}_{d,i,j}(\mathbf{w}, \mathbf{L}, \mathbf{I}, \mathbf{J}) \right) \end{gathered} \tag{2}$$

其中，$\epsilon_{\max}$ 表示 $u_{d,\mathrm{cap}}$ 的最大误差阈值；对于给定的 $k_{\max}$ 值，设计梁 d 的捕获利用率为 $u_{d,\mathrm{cap}}$，而 $u_{d,\mathrm{true}}$ 表示设计梁 d 的真实利用率（假设已考虑连续梁系统中所有构件的贡献）。$\mathbf{u}_{d,i,j}$ 是构件 i 对设计梁 d 的利用率贡献函数，该函数基于由 j 索引的均布荷载 **w**、跨度 **L**、结构属性 **I** 和荷载布置 **J** 。

公式 2 中所写的全局表述，通过最小化基于 $\epsilon_{\max}$ 的 $u_{d,cap}$ 与 $u_{d,true}$ 之间的差异，来衡量 $k_{\max}$ 之外的贡献变得“无关紧要”的临界点。随着 $k_{\max}$ 增大，比例 $u_{d,cap}/u_{d,true}$ 将趋近于 1；如果将所有结构构件（$k_{\max} = m$）都纳入影响区，该比例将达到 1。若放宽误差阈值 $\epsilon_{\max}$，则可以找到一个小于梁构件总数 m 的影响区。因此，影响区是一个启发式度量，其依据是可接受的最大误差阈值 $\epsilon_{\max}$。

公式 1 所规定的设计约束之所以重要，是因为它们能够根据可能出现的设计信息变化的多样性，对最大影响区尺寸进行统计估计。在理解某一类型结构系统的最大影响区值时，始终应明确说明评估该值时所依据的设计约束。

2.4 设计约束与假设

本研究所考虑的设计约束，是根据其在连续钢框架建筑设计中的相关性选定的，这一点体现在设计数据集所涵盖的均布荷载和跨径范围上。研究考虑了四种不同的设计场景，以深入探究影响区；每个集合的跨长和施加荷载变化幅度逐渐增大，汇总于表 1。长度值和均布荷载值分别以 0.5 m 和 5 kN/m 为增量进行离散化，并从均匀随机分布中抽取。

数据集	$G_{k,i} =$	$Q_{k,i} \in$	$L_i \in$
集合 1 零变化	3.0 kN/m + 自重	a 适用于所有 i，其中 $a \in$ [0 千牛/米，60 千牛/米]	b 适用于所有 i，其中 $b \in$ [1 米，12 米]
集合 2 低变化	3.0 kN/m + 自重	[20 千牛/米,40 千牛/米]	[4m，8 m]
集合 3 中等变化	3.0 千牛/米 + 自重	[10 千牛/米，50 千牛/米]	[2米，10 米]
集合 4 高变化	3.0 kN/m + 自重	[0 千牛/米,60 千牛/米]	[1米，12 米]

表 1：本研究采用的各设计场景的设计约束，基于欧洲规范术语，其中 G_k 和 Q_k 分别为永久作用和可变作用的特征值。组号越大，设计变化越大，可作为设计复杂度的代理指标。跨度和均布荷载值分别按 0.5 m 和 5 kN/m 的增量离散化，并从均匀随机分布中抽取。

其他设计和建模约束/假设包括：截面特性限定为等截面的 BS EN 10365:2017 UKB 工字钢；采用 S355 钢材设计，并假定其完全线弹性，使用 Timoshenko-Ehrenfest 梁理论（但设计时按照 EN 1993- 1-1 5.4.2(2) [26]的规定，采用塑性截面特性）。假定所有跨径均受到侧向约束（因此不会发生侧向失稳），构件按 EC3 极限状态设计检查进行设计（特别是不考虑正常使用极限状态要求），并采用 EN 1990 公式 6.10 的荷载组合系数 [27]。

2.5 关键挑战

使用公式 2 评估影响区时，最重要的方面是基于构件的利用率贡献函数 $\mathbf{u}_{\mathrm{d,i,j}}$。尽管均布荷载 $\mathbf{w}$ 和跨度$\mathbf{L}$ 已知，但集合 $\mathbf{J}$ 中的临界荷载布置尚不确定，而该布置将决定所需的结构属性 $\mathbf{I}$。此外，设计梁的临界荷载布置也可能因假定的影响区尺寸值 $k_{\max}$而有所不同。

一种方法是采用简单的蛮力法，试遍所有可能的荷载布置，以生成集合 $\mathbf{J}_{\mathrm{naive}}$，其对应的集合大小为 $p_{naive} = 2^m$，用于公式 2 中的 $\mathbf{J}$。对于构件较少的系统，这并不是问题；但若要对包含$m > 10$ 个构件的较大型系统建模，以深入研究影响区，蛮力法的计算成本就会很高。文献已充分认识到大型系统的临界荷载布置所涉及的计算成本问题，并采用了基于概率 [28] 和可能性理论[29, 30]的多种方法。在后者中，采用区间有限元方法的模糊集已被证明兼具高效性和准确性 [31, 32]。

然而，尽管这些基于区间的方法能够有效地评估临界荷载布置的边界（最不利情况下的力/弯矩值），但它们实际上并未揭示这种荷载布置的具体形式。这给影响区的评估带来了问题，因为公式 2 依赖于能够明确识别这一集合 $\mathbf{J}$ 。另一种方法是采用设计手册中规定的荷载布置，但这些手册所提供的实际上是一组基于启发式方法的荷载布置，而众所周知，这些布置并不具有保守性 [32]。

由于这些局限性，本研究将开展一项严谨的研究，以确定并验证第2.1节中所确定的设计问题的临界荷载布置集合先验地，并将其标记为$\mathbf{J}_{\mathrm{crit}}$。这不仅能够降低构件设计以及利用公式 2 评估其影响区的计算成本，还能够揭示影响线与影响区域之间的关系，从而直观地理解后者的范围大小。随后，本研究将根据第2.4节中确定的设计约束，采用数值方法生成随机分布的数据集，以便对各种连续梁系统的影响区域进行评估和统计分析。

3 临界荷载布置分析

3.1 极性序列

影响线可用于确定给定连续梁系统的临界荷载布置。设计问题仅限于正值均布荷载（不

包括上拔力），该荷载可开启或关闭（激活因子分别为 1 或 0）。因此，通过对每根单独的梁 i 的影响线进行积分，可以评估在施加正单位均布荷载时，给定梁在影响线位置（IL）处弯矩和剪力方面产生的净贡献（正或负）。每根梁在影响线位置处的净贡献可能为正，也可能为负；对于弯矩，分别表示“负弯矩或正弯矩”，对于剪力，则分别表示“顺时针或逆时针”，这被称为该梁的极性。该过程如图 3 所示。

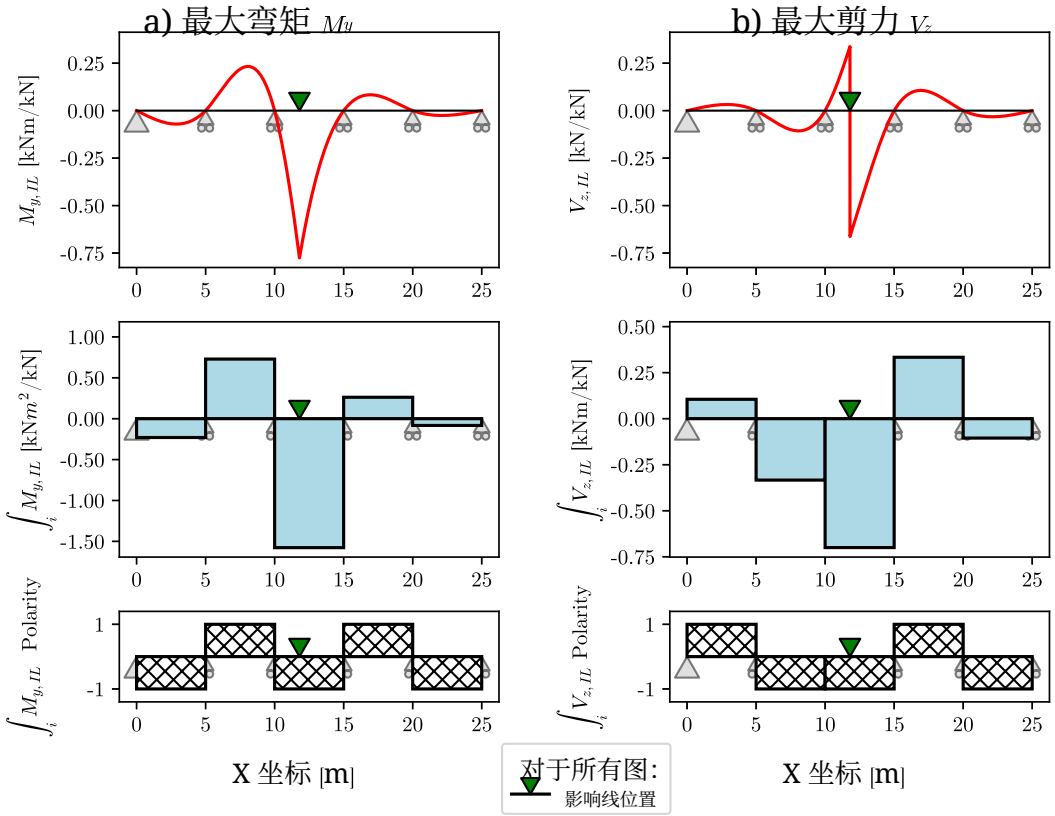

图 3：通过积分影响线（中排），从影响线图（上排）得到极性序列（下排）的示例过程，分别针对 a）强轴弯矩 M_y 和 b）指定影响线（IL）位置处的强轴剪力 V_z 。

因此，图 3 的最后一行反映了给定影响线位置对应的一种特定极性序列，可直接用于确定该影响线位置的临界荷载布置。当所有正极性梁均受到加载时，该影响线位置将产生最大的正内力；反之，对负极性构件加载则会产生最大的负内力。

3.2 极性区

对不同影响线位置和设计场景下的极性序列进行严格的定性研究后发现，给定梁跨度上的特定区段会出现 5 种独特的极性序列，这些区段称为极性区。图 4 展示了红色标出的中央梁对应的极性区。

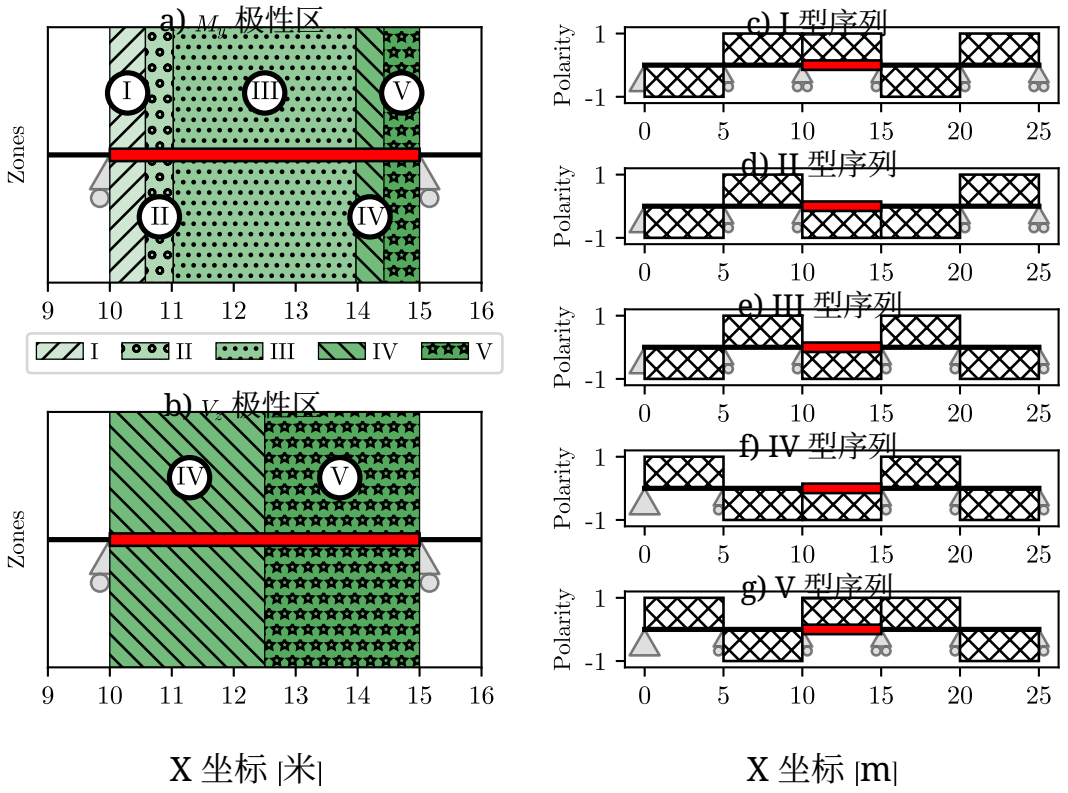

图 4：具有相等跨度和截面属性的 $m = 5$ 均质梁系统中，各跨度段上出现的极性区域。异质系统（均布荷载和跨度变化）中也会出现相同的区域和序列，但边界位置不同。

这 5 个极性区适用于均质（跨度和截面相同）以及非均质连续梁系统中的所有构件，不过各区域之间的确切边界会因跨度和截面特性的相对大小而异。图 4 中所示的序列也适用于规模更大的梁系统，其中极性方向在相邻梁之间交替变化。例如，如果在该 5 构件系统的任一侧各增加一个构件（形成 7 构件系统），则 I 型极性序列最左侧构件的极性为正，最右侧构件的极性则为负。同样的规律也适用于其他四种序列。

每种极性序列分别对应两种临界荷载布置，分别使构件内力达到最大正值或最大负值。最大正荷载

布置对于类型 I 而言，也等同于类型 IV 的最大负荷载布置，因为这两种序列互为极性相反序列；类型 II 和类型 IV 序列之间也存在同样的关系。因此，对于给定的梁，这 5 个极性区对应 6 种独特的临界荷载布置，即正向的类型 I、II 和 III，以及它们极性相反的（负向）布置。唯一的例外是位于跨度两端的梁，即端跨梁：在左端，类型 I 和类型 IV 序列会合并为类型 III 序列（或其极性相反序列）；在右端，类型 II 和类型 V 序列也会发生同样的合并，因此端跨梁共有四种独特的荷载布置。

尽管每根非端跨梁有 6 种独特的临界荷载布置，但这并不意味着整个梁系统有 $6m$ 种独特的荷载布置（m是梁系统中的构件数量）。这是因为，如图 5 所示，一根梁的最大正向 V 型荷载布置，与其紧邻右侧梁的最大正向 I 型荷载布置相同。II 型和 IV 型序列之间也存在类似的重叠，而所有梁的两种 III 型荷载布置（分别对应最大和负向内力）均相同。通过逐步排除，可以将潜在临界荷载布置的实际总数简化为 $p_{\text{flex}} = 2m$。这组布置称为弯曲荷载布置集$\mathbf{J}_{\text{flex}}$，可使用 A 中提供的算法 1 进行评估。图 6 展示了一个 $m = 5$ 系统的示例输出，其中按交替加载和相邻加载布置分组。

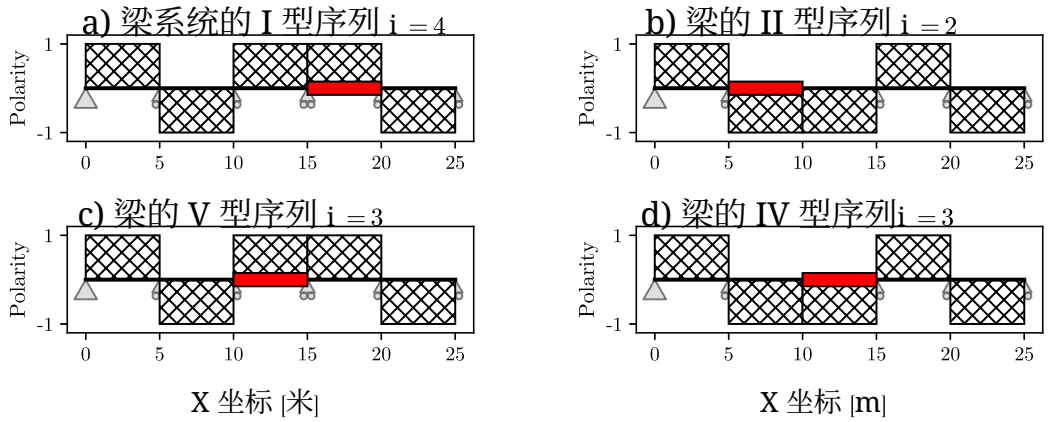

图 5：如图 a) 和图 c) 所示，对于 I 型和 V 型序列，以及如图 b) 和图 d) 所示的 II 型和 IV 型序列，相邻梁（红色高亮）的极性序列相同。

此处确定的规模为 $p_{\text{flex}} = 2m$ 的荷载布置集合 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$，相较于通过蛮力法分析并针对 $p = 2^m$ 种荷载布置进行设计，以及使用公式 2 评估影响区，确实带来了指数级的效率提升。不过，仍需证明所有临界荷载布置 $\mathbf{J}_{\text{crit}}$ 都包含在 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 中（即 $\mathbf{J}_{\text{crit}} \in \mathbf{J}_{\text{flex}}$）。

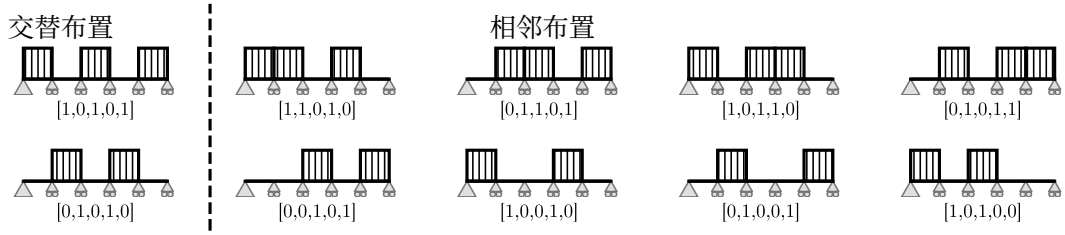

图 6：针对一个由 5 个构件组成的连续梁系统（$p = 10$），按交替加载和相邻加载布置分组的临界荷载布置集 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$，其大小为 $p = 2m$。

3.3 剪切梁及其对临界荷载布置的影响

为检验荷载布置集合 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 是否包含所有临界模式荷载，我们根据表 1 中确定的设计约束，采用随机分布的均布荷载和跨长，以数值方式生成了规模最大为 $m = 10$ 的各类连续梁系统（以确保计算可行）。通过计算所有 2^m 种荷载布置，并评估每种布置的利用率（基于弯矩和剪力组合），即可确定导致最不利利用率的荷载布置。随后，将这组临界荷载布置与 A 中所给算法 1 确定的 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 集合进行比较。

尽管在大多数情况下，$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 往往会导致临界利用率，但也有一些情况是由不属于$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 的其他荷载布置控制设计。这种意外情况出现在包含短跨度深梁的情形中。对这些特殊情况进行详细分析后发现，此前未识别出的荷载布置出现的确切条件通常与以下 L_{shear} 跨度限值有关，该限值由

$$\sqrt{\frac{6EI_{yy}}{GA_z}} < L_{\text{shear}} \tag{3}$$

其中，E 和 G 分别为材料的杨氏模量和剪切模量，I_{yy} 和 A_z 分别为等截面梁的主惯性矩和剪切面积。

尽管 L_{shear} 跨度限制似乎与剪切梁有关，但这是文献首次报道剪切梁会导致新型临界荷载布置。如图 7 所示，从给定的影响线位置向外测量时，剪切梁似乎会翻转紧邻构件的极性，而后续所有构件的极性方向则像之前一样交替变化。

当出现剪切梁（按 L_{shear} 限值定义）时，会引入在$\mathbf{J}_{\text{flex}}$中不存在的新的临界荷载布置。梁的最终利用率通常会因此提高约 4–5%，但也观察到更大的增幅。尽管深入分析这些新识别出的荷载布置对利用率的影响会很有意义，但这超出了本研究的范围。相反，本文将提出一种能够先验地识别这些新荷载布置的算法，这正是本研究的主要目标，详见第 2.5 节。

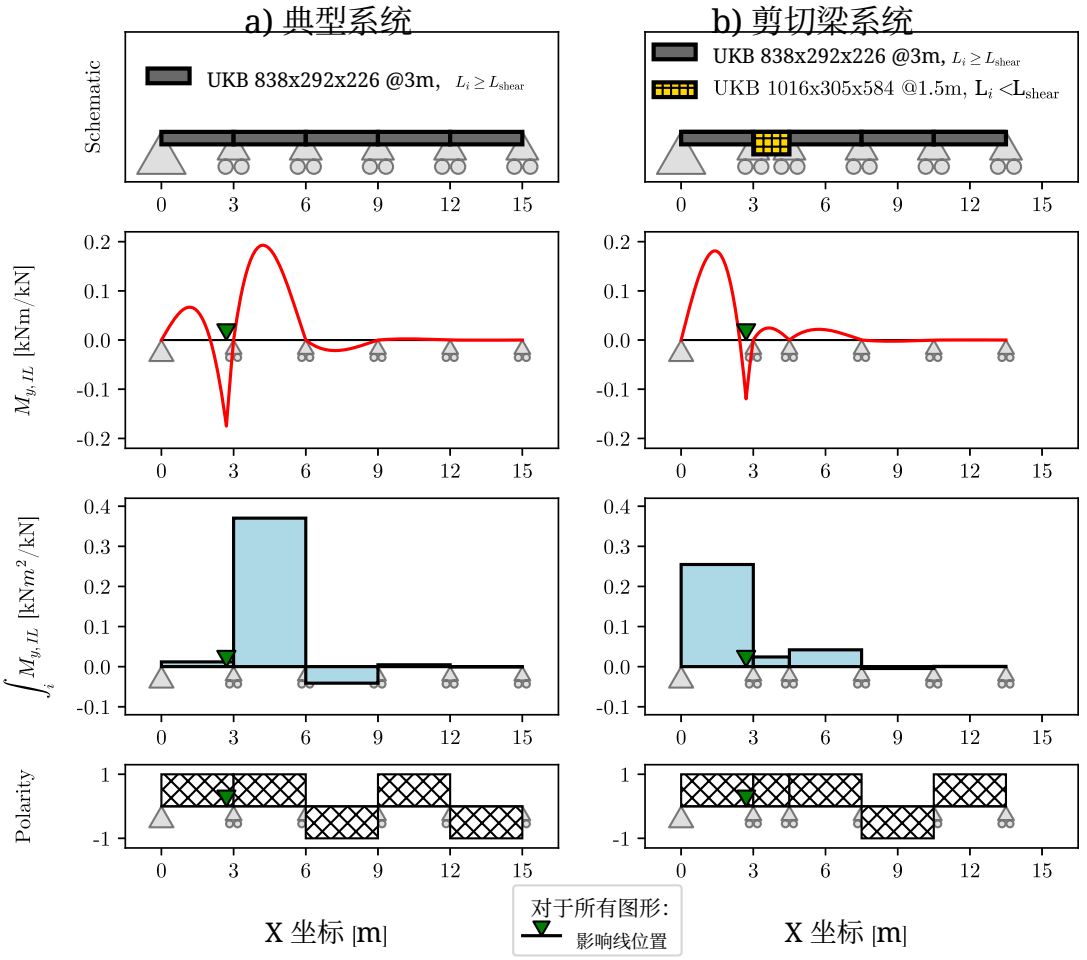

图 7：示意图展示了当出现短于剪切跨限值 L_{shear} （如公式 3 所示）的跨度时，剪切梁（黄色高亮）对连续梁系统标准极性序列的影响。请注意，系统右侧构件的极性方向发生了翻转。

3.4 确定剪切梁诱发的临界荷载布置 先前 *i*

在先验地评估剪切梁引起的临界荷载布置（下文称为剪切荷载布置 $\mathbf{J}_{\text{shear}}$）时，主要问题在于，只有完成梁的设计后，才能确定用于评估公式 3 中 L_{shear} 限值的最终材料属性和截面属性。这就造成了因果困境，因此需要加以解决。

与不依赖连续梁系统属性的$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 集截然相反，若没有一定的系统知识，就无法普遍地 确定剪切荷载布置。然而，利用公式1所设定的设计约束，可以通过将公式3改写为以下形式，先验地 识别出哪些构件可能导致剪切荷载布置：

$$\sqrt{6\left(\frac{E}{G}\right)_{\max}\left(\frac{I_{yy}}{A_z}\right)_{\max}} < L_{\text{shear,max}} \tag{4}$$

上述公式将最大值材料比和截面属性比归为一组。将设计空间限定为第2.4节所规定的S355钢和UKB截面尺寸后，可以计算最大值材料比（$(E/G)_{\max} = 2.600$）和截面属性比（$(I_{yy}/A_z)_{\max} = 0.397m^2$）。因此，短于剪切跨度限值的梁可能导致剪切荷载布置（本例中为$L_{\text{shear, max}}$=2。49米）。通过先验地识别这些易受影响的构件，可以使用B中提供的算法 2评估剪切荷载布置。

算法 2 根据由方程 4 识别出的易受影响剪切梁列表，将弯曲荷载布置从集合$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 进行转换。如果在从起始梁索引沿左侧 (-1) 和右侧 (1) 方向向外移动时遇到剪切梁，则通过翻转荷载布置的启用/停用激活因子来实现这一转换。此操作根据图 7 中以可视方式识别出的行为转换弯曲荷载布置，并需要检查四个单独的情况条件，以涵盖具有多个可能相邻布置的剪切梁的连续梁系统。

由于每个梁系统的规模为m，算法 2 单次遍历的时间复杂度为 $O(m)$。然而，由于需要计算每种弯曲荷载布置（$2m$）、每种由 n 个潜在剪切梁构成的组合（共 $2^n - 1$ 种组合，因为零集合默认已计入$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ ），以及每个可能的起始索引（m），因此评估剪切集合$\mathbf{J}_{\text{shear}}$ 的时间复杂度为 $O(m^3\, 2^n)$。需要注意的是，这一过程的计算开销很大。

据观察，遍历所有可能的起始索引会生成重复的剪切荷载布置，或者偶尔生成已存在的弯曲荷载布置。例如，对于给定的单个潜在剪切梁位置，算法会针对所有从该易受影响剪切梁位置左侧和右侧开始的起始索引，生成相同的变换后剪切荷载布置。同样，如果仅存在一个易受影响的剪切梁，那么来自 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 的两种交替布置将会生成 $\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 中已经存在的相邻布置。

按照这一逻辑，只需将来自$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 的相邻布置，以及相邻受载跨径的左侧（或右侧）索引作为算法 2 的起始索引传入，即可得到一组有效的潜在剪切荷载布置。由于无需针对每种荷载布置的每个可能起始索引运行算法 2，计算复杂度降至 $O(m^2\, 2^n)$。由此还可得出，由于交替荷载布置永远不会被转换（因此只需将 2$(m-1)$ 种荷载布置传入算法），且可能存在 $2^n - 1$ 种剪切梁组合，因此唯一临界剪切荷载布置的最大数量应为 $p_{\text{shear}} = 2(m-1)(2^n - 1)$。

3.5 验证弯矩和剪力荷载布置算法

根据第2.4节确定的高变异设计场景，生成了一组设计数据集，其中包含从随机均匀分布中抽取的32个均布荷载值和32个跨度值，用于 $m = 10$ 梁系统。所采用的可变均布荷载显著更高

($Q_{k,\ i} \in [200\,\text{kN/m},\ 400\,\text{kN/m}]$)，以提高形成深梁及临界剪切荷载布置的可能性，从而对算法的性能进行压力测试。由此得到 $10 \times 32 \times 32 = 10240$ 个单个梁设计示例，并可确定其中的临界荷载布置 J_{crit}。

该验证试验的结果如图8所示，其中绘出了每个设计梁样本的临界荷载布置索引。每个荷载布置索引都对应于大小为 $p_{\text{naive}} = 2^m = 1024$的朴素集合$\mathbf{J}_{\text{naive}}$ 中的唯一一种荷载布置。集合$\mathbf{J}_{\text{naive}}$ 经过排序，使得集合$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 的荷载布置排在最前，随后是集合$\mathbf{J}_{\text{shear}}$的荷载布置，最后是所有其他荷载布置。设计样本本身经过两次排序：首先按剪切梁出现次数升序排列，随后按荷载布置索引升序排列。因此，如图8所示，J_{crit} 索引逐渐增加。

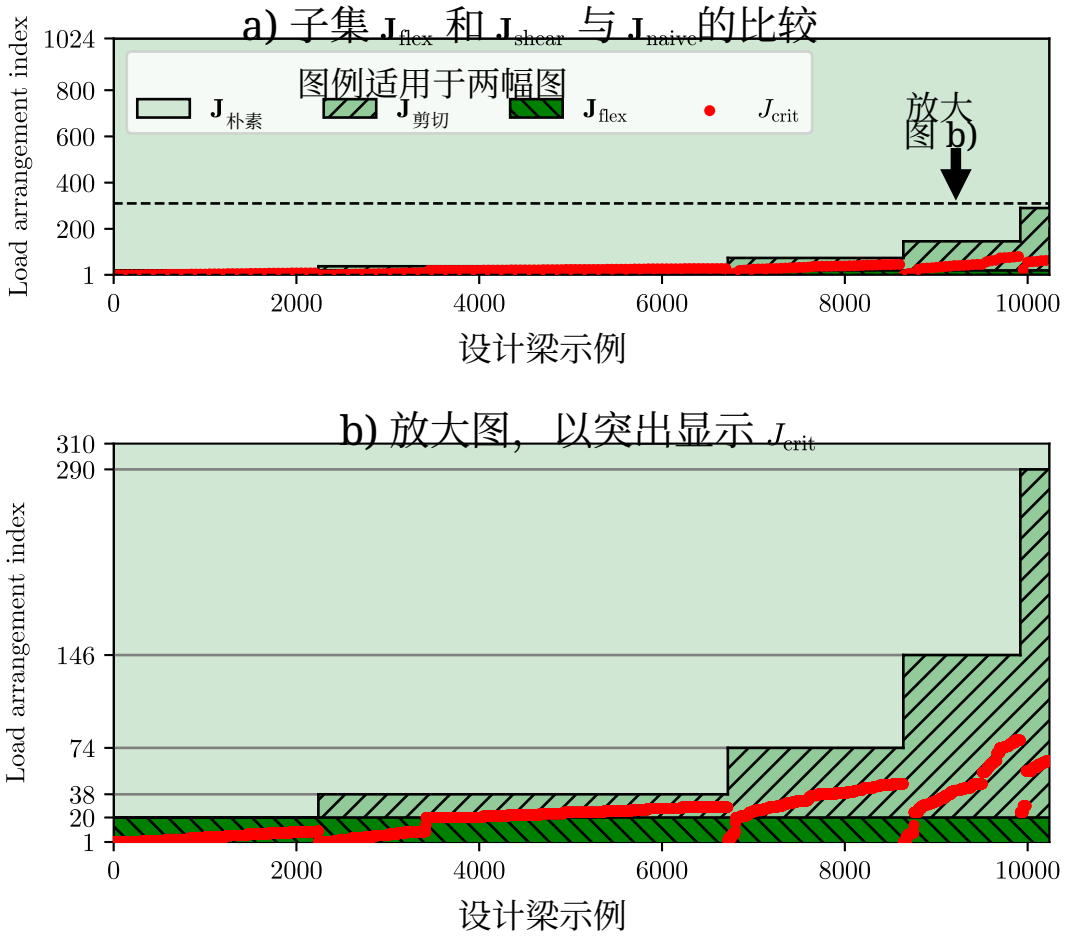

图8：各设计梁示例的荷载布置索引，按剪切梁出现次数和临界荷载布置索引递增排序。这从视觉上证实，生成数据集中的每个设计梁示例的临界荷载布置 J_{crit} 均落在$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 或 $\mathbf{J}_{\text{shear}}$ 内，且显著小于$\mathbf{J}_{\text{naive}}$。图 b) 是图 a) 的放大视图。

图8揭示了若干重要信息。首先，10240数据集中的每一个梁设计样本，其临界荷载布置 J_{crit} 都出现在$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 或$\mathbf{J}_{\text{shear}}$ 集合中，从而验证了基于先前识别出的极性区及其序列所进行的定性分析。这也进一步强调了算法1和算法2的有效性。此外，集合大小预测 $p_{flex} = 2m$ 和 $p_{shear} = 2(m-1)(2^n - 1)$也得到了证实。对于此处设计的 $m = 10$ 构件系统， $p_{flex} = 20$；根据每个系统中剪切梁出现次数的不同（其范围为 $n = \{0, 1, 2, 3, 4\}$），剪切荷载布置的数量也在 $p_{shear} = \{0, 18, 54, 126, 270\}$之间变化。相应地，这些数量分别为 $p_{total} = \{20, 38, 74, 146, 290\}$，如图8 b)的 y轴所示。

图8 a) 还强调了与$\mathbf{J}_{\text{naive}}$相比，集合$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ 和$\mathbf{J}_{\text{shear}}$ 的规模小得多。这将大幅减少需要分析的荷载布置数量，从而降低连续梁系统的最优设计以及系统长度为 $m > 10$ 时影响区评估的计算成本。图8所揭示的更多见解将在第5节中讨论。

3.6 连续梁临界荷载布置总结

将临界弯曲荷载布置与剪切荷载布置集合相加，即可明确界定满足给定设计约束的任意连续梁系统的临界荷载布置集合。对于影响区概念和公式 2，假设：$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_{\text{crit}} \in \mathbf{J}_{\text{flex}} \cup \mathbf{J}_{\text{shear}}$。这项系统性的临界荷载布置分析结果汇总于表 2。

Set	设置尺寸	算法复杂度
临界荷载布置 每根内梁	6	$O(1)$
临界荷载布置 每个端跨梁	4	$O(1)$
$\mathbf{J}_{\text{flex}}$ - 临界弯曲 每根梁的布置方式	$2m$	$O(m)$
系统		
$\mathbf{J}_{\text{shear}}$ - 临界剪力 每根梁的布置方式	$2(m-1)(2^n - 1)$	$O(m^2\, 2^n)$
系统		
$\mathbf{J}_{\text{naive}}$ - 朴素荷载 布置	2^m	$O(2^m)$

表 2：包含 n 根剪切梁的 m 维梁系统的荷载布置集合汇总及其相关算法复杂度。

4 影响区评估

4.1 明确定义利用率贡献函数

利用第 3.1 节中积分影响线和极性区域的概念，并在第 3.6 节中明确定义了临界荷载布置集合 $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}_{\text{crit}}$，便可定义利用率贡献函数 $\mathbf{u}_{d,i,j}$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{d,i,j} &\rightarrow \mathbf{D}_{\text{ULS}}(I_d, M_{d,i,j}, V_{d,i,j}) \\ M_{d,i,j} &= w_i \; J_{i,j} \int_i \mathbf{M}_{\text{IL},d} \\ V_{d,i,j} &= w_i \; J_{i,j} \int_i \mathbf{V}_{\text{IL},d} \end{aligned} \tag{5}$$

$\mathbf{D}_{\text{ULS}}$ 表示根据欧洲规范 EN 1993-1-1 6.2 [26]，I_d 进行的极限状态设计钢截面设计验算，其中 I_d 代表截面属性，$M_{d,i,j}$ 表示强轴弯矩，而$V_{d,i,j}$ 表示设计梁 d的强轴剪力； w_i 表示均布荷载，而$J_{i,j}$表示荷载布置 j 在集合$\mathbf{J}_{\text{crit}}$ 中对梁 i的激活因子。积分$\int_i \mathbf{M}_{\text{IL,d}}$ 和 $\int_i \mathbf{V}_{\text{IL,d}}$ 表示设计梁 i 上、针对设计梁 d 内特定影响线位置的积分影响线值，如图3所示。

设计梁内的影响线位置需要与最不利内力位置相对应。虽然根据工程经验，这些位置应出现在支座上方，但实际上，取决于均布荷载、跨径和截面属性的具体分布，它们可能出现在设计梁沿线的任何位置，因为设计梁的每个区段都有各自的临界荷载布置，如图4所示。本研究共选取了11个影响线位置进行采样：两个支座各取一个，其余9个则在支座之间等距分布。

因此，对于给定的设计梁和 $k_{\max}$ 值，公式 5 将得到 $11p$ 个利用率（请注意， p 是J的集合大小），然后在公式 2 中从这些利用率中评估临界利用率（最大值），以检查是否已达到 $\epsilon_{\max}$ 阈值。请注意，随着 $k_{\max}$ 增加，临界影响线位置和临界荷载布置可能会发生变化；然而，随着 $k_{\max}$ 接近 m，它们将等同于决定该特定梁设计的影响线位置和荷载布置。

4.2 设计数据集生成

待建模的连续梁系统 m 尺寸至少需要是最大影响尺寸 $k_{\max}$的两倍。这是因为，按设计，连续梁中间跨可测得的最大影响区为系统长度的一半 m。因此，尺寸 m 需要选择为使 $\max(\mathbf{k}_{\max}) < m/2$，其中 $\mathbf{k}_{\max}$ 是连续梁系统的所有影响值 $k_{\max}$ 的列表。由于评估 $k_{\max}$ 是本研究的主要目标，因此需要为 m 假设一个足够大的值；为此使用了 $m = 15$ 。

根据第2.4节中针对集合 2、3 和 4 确定的设计约束，为 $m = 15$ 梁系统创建了各自独立的设计数据集。每个数据集包含从均匀随机分布中抽取的 32 个均布荷载值和 32 个跨度值，且每个数据集包含 $32 \times 32 \times 15 = 15360$个梁设计。对于集合 1，梁系统之间的差异仅体现在

梁的相同跨度 L 和均布荷载 Q_k 上，这些值也分别以 0.5 m 和 5 kN/m 为增量抽取。由于集合 1 的跨度和均布荷载分别有 23 个和 13 个增量，集合 1 包含 $23 \times 13 \times 15 = 4485$ 个设计样本。

对于连续梁系统的设计优化，采用了耦合分析与设计方法，以最小化结构高度为优化目标。通过根据结构承载力对 UKB 截面列表进行隐式排序，避免了设计灵敏度分析。利用公式 2 和公式 5 提取影响区数值。

4.3 影响区结果

图 9 展示了最大误差阈值为 $\epsilon_{\max} = 0.005$且采用第2.4节所定义的不同设计数据集时的影响区结果。对于所有研究的数据集，最常见的影响区数值（众数）为 $k_{\max} = 3$，且大多数影响区数值为 $k_{\max} \leq 3$，这意味着，对于大多数情况，给定梁的跨度和施加荷载信息，以及其两侧各三个相邻跨的相关信息，能够以小于 $\pm 0.5\%$ 的误差准确捕捉设计梁的利用率。

然而，各个集合显示出最大值和影响区分布方面的差异。集合 1 的最大影响区域值为 $k_{\max} = 4$，而

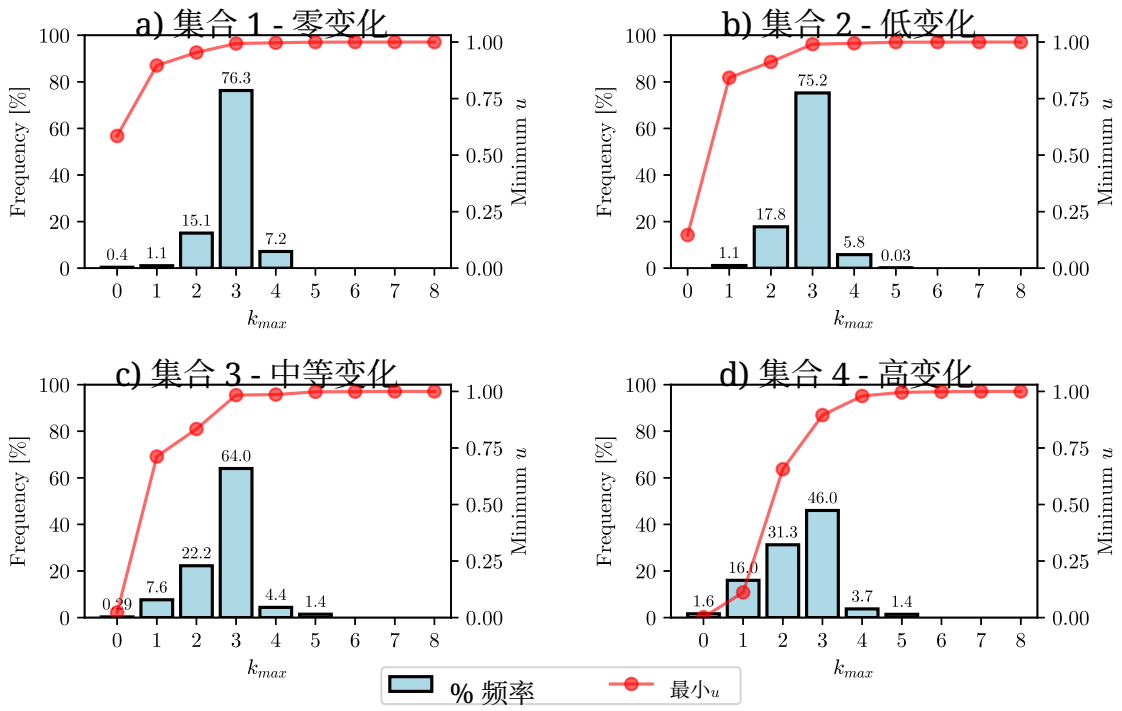

图 9：不同设计约束下的影响区结果，最大误差阈值为 $\epsilon_{\max} = 0.005$；图中显示了影响区数值的百分比频率分布 $k_{\max}$，以及针对给定设计梁的每个 $k_{\max}$ 数值所捕捉到的最小利用系数 d。

集合 2、3 和 4 为 $k_{\max} = 5$ 。此外，随着集合编号增加，这与跨度和均布荷载方面设计信息变化的增加相对应，影响区数值分布似乎变得更平缓且更宽。例如，变化程度较高的集合 4 实际上包含了最多的影响区值 $k_{\max} = 0$ ，占设计样本的 1.6%；而零变化的集合 1 仅有 0.4% 的设计样本呈现出 $k_{\max} = 0$的影响区。每个影响区值所对应的最小利用率曲线（图 9 中带有点标记的红色曲线）表明，总体而言，设计变化越大，最大影响区域值越高。

还针对不同的误差阈值计算了影响区的平均值和最大值，如表 3 所示。请注意，在误差阈值最高时，集合 4 的最大影响区域值为 $k_{\max} = 7$，这证实了 $m = 15$ 构件尺寸假设足以满足本研究的目的。图 9 和表 3 共同为以下结论提供了证据：

- 可接受误差阈值降低，与影响区范围的平均值和最大值均增大相关。
- 设计变化增加，与最大影响区范围增大相关。
- 然而，在可接受误差阈值相对严格（$\epsilon_{\text{最大值}} \leq 10\%$）的大多数情况下，设计变化增加与影响区范围平均值下降相关。在误差阈值较高时，这一趋势不太明显。

误差 $\epsilon_{\max}$ [%]	平均值 $k_{\max}$				最大值 $k_{\max}$			
	集合 1	集合 2	集合 3	集合 4	集合 1	集合 2	集合 3	集合 4
0.1	4.60	4.46	3.84	3.37	5	5	6	7
0.5	2.89	2.86	2.69	2.38	4	5	5	5
1	2.76	2.75	2.35	2.06	3	3	5	5
5	1.52	1.39	1.29	1.17	2	3	3	4
10	0.98	0.98	0.89	0.83	2	2	3	4
20	0.76	0.84	0.73	0.67	1	1	2	3
50	0.00	0.30	0.41	0.43	0	1	1	2

表 3：针对每个设计数据集，在不同最大误差阈值 $\epsilon_{\max}$ 下的影响区结果，评估平均值和最大影响区域值 $k_{\max}$。请注意，集合编号越大，表示设计变化越大，这是设计复杂度的一个代理指标，详情请参见表 1。

需要指出的是，小于 0.5% 的误差阈值，相较于结构设计中存在的不确定性而言相对较小。这些不确定性包括材料屈服强度和施加的均布荷载值（请注意，变均布荷载值 Q_k 在欧洲规范[27]中会乘以 1.5 的荷载组合系数提高 50%）。此外，设计集合 4 的设计约束代表了典型连续梁系统中可能出现的设计变化范围上限。因此，可以合理地认为，对于设计约束按

第 2.4 节中规定的连续梁系统，影响区值平均为 $k_{\max} < 3$，在最极端情况下为 $k_{\max} = 5$。

5 讨论

影响区研究的结果及其方法带来了一系列重要发现。这些发现包括提出全新的结构影响区概念及其评估数值方法；借助极性区和极性序列发现全新的剪切荷载布置；以及提出荷载布置算法，以明确识别任意构件尺寸的连续梁系统的临界荷载布置，而这正是开展影响区研究的必要前提。本文将详细讨论这些发现，并结合相关现有文献加以阐释。

5.1 影响区见解

影响区结果证实，加载的影响，以及由此延伸出的任何设计信息的影响，都会随着与影响线位置距离的增加而急剧减弱。本文中的所有影响线图均可观察到这一现象，例如图3和图7。本研究将这一概念表述为影响区，展示了其在连续梁系统中的应用，并在各种设计假设和误差阈值下，对影响区分布进行了严格研究。

应当着重阐明第2.3节中影响区定义的一个重要要素。只有在满足两个重要条件时，才能确定影响区值 $k_{\max}$，具体而言，即 $k_{\max}$ 的最小值以及所有大于该值的$k_{\max}$ 均符合公式 2。这一约束是必要的，旨在考虑到比值$u_{d,cap}/u_{d,true}$ 有时会通过振荡趋近于 1 这一事实。

这种行为的原因在于相邻的荷载布置（见图 6），当仅考虑荷载布置的一部分（而非全部）时，这些布置有时会更为不利。例如，假设影响区值为 $k_{\max} = 1$ 时，集合 4 计算得出的最大 $u_{d,cap}/u_{d,true}$ 比值为 1.89，但当影响区值分别为 $k_{\max} = 2$ 和 $k_{\max} = 3$ 时，该比值却降至 0.942 和 0.998。未来关于影响区的研究应牢记这一违反直觉的行为，因为简单的 $u_{d,cap}/u_{d,true} < r_{cap}$ 阈值（其中 r_{cap} 表示捕获利用率的最小阈值）会导致对影响区分布的低估。

5.2 根据影响线划分影响区域

尽管影响区的概念与影响线关系密切，这一点主要体现在公式 5 中：积分影响线在评估影响区时发挥着重要作用，但这两个概念在重要方面仍有所不同。这一区别也适用于影响线在二维应用中的形式，即影响面 [33, 34, 35, 36]。

影响线/面是精确的分析工具，用于定义已知结构系统在特定点处的力学响应；而影响区域是一种启发式设计工具，能够帮助了解在设计之初，哪些信息与

结构系统的设计相关，这一判断基于某些分析假设。影响线/面的价值体现在逐个分析结构系统时，而影响区域的价值则体现在设计阶段，即对其进行统计汇总研究之后。

这一差异或可进一步证明，在结构工程中，设计与分析之间存在明确界限。以往文献强调了用于解释系统基本事实的知识（如影响线），与关于如何设计或求解某个问题的知识（如影响区域）之间的区别 [37, 38]。近期文献指出，分析与设计过程解决的是相关但问题设定方向相反的问题，分别称为正问题和逆问题 [39]。影响线可视为解决前者的工具，而影响区域则用于解决后者。

事实上，影响区概念是在从逆问题视角开发连续梁结构系统的设计模型时形成的，它能够先验地了解哪些跨度和荷载信息与特定连续梁的设计相关。影响区概念有望成为连续结构体系设计中的重要启发式工具，从而支持这样一种观点：启发式方法的应用是工程设计的基石 [40]。从逆问题视角处理工程设计时，或许还能发现更多新颖的理念。

5.3 弯曲荷载布置

本研究的一项重要贡献是通过使用极性序列，清晰地呈现弯曲荷载布置。值得注意的是，极性区突出了对于梁的特定区段而言哪种荷载布置起控制作用，这对于变截面（非棱柱形）连续梁系统的设计可能很有用 [41, 42]。

影响区研究有助于将简化荷载布置条款置于具体背景下进行理解。例如，EN 1993-1-1 [26] 中的附录 AB.2完整涵盖了交替弯曲荷载布置，但规定对于相邻弯曲荷载布置类型，仅需对两个相邻加载跨计入可变荷载（Q_k）。实际上，除所研究的梁及与其直接相邻的两个跨以外，所有其他跨上的可变荷载信息均被忽略，这在技术上等同于假定影响区为 $k_{\max} = 1$。

借助表 3，可以推断，在无均布荷载或跨度变化的设计场景中，影响区值 $k_{\max} = 1$可能会导致真实利用率出现 $5 - 10$%的误差（ $\epsilon_{\max} = 5$%和 $\epsilon_{\max} = 10$%的平均 $k_{\max}$ 值对于集合 1分别为1.52和0.98）。因此，简化的欧洲规范条款平均而言是合理的简化方法，能够反映可变荷载布置的影响。然而，集合 1中采用 $k_{\max} = 1$ 时的最大影响区值对应的误差为 $\epsilon_{\max} = 20$%；当考虑非均质连续梁系统（由集合 2、3和4反映）时，该误差可能增大至 $\epsilon_{\max} = 50$%甚至更高。这进一步证明，正如文献中已有指出，建筑规范中的荷载布置条款可能不具有保守性，从而导致不安全的设计 [32]。

欧洲规范中的简化条文，EN 1992-1 中也有类似规定 -1

5.1.3 [43] 以及其他规范 [44], 应结合 $1.5Q_k$ 荷载系数和恒载贡献 G_k来理解，因为它们总会减轻这些条文造成的低估。不过，仍可进一步研究设计规范对弯曲荷载布置的建议是否有效，尤其是对于高度不规则的梁和楼板布置 [45]。

5.4 剪切荷载布置

与已在文献和建筑规范中明确的弯曲荷载布置不同，剪切荷载布置是一项新发现。据作者所知，这是文献中首次发现深梁会导致新的临界荷载布置。尽管剪切荷载布置有时会产生与弯曲荷载布置相同的利用率，但初步分析显示，利用率平均增加了 4–5%，偶尔也会观察到更大的偏差。图8还显示，在所考察的设计场景中，这些剪切荷载布置相当常见。

鼓励通过未来研究对这些剪切荷载布置进行确认和验证。尤其值得关注的是，为什么公式 4 定义了这些临界荷载布置出现的确切时点。本研究对荷载布置所采用的力学假设与先前研究的一个显著差异，是采用了 Timoshenko-Ehrenfest 梁理论，而不是 Euler–Bernoulli 梁理论。例如，利用基于模糊集的有限元方法确定临界荷载布置范围的两项奠基性研究均采用了 Bernoulli-Euler 梁理论 [31, 32]。根据公式 3 所定义的深梁，并采用 Timoshenko-Ehrenfest 梁理论重新开展研究，应能揭示出比先前使用区间有限元方法所确定的更多临界荷载布置范围。这些剪切荷载布置在多大程度上需要建筑规范中的特殊规定，仍需进一步探讨。

5.5 临界荷载布置算法

A 和 B 中提供的临界荷载布置算法 以及对其计算复杂度的研究，是评估影响区的关键。在不进行启发式简化的情况下，将设计空间限制为朴素的 J_{naive} 荷载布置集合的一小部分，对于数据集生成和影响区评估两个步骤都至关重要。

对于已知易受剪切影响梁的清单，算法 2 在评估剪切荷载布置方面可能仍有进一步改进的空间。如第 3.4 节所述，当前的算法仍会产生已有的弯曲荷载布置，或生成重复的剪切荷载布置。算法 B 的输出中，平均有 74.7% 是唯一的，最佳情况下效率为 88.8%，最差情况下则为 12.7%。这表明，经过进一步研究，或许能够实现计算复杂度低于 $O(m^2\,2^n)$ 的算法。

5.6 影响区域概念的进一步研究与应用

希望本研究能为未来有关影响区的研究奠定基础。本研究存在若干局限，尤其是未考虑正常使用性验算，且将设计空间限制为正向加载的均布荷载。此外，在设计和提取影响区数值时，每根梁上仅采样了 11 个等距点。一种更高效的方法是，根据适用于特定极性区域的临界荷载布置，选取特定点进行采样。

未来可以针对不同的材料和设计信息假设开展进一步研究，也可以将研究扩展至具有固定连接和半刚性连接的二维连续框架与壳体。如前所述，这类数值研究可通过解析方法或实验方法进行验证，也可采用局部而非全局的影响区域表述，详见第 2.2 节。

影响区域概念及其相关结果可为大型钢框架连续梁系统的设计教学提供有用信息，也可应用于可靠性工程等其他研究领域，并有助于未来广义设计模型的发展 [39]。

6 结论

本文针对连续梁系统提出了一种称为影响区的新概念。研究建立了局部和全局表述，并对后者进行了数值研究，同时采用适用于钢框架建筑的设计约束。主要挑战在于明确界定临界荷载布置，以便以较高的计算效率生成设计数据集，并评估相应的影响区域。研究得出了三个重要结论：

- 极性序列和极性区的发展，划分出了此前已知的弯曲荷载布置与新发现的剪切荷载布置，并明确给出了这些新型荷载布置出现时的跨度限值方程。

- 提出了两种能够找出这两类荷载布置的算法，并通过与朴素蛮力法进行比较，证明它们涵盖了所有临界排列。

- 生成了设计数据集，以便严格研究不同设计复杂程度和误差阈值下的影响区数值。对于结构设计中认为可接受的误差阈值，在极限状态考量下，钢框架建筑中的连续梁影响区平均值小于 3，最大影响区值为 5。

影响区是一种启发式设计工具，有别于影响线（以及影响面），并通过评估时采用的逆问题视角展现了其价值。本研究为未来研究拓展了范围，尤其是在评估各种材料和结构体系的影响区、验证并阐明剪切荷载布置的存在，以及鼓励改进用于识别这些布置的现有算法方面。

致谢

作者贡献： Adrien Gallet：概念构思、方法、调查、软件、形式分析、验证、可视化、撰写——初稿 Andrew Liew：撰写——审阅与编辑 Iman Hajirasouliha：撰写——审阅与编辑 Danny Smyl：监督、撰写——审阅与编辑

数据声明： 本文所用数据可向作者索取。

利益冲突： 作者声明不存在任何利益冲突。

参考资料

[1] E. Betti，弹性理论，Il Nuovo Cimento 7–8 (1) (1872) 5–21。doi:10.1007/BF02824590。[2] L. S. Blake（编），土木工程师参考手册，爱思唯尔，1989。doi:10.1016/ C2013-0-00875-4。[3] I. A. Karnovsky，O. Lebed，结构分析高级方法，Springer US，波士顿，MA，2010。doi:10.1007/978-1-4419-1047-9。[4] R. C. Hibbeler，结构分析，第九版，培生普伦蒂斯霍尔，上萨德尔河，新泽西州，2015。[5] V. Hosur，S. Bhavikatti，弹性地基上梁的弯矩影响线，Computers & Structures 58 (6) (1996) 1225–1231。doi:10.1016/ 0045-7949(95)00219-7。[6] G. Fiorillo，M. Ghosn，影响线在移动荷载作用下梁极限承载力分析中的应用，Engineering Structures 103 (2015) 125–133。doi:10. 1016/j.engstruct.2015.09.003。[7] E. Buckley，连续梁和刚架的基本影响线方程，Journal of Structural Engineering 123 (10) (1997) 1416–1420。doi:10.1061/(ASCE) 0733-9445(1997)123:10(1416)。[8] X. Zheng，D.-H. Yang，T.-H. Yi，H.-N. Li，基于直接测量数据的桥梁影响线识别方法：全面综述与比较，Engineering Structures 198 (2019) 109539。doi:10.1016/j.engstruct. 2019.109539。[9] X. Zhu，S. Law，基于车桥相互作用的结构健康监测：成果与挑战，Advances in Structural Engineering 18 (12) (2015) 1999–2015。doi:10.1260/1369-4332.18.12.1999。

[10] Z.-W. Chen, Q.-L. Cai, S. Zhu，利用挠度影响线量化梁结构损伤，Structural Control and Health Monitoring 25 (11) (2018) e2242。doi:10.1002/stc.2242。[11] P. Kuklik，影响区，载于：P. Bobrowsky、B. Marker（编），工程地质百科全书，Springer International Publishing，Cham，2018，第1–2页。doi:10.1007/978-3-319-12127-7-309-1。[12] J. Yang，砂土中桩端承的影响区，Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 132 (9) (2006) 1229–1237。doi:10.1061/(ASCE) 1090-0241(2006)132:9(1229)。[13] S. Ekanayake, D. Liyanapathirana, C. Leo，振动沉桩过程中闭口桩周围的影响区，Soil Dynamics and Earthquake Engineering 53 (2013) 26–36。doi:10.1016/j.soildyn.2013.06.005。[14] P. Kukl´ık, M. Kop´a˘ckov´a，计算基础底板下方地基土内部影响区的高效解析模型，Acta Polytechnica 44 (5-6) (2004年1月)。doi:10.14311/632。[15] C. Cao, Z. Xu, J. Chai, Y. Qin, J. Cao，抽水蓄能地下洞室及排水系统影响区的确定方法，Journal of Hydrology 595 (2021) 126018。doi:10.1016/j.jhydrol.2021.126018。[16] D. Jakovovic, A. D. Werner, P. G. de Louw, V. E. Post, L. K. Morgan，咸水上涌影响区，Advances in Water Resources 94 (2016) 75–86。doi:10.1016/j.advwatres.2016.05.003。[17] A. Goel, P. Kumar，信号控制交通交叉口粒子数浓度的影响区，Atmospheric Environment 123 (2015) 25–38。doi:10.1016/j.atmosenv.2015.10.054。[18] M. Alvin, K. M. Adhinugraha, S. Alamri, U. Mir，反向k近邻查询的影响区扩展，Multimedia Tools and Applications (2021年8月)。doi:10.1007/s11042-021-11275-3。[19] M. A. Cheema, W. Zhang, X. Lin, Y. Zhang，高效处理快照和连续反向k近邻查询，The VLDB Journal 21 (5) (2012) 703–728。doi:10.1007/s00778-012-0265-y。[20] K. Yoshizawa, B. L. N. Kennett，确定面波路径的影响区，Geophysical Journal International 149 (2) (2002) 440–453。doi:10.1046/j. 1365-246X.2002.01659.x。[21] B. B. Casper, H. J. Schenk, R. B. Jackson，界定植物地下影响区，Ecology 84 (9) (2003) 2313–2321。doi:10.1890/02-0287。[22] A. Schlueter, F. Thesseling，基于建筑信息模型的设计早期阶段能量/火用性能评估，Automation in Construction 18 (2) (2009) 153–163。doi:10.1016/j.autcon.2008.07.003。

[23] D. Sinclair、A. Tait、L. Carmichael，《RIBA工作计划概览》（2020）。[24] J. Mason、M. Manning，《结构设计：工程师的角色》，结构工程师学会，伦敦，2011年。[25] M. P. Saka、Z. W. Geem，《钢框架结构设计优化中的数学与元启发式应用：全面综述》，Mathematical Problems in Engineering 2013（2013）1–33。doi:10.1155/2013/271031。[26] CEN，BS EN 1993-1-1：2005+A1:2014《欧洲规范3：钢结构设计。建筑物通用规则与规则》，BSI英国标准，2015年。doi:10.3403/03270565。[27] CEN，BS EN 1990：2002+A1:2005《欧洲规范：结构设计基础》，BSI英国标准，2010年。doi:10.3403/02612036。[28] A. N. Shiryayev，《平稳随机序列的插值与外推》，载于：A. N. Shiryayev（编），《A. N. Kolmogorov文选》，Springer Netherlands，1992年，第272–280页。doi:10.1007/978-94-011-2260-3_28。[29] L. Zadeh，《模糊集》，Information and Control 8（3）（1965）338–353。doi:10.1016/ S0019-9958(65)90241-X。[30] L. Zadeh，《作为可能性理论基础的模糊集》，Fuzzy Sets and Systems 100（1999）9–34。doi:10.1016/S0165-0114(99)80004-9。[31] H. U. K¨oyl¨uo˘glu、A. S¸. C¸akmak、S. R. K. Nielsen，《用于处理模式荷载与结构不确定性的区间代数》，Journal of Engineering Mechanics 121（11）（1995）1149–1157。doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1995)121:11(1149)。[32] R. L. Mullen、R. L. Muhanna，《所有可能加载组合下的结构响应界限》，Journal of Structural Engineering 125（1）（1999）98–106。doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:1(98)。[33] L. Deng、H. Wu、W. He、T. Ling、G. Liu，《考虑车辆轮载作用下基于实测桥梁响应的真实影响线与影响面识别》，Journal of Bridge Engineering 28（2）（2023）04022145。doi:10.1061/JBENF2.BEENG-5604。[34] X. Zheng、D. Yang、T. Yi、H. Li，《考虑车辆荷载空间效应的桥梁影响面识别方法》，Structural Control and Health Monitoring 28（8）（2021）。doi:10.1002/stc.2769。[35] E. Orakdogen、K. Girgin，《通过有限元法直接确定影响线与影响面》，Structural Engineering and Mechanics 20（3）（2005）279–292。doi:10.12989/ SEM.2005.20.3.279。[36] A. Memari、H. West，《利用影响面计算桥梁设计内力》，Computers & Structures 38（5-6）（1991）547–556。doi:10.1016/0045-7949(91) 90006-8。

[37] W. M. Bulleit, 《什么使工程教育成为工程教育？》，载于：《2012年结构大会》，美国土木工程师学会，美国伊利诺伊州芝加哥，2012年，第1143–1151页。doi:10.1061/9780784412367.102。[38] W. Bulleit、J. Schmidt、I. Alvi、E. Nelson、T. Rodriguez-Nikl, 《工程哲学：其内涵及重要性》，Journal of Professional Iss ues in Engineering Education and Practice 141（3）（2015）02514003。doi:10.1061/(ASCE)EI.1943-5541. 0000205。[39] A. Gallet、S. Rigby、T. N. Tallman、X. Kong、I. Hajirasouliha、A. Liew、D. Liu、L. Chen、A. Hauptmann、D. Smyl, 《从逆问题视角看结构工程》，《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》478（2257）（2022）20210526。doi:10.1098/rspa.2021.0526。[40] B. V. Koen, 《方法论讨论：实施工程师的问题求解方法》，牛津大学出版社，纽约，2003年。[41] A. Kaveh、M. Z. Kabir、M. Bohlool, 《采用变截面构件的多跨坡屋架优化设计》，《Periodica Polytechnica土木工程》（2018年10月）。doi:10.3311/PPci.13107。[42] D. Veenendaal、J. Coenders、J. Vambersky、M. West, 《织物成形梁与桁架的设计和优化：进化算法与找形》，Structural Concrete 12（4）（2011）241–254。doi:10.1002/suco.201100020。[43] CEN，BS EN 1992-1-1《欧洲规范2：混凝土结构设计——第1-1部分：通用规则与建筑物规则》，英国标准学会，2015年。doi:10.3403/ 03178016U。[44] 技术委员会，《2013年混凝土结构使用规范》，屋宇署，香港，2020年。[45] D. Y. B. Ho, 《不规则楼板系统的荷载模式分析》，《土木工程师学会会刊——结构与建筑》168（6）（2015）433–440。doi:10.1680/stbu.13.00116。

A 算法 1- 弯曲荷载布置

```
# 创建交替荷载布置 - altLoadArr 2 if m %  2 == 0: altLoadArr  = [[1 ,0]*(
m /
adj
loa
 =
en
2)
sta
ex_
neg
els
neg
```

算法 1：用于连续梁系统中包含 m 个构件的弯曲荷载布置算法，采用 Python 实现，同时支持交替布置和相邻布置，生成集合$\mathbf{J}_{\mathbf{flex}}$，时间复杂度为 O(m)。

B 算法 2- 剪切荷载布置

```
# 用于识别剪切荷载布置的函数
定义 剪切荷载布置(荷载布置:列表 , 剪切梁:列表 , 起始位置: 整数):
    # 沿两个方向迭代
    for 方向 in [-1, 1]:
        # 建立 while 循环变量
        完成 = False; 已完成 = False
        更新 = False; i = 开始

        # 遍历梁系统
        当 完成 == 假:
            i =i + 方向 # 移动到下一根梁

            # 情况 1: 到达梁系统的末端
            如果 i < 0 或 i >=len(loadArr):
                已完成 =True

            # 情况 2: 尚未遇到剪切梁 yet
            elif 正在更新 ==False and 正在结束 == False:
                # 检查当前梁是否为剪切梁
                如果 i 属于 剪切梁:
                    正在更新 =True; 更新激活因子 =荷载排列 [i]

            # 情况 3: 遇到了剪切梁
            否则如果 正在更新 == True 且 正在完成 == False:
                # 更新当前梁的激活因子
                荷载排列 [i] = 更新激活因子
                # 检查当前梁是否为剪切梁
                如果 i 不在 shearBeams 中:
                    正在更新 = False; 正在完成 = True

            # 情况 4: 交替使用剩余的激活因子
            否则如果 正在完成 == True:
                荷载布置 [i] =( 荷载布置 [i- 方向 ] + 1) % 2

                # 如果遇到另一根剪切梁
                如果 i 在 剪切梁:
                    更新活动 = 荷载布置 [i]
                    正在更新 = True ; 正在结束 = False

    返回 荷载布置
```

算法 2：Python 中的剪切荷载布置算法，根据给定的弯曲荷载布置 $loadArr$，以及易受剪切影响的构件 $shearBeams$ 的索引（从梁索引 $start$ 开始），为包含 m 个构件的系统生成属于集合 $\mathbf{J_{shear}}$ 的荷载布置。单次遍历的时间复杂度为 O(m)，但生成整个集合 $\mathbf{J_{shear}}$ 的时间复杂度为 $O(m^2\,2^n)$。