通过 TCD映射研究离散微分几何与簇代数

提交人：理学硕士 Niklas Christoph Affolter ORCID：0000-0003-3936-2060

提交至柏林工业大学数学与自然科学学院 II，以申请

自然科学博士学位 Dr. rer. nat.

经批准的博士论文

博士学位委员会：

主席：Stefan Felsner 教授（柏林工业大学）评审人：Boris Springborn 教授（柏林工业大学）评审人：Yuri B. Suris 教授（柏林工业大学）评审人：Christian Müller 教授（维也纳工业大学）评审人：Richard Kenyon 教授（耶鲁大学）

科学答辩日期：2023年3月27日

柏林 2023年

arXiv:2305.02212v1 [math.CO] 3 May 2023

目录

第1章：引言 1.1. 概述 1.2. TCD映射 1.3. 总结 1.4. 结果列表 1.5. TCD映射示例列表 1.6. 开放问题与未来方向 1.7. 出版物 1.8. 致谢 1 1 1 3 5

第2章。TCD映射与离散可积性 2.1. 三重交叉图（TCD） 2.2. 三角剖分 2.3. 四边形图 2.4. 向量关系构型 2.5. TCD映射 2.6. TCD映射中的局部变换与 dSKP方程 2.7. TCD映射的存在性与最大维数 2.8. A_n中的多维相容性 11 11 15 21 21 23 23 25 26 30 32 34 38 40

第3章. TCD映射与离散微分几何 3.1. $\mathbb{Z}^n$中的四边形图和多维一致性3.2. $\mathbb{Z}^N$记法 3.3. Q网 3.4. 达布映射 3.5. 直线复形 3.6. 直线复合体 3.7. $\mathbb{Z}^2$ 上的Q网和拉普拉斯-达布动力学 45 45 47 48 50 51 53 55

第4章. TCD映射的几何与组合结构 4.1. 非一般维度中的传播 4.2. 截面 4.3. 扫描与无环定向 4.4. 扫掠化归为四边形图与伪直线排列 4.5. 通过扫描进行扩张与提升 4.6. Desargues映射 4.7. 射影对偶与TCD映射 57 57 61 66 75 78 82 83

第5章：TCD映射的簇结构 5.1. 具有二分对偶的平面图的簇代数 5.2. 特定类别的箭图 5.3. TCD映射的射影簇结构 5.4. 理想双曲三角剖分 5.5. 五边形映射 5.6. 由射影簇变量得到的TCD映射 5.7. TCD映射的仿射簇结构 95 95 97 100 103 105 107 112

第6章：簇结构与射影运算 117 6.1. TCD映射的簇变量与投影 117 6.2. TCD映射的簇变量与截面 117 6.3. T图 120 6.4. TCD映射的簇变量与射影对偶 124 6.5. TCD映射的完美对偶 128 6.6. 焦网与拉普拉斯变换 129

第7章。Z不变性与 TCD 映射 135 7.1. 统计物理中的Z不变性 135 7.2. 二聚体、离散 KP 与簇代数 137 7.3. 生成树、离散BKP与立方八面体箭图 140 7.4. 伊辛模型、dCKP与六面体箭图 143 7.5. 近乎完美匹配与 TCD 映射 146 7.6. 电阻和伊辛子簇中 TCD 映射的几何 149 7.7. Kœnigs 网、BKP与电阻子簇 151 7.8. Carnot映射、CKP与伊辛子簇 153 7.9. CQ网 155 7.10. Doliwa 复合体、BKP与电阻子簇 156 7.11. 对角交网 159 7.12. Schief映射 160 7.13. 互易图形 161 第8章：通过双线性形式约化TCD映射 163 8.1. 内接于圆锥曲线的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的Q网 164 8.2. 内接于二次曲面的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中的Q网 169 8.3. S-图 170 8.4. $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 171中的线性直线复形8.5. 与二次曲面相切的达布映射 173 8.6. 四有理杨–巴克斯特达布映射 174 8.7. A-网、 $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 176中的各向同性直线复形8.8. Cox格、 $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 179中的各向同性达布映射8.9. 反基本线圆复形 181 8.10. 各向同性映射序列 182 第9章。圆形 Q-网、泊松结构与量子化 185 9.1. 泊松代数、量子化 185 9.2. 圆形 Q-网 187 第10章。来自统计物理的嵌入作为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 191中的 TCD 映射10.1. 圆模式与 t-嵌入 191 10.2. 调和嵌入、h-嵌入与正交对角映射 201 10.3. S-嵌入 206 第11章。簇 τ变量 211 11.1. 强一般 TCD 映射的簇 τ变量 211 11.2. 射影旗标构型 215

参考文献 219

第1章

引言

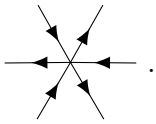
1.1. 概述

本论文的主要目标是在离散微分几何（DDG）的对象中寻找并研究簇代数的出现情况。在研究过程中，我们发现簇代数可以通过多种方式出现在多种离散微分几何对象中。为了系统地理解这些不同的簇代数，引入三重交叉图映射（TCD映射）这一通用框架很有帮助。借助TCD映射，可以系统地定义并关联簇代数的多种出现形式。事实证明，这一框架具有完备性：它涵盖了大量实例，也涵盖了我们所知的所有以几何术语定义的离散三维可积系统。特别是，所有已知的涉及簇代数的离散微分几何、离散可积系统实例，以及与精确可解模型相关的嵌入，都包含在内。

因此，我们在第1.2节首先对TCD映射作简短的非正式介绍。随后，我们在第1.3节概述我们的方法和研究发现。在此基础上，我们在第1.4节列出完整的研究结果。接下来，我们在第1.5节列出纳入我们框架的示例，既展示该框架的适用性，也为对特定示例感兴趣的读者提供指导。最后，我们在第1.6节以开放问题和未来研究方向结束引言。

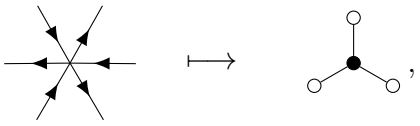
1.2. TCD映射

这是对TCD映射相关最重要对象的简短、非正式说明。第2.5节将对TCD映射作正式介绍。一个三重交叉图（*TCD*） $\mathcal{T}$是圆盘中的一组定向曲线，其中每条曲线要么始于边界并终于边界，要么是一个闭环，并且曲线的每个交点在局部都呈现如下形式：



TCD 的一个示例见图1.1。因此，唯一的交点是三重交点，并且 $\mathcal{T}$ 的每个面都一致地定向为顺时针或逆时针。三重交叉图由 Dylan Thurston [**Thu17**]，引入，我们将在第2.1节给出正式定义并作介绍。

我们还为每个 TCD $\mathcal{T}$ 关联一个平面二分图 $\mathcal{G}$。$\mathcal{G}$ 的白色顶点是 $\mathcal{T}$ 中逆时针取向的面，黑色顶点是 $\mathcal{T}$ 的交点。如果对应的逆时针面和交点在 $\mathcal{T}$ 中关联，则存在一条边（w, b）$\in E$（$\mathcal{G}$）。因此，在每个交点处，局部构型如下：



左侧是 $\mathcal{T}$中的交点，右侧是 $\mathcal{G}$中对应的局部片段。

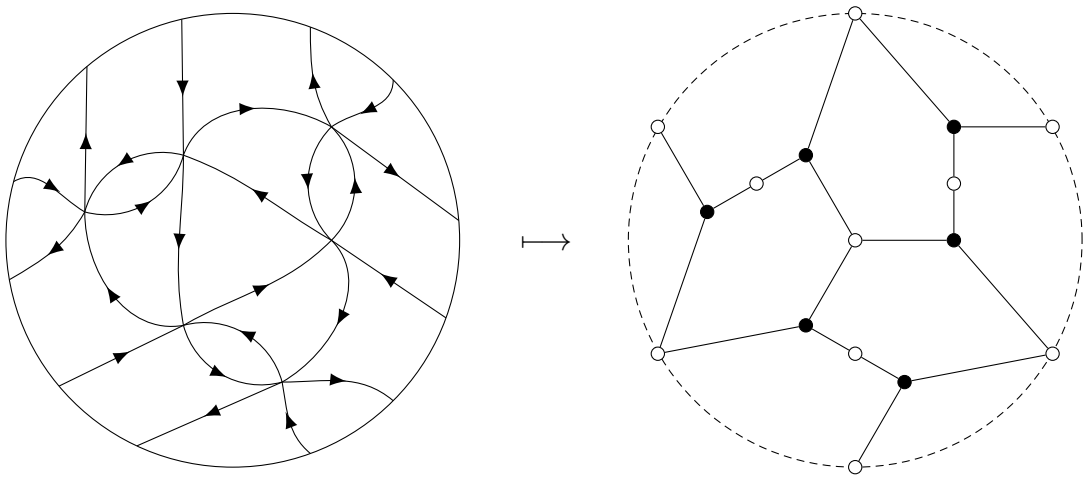
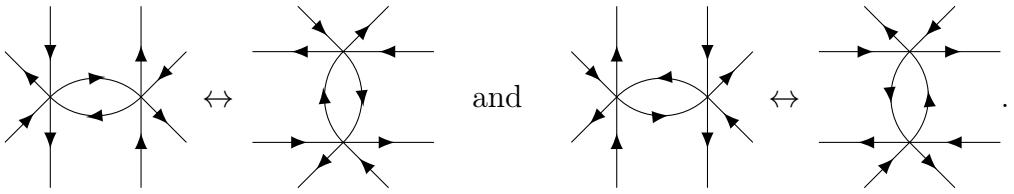


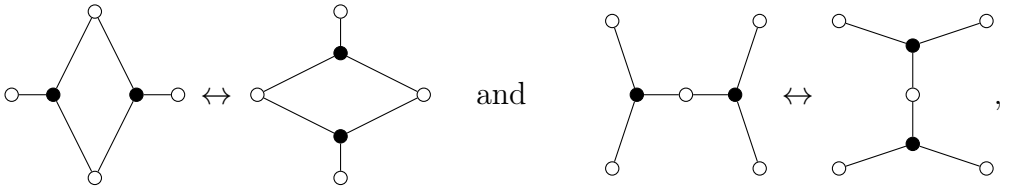
图1.1。一个 TCD $\mathcal{T}$及其对应的二分图 $\mathcal{G}$示例。

一个 *TCD*映射是一个映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，定义在TCD $\mathcal{T}$的逆时针面 $\mathcal{T}_{\circlearrowleft}$ 上，或等价地定义在 $\mathcal{G}$的白色顶点上；该映射满足：对于 $\mathcal{G}$ 的每个黑色顶点，三个关联白色顶点的像都包含于复射影空间$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$中的一条射影直线上。我们还作出一般性假设：与同一个黑色顶点相邻的任意两个白色顶点都不重合。

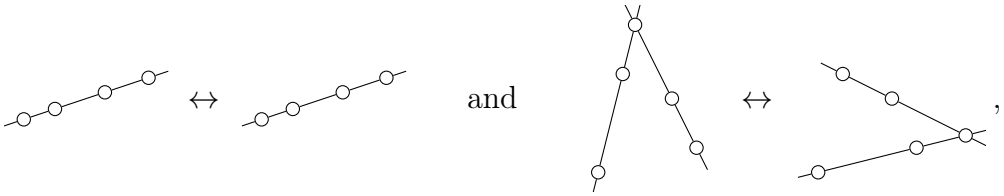
通过考察 TCD 的组合结构的局部变化，我们将动力学 引入 TCD映射。TCD 的局部变换称为*2-2*移动，分为以下两种类型



注意，左侧的 2-2 移动以顺时针面为中心，右侧的 2-2 移动以逆时针面为中心。就二分图 $\mathcal{G}$ 而言，这两种变换为



分别称为蜘蛛变换 和重新分裂 。TCD映射的几何数据变化如下



分别在蜘蛛变换和重新分裂下进行。因此，我们观察到，TCD映射的像在蜘蛛变换下不会发生变化，因为蜘蛛变换不会改变 $\mathcal{G}$ 的白顶点集及关联要求。相反，在执行重新分裂时，TCD映射的几何数据确实会发生变化，因为我们必须改变中心处白色顶点的像。在一般位置的情况下，新点由关联要求定义为重新分裂后与两个相邻黑色顶点相对应的两条直线的交点。如果射影空间的维数为一，因此无法使用关联几何，那么仍然可以通过 *dSKP* 方程 对重新分裂进行良好定义，参见第 2.6 节。

TCD框架的其他重要构件包括向量关系构型，参见第2.4节，我们在其中介绍了TCD映射到 $\mathbb{C}^{n+1}$的齐次提升。齐次提升使我们能够引入线性关系，从而确定 $\mathcal{G}$上的边权重 。这些边权重可用于定义射影簇变量，参见第 5.3 节。在特定的规范下，边权重定义了仿射簇变量，参见第5.7节。此外，边权重还定义了近乎完美匹配的复数值配分函数，参见第7.24节，这将TCD映射与统计力学联系起来。另一个重要工具是标记诱导定向（*li*-定向），参见第 4.3 节，它使我们能够通过边界数据和射影簇变量构造TCD映射。此外，在一般位置的设置下，li-定向使我们能够证明，TCD映射在射影变换意义下由其射影簇变量参数化，参见第 5.6 节。

1.3. 总结

本研究项目最初的目标是在离散微分几何（DDG）示例中寻找簇代数。更具体地说，我们希望找到一种方法，为 DDG 映射赋予箭图和系数类型的簇变量，使 DDG 映射的动力学对应于箭图和簇变量的突变。起初，我们针对不同示例（米克尔动力学、Q网、达布映射）找到了若干种新的、但彼此不同的簇结构。它们的区别在于，有些簇结构的变量在射影变换下保持不变，而另一些簇结构的变量在仿射变换下保持不变。随后我们意识到，这些示例可以通过一种统一的描述来刻画，并且每个示例都能同时产生这两类簇结构。正如我们在第1.2节中概述、并将在第2.5节中正式介绍的那样，这种统一描述基于*TCD*映射框架。射影簇结构在第 5.3 节中定义，仿射簇结构则在第5.7节中定义。

随后，我们意识到，不仅来自离散微分几何（DDG）的例子，而且来自离散可积系统和统计力学的例子，也都适用于 TCD 映射框架。事实上，先前已知的 T-图 [**KS04**], 五边形映射 [**Gli11**], dSKP 格 [**ABS12**] 以及通过剪切坐标描述的理想双曲三角剖分 [**Pen12**] 的簇代数结构，都可以作为特例从中重新得到。我们在论文的研究过程中逐步引入这些例子，同时发展 TCD 映射理论。我们在第1.5节中列出了所有涉及的例子。我们认为，这份清单几乎涵盖了所有情况，因为据我们目前所知，不存在任何未被涵盖的几何离散可积三维系统。

我们还发现，除了簇代数之外，TCD 映射也能统一描述其他一些有趣的性质。例如，可以通过翻转图和笛沙格定理证明 TCD 映射具有多维一致性，见第 2.8 节。因此，我们为所有示例的多维一致性给出了统一证明。我们还可以证明，TCD 映射的动力学对应于 A_N 晶格中 dSKP 方程的传播，见第 2.6 节。此外，我们证明，射影簇变量与边界数据实际上可以在射影变换意义下唯一确定一个 TCD 映射。这是许多离散微分几何示例中的典型结果，而我们成功地将其推广到了整个 TCD 映射框架。事实上，我们可以定义 TCD 映射的最大维数；在最大维数下，无需任何边界数据，仅凭射影簇变量就能在射影变换意义下唯一确定一个 TCD 映射，见第 5.6 节。

当然，一旦我们能够在 TCD 框架中涵盖多个实例，自然就会产生一个问题：它们在该框架内是如何 相互关联的。事实证明，一个重要的要素是理解如何通过将 TCD 映射所表示的直线与某个超平面相交，从而取 TCD 映射 T 的一个截面 $\sigma_H(T)$，使所得结果仍然是一个 TCD 映射 H，参见第 4.2 节。例如，我们可以由此证明，直线复形的截面是一个 Q- 网，Q-网的截面是一个达布映射，而达布映射的截面是一个直线复合体。但是除此之外。

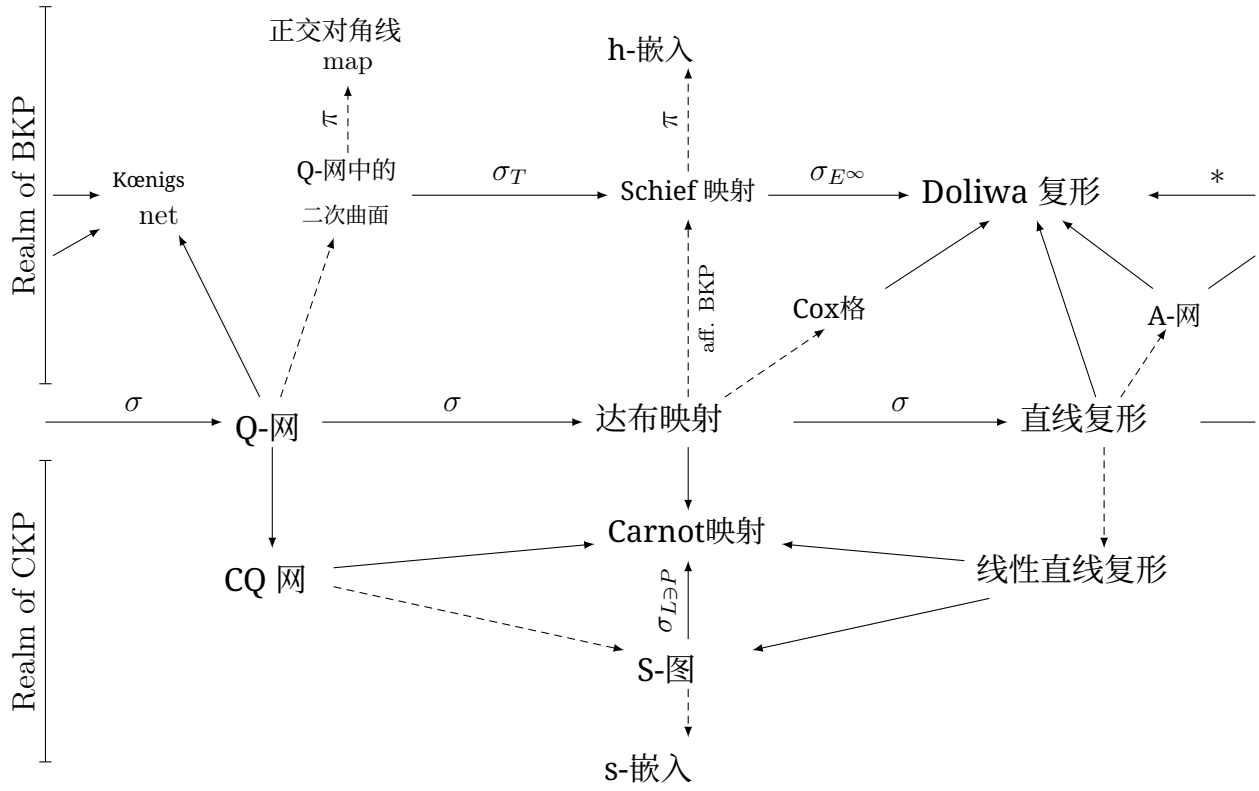


图 1.2. 组合结构中 TCD映射之间的关系。A 到 B 的虚线箭头表示 B 是 A 的特例。相对于子空间的截面记为 σ_E，投影记为 π。

在关联示例的几何时，我们还发现截面能将不同的簇代数联系起来。具体而言，我们可以证明，具有无穷远超平面 H 的 section$\sigma_H(T)$ 的射影簇结构就是 TCD映射 T 的仿射簇结构，见第 6.2 节。此外，取截面的组合操作能够关联具有不同端点匹配的 TCD，但不会切割或粘合弦本身。我们认为，即使没有几何和代数上的诠释，这一操作本身也具有组合学上的意义。另一种有趣的射影操作是对 TCD映射取射影对偶，见第 4.7 节。这里我们不详述，但在 TCD 层面上，我们定义了一种保留弦的操作，它也与所有弦定向都反转的 TCD 相关联。此外，我们发现，在对所有簇变量取倒数后，原始与对偶 TCD映射的簇结构相同，见第 4.7 节。

虽然我们主要关注 TCD映射的射影簇变量 X 和仿射簇变量 Y，它们都属于系数类型，但我们也发现了 TCD映射的另一类簇变量，称为 τ-变量，见第 11.1 节。此外，我们将由二聚体或几乎完美匹配配分函数Z 以复数权重组合而成的全局不变量归于 TCD映射，见第 7.5 节。二聚体模型的面权重有两个众所周知的子簇：电阻子簇和伊辛子簇，它们分别使二聚体模型约化为生成树模型和伊辛模型。因此，将二聚体模型与 TCD映射关联起来，引出了这两个子簇如何在 TCD映射中出现的问题。我们能够证明，二聚体模型约化为生成树模型或伊辛模型的情形，对应于已知的 TCD映射约化。事实上，我们证明，据我们所知，所有涉及 BKP 方程（方程（ 7.41 ））的已知例子中，作为 TCD 映射，其某些簇变量都属于电阻子簇。类似地，所有涉及 CKP方程（方程（7.56））的例子中，都有一些簇变量属于伊辛子簇。通过子簇这一视角有一个显著优势。此前，我们只能判断一个映射是否以某种 方式

涉及 BKP（分别为 CKP）方程；现在，我们可以区分 一个 TCD映射相对于某个子空间是射影 BKP（CKP）还是仿射 BKP（CKP）。我们还可以定义 所有射影 BKP（CKP）或仿射 BKP（CKP）TCD映射所构成的集合。例如，我们可以证明，Kœnigs 网 [**BS07a, Dol07**] 恰好是那些射影 BKP 的 Q-网，见第7.7节。另一方面，Schief 映射 [**Sch03**] 只是那些仿射 BKP 的达布映射的一个子集，见第7.12节。文献中涉及 BKP 或 CKP 方程的例子数量众多，堪称一个动物园，但它们之间的联系鲜少得到探讨。通过以规范方式识别 BKP 和 CKP 方程，加上对截面和射影对偶的理解有所加深，我们得以理清这个动物园中的脉络，如图 1.2 所示，并在第7章和第8章中详细阐述。

我们在第1.4节列出了全部结果，但这里先提及几个可能特别值得关注的结果。首先，在第 10.1 节中，我们展示了如何为圆模式上的米克尔动力学关联两种不同的正簇结构。仿射簇结构早已被发现 [**仿射簇21**], ，随后也由 Kenyon、Lam、Ramassamy 和 Russkikh 独立发现 [**KLRR21**], ，而射影簇结构则是新的。其次，我们将为圆形 Q-网引入的 BMS 变量 [**BMS08**] ，与将圆形 Q-网视为 TCD映射时的仿射簇结构联系起来；这一联系也将簇泊松代数与量子化联系起来，见第 9.2 节。第三，我们还可以通过 TCD映射，以一种非常直接的几何方式解释 Fock 和 Goncharov 的高阶Teichmüller理论中出现的射影旗标构型 [**FG06**] ，并将它们的簇变量还原为（对偶）射影簇变量的特例。

最后，我们来谈谈两个“软结果”。首先，我们认为 TCD 映射框架的一大优势是，它将不同数学社群中的结果和问题联系起来。我们特别想到 DDG 社群，以及与之联系已十分紧密的离散可积系统社群；还想到围绕五边形映射的动力系统社群，它与全正 Grassmannian 社群交织在一起；此外还有精确可解模型社群。这些关系未必令人意外，但我们认为，我们已经在使它们更加具体和普适方面取得了一些进展。我们也认为，或者说希望，TCD 映射框架能让不同社群之间在未来实现更多成果的交流。

我们想提到的第二个软结果是，据我们的经验，TCD映射所具有的丰富结构使许多结果很容易猜出。尤其是在寻找 BKP 和 CKP 结构时，第一个合理的猜测往往出人意料地就是正确的。这是因为借助 TCD 映射框架，我们对组合结构和几何不变性有了清晰的认识。例如，基于 Bobenko 和 Schief 关于线性直线复形的工作 [**BS15**], ，我们知道线性直线复形与 CKP方程有关。但考察 $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, 中直线复形的组合结构后，CKP方程唯一可能以典范方式出现的情形，就是通过与一条直线相交所得的截面。另一方面，线性直线复形中的特定对象是零极性，而零极性中唯一特定的直线是各向同性直线。因此，唯一合理的猜测是，线性直线复形与一条各向同性直线相交所得的截面具有 CKP 结构。事实也确实如此，见第8.4节。类似的推理也可应用于许多其他例子。

1.4. 主要结果列表

R1) TCD映射：三重交叉图的概念由 *Dylan Thurston*提出**17**]。我们在第2.1节简要回顾相关定义和已知结果。随后，我们在第2.5节定义本文的基本对象，即所谓的*TCD*映射。我们也已在第1.2节作了非正式介绍。我们从组合结构的角度讨论两种基本局部变换：重新分裂和蜘蛛变换。

和几何。作为第一个引理，我们可以将重新分裂与*dSKP* 方程联系起来（参见[**KS02**]）。

R²）多维一致性：首先，我们证明 TCD映射通过翻转自然地定义了从 A_n 格到射影空间的映射。然后，我们将离散可积系统 [**ABS12**]中已知的多维一致性概念，重新表述为沿 TCD 的翻转图中的圈的相容性。近期的一项结果 [**BW20**] 表明，有三类圈可以生成翻转图中的所有圈。这使我们能够证明 TCD映射一般具有多维一致性（第 2.8 节）。关于几何的非平凡圈上的相容性，利用笛沙格定理予以证明。我们所考虑的大多数例子已经具有多维一致性（参见 [**BS08**] 中的指南），但每个例子都使用了特定的论证。因此，TCD 映射框架的一项额外优势是，我们现在有了一个通用证明。此外，我们认为，对于 t-嵌入和 s-嵌入，多维一致性是一个新结果。

R3）簇结构：为 Q网及离散微分几何（DDG）的其他对象寻找簇结构，是本论文的主要动机之一。事实上，我们为每个 TCD映射找到了两种相关的簇结构。射影簇结构（第 5.3 节）在射影变换下保持不变，仿射簇结构（第 5.7 节）在仿射变换下保持不变。对于所考虑的几乎所有例子，这两种结构都是新的。例外是：射影簇结构在五边形映射（第 5.5 节）这一特例中，归结为 Glick 的结果 [**Gli11**], ；而在 dSKP 格这一特例中，则归结为 Adler、Bobenko 和 Suris [**ABS12**]发现的 Y 系统。此外，仿射簇结构对于 t-嵌入（第 10.1 节）而言是新的，但也有独立研究发现了这一结构 [**KLRR21, Aff21**]。对于 T图（第 6.3 节），仿射簇结构也归结为 Kenyon和Sheffield [**KS04**] 的结果；对于 h- 和 s-嵌入（第 10.2、10.3 节），则归结为 Kenyon、Lam、Ramassamy 和 Russkikh [**KLRR21**]近期的结果。

R4) 投影：我们证明，TCD映射与投影相容，也就是说，在一般位置的中心投影下，动力学仍然定义良好。我们说明如何利用这一结果，在所有维数（包括一维）中定义Q网、达布映射和直线复形的立方体翻转（第4.1.2节）。除达布映射 [**Sch03**], 外，这一结果都是新的；而在三维情形下，它重现了Bobenko和Schief [**BS15**]所研究的基本直线复形这一思想。在所有这些情形中，我们通过某些TCD弦解释多重比方程的出现。事实上，这些方程的组合结构源于之字形路径，而其代数则源于一个与梅涅劳斯定理相关的引理。我们还得到以下新结果：h-嵌入是达布映射的投影（第10.2节），s-嵌入 [**Che18**] 是Q网的投影（第10.3节），而米克尔动力学 [**Ram18**]是拉普拉斯-达布动力学 [**Dol97**]的投影（第10.1节）。

R5) 截面：我们展示了如何相对于一般超平面 H （第4.2节）构造 TCD 映射的一个截面 $\sigma_H(T)$。我们先在图 $\mathcal{G}$的层面上进行这一构造，以获得所需的几何性质。令人惊讶的是，在三重交叉图的层面上，这一操作是局部的，并且保持弦不变。我们推测这一操作本身具有组合意义，因为它提供了一种比较具有不同端点匹配的 TCD 的方法。我们还证明，这一操作保持极小性。在代数层面上，我们证明，事实上，T的仿射簇结构与 $\sigma_H(T)$的射影簇结构相一致（6.2）。由于我们还可以迭代取截面，这表明实际上可以将一整列簇结构关联到一个 TCD 映射。关于与 $\mathbb{Z}^3$相关联的 TCD 映射的例子，已知 Q-网的截面是一个达布映射 [**BS08**]。我们将此结果推广为

观察并证明，达布映射的截面是直线复形，而直线复形的截面是 Q-网。在阶梯曲面的箭图层面上，这导出了如下循环序列：六面体 $\mapsto$ 立方八面体 $\mapsto$ 立方八面体$\mapsto$ 六面体。

R6) 扫掠： 回顾一下，我们认为 TCD 与 A_n 格 密切相关。$\mathbb{Z}^n$ 格 的 TCD 类比对象是 伪直线排列 [Fel{v10>。在伪直线排列中有 扫掠 的概念。在统计力学中，这一技术被非正式地称为“拉过弦” [Bax78]。在离散可积系统中，这对应于在附加维度中传播一个新解，有时也称为离散巴克伦变换。我们研究可以用单条弦进行扫掠的 TCD（第 4.3 节），并将这些 TCD 称为可扫掠*TCD*。在这些情况下，我们证明，根据射影维数的不同，扫掠会产生 TCD 映射的截面或扩张 （第 4.5 节）。作为工具，我们引入标记诱导定向，这是一类非常实用的无环定向，与研究全正格拉斯曼流形时出现的完美定向 [Pos06], 非常相似，同时也是二聚体理论中所研究的极值匹配 [Bro12]的类比对象。此外，我们证明，定义在极小TCD上的TCD映射总是可以通过在边界处逐步补充标记点来实现，使得该 TCD映射定义在一个可扫掠TCD上。在组合层面，每增加一个标记点，就对应于圆形 *Bruhat* 序[Pos06, Wil16] 中的一步，以及 BCFW桥分解 [AHBC+14]。

R7) 射影对偶： 我们在第 4.7 节中引入 TCD映射T 的射影对偶 $T^\star$ 的定义。为了使射影对偶的定义具有唯一性，我们需要考察*TCD*映射旗。本质上，TCD映射旗是一个由截面相关联的TCD映射序列 $(T_k)_{1\le k\le n}$ ，即 $T_{k-1}=\sigma(T_k)$。于是，每个 TCD映射旗都对应着唯一的 TCD映射射影对偶旗。第一个重要的组成部分是，我们考虑在 TCD $\mathcal{T}$或相应的平面二分图 $\mathcal{G}$上进行直线对偶 $\eta(\mathcal{T})$这一操作。截面 $\sigma(\mathcal{T})$通过公共平面来刻画T 的直线之间的关系，而直线对偶 $\eta(\mathcal{T})$则通过公共交点来刻画 T 的直线之间的关系。我们还引入了操作 $\iota(\mathcal{T})$，它仅仅反转 $\mathcal{T}$的所有弦的定向。注意， $\sigma(\mathcal{T})$ 和 $\eta(\mathcal{T})$ 涉及选择，而 $\iota(\mathcal{T})$ 的定义则不涉及任何选择。具体细节包含在引理 4.61 中，非正式地说，重要之处在于存在一些选择，使得这三个方程

$$\iota\circ\sigma\circ\iota\circ\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{T},\quad \sigma\circ\sigma(\mathcal{T})=\iota\circ\eta(\mathcal{T}),\quad \iota\circ\sigma(\mathcal{T})=\sigma\circ\eta(\mathcal{T}) \tag{1.1}$$

成立。事实上，我们将说明这些方程中的哪些选择能够唯一确定其余选择。这使我们能够证明，存在唯一的 TCD，使得原始结构的 TCDs$\mathcal{T}_k$ 与对偶结构的 TCDs $\mathcal{T}_k^\star$满足

$$\sigma(\mathcal{T}_k^\star)=\mathcal{T}_{k-1}^\star,\quad \iota(\mathcal{T}_k^\star)=\mathcal{T}_{n-k},\quad \eta(\mathcal{T}_k^\star)=\mathcal{T}_{n-k+2}, \tag{1.2}$$

对于所有合理的 k。在几何方面，我们会追踪某些子空间U_k： 取定义原旗的截面时的 $\mathcal{T}_{\circlearrowleft k}\to\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ，参见定义 4.63。原始与对偶旗的子空间映射满足 $U_k^\star(w^\star)=(U_{n-k+1}(w))^\perp$，对所有合理的 k皆如此。此外，在第 6.4 节中，我们发现不仅可以关联原旗与对偶旗的几何和组合结构，还可以关联它们的簇结构。更明确地说，簇结构满足

$$\mathbf{Aff}_{E_{k-1}}(T_k)=\rho(\mathbf{Aff}_{E^\star_{n-k}}(T^\star_{n-k+1}))\quad\text{and}\quad \mathbf{Pro}(T_k)=\rho(\mathbf{Pro}(T^\star_{n-k-1})) \tag{1.3}$$

对于所有合理的 k，其中 ρ 反转箭图的所有箭头，并将每个簇变量 X_v 映射为 X_v^{-1}。

R8) 焦网与拉普拉斯变换：关于 Q-网的离散焦变换和离散拉普拉斯变换的研究由 Doliwa [Dol97] 开创。我们证明，在 $\mathbb{Z}^2$ （第 3.7 节）和阶梯曲面（第 6.6 节）上的焦变换都对应于 TCD 映射上的 2-2 移动。由于我们对截面的研究，实际上我们平等地考察 Q- 网、达布映射和直线复形。因此，我们提出了焦变换定义的一种新扩张，使其不仅适用于 Q-网和直线复形，也适用于达布映射。这种扩张非常自然地作用于映射的 $\mathbb{Z}^3/(1,1,1)$ 晶格上。在这个晶格上，拉普拉斯变换自然地作用于三个互不相交的 A_2子晶格，每种映射各对应一个。

R9）由不变量确定的唯一性：在离散微分几何中，典型做法是为示例系统关联一些特定情形下的量，然后证明这些量与特定情形下的边界数据结合起来，能够唯一确定系统。在 TCD映射的框架下，我们将这些结果加以推广并强化。我们证明，若 TCD映射达到其最大维数，且定义在可扫掠TCD上，则其射影簇变量能够在射影变换意义下唯一确定该 TCD映射（第 5.6 节）。我们要强调的是，在这种情况下不存在自由边界数据。此外，若射影簇变量严格为正，我们还可以证明其存在性。若 TCD 不可扫掠或未达到最大维数，则给定射影簇变量和边界数据后，我们证明其具有唯一性。事实上，所需的边界数据对应于 li-定向的极小元。请注意，典型的离散微分几何示例是可扫掠的，但未达到最大维数。因此，在这些情形下，可以将额外选择边界数据理解为：从一个最大维数的唯一映射中选择一个投影。

R10）二聚体模型：在第 7.2 节中，我们对二聚体模型作了非常简短的介绍。我们说明，射影簇结构和仿射簇结构如何自然地与分别定义在 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^-$ 上的二聚体模型（其权重一般为非正）相关联。通过引入近乎完美匹配，我们可以为 TCD 映射关联射影不变量，这些不变量在变换下也保持不变（第 7.5 节）。我们并未作全面阐述，但这无疑是一个值得进一步研究的方向。特别是，这些思想与 Postnikov 在其关于全正 Grassmannian 的研究中提出的思想有着明显的相似之处 [Pos06]。

R11）来自统计力学的子簇：我们回顾另外两种统计力学模型——生成树模型 [Kir45] 和伊辛模型 [Len20] ——如何被视为二聚体模型的约化 [Tem74, Dub11] 。这两种约化各自都要求采用一种特定的组合结构子类，该子类与四边形图相关。此外，簇变量位于某些代数子簇中，具体而言是电阻子簇（第 7.3 节）和伊辛子簇（第 7.4 节）。由此引出一个问题：能否找出那些具有相应组合结构、且射影簇变量分别属于电阻子簇和伊辛子簇的 TCD映射? TCD框架使我们得以提出这个问题，并给出了肯定的答案。我们证明，射影变量属于电阻子簇的 TCD映射有两种可能。在 Q-网情形（第7.7节）中，它们恰好是 Kœnigs 网 [BS07a, Dol07]。在线复合体情形（7.10）中，它们恰好是*Doliwa*复合体。后者是我们新定义的一类映射，其定义为满足局部多重比条件的直线复合体。它们通过焦变换与某些 Q-网相关；Doliwa[Dol02], 也将这些 Q-网称为 Kœnigs 网，但它们不能与前文提到的 Kœnigs 网（或定义7.31中的 Kœnigs 网）混淆。我们还证明，文献中定义的各种映射，尤其是对角线交点网 [BS08], 、Schief 映射 [Sch03] 和互易图形 [KS01]，在 TCD映射框架下都与 Doliwa复合体和 Kœnigs 网相关。对于伊辛子簇，由组合结构决定的唯一候选情形是达布映射（第 7.8节）。

我们证明，射影变量属于伊辛子簇的 TCD映射恰好是卡诺映射（文献中也称为 CKP Darboux 映射 [Sch03]）。我们证明，卡诺映射实际上是我们所称*CQ*网的截面；Doliwa [Dol10b]最初将其称为 C-四边形格。此外，我们还证明，卡诺映射也是 S-图 [Che20], 的截面，而 S-图可以由某些 CQ网投影得到。

R12）二次曲面中的 Q-网及相关映射：考虑带有指定对称双线性形式 $b\colon \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ 的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$，其坐标为齐次坐标 $\mathbb{C}^4$。此类双线性形式的零点集（的射影化）称为二次曲面。位于二次曲面 [Dol99] 上的 Q-网是离散微分几何中的重要研究对象，因为通过在射影空间 [BS07b] 中指定一个二次曲面，可以研究射影几何的子几何（例如莫比乌斯几何）。若直线 $\ell \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 上任意两点 p_1、$p_2 \in \ell$ 都满足 $b(\hat{}p_1, \hat{}p_2) = 0$，其中 $\hat{}p_1$、$\hat{}p_2 \in \mathbb{C}^4$ 是 p_1、p_2 的任意齐次提升，则称该直线为各向同性直线。我们可以通过 TCD 映射刻画 Q-网，并进一步将其与二聚体簇结构联系起来；结合我们对截面的研究，便可提出以下新颖结果（第 8.2 节）：任意一个所有点均包含于某个二次曲面中的 Q-网 q，相对于各向同性直线 ℓ 的截面 $\sigma_\ell(q)$，其射影不变量属于电阻子簇。等价地，$\sigma_\ell(q)$ 是一个 Doliwa 复合体。在证明这一结论的过程中，我们还得到了若干其他有趣的结果。例如，我们发现 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的若干映射，相对于某些属于电阻子簇的点，具有仿射变量。这些映射包括内接于圆锥曲线的Q网，也包括所谓的二圆锥网，其中包含圆模式。此外，我们还证明，若 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中的二次曲面实际上是圆锥面，则可将 Schief 映射 [Sch03]（Schief 称之为 BKP 映射）恢复为截面 $\sigma_H(q)$，其中 q 是一个点位于该圆锥面上的 Q-网，而 H 是一个切平面。

R13）线性直线复形及相关映射：除了对称双线性形式，我们还可以考虑反对称双线性形式 $\omega\colon \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$。相对于反对称双线性形式，所有点都是各向同性的，但并非所有直线都是。若一个直线复形中的所有直线相对于某个双线性形式都是各向同性的，则称其为一个线性直线复形 [BS15]。请注意，Bobenko 和 Schief 将线性直线复形引入为普吕克二次曲面的截面；关于其与反对称形式的关系，见 [SK52]。我们给出另一项新结果：线性直线复形 l 关于各向同性直线 ℓ 的截面 $\sigma_\ell(l)$ 的射影不变量属于伊辛子簇。等价地，$\sigma_\ell(l)$ 是 Carnot 映射 [Sch03]。与点位于二次曲面上的 Q 网情形类似，证明过程揭示了文献中其他若干映射之间的新关系。特别地，对于任意超平面 H，截面$\sigma_H(l)$ 是关于 H 的唯一极点 P 的 S-图 [Che20] 。这也引出了与 s-嵌入和 CQ 网的关系。

R14) A-网与 Cox格：A-网由 Sauer [Sau37] 引入，Cox格则由 King 和 Schief [KS14]引入。A-网的普吕克提升 $\hat{}a$ 最早由 Doliwa [Dol01], 研究，他发现 A-网的普吕克提升是一个各向同性直线复形（第 8.7 节）。我们将同样的思路首次用于 Cox格，并证明 Cox格的普吕克提升 $\hat{}c$ 实际上是一个各向同性 Darboux 映射（第 8.8 节）。我们还将关于 BKP 结构典型呈现形式的见解应用于这两种普吕克提升。对于 A-网，我们发现，含有各向同性平面 H 的截面 $\sigma_H(\hat{}a)$是 Doliwa 复合体，或者等价地说，是射影 BKP 直线复形。接着我们证明，$\sigma_H(\hat{}a)$实际上是 a到一个平面的投影 $\pi(a)$的射影对偶。根据我们关于 TCD映射的射影对偶的簇变量所得结果，可以看出，$\pi(a)$实际上是一个 Kœnigs 网。这重现了 DDG 书 [BS08练习 2.29], 中的一项结果；其优势在于，该结果如今不再是特例，而是一个典型推论。对于 Cox格，我们发现与 $\hat{}c$ 的截面相关联的并非一种，而是两种 BKP

结构。我们发现的两种 BKP 结构中，是否有一种与 King 和 Schief 找到的 BKP 结构相同，目前尚不清楚，因此我们将此留作一个开放问题。我们还运用对一般焦变换的理解，证明 Cox格的普吕克提升的焦变换是一个 A-网的普吕克提升。

R15) 四有理 Yang-Baxter 映射：四有理 Yang-Baxter 映射 [**ABS03b**]是与圆锥曲线铅笔的解释一同引入的。我们观察到，四有理 Yang-Baxter 映射是达布映射的一种约化形式（第 8.6 节）。我们应用 TCD 映射和截面的技术，证明四有理 Yang-Baxter 映射的某些截面是 Doliwa 复形，因此具有 BKP 方程的性质。我们还证明，四有理 Yang-Baxter 映射本身自然地作为我们称之为交替生成元 *Q*-网的截面出现。这些 Q-网内接于一条二次曲面交线，并且沿着四边形条带，Q-网的边线是二次曲面铅笔中某个固定二次曲面的母线，而该二次曲面铅笔的交线正是这条二次曲面交线。

R16）圆形Q网和 BMS 变量：圆形Q网 [**Bob99, CDS97**] 是满足每个四边形都内接于一个圆的 Q网。Bazhanov、Mangazeev 和 Sergeev[**BMS08**] 为圆形Q网找到了变量（即 *BMS* 变量），这些变量具有超局域泊松括号和量子化性质。我们在第 9.2 节证明，圆形Q网的仿射簇变量可以因式分解为 BMS 变量。我们还证明，这种因式分解将 BMS 的泊松括号与仿射簇代数的典范泊松括号联系起来，并且量子化也有类似的结论。有趣的是，非圆形Q网似乎也存在这种因式分解，不过对于一般 Q-网，目前尚不清楚这种因式分解是否在立方体翻转下保持不变。

R17）统计力学中的嵌入： 在第10章中，我们研究圆模式 与统计力学之间的关系，并探讨统计力学中已知嵌入的几何和代数性质，特别是*t*-嵌入、*h*-嵌入 和 *s*-嵌入。首先，我们证明圆模式在米克尔变换 下的中心满足 dSKP 方程。这一结果由作者[**Aff21**] 证明，Kenyon、Lam、Russkikh和Ramassamy [**KLRR21**]也独立地证明了这一结果。事实上，t-嵌入的簇结构与 t-嵌入的仿射簇结构一致。我们还引入映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的映射，并称之为*u*-嵌入。与 t-嵌入不同，它们没有实仿射簇变量，而是具有实射影簇变量。接着，我们展示如何将 u-嵌入与具有 $\mathbb{Z}^2$组合结构的圆模式相关联。由此，我们得到与圆模式相关联的第二种簇结构，它是射影不变的（事实上是莫比乌斯不变的）。然后，我们证明，与一种簇结构相关联的 t-嵌入和 u-嵌入实际上通过扫掠彼此相关。换句话说，它们可以理解为来自 A_4 的一个映射，使得这个组合映射在 A_4上满足 dSKP 方程。随后，我们研究 h-嵌入，它们与 Tutte [**Tut63**] 引入的调和嵌入有关。我们还研究由 Chelkak [**Che18**]引入的 s-嵌入。Kenyon 等人[**KLRR21**]为 h-嵌入和 s-嵌入引入了一种簇结构。我们证明，如果将 h-嵌入视为达布映射，将 s-嵌入视为 Q网，那么这些簇结构就是规范的仿射簇结构。我们还证明，h-嵌入是 Schief 映射的特例，而 s-嵌入是我们新引入并称为固定焦点映射的一类映射的特例。我们还表明，伴随调和嵌入的正交对角映射 可以视为 Q网，并且正交对角映射的射影簇结构与 h-嵌入的仿射簇结构一致，反之亦然。此外，在提升到高维射影空间后，h-嵌入可以理解为正交对角映射的截面，而该映射又内接于一个二次曲面。我们还行。

发现了另一项特殊性质，即 h-嵌入的射影簇变量满足的方程与定义伊辛子簇的方程非常接近（但并不相同）。对于 s-嵌入，我们的 TCD 映射框架使我们能够将 s-嵌入视为 *S*-图 的某些投影，而这又将 s-嵌入与 CQ 网和线性直线复形联系起来。随后，这些观察进一步表明，事实上，在 $\mathbb{C}P^1$，的任意图中，s-嵌入都是仿射 CKP，而不仅仅是在给定 s-嵌入的仿射图中。

R18）τ-变量： 在论文的大部分内容中，我们只考虑簇代数意义下具有射影不变性且属于系数类型的簇变量。在第11章中，我们将展示如何把另一类簇变量（称为 τ-变量）与TCD映射联系起来。 τ-变量满足离散*KP*方程，也称为八面体递推。我们将自身限制在一般位置的设置中，不过会非正式地说明如何将定义推广到不那么一般的位置设置。 τ-变量通过与TCD的弦相关的某些超平面的行列式来定义。这些超平面实际上是射影对偶旗中的点。由于我们使用行列式， τ-变量的定义只在对偶空间中选择超平面的齐次提升后才确定。这就是离散KP方程解中典型的规范自由度。

R19) 射影旗标构型： 在第11.2节中，我们研究附属于三角剖分顶点的射影子空间的旗。这是Fock和Goncharov [**FG06, FG07, Gon17**]所研究的系统的一个特殊情形。我们证明，射影旗标构型可以描述为TCD映射，并且Fock和Goncharov所使用的 X-变量与TCD映射的射影 X-变量一致。我们猜想，TCD映射的 τ-变量也与Fock和Goncharov的 τ-变量一致。我们还证明，三角剖分中的翻转对应于一系列2-2移动。

1.5. TCD映射示例列表

我们列出所有可纳入 TCD 映射框架的对象和动力学示例。这有助于感兴趣的读者找到自己关注的示例。当然，这份列表也展示了 TCD 映射框架的广泛适用性。我们根据 TCD 映射所采用的特化类型对这些示例进行分类。

第一组示例可表述为对组合结构施加特定约束的 TCD 映射。

E1) Q网： 具有 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构的 Q网最早由 Sauer [**Sau33**], 研究，后来 Doliwa 和 Santini [**DS97**] 将定义在$\mathbb{Z}^N$ 上的 Q网作为四边形格进行研究。我们在第 3.3 节证明，定义在四边形图上的 Q网对应于具有特定组合结构的 TCD 上的 TCD映射。通过立方体翻转传播初始数据，对应于一系列 2-2移动。我们在第 3.7 节证明，Q网的拉普拉斯-达布动力学 [**Dol97**] 对应于全局的一系列 2-2移动。我们在引理 5.18 中证明，Q网的拉普拉斯不变量 [**Dol97**] 与相应 TCD 映射的射影簇变量一致。

E2) 达布映射： 达布映射由 Schief [**Sch03**] 引入。我们将在第 3.4 节中证明，定义在四边形图上的达布映射对应于具有特定组合结构的 TCD 上的 TCD 映射。通过立方体翻转传播初始数据，对应于一系列 2-2 移动。

E3）直线复形： $\mathbb{Z}^N$ 上的直线复形由 Bobenko 和 Schief [**BS15**]引入，作为离散基本直线复形，建立在 Doliwa、Santini 和 Mañas [**DSM00**]关于离散直线合同的研究基础之上。我们将在第 3.5 节证明，直线复形

定义在四边形图上的直线复形，对应于具有特定组合结构的 TCD 上的 TCD映射。
通过立方体翻转传播初始数据，对应于一系列 2-2 移动。

E4）直线复合体：我们在第3.6节中首次引入直线复合体，作为从 $\mathbb{Z}^3$ 到 $\mathbb{Z}^N$ 且具有 $N > 3$ 的直线复形的另一种推广。我们证明，定义在四边形图上的直线复合体对应于具有特定组合结构的TCD映射。通过立方体翻转传播初始数据对应于一系列2-2移动。

E5）Desargues映射：Desargues映射由Doliwa [**Dol09**]引入。我们在第4.6节中证明，Desargues映射是TCD映射，并且初始数据的传播对应于一系列“穿过一条弦”的2-2移动。

E6）理想双曲三角剖分：我们在第 5.4 节中证明，理想双曲三角剖分是TCD映射，并且理想双曲三角剖分的剪切坐标 [**Pen12**] 对应于相应TCD映射的射影簇变量。我们还证明，理想双曲三角剖分中的每次边翻转都对应于一次蜘蛛变换。

E7）射影旗标构型：射影旗标构型是 Fock和Goncharov 在研究高阶Teichmüller理论时所考虑对象的一个特例[**FG06**]。我们在第 11.2 节展示射影旗标构型如何成为 TCD映射。我们还指出，TCD 及其相关的二分图 $\mathcal{G}$ 已见于 Fock和Goncharov 的工作 [**FG06, Gon17**]。我们证明，Fock-Goncharov 的 $\mathcal{X}$ 变量与相应对偶TCD映射的射影簇变量一致，并猜想 $\mathcal{A}$ 变量与相应对偶TCD映射的 τ-变量一致。我们还说明，射影旗标构型中的边翻转如何对应于一系列 2-2 移动。

以下示例允许采用一般的 TCD 组合结构，但对簇变量的正性施加了约束，并要求满足某些嵌入性条件。

E8）T-图：T-图由 Kenyon和Sheffield 引入 [**KS04**]。我们在第 6.3 节展示 T-图如何成为 TCD映射。我们证明，Kenyon和Sheffield 引入的 T-图的二聚体面权重与相应 TCD映射的仿射簇变量一致。相应 TCD映射中的重新分裂对应于 T-图上的移动。我们还说明 T-图中出现的二分图与 TCD映射中出现的二分图之间的关系。

E9）圆模式与 t-嵌入：t-嵌入 [**CLR20**] 由圆模式的中心构成。T-嵌入也称为圆锥网 [**Mü15**] 或库仑规范 [**KLRR21**]。在第 10.1 节中，我们将说明 t-嵌入如何成为 TCD 映射。我们将说明，米克尔动力学 [**Ram18**] 对应于一系列全局的 2-2 移动；作者曾在此前的一篇论文中发表这一结果 [**Aff21**] ，Kenyon、Lam、Russkikh 和 Ramassamy 也独立且同时发现了这一结果 [**KLRR21**]。我们将说明，相应 TCD 映射的仿射簇变量与文献 [**KLRR 21**] 中引入的二聚体面权重相同，也等价于文献 [**Aff21**]中引入的星比。

E10) 圆模式与 u-嵌入：我们在第 10.1 节定义了一种新型映射，称为 u-嵌入，它由圆模式中的某些交点构成。我们证明，米克尔动力学对应于一系列全局的 2-2 移动。u-嵌入也很有趣，因为它具有实射影簇变量，而 t-嵌入具有实仿射簇变量。我们还解释了 t-嵌入与 u-嵌入之间的其他关系。

以下映射是 Q网、达布映射或直线复合体的特殊情形，因此也是具有特殊组合结构的 TCD 映射。此外，这些映射还可以被刻画为：恰好是具有特定组合结构、且在电阻子簇或伊辛子簇中具有射影簇变量的 TCD 映射。

E11) Kœnigs 网： Kœnigs 网由 Bobenko 和 Suris [BS07a]提出，Doliwa [Dol07], 也独立提出了这一概念，后者称之为 B-四边形格。在第7.7节中，我们将证明 Kœnigs 网恰好是电阻子簇中具有射影簇变量的 Q-网。

E12) Carnot 映射： Schief 将 Carnot 映射引入为达布映射的一种相容约化 [Sch03], ，他将其称为 CKP 映射。在第7.8节中，我们证明 Carnot 映射恰好是伊辛子簇中具有射影簇变量的达布映射。

E13) Doliwa 复合体： 我们在第7.10节中自行引入 Doliwa 复合体。它们与 Doliwa[Dol02] 提出的另一种（且不等价的）Kœnigs 网定义有关。我们证明，Doliwa 复合体恰好是电阻子簇中具有射影簇变量的直线复合体。

E14) CQ网： Doliwa 将 CQ网引入为 C-四边形格 [Dol10b], ，它是 Q-网的一种约化，并具有仿射规范下的 CKP方程。在第 7.9 节中，我们证明 CQ网恰好是具有伊辛子簇中仿射簇变量的 Q-网。等价地，CQ网恰好是其无穷远超平面截面为 Carnot映射的 Q-网。

以下映射是 Q-网、达布映射、直线复形或直线复合体的特例，因此也是具有特定组合结构的 TCD映射。此外，这些映射的簇变量属于某个特定子簇，但这并不能完全刻画这些映射。

E15) 二次曲面中的 Q-网： Doliwa 研究了点位于二次曲面上的 Q-网 [Dol99]。我们在第 8.2 节中证明，这种 Q-网与一条各向同性直线的截面是 Doliwa复合体。等价地，相对于该各向同性直线的仿射簇变量属于电阻子簇。我们还证明，点位于圆锥面上的 Q-网的切截面是 Schief 映射。

E16）线性直线复形： Bobenko 和 Schief[BS15] 将线性直线复形作为离散基本线性直线复形引入。我们在第8.4节证明，线性直线复形与一条各向同性直线的截面是 Carnot映射。等价地说，相对于该各向同性直线的仿射簇变量属于伊辛子簇。我们还证明，线性直线复形与一个超平面的截面是一个 S-图，其中超平面极点是该图所对应的极点。

E17）Schief 映射： Schief 将 Schief 映射作为 BKP 映射引入 [Sch03]。我们在第7.12节证明，Schief 映射是达布映射的一种特殊情形，其与无穷远超平面的截面是一个 Doliwa复合体。因此，Schief 映射的仿射簇变量属于电阻子簇。

E18）互易图形： King 和 Schief [KS03] 研究了互易图形，并发现了两种不同的 BKP 结构。在第7.13节中，我们证明互易图形是 Doliwa复合体，并且这两种 BKP 结构都等价于这样一个观察：互易图形的提升和截面的射影簇变量都属于电阻子簇。

以下映射具有某些提升，它们是达布映射或直线复形的特殊情形，因此是具有特定组合结构的 TCD 映射。此外，这些映射也是簇变量位于特定子簇中的 TCD 映射。

E19) A-网： A-网由 Sauer [Sau37] 引入。A-网的普吕克提升最早由 Doliwa [Dol01] 研究。Doliwa 还证明，A-网的普吕克提升是一个各向同性直线复形。我们在第8.7节证明，这意味着 A-网的普吕克提升与普吕克二次曲面的一个各向同性平面的截面是一个 Doliwa 复合体。等价地，相对于 A-网普吕克提升的各向同性平面而言，其仿射簇变量位于电阻子簇中。我们还为 A-网的投影是 Kœnigs 网这一事实给出了新的证明，并证明普吕克提升截面的 BKP 结构与 A-网投影的 BKP 结构相同。

E20) Cox格： Cox格由 King 和 Schief [KS14] 引入。我们在第 8.8 节介绍 Cox 映射的普吕克提升，并证明普吕克提升是各向同性 Darboux 映射。我们证明，Cox 映射的普吕克提升与一个切于普吕克二次曲面的 3 维空间的截面是一个 Kœnigs 网。此外，我们证明，Cox 映射的普吕克提升与普吕克二次曲面的一个各向同性直线的截面是一个 Doliwa 复合体。因此，Cox格的普吕克提升相对于切空间以及各向同性直线的仿射簇变量都属于电阻子簇。我们还说明，Cox格的普吕克提升的超平面截面是一个 A-网的普吕克提升。

E21) 反基本线圆丛： Bobenko 和 Schief 将反基本线圆丛 [BS16], 引入为线性直线复形的一种约化。在第8.9节中，我们证明反基本线圆复形的 Blaschke 提升是一个 Cox格。通过 Blaschke 提升的普吕克提升，反基本线圆复形还伴有两个 BKP 结构。

以下映射是 Q网或达布映射的特例，因此也是具有特定组合结构的 TCD映射。此外，这些 TCD映射的簇变量属于某个特定子簇，并满足正性约束。

E22) 调和嵌入： 调和嵌入最早由 Tutte [Tut63]研究，也称为*Tutte*嵌入。每个调和嵌入都可以关联一个 h-嵌入 [KLRR21]。我们在第10.2节中证明，h-嵌入是 Schief映射的特例，因此也是达布映射的特例。由于 h-嵌入是 Schief 映射的特例，其仿射簇变量属于电阻子簇，这与 [KLRR21]的结果一致。

E23) 正交对角映射： 正交对角映射自然地伴随 h-嵌入。我们在第10.2节中证明，h-嵌入是具有圆锥曲线上的点的 Q-网的切截面，而正交对角映射则是相应的立体投影。我们还证明，正交对角映射是 u-嵌入，并且正交对角映射的射影（分别为仿射）簇变量，与相应 h-嵌入的仿射（射影）簇变量相一致。

E24) S-嵌入： S-嵌入由 Chelkak [Che18] 引入。我们在第10.3节中证明，s-嵌入是固定焦点映射的特例，而固定焦点映射又是我们所引入的 Q-网的特例。我们证明，固定焦点映射以及因此 s-嵌入，相对于 $\mathbb{C}P^1$ 中的任意点，在伊辛子簇中都具有仿射簇变量。关于无穷远点的相应结果也已在[KLRR21]中证明。注意，只有相对于无穷远点的仿射簇变量必然为实正数。

E25) S-图： S-图由 Chelkak [Che20]引入。我们在第 8.3 节中证明，S-图是满足关于指定无穷远点的额外几何约束的 Q网。我们还证明，S-图中经过指定点的一条直线的截面是 Carnot映射。因此，仿射簇变量

S-图的点相对于任意这样的直线都位于伊辛子簇中。我们还证明，从特定点对 S-图进行投影可得到一个 s-嵌入。我们还证明，S-图可以作为线性直线复形的截面出现，也可以作为某些 CQ网的投影出现。

最后，l 让我们提及两个不属于上述任何类别的例子。 s.

E26）四有理 Yang-Baxter 映射：四有理 Yang-Baxter 映射由 Adler、Bobenko 和 Suris [ABS03b] 引入。我们在第 8.6 节中指出，四有理 Yang-Baxter 映射是达布映射的一种约化。此外，一般位置下，四有理 Yang-Baxter 映射有四个特殊点。我们证明，四有理 Yang-Baxter 映射相对于经过任意两个特殊点的直线的截面是一个 Doliwa复合体。因此，四有理 Yang-Baxter 映射相对于这类直线的仿射簇变量属于电阻子簇。我们还证明，四有理 Yang-Baxter 映射是内接于两个二次曲面的交曲线中的某些 Q网的截面。

E27）五边形映射：作为多边形离散演化的五边形映射由 Schwartz [Sch92] 引入。在第 5.5 节中，我们将说明，多边形可以视为双周期 Q网，五边形映射在其上表现为拉普拉斯—达布动力学。Schief 曾在一次颇具争议的演讲中勾勒出这一对应关系 [Sch09], ，但相关内容尚未发表。我们还将证明，Glick 引入的簇变量 [Gli11] 与我们通过双周期 Q网关联到多边形的射影簇变量相同。

E28）圆形 Q-网圆形Q网 [Bob99, CDS97] 是指每个四边形都内接于一个圆的 Q网。在第 9.2 节中，我们将说明仿射簇变量如何表示为 BMS 变量的乘积（参见 [BMS08]），以及簇代数的典范泊松括号如何对应于超局部 BMS 泊松括号。

我们还要指出，TCD映射还有其他值得研究的周期约化，但这超出了本论文的范围。例如，Konopelchenko 和 Schief 发现 [KS02]，**Schramm 圆堆积** [Sch97] 和**离散全纯函数** [BP96] 可以理解为 dSKP 方程的周期约化。此外，还有**多边形重新切割**[Adl93], , Izosimov [Izo22] 最近为其发现了一种簇结构。在即将开展的、与 Melotti 和 de Tilière 合作的工作中 [AMdT22a] ，我们将拓展 Schief 和 Izosimov 的结果，并进一步展示**可积交比系统** [BMS05] 和**圆交点动力学** [Gli15] 是 dSKP 方程的周期约化，因而也是 TCD映射。我们还在与 George 和 Ramassamy 的合作中研究周期 TCD映射 [AGR21]，特别关注离散全纯函数。其他周期映射包括各种形式的**高阶五角星映射**；我们认为，Glick 和 Pylyavskyy 关于**Y网格** [GP16], 的工作中可以找到这些作为 TCD映射时所对应的射影箭图，本文不再提供更多细节。

1.6. 开放问题与未来方向

以下列表虽然很长，但我们认为其中每一项都具有重要意义。

Q1) 正性与离散曲面：我们已经遇到了一些具有簇结构且簇变量严格为正的 TCD 映射，即 t-嵌入、T-图及其约化形式、h-嵌入、s-嵌入和 S-图。理解具有正簇结构的直线复形、Q网、达布映射和直线复合体的几何解释，将会很有意义。这种几何解释并非完全显而易见，例如，具有正射影簇变量的 Q网仅包含非凸四边形。

Q2）连续极限：我们如何求取 TCD 映射的连续极限，这些极限又是什么？对于一些离散微分几何示例，其极限已有较为深入的研究（参见 [**BS08**，第 5] 章）。例如，Q-网的极限是在共轭参数化下的曲面，而 A-网的极限是在渐近参数化下的曲面。然而，对于一般的 TCD 映射，目前尚不清楚在取极限的过程中应如何细化组合结构，也不清楚弦在某种极限曲面中应如何解释。请注意，按照我们的约定，与 Q-网对应的 TCD 映射的极限实际上是三个互不相交的曲面：Q-网所收敛到的曲面以及两个焦曲面。

Q3) 极限中的二聚体与正曲面：当然，二聚体配分函数及相关对象（如高度函数）的极限，早已在文献中得到广泛研究（例如参见 [**CKP01**]）。因此，问题是：对于 TCD 映射的极限情形，我们能否对配分函数的极限给出射影几何解释？例如，假设我们有一个具有正簇结构的 Q-网，而它的极限是一个共轭参数化的曲面：二聚体模型的极限高度函数对于这个极限曲面意味着什么？值得注意的是，这方面的内容在统计力学中的 S-图上已有一定研究；本论文则证明了 S-图是 Q网的约化形式。然而，S-图仅在 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, 中得到研究，因此不易将其解释为曲面。

Q4) 格拉斯曼流形： 尽管这并非最初的意图，但我们采用的许多方法与研究（全正）格拉斯曼流形模空间的方法非常相似 [**Pos06**]。最终，我们坚信，从适当的意义上说，TCD映射是 Postnikov 思想的对偶版本。然而，二者之间的精确对应是什么？是否存在某种几何意义上的格拉斯曼流形，与某个 TCD映射相对应？此外，由于例如我们经常研究远低于其最大维数的 Q网，这如何对应到格拉斯曼流形上？既然 TCD映射的每一种具体约化都应当对应于格拉斯曼流形的特定约化，那么 A-网的格拉斯曼流形是什么？Kœnigs 网的呢？诸如此类。反过来也存在类似的问题；例如，有所谓的正交格拉斯曼流形，它们与伊辛模型有关 [**GP20**], ，这与 TCD映射有何关系?

Q5) Grassmann流形与极限：上述问题也可以应用于极限。请注意，取 Q-网极限的一种可能方式是使用定义域，使其成为 $\mathbb{Z}^2$ 中越来越大的子集。这意味着在取极限的过程中，Q-网的最大维数会增加。这对 Grassmann流形有何影响？我们能否或是否需要考虑无限维格拉斯曼流形?

Q6) 二聚体构型：尽管二聚体面权重和二聚体配分函数都可以从 TCD映射的角度加以解释，但二聚体构型的含义并没有显而易见的直接解释。

Q7）环面上：接下来一个重要的步骤是理解 TCD映射，使得其底层 TCD 定义在环面而非圆盘上。这一点很重要，因为我们认为许多研究成熟的系统实际上是环面上的 TCD映射，例如五边形映射（见第 5.5 节）。在 [**AGR21**] 中，我们展示了交比动力学也可以理解为环面上 TCD映射的动力学。我们还在 [**AGR21**], 中概述了一些更一般的结果，但若能全面、细致地理解环面上的 TCD映射，无疑会很有帮助。虽然我们不知道其他曲面上有什么显而易见的几何实例，但理解其他曲面上的 TCD映射也会很有意思。在二聚体方面，已有一些有趣的研究成果，例如 [**CR07**]。

Q8） Z-变量， X-变量与 Muller-Speyer：我们能否利用 Muller-Speyer 的结果[MS16]，将 TCD映射 T的配分函数 Z （的交错比）解释为对偶 TCD映射 $T^{\star}$的 X 变量？第 6.4 节关于原始与对偶中簇变量重合的结果，如何转化为 Muller-Speyer 的视角？

Q9）所有截面的簇变量：考虑一个TCD映射及其所有截面，另见注6.6。我们观察到，除有限个非常小的TCD映射外，所有截面中的射影簇变量总数大于TCD映射空间及截面选择的维数。因此，这些簇变量并非彼此独立。它们之间存在什么关系？

Q10）旗标构型的约化：射影旗标构型是Fock-Goncharov模空间理论的特例，该理论适用于射影群 [FG06] 。然而，也可以考虑射影旗标构型的某些约化，例如相对于双线性形式处于特定位置的旗。这些约化体现为簇变量的子簇，这也是当前正在研究的课题。射影旗标构型的这些约化是否与更一般的Fock-Goncharov理论有关？

Q11）去一般性： 我们声称，非翻转一般的 TCD 映射可以通过其射影簇变量不属于某些子簇的并集来识别。例如，四个点共线且交比为 1 的 TCD 映射不是翻转一般的，这反映在唯一的射影簇变量为 -1 这一事实中。这些子簇一般是什么样的？我们还声称，非翻转一般性反映在某些几乎完美匹配配分函数为 0。能否将此形式化？根据前述主张，非 1-一般的 TCD 映射应当可以通过其仿射簇变量识别。我们也能否通过射影簇变量识别非 k-一般的 TCD 映射？请注意，TCD 映射是否达到最大维数无法从射影簇变量中读出，因为射影簇变量在投影下保持不变。一般而言，精确理解超出非一般情形的 TCD 映射的（正且一般位置）模空间会很有意义。我们假设，后一问题在某种意义上与全正 Grassmannian 理论对偶，正如 Postnikov[Pos06] 所提出的。

Q12）非一般投影/截面：当我们将非一般投影和截面应用于一般TCD映射时，会发生什么？我们是否应该调整组合结构？在通过局部变换进行动力学研究时，是否存在可以穿越所生成奇点的情况？是否应该考虑投影的提升，即将原始映射视为投影后TCD映射的一种吹起？其中又有哪些自由度？

Q13）非极小TCD与子簇：我们声称，定义在非极小TCD上的TCD映射的簇变量位于某些子簇中。例如，如果我们考虑三角剖分中具有内部顶点的理想双曲三角剖分，并将内部顶点周围的 m 射影簇变量（在此情形下为剪切坐标）标记为 X_1， X_2，……， X_m，那么众所周知的闭合条件为

$$X_1 \cdot X_2 \cdots X_m = 1 \quad \text{and} \quad X_1 + X_1 \cdot X_2 + \cdots + X_1 \cdot X_2 \cdots X_m = 0. \tag{1.4}$$

我们猜想，TCD中的任何闭环都会为相应的TCD映射贡献两个这样的方程。非极小性的其他违例又如何呢？这方面的研究仍在进行中。

Q14) 双线性形式与约化：对于与对称双线性形式相关的TCD映射（二次曲面中的 Q-网，见第8.2节）会出现BKP方程，而对于与反对称双线性形式相关的映射（线性直线复形，见第8.4节）会出现CKP方程，这难道只是巧合吗？我们已经证明，考察含有各向同性直线的截面时，这些特定的TCD映射分别呈现BKP和CKP。所有在含有一条直线的截面中呈现BKP或CKP的特定TCD映射究竟有哪些？根据我们对相应定理的评论，后一问题已经有了些眉目。不过，这个问题也可以针对许多其他映射提出。例如，S-图的指定点所穿过的任何含有一条直线的截面都是Carnot映射，但反过来是否成立？一般而言，更高维的情形又如何？例如，顶点位于 $\mathbb{C}P^4$ 中的二次曲面上的Q-网，而不是位于 $\mathbb{C}P^3$中?

Q15) BKP/CKP方程的未明确对应关系：Bobenko 和 Schief 通过 M 系统发现了伴随线性直线复形的 CKP 方程 [**BS15**] 。我们也通过具有各向同性直线的截面（第8.4节）得到了这一结果，但尚未研究这两种 CKP 方程的出现方式是否一致，以及如何对应。Bobenko 和 Schief 发现的结构是用 τ-变量表述的，我们在第11.1节中关于 TCD 映射的 τ-变量所得的结果可能会有所帮助。请注意，由于存在一个三参数的各向同性直线族，我们发现了一个完整的三参数 CKP 方程出现族，这与 Bobenko 和 Schief 的结果有何关联？类似地，King 和 Schief 通过提升以及选取一个特定的双线性形式，在 Cox 格中发现了 BKP 方程[**KS14**]。我们发现了两个 BKP 方程族的出现形式（第 8.8 节），但同样是通过具有各向同性直线的截面，以及 Cox 格的普吕克提升中的切三维空间得到的。这些发现之间有何关联?

Q16）双线性形式与具有一般组合结构的 TCD映射 电阻网络和伊辛模型的子簇出现在具有某些容许组合结构的 TCD映射中。归根结底，这是由二聚体模型分别与生成树和伊辛模型之间的两种双射技巧所致 [**Tem74, Dub11**]。然而，显然可以在偏离容许组合结构的地方进行局部二聚体变换，随后再回到容许组合结构，并因系统的相容性而重新进入这些子簇。因此，非容许组合结构也应存在相应的子簇。我们相信，对应 TCD映射的几何性质也同样如此，因此这一点尤为重要。例如，我们相信，可以通过某些关联与极性引理，判断一个 TCD映射是否与二次曲面中的某个 Q-网翻转等价。这与 Fairley [**Fai22**] 关于特定参数化下离散曲面片的尚未发表结果有关。

Q17) 非交换 TCD 映射：显然，TCD 映射和 VRC 的定义可以推广为射影格拉斯曼流形之间的关系，这与 [**ABS09**]的思路颇为相似。需要注意的是，先验地说，这与 Postnikov 所研究的格拉斯曼流形模空间理论并不相同。事实上，我们认为，这种非交换理论具有一些在交换情形下消失的有趣几何特征。它也可能为非交换簇结构提供线索，尽管这是一个困难的领域。

Q18) TCD 映射与 Darboux 系统：我们忽略了一种通过所谓*Darboux*系统 [**BK95, DS97**] 研究 Q网 的极有趣方法。利用 Q网 特有的组合结构、仿射规范以及对关系的其他特定选择，可以将该系统与之联系起来。我们认为，Darboux系统，或者至少是其部分内容（包括旋转系数），也可以普遍地在 TCD 映射中找到，这实质上将构成 Darboux 系统的一个 A_N-格版本。

Q19) TCD映射与M-系统：M-系统在 Bobenko 和 Schief 的研究中有所涉及 [**BS15**] ，具体针对直线复形的情形，但显然其意图是用于

用于更广泛的目的。我们能否将 M-系统与 TCD 映射联系起来，或者是否存在 M-系统的 n维仿射空间格版本？请注意，M-系统基于某些矩阵的子式关系，这可能表明它们与 TCD 映射和簇代数之间存在一种非常几何化的关系。

Q20) TCD 的符号拓扑：存在一种称为符号拓扑的伪直线排列的高维推广 [**FW{v8>**。我们想知道，三重交叉图是否也存在类似的高维推广。特别是，符号拓扑理论具有丰富的结构，包括对翻转图的完整理解。因此，TCD 的高维推广也可能有助于找到高维可积系统。

Q21) 泊松-李群：我们能否将 Izosimov [**Izo21c**] 关于泊松-李群与五边形映射之间关系的结果，与环面上的TCD映射联系起来，或许从某种意义上推广到一般的TCD映射?

Q22) 截面组合结构：在完成这篇论文期间，有人提醒作者注意到，与我们定义截面的方式（见第4.2节）类似的运算已经出现在近期文献中 [**Gal21**, **PSBW21**]。它们与我们的工作有何关系?

Q23）TCD映射的阿兹特克钻石定理：在即将与 Melotti 和 de Tilière 合作的工作中，我们将阿兹特克钻石定理 [**Spe07**] 从离散KP推广到 dSKP[**AMdT22a**]。这揭示了配分函数与TCD映射之间另一种有趣的关系，不过我们只讨论了与A_3相对应的组合结构情形。将其推广到所有组合结构仍在进行中。

Q24）通过实几何研究复TCD映射：我们已经说明，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的仿射图中，具有正仿射簇变量的 t-嵌入、h-嵌入和 s-嵌入都是TCD映射的特例。我们从多方面将这些映射与一般的TCD映射以及特定实例联系起来，尤其是离散微分几何中的实例。然而，我们认为尚未充分阐明 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$中这些TCD映射的仿射簇变量所受实数约束的几何意义。我们计划在即将与 Chelkak 合作的工作中给出更有启发性的解释。

Q25) 二维可积系统：本文几乎完全聚焦于三维可积系统。了解哪些二维系统也适用于 TCD 映射框架，将会很有意思。事实上，有若干二维系统可以视为 TCD映射的周期约化，因为它们是 dSKP 方程的周期约化，因而也是 TCD映射的周期约化；示例介绍见 [**AMdT22b**] 。然而，这仅涵盖了 ABS分类中二维可积四边形系统的一个局部示例（Q1，其中 $\delta = 0$） [**ABS03a**]。ABS分类中的其他所有示例又如何呢？面心四边形方程又如何呢[**Kel21**]？也可以反过来提出这个问题：是否有可能对合理的 TCD 映射二维约化进行分类？在标量情形下，后一个问题是在 A_N 格上对二维系统进行分类。

Q26) 细分：能否以射影不变的方式细分 TCD映射？如何细分其组合结构？细分离散可积系统是一个出了名的难题，因为很难在保持“刚性”的同时，使细分后的映射与原映射“接近”。

Q27) Lelieuvre 法向场：离散微分几何中一个有趣的方面，我们尚未将其与 TCD 映射联系起来，那就是所谓的 Lelieuvre 法向场 [**KP98**], ，它们与 A-网相关联。如果两者之间存在某种关系，那么探究能否将一些结果迁移到其他 TCD 映射实例中，将会很有意思。

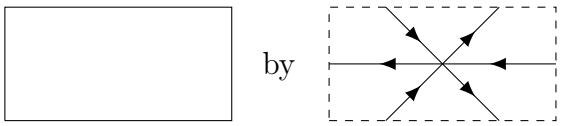
Q28) 热带几何：在射影热带几何中，是否存在一种合理的 TCD 映射理论（或许如 [RGST05] 中所述）？与热带几何是否还存在其他关联，例如通过簇代数或 Fock-Goncharov模空间？与超离散系统又有什么关系？

Q29) 有限几何：尽管我们不知道这个问题是否重要，但考虑有限域上的射影空间中的 TCD 映射如何？对于每个 TCD，TCD 映射的数量都有限，我们能否将它们枚举出来？

Q30) 散射理论：正 Grassmann 流形与散射振幅之间的关系已在 [AHBC+14] 中得到发展。事实上，[AHBC+14 的第 5] 节已经对与 TCD 映射类似的点构形进行了一些探讨。深入理解这一点将很有意思：我们能否以某种方式理解散射振幅的几何意义，尤其是对于 Q网等具体示例？

Q31) 随机游走：对于 T图，Kenyon 和 Sheffield [KS04] 还利用仿射簇结构的边权引入了某些鞅随机游走。我们能否将这一过程推广到具有正仿射簇变量的任意 TCD 映射？请注意，T图本身已允许一般的组合结构，但要选择随机游走的方向，则需要利用 T图特有的嵌入性质。此外，是否也有可能理解正射影簇结构中的这些随机游走？理解这些游走在离散微分几何示例中的几何意义将很有意思。另外，由于许多离散微分几何示例一般都具有负簇变量，我们能否在这种情况下也对随机游走作出解释？

Q32）随机TCD映射：当Dylan Thurston引入TCD时 [Thu17]，他通过展示TCD是 $\mathbb{Z}^2$的子网格上的二聚体构型的一种推广（即所谓的多米诺铺砌），来阐释他的思想。更具体地说，对于每一种多米诺铺砌，我们通过将每个多米诺替换为来构造一个TCD。



Thurston 说明，多米诺翻转 对应于 2-2 移动。另一方面，二聚体构型的采样已得到广泛研究（见第 7.2 节）。是否可以将采样思想从二聚体扩展到 TCD？是否存在用于此类采样且与 TCD映射相关的权重？

Q33) 双网：离散微分几何（DDG）领域出现了一项有趣的新进展，即通过特定网的耦合对来描述离散化 [BSST16, BSST18, Tec21]。迄今为止，这些耦合网的可积性仍不明朗。在与 Techter 的合作研究中，我们旨在借助 TCD 映射的相关见解，解决耦合网的可积性问题。

Q34）双随机电流：在 [DCL19]中，介绍了一种平面二聚体模型（与伊辛模型相关）的新约化。这种约化是否通过 TCD 映射对应于几何中的某种结构？二聚体模型是否还有其他约化方式？它们与几何有何关联？

Q35）舒伯特动力学：以下系统由 Glick 提出 [Gli15]，其依据是一些有趣的数值证据。考虑 $\mathbb{C}P^3$，中给定的四条直线，那么在一般位置情形下，恰有两条直线与这四条给定的直线相交。这个想法可用于定义八面体型动力学（如 Miquel 或 Laplace-Darboux 动力学的情形）。目前尚不清楚，而且我们也未测试这些动力学是否

它们是离散可积的，但尚不清楚它们是否能以某种方式纳入 TCD 映射框架，因此我们将此留作一个开放性问题。

1.7. 出版物

关于 t-嵌入与米克尔动力学的可积性结果已发表于作者的一篇预印本 [**Aff21**] 中（此外，[**KLRR21**]也独立得出了这一结果）。关于 Q-网和达布映射的首批射影簇结构，已发表于一篇与 Glick、Pylyavskyy 和 Ramassamy 合作的预印本 [**AGPR19**]中。 [**AGPR19**], 还首次引入了向量关系构型，并给出了一个关于从边界确定唯一性的结果；该结果不属于本论文的内容。我们尚不清楚本论文的研究结果最终将以何种形式发表，但将与 Glick 和 Ramassamy 合作发表一篇包含本论文部分内容的论文。本论文未收录的相关工作见与 George 和 Ramassamy 合作的预印本[**AGR21**]。此外，本论文未收录的其他相关工作见两篇预印本，内容为与 de Tilière 和 Melotti 的合作成果 [**AMdT22a**, **AMdT22b**]。

1.8. 致谢

特别感谢我的导师 Boris Springborn、Stefan Felsner、我的数学前辈 Ananth Sridhar，以及我的数学切磋伙伴 Jan Techter。此外，还要感谢 Alexander Bobenko、Ulrike Bücking、Dmitry Chelkak、Albert Chern、Alexander Fairley、Terrence George、Roman Gietz、Max Glick、Richard Kenyon、Hana Dal Poz Kouřimská、Wai Yeung Lam、Paul Melotti、Christian Müller、Sanjay Ramassamy、Isabella Retter、Thilo Rörig、Andy Sageman- Furnas、Wolfgang Schief、Lara Skuppin、Nina Smeenk 和 Yuri Suris，感谢他们无数次的讨论以及在校对方面给予的帮助。

第2章

TCD映射与离散可积性

2.1. 三重交叉图（TCD）

我们所称的三重交叉图最初由 Dylan Thurston [Thu17] 引入，称为三重点图，也称为三重图。这种图的另一个名称是 Thurston 图 [FM16]。在此之前，文献中也出现过三重交叉图这一名称 [Boc16, BW20]。我们选择沿用“三重交叉图”这一术语，因为它最不容易引起混淆。接下来，我们先介绍 Thurston 初期研究中的若干基本定义和定理，再在下一节讨论三重交叉图与向量关系配置之间的联系。

定义 2.1（[Thu17]）。三重交叉图（*TCD*） $\mathcal{T}$ 是由一组有向闭区间和圆构成的集合，它们以光滑方式浸入一个圆盘中。连通分支的像称为一条弦；它要么是弧（区间的像），要么是环（圆的像）。这些浸入映射须满足：

(1) 每个交点处都有三条弦交叉；(2) 弧的端点是圆盘边界上的互不相同的点，且没有其他点映射到边界上；(3) 弦上的定向在补区域上诱导出一致的定向。

T三重交叉图在这类图之间的同伦意义下视为等价。 ∎

这使得它们本质上成为组合对象，即带有一些额外结构的6价图。给定一个三重交叉图 $\mathcal{T}$，我们可以反转所有弦的定向，从而得到一个新的三重交叉图 $\mathcal{T}'$。对于我们将在第2.5节中引入的TCD映射，弦的定向十分重要，因此我们确实将 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 视为两个本质上不同的图。还要注意，边界处的弦必须在入端点和出端点之间交替。这是因为沿着图的每个面（包括边界处的面），弦的定向都是一致的。

定义2.2. 设 $\mathcal{T}$ 是一个 TCD，含有 n 条弦，其中 m 条是弧而非环。若我们还将其 n 条弦标记为数字 1、2、.....、n，则称 $\mathcal{T}$ 为一个带标号的 *TCD*。

(1) 没有两条弦带有相同的标签，

(2) 标签 1、2、.....、m 在入端点处按逆时针顺序出现。 ∎

定义2.3. 设 $\mathcal{T}$ 为一个具有 m 个入端点的带标号三重交叉图。按照逆时针顺序为出端点标记数字 $1, 2, \ldots, m$，其中 1 是沿逆时针方向紧接在入端点 1 之后的第一个出端点。设 $C_{\mathcal{T}}$ 为满足以下条件的置换：若存在一条弦从入端点 i 连接到出端点 j，则 $C_{\mathcal{T}}(i) = j$。我们称 $C_{\mathcal{T}}$ 为端点匹配。对于带标号的 TCD，若两个端点匹配之间相差一个循环置换的共轭，则认为它们等价。若 $C_{\mathcal{T}}(i) = i + k$，则称弦 i 的长度为 $k \in \mathbb{Z}_m$。我们称具有 n 条弦的三重交叉图具有端点匹配 $\mathcal{S}_k^n$，如果

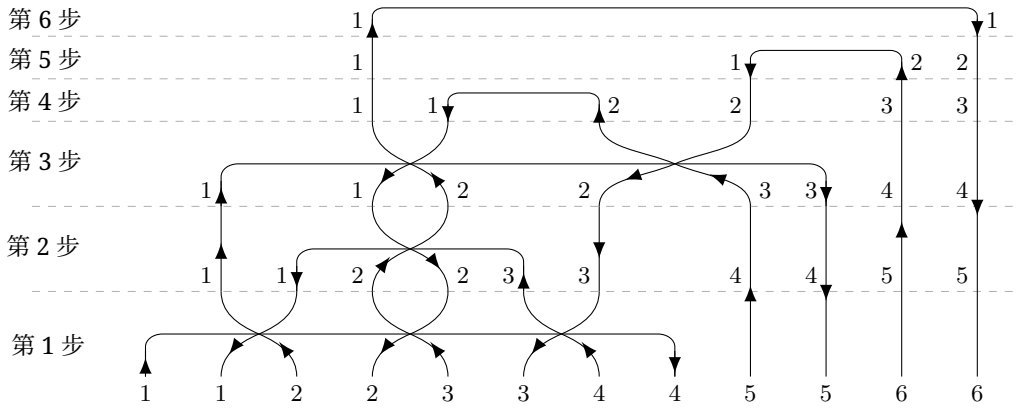


图 2.1。端点匹配 $\mathcal{S}_3^6$ 的标准图的半平面图。

每条弦的长度为 k。如果一个三重交叉图 $\mathcal{T}$ 对某个$k \in \mathbb{N}$ 具有端点匹配 $\mathcal{S}_k^n$，我们称 $\mathcal{T}$ 是 平衡的。■

一个有趣的问题是，端点匹配是否存在全局限制。当我们将入端点和出端点按升序绘制在实轴上，并且整个图包含于上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ 中时，我们称 TCD 的这种绘制为半平面图，见图 2.1。

定义 2.4（[**Thu17**]）。设 $\mathcal{T}$为一个带标号的 TCD，含有 n 条弦且没有环。设$C_{\mathcal{T}}$ 为 $\mathcal{T}$ 的端点匹配。标准图是通过递归构造得到的图（见图 2.1）。选择一个区间 $[k, C_{\mathcal{T}}(k)],$，使其相对于区间的部分包含序而言为极小元。令 TCD $\mathcal{T}'$ 为一个含有 $n-1$ 条弦且端点匹配为

$$C_{\mathcal{T}'}(i) = \begin{cases} C_{\mathcal{T}}(i+1) - 1 & \text{for } C_{\mathcal{T}}(i+1) > C(k), \\ C_{\mathcal{T}}(i+1) & \text{for } C_{\mathcal{T}}(i+1) < C(k). \end{cases} \tag{2.1}$$

我们通过添加一条沿边界延伸的弦，从 $\mathcal{T}$ 构造出 $\mathcal{T}'$，这样会引入 $k-1$ 个新的交叉点，每个交叉点都由新弦与 $\mathcal{T}'$ 中的弦 j和 $C_{\mathcal{T}'}^{-1}$（j）形成，适用于 $1 \leq j < C$（k）。由于 $\mathcal{T}'$有 $n-1$ 条弦，递归会在 n 步后结束。■

注意，我们确实考虑的是区间，因此 $[k, C_{\mathcal{T}}$（k）$] = [C_{\mathcal{T}}$（k） $k]$。图 2.1 第一步中考虑的区间是 $[1, 4]$。第二步中，我们看到少了一条弦，区间是 $[3, 1]$。之后的区间是 $[1, 3], [2, 1], [2, 1], [1, 1]$。

定理 2.5（[**Thu17**]）。在一个边界上有 $2n$ 个端点的圆盘中，所有 $n!$ 种端点匹配都可以通过某个不含环的三重交叉图实现。■

证明。由定义 2.4 可知，我们在其中给出了一个算法，用于为给定的端点匹配构造 TCD。□

定义 2.6（[**Thu17**]）。连通三重交叉图 是这样一种图：浸入曲线的像与圆盘的边界一起构成连通集。等价地，它是这样一种图：相对于该像的每个补区域都是一个圆盘。■

例如，任何不含环的图都是连通的。

定义 2.7（[**Thu17**]）。TCD 中的 *2-2* 移动 是指在双边形处对弦进行局部重新排列，同时保持端点匹配不变，如图 2.2 所示。■

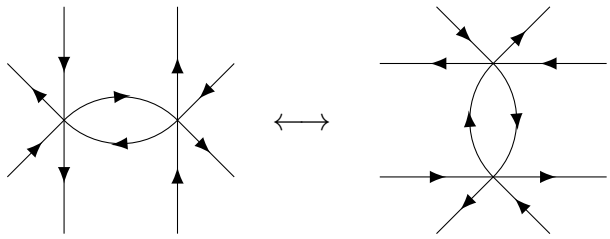


图 2.2. TCD中的2-2 移动。

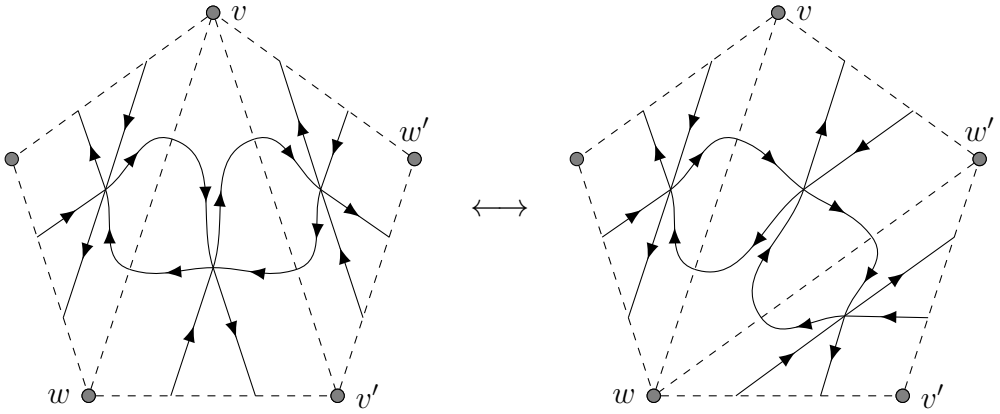


图 2.3. 与五边形的三角剖分 $\mathfrak{T}$（虚线）对应的三重交叉图 $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ ，以及边翻转的作用。

事实证明，2-2移动对于我们所研究的几何动力学至关重要。请注意，移动前后双边形的定向保持不变。由于我们区分定向，稍后将把发生在逆时针定向双边形处的 2-2 移动与发生在顺时针定向双边形处的 2-2 移动视为两种不同类型的 2-2移动。其中一种对应于局部几何的变化，而另一种对应于参数化的变化（见定义 2.34）。

定义 2.8 ([**Thu17**]). 极小*TCD* 是指一种连通图，其三重点不多于任何具有相同端点匹配的其他三重交叉图。■

在整篇论文中，我们只考虑极小图。极小图的一个特别有用的性质如下定理所述。

定理 2.9 ([**Thu17**]). 任何两个端点匹配相同的极小TCD，都可以通过一系列2-2移动相互关联。■

下面的定理指出，可以通过禁形的缺失来识别非极小TCD。

定理 2.10 ([**周四17**])。一个连通的 TCD 是极小的，当且仅当它没有环、没有与自身相交的弦（自交），也没有在两个点x 和 y处相交的弦对，且两条弦都从 x 指向 y （平行交）。■

引理 2.11（[**Thu17**]）。标准图是极小的。 ■

2.2. 三角剖分

在继续讨论几何之前，我们先给出一些三重交叉图的组合例子，这些图可以与两类反复出现的对象相关联：三角剖分和四边形图。我们从三角剖分开始。

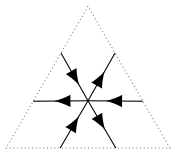
定义 2.12. 圆盘三角剖分，或简称三角剖分，是一个闭圆盘，它是一个 CW 复形，其面（2-胞腔）是边与边粘合的三角形。我们将三角剖分 $\mathfrak{T}$ 的顶点（0-胞腔）、边（1-胞腔）和面分别记为 V, E, F. ■

一般来说，给定一个圆盘三角剖分，我们将圆盘边界上的顶点称为边界顶点。包含在圆盘边界中的边称为边界边，包含边界边的面称为边界面。

定义 2.13. 在三角剖分 $\mathfrak{T}$ 中，考虑这样一种局部情形：两个不同的三角形 $t = (v, w, v')$ 和 $t' = (v', w', v)$ 恰好共享一条边 $e = (v, v')$。此时，在 e 处进行边翻转可得到一个新的三角剖分 $\mathfrak{T}'$，它与 $\mathfrak{T}$ 相同，只是移除了这两个三角形t, t'，并将其替换为两个三角形 (w, v', w') 和 (w', v, w)，另见图 2.3。■

换句话说，我们将边（v， v'）翻转为边（w， w'）。现在，我们为给定的三角剖分关联一个 TCD，并证明边翻转对应于一次 2-2 移动。

定义 2.14。设 $\mathfrak{T}$ 是一个三角剖分。在每个三角形中粘贴以下一块 e



TCD，使相邻三角形中的弦片段沿边相接。我们称所得的 TCD $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ 为对应于 $\mathfrak{T}$ 的 TCD。■

根据构造，对于 $\mathfrak{T}$ 的每个三角形， $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ 中恰有一个三重点。此外，我们注意到， $\mathfrak{T}$ 的每个顶点 v 都对应于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ 中的一条弦，这条弦包含在与 v 关联的所有三角形中，并顺时针经过这些关联三角形的所有交叉点。因此，如果 $\mathfrak{T}$ 中有一个非边界顶点 v，那么 $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ 中对应的弦就是一个环，并且 $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ 不是极小TCD。如果一个三角剖分有 n 个边界顶点且没有内部顶点，我们称之为边形的三角剖分（见图 2.3）。对应的 TCD 总是一个具有端点匹配 $\mathcal{S}_1^n$ 的极小 TCD。反过来，每个 TCD 端点匹配 $\mathcal{S}_1^n$ 都对应于一个 n 边形的三角剖分。

引理 2.15. 三角剖分中的每次边翻转都对应于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$中的一个顺时针二边形处的 2-2 移动。■

证明。参见图 2.3。 □

因此，作为定理 2.9 的推论，n维仿射空间n-边形的三角剖分的（边）翻转图也是连通的。

我们还将 以考察第 5 节中与三角剖分相关的一些几何和代数。 4.

2.3. 四边形图

现在让我们转而讨论本节要介绍的另一个例子，即一类与四边形图相关的 TCD。

定义 2.16。四边形图 $\mathfrak{Q}$ 是一个闭圆盘，也是一个 CW 复形，其面（2-胞腔）是边对边粘合的四边形。我们将四边形图 $\mathfrak{Q}$ 的顶点（0-胞腔）、边（1-胞腔）和面集合分别记为 V、 E和 F。■

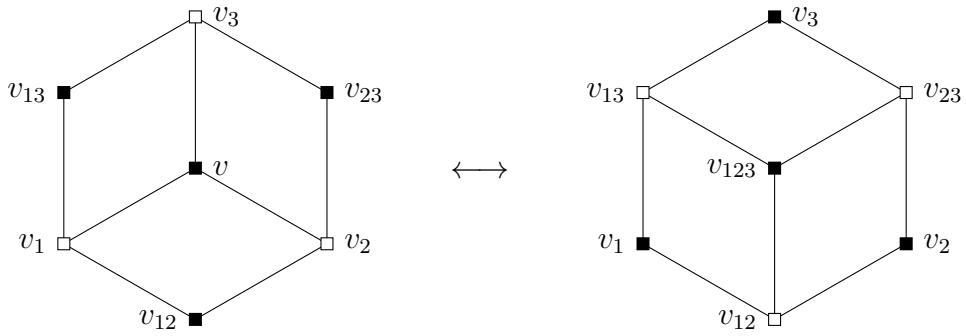


图2.4. 四边形图中的立方体翻转。

根据定义，每个四边形图 $\mathfrak{Q}$ 都是二分图，我们通常假设已经选择了将 V 划分为白色顶点和黑色顶点。

定义2.17. 在四边形图 $\mathfrak{Q}$中，考虑三个四边形围绕

$$q^{12} = (v, v_1, v_{12}, v_2),\ q^{23} = (v, v_2, v_{23}, v_3) \text{ and } q^{13} = (v, v_3, v_{13}, v_1) \tag{2.2}$$

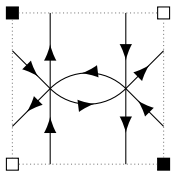
一个公共顶点 v粘合在一起的局部情形。然后，在 v 处进行立方体翻转，得到一个新的四边形图$\mathfrak{Q}'$，它与 $\mathfrak{Q}$ 相同，只是将三个四边形 q^{12}，q^{23}，q^{13} 替换为三个四边形

$$q_3^{12} = (v_3, v_{13}, v_{123}, v_{23}),\ q_1^{23} = (v_1, v_{12}, v_{123}, v_{13}) \text{ and } q_2^{13} = (v_2, v_{23}, v_{123}, v_{12}), \tag{2.3}$$

其中还将顶点 v 替换为顶点 v_{123}，另见图2.4。 ■

换句话说，我们将立方体的“后视图”翻转为“前视图”。现在，我们为给定的四边形图关联一个TCD，并证明立方体翻转对应于由十一个2-2移动构成的序列。

定义 2.18. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。将以下部分粘贴到每个四边形中



一个 TCD，使相邻四边形中的弦片段沿边相接。我们称由此得到的 TCD $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 为对应于 $\mathfrak{Q}$的 TCD。■

四边形图及其对应的 TCD 将是贯穿本文的重要主题。特别是，我们可以用四边形图来描述 Q 网、达布映射和直线复形。

引理 2.19. 四边形图 $\mathfrak{Q}$ 中的立方体翻转对应于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$中的一列十一步 2-2 移动。■

证明. 该序列如图 2.5 所示。 □

诱导立方体翻转的2-2移动序列并不唯一。此外，我们也可以允许某些四边形填入定义2.18中的TCD，但旋转约九十度。在这种情况下，存在少于十一次2-2移动的序列。

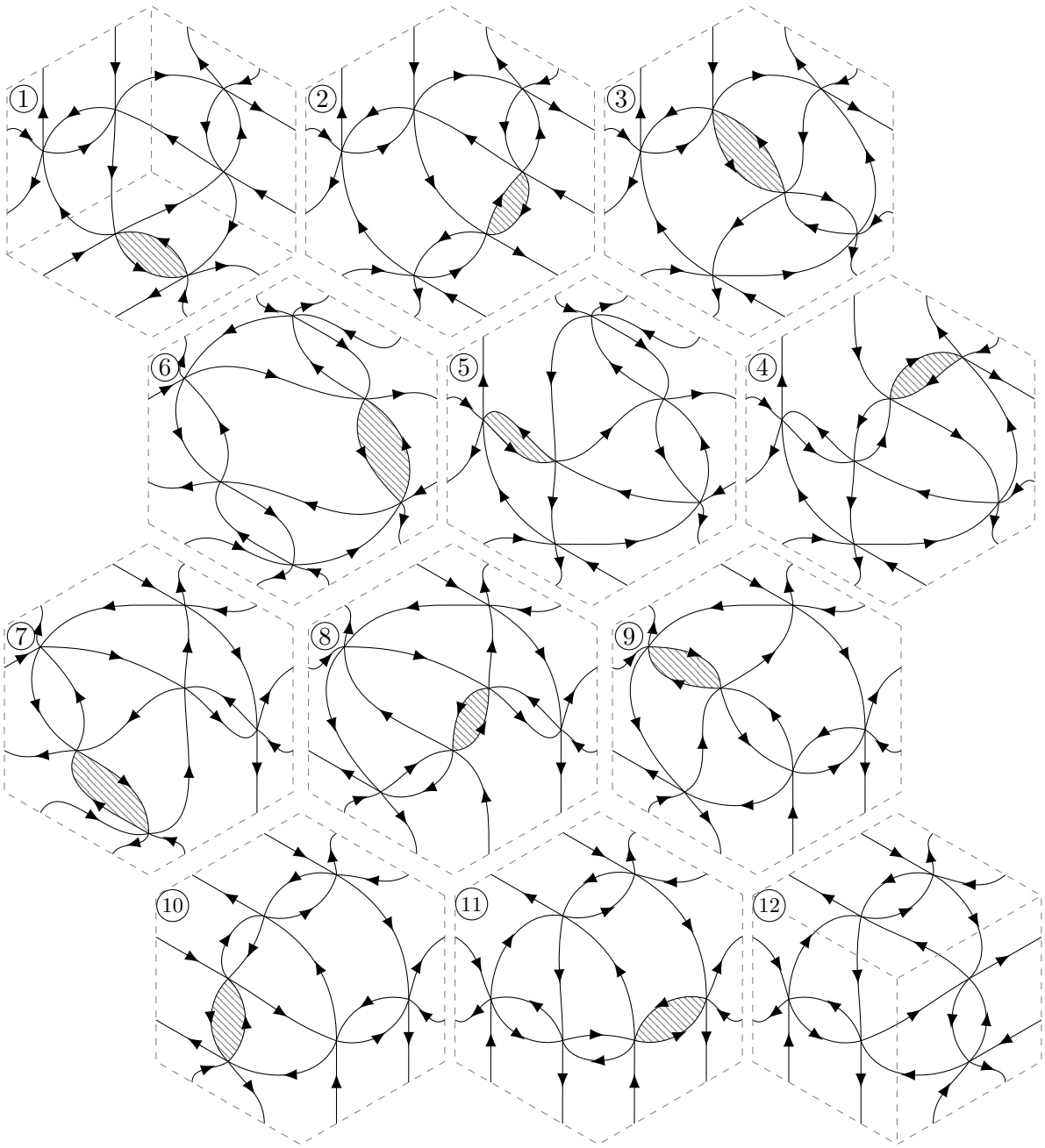


图2.5。十一个2-2移动诱导出立方体翻转。

定义2.20. 四边形图 Ω 中的一条条带 （由四边形组成）是一个极大四边形序列q_0， q_1，.. .， q_m，满足对于所有 k， $0 \le k < m$，四边形 q_k和 q_{k+1}共享一条边 e_k，且每对相邻边 e_k， e_{k+1} 互不相交，见图2.6。■

我们还可以从图2.6中观察到，每条条带恰好对应两条沿相反方向延伸的弦。如果两条条带共享一个四边形，我们就认为它们相交。若一条条带自身相交，则存在指标 i， j 满足 $i \neq j$，但 $q_i = q_j$。

定义2.21。若四边形图满足以下条件，则称其为极小的

(1) 没有条带是环，(2) 没有条带与自身
相交，(3) 任意两条条带至多相交一次。

■

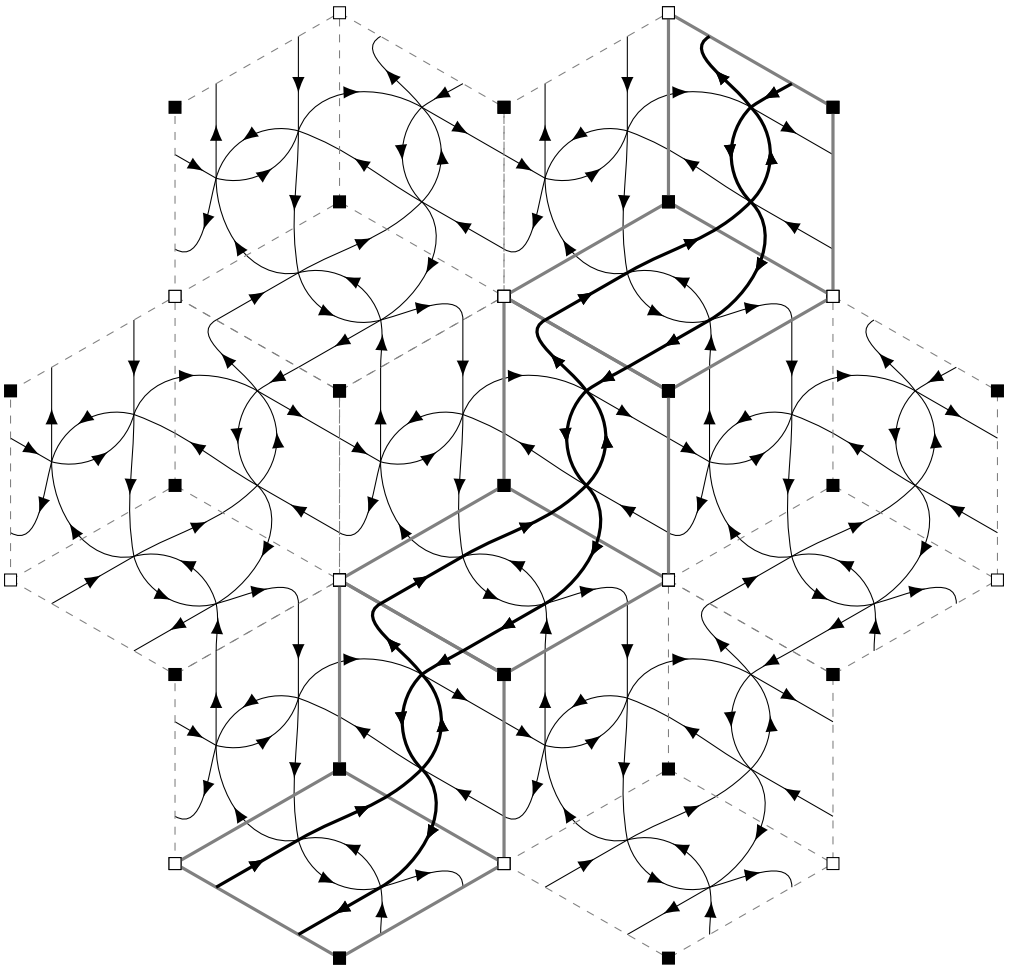


图 2.6. 突出显示四边形图的 TCD 中由四边形组成的条带及其对应的一对弦。

This definit 其表述与定理 2.1 中 TCD 的极小性刻画类似。 0.

引理 2.22. 四边形图 $\mathfrak{Q}$ 是极小元，当且仅当 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 是极小元。 ■

证明。如果某个条带与自身相交，那么对应的两条弦相交，而这也是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 中的弦自相交的唯一方式。现在假设两个不同的条带相交两次，并选取一条对应于第一个条带的弦 s 。那么，对应于第二个条带的两条弦中，有一条会以平行方式与 s 相交两次。如果任意两个条带都不相交两次，那么任意两条弦都不可能相交两次，除非这两条弦对应于同一个条带。在这种情况下，它们不会以平行方式相交。□

因此，作为定理 2.9 的推论，具有固定条带端点匹配的极小四边形图的（立方体）翻转图也是连通的。

有一种方法可以将任意平面图关联到一个四边形图。这里的平面图 G指的是一个 CW 复形闭圆盘。因此 $G=(V,\ E,\ F)$，其中 F是 G的面（2-胞腔）集合。

定义 2.23. 设 G 为一个平面图。对应的四边形图 $\mathfrak{Q}_G$ 中， G 的每个顶点 v_w 都有一个白色顶点 w ， G 的每个面 f_b 都有一个黑色顶点 b 。此外，如果 f_b 在 G中与 v_w 关联，那么 $\mathfrak{Q}_G$ 的两个顶点 $w,\ b$ 之间在 $\mathfrak{Q}_G$ 中有一条边。■

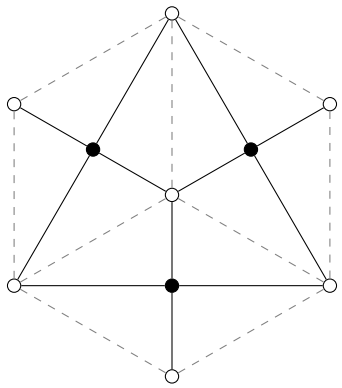


图 2.7. 定义在三个四边形（虚线）上的 Q-网的 VRC 图 G。

2.4. 向量关系构型

接下来我们定义向量关系构型。在整篇论文中，我们主要使用与三重交叉图相关的一类向量关系构型。不过，对于某些计算和图示，采用向量关系构型的一般概念会很有用。

定义2.24（[**AGPR19**]）。设 G 是一个平面二分图，其顶点集为 $B \dot\cup W$。对于 $b \in B$，令 $N(b) \subset W$ 表示其邻点集。一个向量关系构型（*VRC*） R由以下选择构成：

(1) 对每个 $w \in W$ 选取一个向量 $R_w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$，以及 (2) 对每条 $e \in E$ 选取一个边权重 $\mu_e \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，

使得对于每个 $b \in B$，向量 $\{R_w : w \in N(b)\}$ 满足线性关系

$$R_b : \sum_{w \in N(b)} \mu_{bw} R_w = 0. \tag{2.4}$$

■

请特别注意，对于每个黑色顶点 $b \in B(G)$，向量 R_{w_1}、R_{w_2}、$\dots R_{w_{d_w}}$必定线性相关，其中 w_1、w_2、$\dots$、$w_{d_w} = N(b)$。

我们还考虑 VRC R的规范变换。规范变换分为两种：

(1) 在白色顶点处按因子 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 缩放，即对所有 $e \sim w$， $R_w \mapsto \lambda R_w$ 和 $\mu_e \mapsto \lambda^{-1}\mu_e$。 (2) 在黑色顶点处按因子 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 缩放，即 $R_b \mapsto \lambda R_b$，这对应于对所有 $e \sim b$， $\mu_e \mapsto \lambda \mu_e$。

在下文中，我们主要将 VRC 的向量视为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$中某些点的齐次提升。因此，在白色顶点处缩放只会改变提升，而不会改变点；在黑色顶点处缩放则不会改变相邻点所在的射影子空间，这些点位于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中。因此，使用规范一词是恰当的。

VRC 在规范变换和射影变换下的不变量是什么，这是一个有趣的问题。不过，我们将推迟到第5章再介绍这些量；届时，它们将在与向量关系构型相关的簇结构定义中发挥重要作用。

例 2.25. *Q*-网是一个从四边形图 $\mathfrak{Q}$ 的顶点到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的映射（见定义 2.16），其每个四边形的像都包含在一个二维平面内。由于 $\mathfrak{Q}$ 是共面的，并且

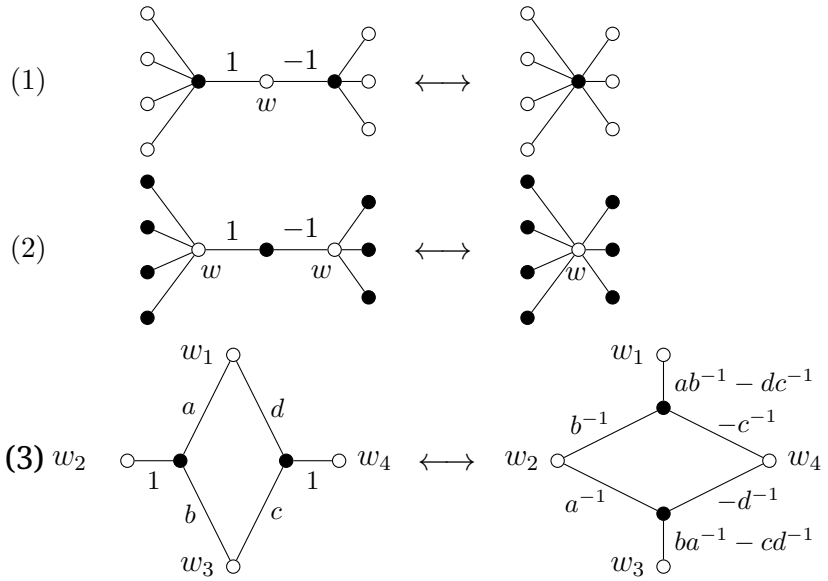


图 2.8. 局部变换：(1) 收缩白色顶点，(2) 收缩黑色顶点，以及 (3) 蜘蛛变换。

二分的，Q-网到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的任意齐次提升都可以表示为 VRC。相应图 G 的示例见图 2.7。■

有一种特别有用的规范，无论是一般计算，还是我们在第5.7节定义的仿射簇结构，都适用。

定义 2.26. 考虑一个 VRC R。R 的边权 μ 处于仿射规范 if

$$\sum_{w\sim b} \mu_{bw} = 0 \tag{2.5}$$

对于每个黑色顶点 $b \in B$ 都成立。 ■

我们来解释为何将其称为仿射规范。假设每个向量 $R_w \in \mathbb{C}^{n+1}$ 都是 $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ 中某个点 T_w 的齐次提升，并且所有向量的最后一个分量都不为零。那么，我们可以在每个白色顶点 w 处施行规范变换，使最后一个分量，即 R_w 的第 $(n+1)$ 个分量为 1。在此规范下，边权重必须满足定义2.26中的条件。此外，在此规范下，T_w 的 n 元坐标 1、.....、n 在射影几何教材中称为仿射坐标 。

假设我们有一个处于仿射规范中的 VRC。那么在度为三的黑色顶点处，我们总能对该黑色顶点进行规范变换，使得三条关联边的权重为 $1, \mu$ 以及 $-(1+\mu)$。之后，我们主要会处理所有黑色顶点均为度为三的情形，因此这是一种实用的计算技巧。

除了规范变换之外，我们还对一组组合变换感兴趣。

定义 2.27。我们定义了三种局部变换，它们可以局部改变一个 VRC R。这三种局部变换（及其逆变换）称为

(1) 白色（黑色）顶点的收缩 （分别为分裂），(2) 黑色

（白色）顶点的收缩 （分别为分裂），以及 (3) 蜘蛛变换。

这些变换的组合结构和边权变化如图 2.8 所示。图 2.8 中未标注的边在相应的移动中其权重保持不变。■

通过直接计算可以验证，分裂中的向量 R_w 确实由边权重良好定义。对于蜘蛛变换，另一个简单的计算表明，左侧的关系蕴含右侧的关系，反之亦然。注意，如果组合结构如图 2.8 所示，那么我们总可以施行规范变换，使边权重也与图 2.8 左侧所示的一致。因此，局部变换是否可行完全取决于组合结构，而非向量。此外，注意图 2.8 所示蜘蛛变换的边权重关于旋转 180 度并不对称，但在规范变换意义下是对称的。

关于局部变换的几何意义，我们也简要说明几点。假设每个向量 $R_w \in \mathbb{C}^{n+1}$ 都是 $T_w \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中一个点的齐次提升。我们考虑以下变换：

(1) 图 2.8 左侧有两个黑色顶点，我们将它们的邻点标记为$\{w_1, \ldots, w_k, w\}$和 $\{w'_1, \ldots, w'_l, w\}$。假设 $n \geq l+k-2$，且所有点都处于一般位置。此时我们可以移除 w 并连接两个黑色顶点，因为$\{T_{w_1}, \ldots, T_{w_k}, T_{w'_1}, \ldots, T_{w'_l}\}$ 张成一个（$l + k - 2$）维射影空间。反过来，给定一个邻点为 $\{w_1, \ldots, w_k, w'_1, \ldots, w'_l\}$ 的黑色顶点，我们可以引入点 $T_w =$，使其张成空间$\{T_{w_1}, \ldots, T_{w_k}\} \cap$张成空间$\{T_{w'_1}, \ldots, T_{w'_l}\}$。

(2) 如果一个黑色顶点与两个白色顶点关联，那么相应的两个射影点必须相同。因此，我们可以收缩该黑色顶点，并将这两个白色顶点替换为一个同样对应于该点的白色顶点。我们还可以通过添加一个二价黑色顶点来分裂任意一个白色顶点。

(3) 考虑两个邻点分别为 $\{w_1, w_2, w_4\}$ 和 $\{w_2, w_3, w_4\}$ 的黑色顶点。那么，射影像 T_{w_1}, $T_{w_2}, T_{w_3}, T_{w_4}$ 必须位于同一条射影直线上。显然，也可以用两个邻点分别为 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 和 $\{w_3, w_4, w_1\}$ 的黑色顶点来描述这一构形。

还有一些已知的四边形局部变换未在此列出。不过，它们都可以通过组合上述三种局部变换得到。

2.5. TCD映射

本节旨在介绍与三重交叉图相关联的几何映射。它们编码了点构形的线性关系，使我们能够在统一的框架下处理大量来自离散微分几何、离散可积系统和统计力学的映射实例。在第5章中，它们还将使我们能够引入两种典范关联的簇结构，即射影簇结构和仿射簇结构。这两种结构的典范存在性解释了文献中实例所关联的两类簇结构为何会出现。此外，TCD映射的组合框架具有足够的灵活性，使我们能够从几何和组合结构的角度研究TCD映射的投影、截面和射影对偶的含义。此外，我们还能够理解这些操作下簇结构的代数恒等式和组合恒等式。

定义2.28. 设 $\mathcal{T}$ 为一个TCD。令 $\mathcal{T}_{\circlearrowleft}$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有面（包括边界面）构成的集合，其定向为逆时针；令$\mathcal{T}_{\circlearrowright}$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有面（包括边界面）构成的集合，其定向为顺时针。■

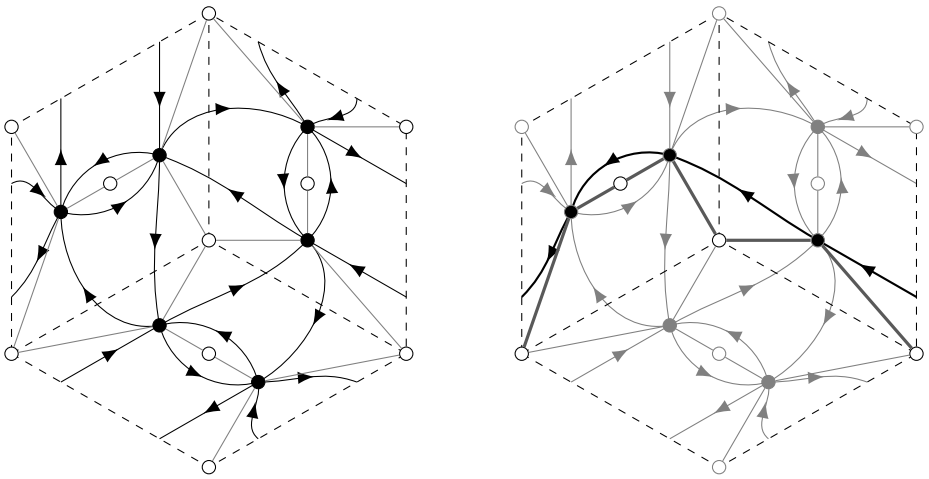


图 2.9。左：由三个平面四边形（虚线）构成的图 $\mathcal{G}$ （灰色）及其对应的 TCD（黑色）。右：我们突出显示了 $\mathcal{T}$ 的一条弦，以及 $\mathcal{G}$ 中对应的之字形路径。

定义2.29。*TCD*映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 将一个点指定给 $\mathcal{T}$的每个逆时针定向面，使得在每个三重交叉处，三个关联点中的任意两个所张成的直线都包含第三个点。对于每个 TCD 映射，我们可以选择一个相关的向量关系构型（*VRC*） R，其中，对于 $\mathcal{T}$中映射到 T中相应点在 $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中的一个提升的每个逆时针面，都有一个白色顶点；此外，每个三重交叉点对应一个黑色顶点。如果 $\mathcal{T}$中的相应交叉点和面相关联，则R 中有一条连接黑色顶点与白色顶点的边。边界顶点是对应于 $\mathcal{T}$的逆时针边界面的白色顶点。■

从某种意义上说，TCD映射捕捉了射影空间中点之间最基本的不变量，即三点共线。在一定程度上，这解释了考虑三重交叉的用处。平面结构为何如此有益，则不那么显而易见。原因之一是，在整篇论文中，我们都考虑三维系统（或其约化），这些系统由二维柯西数据定义。因此，核心数据与平面组合结构相关，也就不足为奇了。

定义 2.30。 设 $\mathcal{T}$是一个TCD。其对应的二分平面图 具有

(1) 对于 $\mathcal{T}$ 的每个逆时针面（包括边界面），设一个白色顶点 w；(2) 对于 $\mathcal{T}$ 的每个三重交叉，设一个黑色顶点 b；(3) 对于每一对逆时针面和相邻三重交叉，设一条边 $e = (w,\ b)$。■

每当我们处理一个 TCD $\mathcal{T}$时，都假设 $\mathcal{G}$ 是其关联的二分平面图。为加以区分，我们通常用 G表示其他图。注意，根据定义， $\mathcal{G}$ 的白色顶点集合 W 与 $\mathcal{T}_{\circlearrowleft}$一一对应。同样根据定义， $\mathcal{G}$的每个黑色顶点的度都是三。事实上，很容易看出，任何仅有白色边界顶点且所有黑色顶点的度均为三的二分平面图 G 都定义了一个三重交叉图。

定义2.31. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 TCD映射。一个关联向量关系构型 R 是一个 VRC $R\colon\ \mathcal{G} \to \mathbb{C}^{n+1}$，满足对于每个$w \in W$， $R(w)$都是 $T(w)$的齐次提升。■

每当我们处理 TCD映射 $T\colon\ \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 时，都会假设同时固定了一个与之关联的 VRC $R\colon \mathcal{G} \to \mathbb{C}^{n+1}$。当然，这意味着我们必须留意

论述和证明是否与 R 中齐次提升的选择无关。不过在实际操作中，这并不会造成任何困难。

对于任意 VRC $R\colon W(G) \to \mathbb{C}^n$，我们还可以将其与某个 TCD $\mathcal{T}$ 对应的 TCD 映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 关联起来。要看出这一点，请注意，借助定义 2.27 中介绍的局部收缩与分裂操作，我们可以将任意二分平面图 G 变换为一个图 $\mathcal{G}$，使其所有黑色顶点的度都为三。在此过程中，可能会出现新的白色顶点，因而也会产生新的向量，但除规范变换外，这些向量由 R 的边权唯一确定。最后，相应的 TCD 映射 T 只需将 $\mathcal{G}$ 的每个白色顶点映射到向量 $R(w)$ 的射影化。由于分裂黑色顶点这一过程，对给定 VRC 而言，相应的 TCD 映射并不唯一。不过，与同一 VRC 关联的两个不同 TCD 映射总是可以通过一系列局部变换相互关联。我们将在下文的定义 2.34 中介绍局部变换。

我们将TCD映射视为基本对象，而不是VRC，因为我们主要关注射影几何中的对象和映射。此外，我们稍后研究的大多数有趣量，例如簇结构和配分函数，都是在VRC的规范变换下考虑的，这也是将TCD映射视为基本对象的另一个原因。TCD映射的另一个优势是，在其关联的VRC中，所有边权都由向量确定，并且只确定到规范变换；而在一般的VRC中则并非如此。因此，关于一个TCD映射的所有信息都完全包含在该TCD映射的点中，边权中没有隐藏任何信息。

一般而言，我们尽可能少地依赖计算，而更倾向于依赖关联定理和一组灵活的引理。然而，在确实需要进行计算的情况下，使用VRC最为实际。

例 2.32. 我们之前讨论过平面四边形的 VRC，见例 2.25 和图 2.7。在这种情况下，每个四边形的共面性都用一个四度黑色顶点表示。将这些黑色顶点逐一分裂后，我们便得到一个三重交叉图，见图 2.9。这样产生的额外点是平面四边形的对边直线的交点。这些额外的点称为焦点，我们将在第 3.3 节中进一步说明。■

我们也简要说明一下，如何在相关的二分图 $\mathcal{G}$中识别 TCD 的弦。事实上，对于任意平面二分图，这些弦都存在一种推广。

定义2.33. 设 G 是一个平面二分图。 G 中的锯齿形路径是形如（w_1， b_1， w_2， b_2，.....，b_{n-1}， w_n）的路径，满足
（1）在黑色顶点处尽可能向左转；（2）
在白色顶点处尽可能向右转；（3）从边
界开始并在边界结束。
■

显然，如果 G 实际上是某个 TCD $\mathcal{T}$所对应的二分图 $\mathcal{G}$，那么 $\mathcal{G}$ 的之字形路径与 $\mathcal{T}$ 的弦一一对应，见图 2.9。给定一条弦，其之字形路径由位于该弦上的所有黑色顶点以及紧邻该弦左侧的所有白色顶点组成。

2.6. TCD映射中的局部变换与 dSKP 方程

在第2.1节中，我们讨论了三重交叉图中的局部变换——2-2 移动。现在，我们不仅要在 TCD 上定义 2-2 移动，也要在 TCD 映射上定义，并探究其对相关 VRC 的影响。

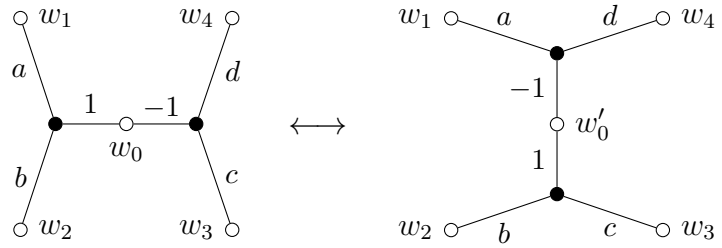


图 2.10. 重新分裂的边权。

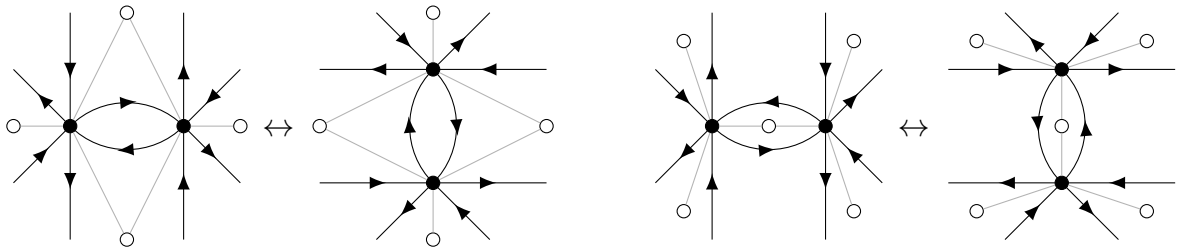


图 2.11. 顺时针和逆时针定向双边形中的 2-2 移动所呈现的 TCD $\mathcal{T}$ 和图 $\mathcal{G}$ 。

定义2.34. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 TCD 映射。一个局部变换 将 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n\tilde{}}$ ˜替换为一个新的 TCD 映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$。这两个局部变换为

(1) 蜘蛛变换，这是在 $\mathcal{T}$ 的顺时针定向面上进行的 2-2 移动。 T 的像点保持不变；该移动对应于 $\mathcal{G}$ 中的蜘蛛变换，见图 2.8 中的 (3)；

(2) 重新分裂，这是在 $\mathcal{T}$ 的逆时针定向面 f 上进行的 2-2 移动。面 $_{\sim}f$ 对应于 $\mathcal{G}$ 的一个白色顶点 w_0。通过重新分裂，点 $T(w_0)$ 被 $T(w_0')$ 替换；˜ 由向量 $R(w_0')$ 的射影化确定，而该向量又由 R 的边权确定，如图 2.10 所示。 T 的其他像点保持不变。

■

˜我们首先讨论重新分裂。根据定义，重新分裂将 $T(w_0)$ 替换为 $T(w_0')$。我们˜需要检查 T 是否仍然是一个 TCD 映射，这相当于验证 $T(w_0')$ 是否与四个未改变的点 $T(w_1)$ $T(w_2)$ $T(w_3)$ $T(w_4)$ 中的任何一个重合。然而，由于重新分裂后的边权均不等于 0，因此这种情况不可能发生， T 确实是一个 TCD 映射。

在一般情形下，重新分裂涉及的五个点 $T(w_0)$ $T(w_1)$ $T(w_2)$ $T(w_3)$ $T(w_4)$ 张成一个平面。在这种情况下，我们实际上发现这是梅涅劳斯构形的情形，见图 2.12。确实， $T(w_0')$ 必须是直线 $T(w_1)T(w_4)$˜ 与 $T(w_2)T(w_3)$ 的交点。因此，在一般情形下，重新分裂后得到的新点 $T(w_0')$ 由关联几何唯一确定。关于退化情形——也就是 $T(w_0)$ $T(w_1)$ $T(w_2)$ $T(w_3)$ $T(w_4)$ 张成一条直线而非一个平面的情形——我们也可以进一步讨论，不过首先需要理解交比和多重比的概念。

定义 2.35. 设 p_1, p_2, p_3 是 ℓ 中的一条直线上的点，其中 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，并假设我们有 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$的一个固定仿射图 $\mathbb{C}^n$ 。则有向长度比 $\lambda(p_j, p_k, p_i)$满足

$$(p_j - p_i) = (p_k - p_i)\lambda(p_j, p_k, p_i), \tag{2.6}$$

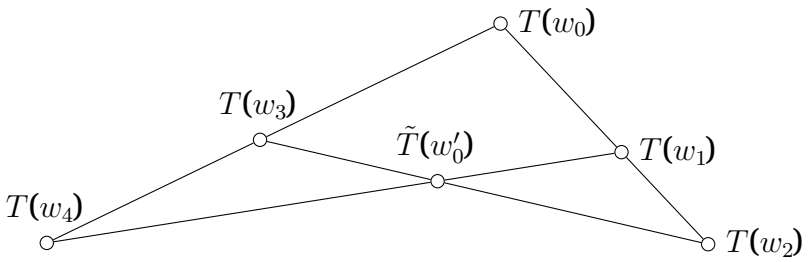


图 2.12. 梅涅劳斯构型。

对于满足 $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$的任意一组指标。我们还注意到，固定图 $\mathbb{C}^n$在直线 ℓ上诱导出一个仿射图 $\mathbb{C}$ 。因此，我们也将有向长度比写作

$$\lambda(p_j,p_k,p_i)=\frac{p_j-p_i}{p_k-p_i}, \tag{2.7}$$

其中，商是在 ℓ的诱导仿射图 $\mathbb{C}$ 中取的。 ■

定义2.36. 设 $p_1,p_{1,2},p_2,p_{2,3},\dots,p_m,p_{m,1}$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中的 $2m$ 个点，且每个$p_{k,k+1}$都在直线 p_kp_{k+1}上。于是，我们选取 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的一个仿射图 $\mathbb{C}^n$ ，并将这些点的多重比 定义为

$$\mathrm{mr}(p_1,p_{1,2},p_2,\dots,p_m,p_{m,1})=\prod_{k=1}^{m}\frac{p_k-p_{k,k+1}}{p_{k,k+1}-p_{k+1}}. \tag{2.8}$$

在 $m=2$ 的特殊情形下，我们称多重比为交比，即

$$\mathrm{cr}(p_1,p_{1,2},p_2,p_{2,1})=\frac{p_1-p_{1,2}}{p_{1,2}-p_2}\frac{p_2-p_{2,1}}{p_{2,1}-p_1}. \tag{2.9}$$

■

下面列出多重比的一些基本但重要的性质；证明可参见例如 [**BS08**]。

引理 2.37。设 $p_1,p_{1,2},\dots,p_m,p_{m,1}$ 是 $2m$ P^n 中的点，且每个 $p_{k,k+1}$ 都在直线 p_kp_{k+1}上。那么，多重比 $\mathrm{mr}(p_1,p_{1,2},p_2,\dots,p_m,p_{m,1})$

(1) 不依赖于用于计算它的仿射图，

(2) 在射影变换下保持不变，并且

(3) 在（中心）投影下保持不变，前提是不存在 k 使得 $p_{k,k+1}$ 被投影到与 p_k 或 p_{k+1}相同的点上。■

请注意，在论文中，我们遵循这样的约定：射影变换 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n\to\mathbb{C}\mathrm{P}^n$之间的双射。我们将投影 作为中心投影 的简称，并注意到，按照我们的约定，投影并不是射影变换。

现在我们说明，有向长度比自然地出现在 TCD映射中。

引理 2.38. 假设 VRC 中有一个三价黑顶点 b ，其白色邻点为 R w_1,w_2,w_3。设 μ_1,μ_2,μ_3 是仿射规范下对应的边权。那么有向长度比值为

$$\frac{R(w_j)-R(w_i)}{R(w_k)-R(w_i)}=-\frac{\mu_k}{\mu_j}, \tag{2.10}$$

适用于 $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$。 ■

证明。由于我们处于射影直线的仿射规范中，因此可以将 $R(w_1)$ $R(w_2)$ $R(w_3)$ 取为 $\mathbb{C}$ 中的数，并附带以下两个方程

$$\mu_1 R(w_1) + \mu_2 R(w_2) + \mu_3 R(w_3) = 0, \tag{2.11}$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0. \tag{2.12}$$

将这些方程代入所需的表达式，得到

$$\frac{p_j - p_i}{p_k - p_i} = \frac{\frac{\mu_i p_i + \mu_k p_k}{\mu_i + \mu_k} - p_i}{p_k - p_i} = \frac{\frac{-\mu_k p_i + \mu_k p_k}{\mu_i + \mu_k}}{p_k - p_i} = -\frac{\mu_k}{\mu_j}. \tag{2.13}$$

□

现在，我们可以通过一个多重比方程来刻画非一般位置情形下的重新分裂。

˜引理 2.39. 设 $T(w_0)$ $T(w_0')$ $T(w_1)$ $T(w_2)$ $T(w_3)$ $T(w_4)$ 为图 2.10 中重新分裂所涉及的点。那么，多重比方程

$$\mathrm{mr}(T(w_1), T(w_0), T(w_2), T(w_3), \tilde{T}(w_0'), T(w_4)) = -1 \tag{2.14}$$

成立。 ■

证明. 根据引理 2.38，多重比可以用边权重表示。由图 2.10 可读出这些边权重，它们相互抵消，从而得到引理陈述中所需的方程。□

引理 2.39 中的多重比方程称为*dSKP* 方程，是离散 *Schwarzian Kadomtsev-Petviashvili* 方程 [**NCWQ84, DN91, BK98a, BK98b, KS02**]的简称。dSKP 方程被视为 A_3 格上的晶格方程。它与 A_k-格的关系将在第 2.8 节中说明。 A_3 格的情形将在第 3.7 节中再次出现。注意，公式（2.14）具有高度的对称性，这与梅涅劳斯构型的对称性一致（见图 2.12）。事实上，在一般位置的情形下，也就是说，如果点˜$T(w_0)$ $T(w_0')$ $T(w_1)$ $T(w_2)$ $T(w_3)$ $T(w_4)$张成一个平面，那么引理 2.39 就是以下这个著名（且古老）的关联定理，该定理以梅涅劳斯命名。

定理 2.40（梅涅劳斯定理）。设 A_1， A_2， A_3 是 $\mathbb{CP}^2$ 中三角形的顶点，并设 B_{12}， B_{23}， B_{13} 是三个点，满足 B_{12} 在直线 A_1A_2上， B_{23} 在直线 A_2A_3 上，并且B_{13} 在直线 A_1A_3上，见图 2.12。则

$$\mathrm{mr}(A_1, B_{12}, A_2, B_{23}, A_3, B_{13}) = -1 \tag{2.15}$$

当且仅当 B_{12}， B_{23}， B_{13} 在同一直线上时。 ■

梅涅劳斯定理与构型之间的关系以及 dSKP 方程已由 Konopelchenko 和 Schief [**KS 02**] 进行过研究。下面我们简要总结一下。根据引理 2.37，由重新分裂相关联的 6 个点在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的投影，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$，中也构成一次重新分裂，因为该引理指出，多重比在投影下保持不变。反过来，结论也成立： $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的每一次重新分裂都是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中某次重新分裂的投影。为说明这一点，假设我们将 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 作为一条直线 ℓ 纳入 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$，并固定一个点 $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus \ell$，从该点出发，我们希望将其投影到 ℓ 上。然后，我们可以分别在直线 $PT(w_0)$ $PT(w_1)$ 和 $PT(w_4)$ 上选择 $T(w_0)$ $T(w_1)$ 和 $T(w_4)$ 的提升，使得这些提升不共线。现在， $T(w_2)$ 和 $T(w_3)$ 可由直线的交点确定。此外， $T(w_0')$ 的提升必须是直线 $T(w_2)T(w_3)$ 与 $T(w_1)T(w_4)$ 的交点。由于直线上的重新分裂的多重比刻画以及多重比在投影下的不变性，这个交点恰好就是投影到 $T(w_0')$ 上的那个点。因此，提升的构造总是能够闭合，且提升始终存在。

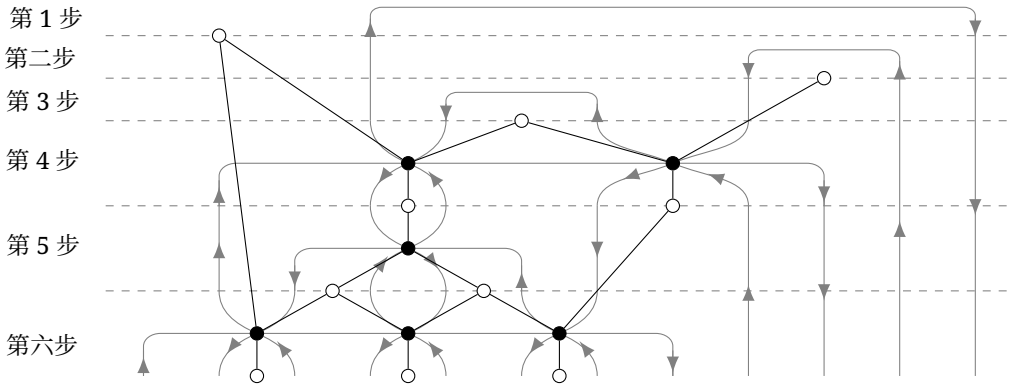


图 2.13. 标准图及其用于端点匹配的关联图 $\mathcal{G}$ $\mathcal{S}_3^6$。

现在我们也来讨论蜘蛛变换。我们观察到，蜘蛛变换不会改变 T 的点，也不会产生新的直线，只有三重交叉图 $\mathcal{T}$ 的组合结构发生变化。这就是为什么我们将蜘蛛变换视为一种重新参数化。几何对象本身并未发生变化，改变的只是对象的参数化方式。然而，蜘蛛变换可能会出现一个问题。我们将蜘蛛变换涉及的四个白色顶点记为 w_1、w_2、w_3、w_4，使得在变换之前，三元组 w_1、w_2、w_3 和 w_3、w_4、w_1 均与同一个黑色顶点相邻，而在变换之后，三元组 w_2、w_3、w_4 和 w_4、w_1、w_2 均与同一个黑色顶点相邻（见图 2.8）。那么，就有可能出现 $T(w_2) = T(w_4)$，~ ~，这对于 T 而言并不是问题。然而，此时我们还会有 $T(w_2) = T(w_4)$，这违反了 T 的 TCD 映射定义中的 ~。在这些情况下，蜘蛛变换的定义是不明确的。然而，在某些情况下，我们希望能够不假思索地执行 2-2 移动。

定义 2.41. 设 $\mathcal{T}$ 是一个极小TCD，且 $T\colon \mathcal{T} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 TCD 映射。若每一种可能的蜘蛛变换都有定义，且对于任何通过一系列 2-2 移动与 T 相关的 TCD 映射 T，每一种可能的蜘蛛变换也都有定义，则称 T 是一个翻转一般 TCD 映射。■

在定义 2.41 中，$\mathcal{T}$ 是极小元这一点很重要，因为此时翻转图是有限的且已得到充分理解，详见第2.1节。

注 2.42. TCD 映射的主要动机之一是研究离散微分几何（DDG）中的实例。在离散微分几何中，人们通常不会探究奇点是否出现，而是直接假设它们不会出现。通常认为，只需稍微调整初始数据，就足以避免遇到奇点；这种做法完全符合离散微分几何的需求。然而，在一定程度上，本文希望表明，离散微分几何中许多被避开的奇点实际上并非问题，有时甚至具有特别的研究价值。第4.1节专门讨论具有非一般位置射影维数的 TCD 映射。因此，定义 2.41 很有用，它明确指出了在 TCD 映射框架中同样需要避免的那些奇点。■

2.7. TCD映射的存在性与最大维数

我们尚未回答的一个自然问题是，对于给定的 TCD，是否确实存在 TCD映射。当然，如果 TCD映射映到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$，那么（几乎）任意选取点都可以，因为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中任意三个点都在一条直线上。因此，较为实质的问题是：给定 $\mathcal{T}$，存在 TCD映射 $T\colon \mathcal{T} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，且 T 的像张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 时，最大维数 n 是多少?

定理 2.43. 极小TCD $\mathcal{T}$ 的最大维数为 $|W|-|B|-1$，即图 $\mathcal{G}$ 中白色顶点数与黑色顶点数之差再减一。等价地，最大维数为

任意半平面图中的左行弦数量。此外，TCD映射的所有点都包含在边界点的张成空间中。■

证明。我们先对标准图证明这一点。考虑定义 2.4 中标准图的迭代构造。我们在倒序执行各步骤的过程中，为 T 赋予点。当我们从左下方带有入端点的弦开始标记时，外面（位于所有其他部分上方，见图 2.13）是逆时针面。因此，在开始之前，我们先为外面在 TCD映射中添加一个射影点。到目前为止，TCD映射中的点所张成空间的射影维数为零。在 TCD 的标准构造的每一步中，我们都会在 VRC 中添加白色顶点和黑色顶点，同时为每个白色顶点在 TCD映射中添加点。如果添加的边界平行弦从左向右定向，并与 $2m$ 条其他弦相交，我们就为这些交点添加 m 个黑色顶点，并为添加的弦下方新出现的逆时针面添加 m 个白色顶点。新点必须位于由其上方已选点确定的直线上，因此它们已经属于上方所有点的张成空间。如果添加的边界平行弦从右向左定向，并与 $2m$ 条其他弦相交，我们就为这些交点添加 m 个黑色顶点，并为添加的弦下方新出现的逆时针面添加$(m+1)$个白色顶点。最左侧的新点可以任意选取，因此我们选择使其处于一般位置。这会使所有点的张成空间增加一维。这就证明了标准图的最大维数为 $|W|-|B|-1$ 。

此外，当我们添加一条右行弦时，新增弦下方的新点张成空间包含新增弦上方一层的点。当我们添加一条左行弦时，新增弦下方的新点与新增弦左上方和右上方的两个点的并集张成空间包含新增弦上方一层的点。因此，在每一步中，所有点都包含在与 TCD 边界面对应的白色顶点的点所张成的空间中。由归纳法可知，以这种方式构造的 TCD 映射的所有点都位于边界点张成的空间中。

现在，给定任意一个 TCD $\mathcal{T}$，我们可以首先按照上述方法，构造一个与 $\mathcal{T}$ 具有相同端点匹配的标准图 $\mathcal{T}'$ 所关联的 TCD 映射。其最大维数为$|W|-|B|-1$。这一差值在 2-2 移动下保持不变，并且存在一个序列，可以将 $\mathcal{T}'$ 变为 $\mathcal{T}$。维数在 2-2 移动下不会发生变化，且边界点也不会改变。因此， $\mathcal{T}$ 的最大维数同样为 $|W|-|B|-1$ 。端点匹配在 2-2 移动下也保持不变。因此，该定理对任意 TCD 均成立。

最后的论证存在一处技术性不准确。由于我们为标准图 $\mathcal{T}'$ 构造的 TCD映射 T' 未必是翻转一般的，因此，将 $\mathcal{T}'$ 变为 $\mathcal{T}$的 2-2 移动序列可能包含一个定义不明确的蜘蛛变换。或许我们可以通过对 TCD映射 T'稍作“扰动”来避免这一问题。定理的严格证明见第 5.6 节，其中引理 5.29 表明，定义 5.28 中给出的构造算法可以为任意极小TCD $\mathcal{T}$构造一个最大维数的 TCD T 。然而，该引理依赖大量组合结构和代数，而这些内容我们将在后续章节中才予以阐述。因此，我们选择在此给出上述“看似合理”的论证。□

例2.44. 设 T 是一个从 $\mathcal{T}_{\circlearrowleft}$ 出发、具有端点匹配$\mathcal{S}_k^n$的TCD映射。那么 T 的最大维数是 k，因为这就是左行弦的数量。■

2.8. A_n中的多维一致性

存在一种自然的方法，可以将与任意 TCD 相关联的 $\mathcal{G}$ 白色顶点嵌入到 A_n格中，其中（$n+1$）是 TCD 中弦的数量。设

$$A_n = \left\{ (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} z_i = 0 \right\} \tag{2.16}$$

称为 A_n 格。因此， A_n 格定义为 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 中所有坐标和为零的点。我们可以用任何其他整数替换零，并在 A_n的平移副本上进行操作。这有时会简化记号。为了找到映射，我们实际上可以定义一个映射 $\mathcal{A}$，将 TCD 的所有面映射到 $\mathbb{Z}^{n+1}$，而不只是将逆时针定向面映射过去。我们为每条弦 s指定一个唯一的指标 $i_s \in \{0, 1, \ldots, n\}$。我们选取一个逆时针面 f_0 作为基点，并将其映射到原点，即 $\mathcal{A}(f_0) = 0$。现在，若有两个相邻面 f和 f'，且 f'位于它们公共弦 s的左侧，则我们要求 $\mathcal{A}(f') - \mathcal{A}(f) = e_{i_s}$。这一定义良好，因为在 TCD 的任一交叉点周围，对于涉及的每条弦 s ，我们都恰好加减一次 i_s 。此外，要从一个逆时针定向面到达另一个逆时针定向面，我们从右向左经过的弦数必定与从左向右经过的弦数相同。因此，所有白色顶点的坐标和都是常数。由此，相关 VRC 的所有白色顶点都映射到 $A_n \subset \mathbb{Z}^{n+1}$。由于我们处理的是最小三重交叉图，映射 $\mathcal{A}$ 的取值仅在 $\{0, \pm 1\}^n$中。因此，我们通常用一组指标来简单表示 $\mathcal{A}$ 的像，如图 2.14 所示。

或者，还有另一种映射 $\mathcal{A}'$ ，它映射到 A_n 的一个平移副本，并且可以直接构造。我们按如下方式将点 $\mathcal{A}'(f) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ 指派给每个面 f：

$$\left(\mathcal{A}'(f)\right)_i = \begin{cases} 1 & f \text{ is to the left of strand } i, \\ 0 & f \text{ is to the right of strand } i. \end{cases} \tag{2.17}$$

因此，该映射 $\mathcal{A}'$ 确实映射到 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 中 A_n 的一个平移副本，并且我们有如下关系。

$$\mathcal{A}'(f) - \mathcal{A}'(f_0) = \mathcal{A}(f), \tag{2.18}$$

对于所有面 f。

当然，一方面可以将映射 $\mathcal{A}$ 视为从 A_n的一个子集到移位记号指标的映射（我们将在第3章开篇介绍）。将 A类型的移位记号与带有弦的图关联起来这一具体想法，早已出现在簇代数与Grassmann流形的研究中 [Sco06]。文献中也以*Abel* 映射 [**Foc15, GI19**]之名出现过一种 $\mathcal{A}'$ 的版本。Abel 映射定义在环面上，针对的是二分图的之字形路径，而非TCD的弦。

观察 Q网、达布映射或直线复形的三重交叉图时，我们发现弦可以划分为 6 个（ $\mathbb{Z}^2$ Q网则为 4 个）族，使得同一族中的弦彼此不相交。这使我们能够为同一族中的所有弦赋予相同的指标。因此，六边形情形下 A晶格的维数为 5，而方形情形下为 3。这种观点令人联想到 $\mathbb{Z}^n$ 中将等辐图构造为组合曲面的做法，正如 Bobenko、Mercat 和 Suris [**BMS05**] 所讨论的那样。

我们将采取类似的观点，把 TCD 看作 A_n格中的离散组合曲面，而 TCD 映射则可视为离散几何曲面。自然地，可以将 $\mathcal{G}$ 的一个白色顶点处的 2-2 移动（重新分裂）视为同时改变 A_n 中的组合曲面和射影空间中的几何曲面。另一方面，我们将 $\mathcal{G}$ 的一个四边形处的 2-2 移动（蜘蛛变换）解释为几何曲面的重新参数化，因为它只改变组合曲面。

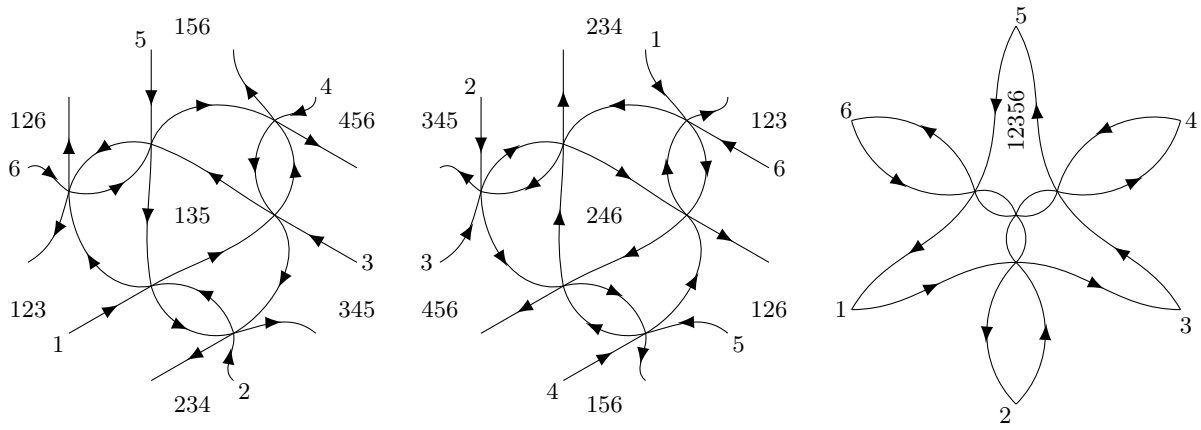


图 2.14。将与某个 TCD 相关联的 VRC 中的点映射到 A_5 格中的点的映射 $\mathcal{A}'$ 。

重要的是要认识到，给定一个 TCD，我们可以进行一系列 2-2 移动（不走回头路），并最终回到原来的 TCD。换句话说：2-2 翻转图中存在圈。我们现在声称，TCD 映射在 2-2 移动下是一致的：如果我们回到同一个 TCD，也会回到同一个 TCD 映射。为证明这一点，我们考虑 Thurston [**Thu17**] 最近提出的猜想，该猜想已由 Balitskiy 和 Wellman 证明。

定理 2.45（[**BW20**]）。令 $\mathfrak{F}$ 为由具有固定端点匹配的三重交叉图的翻转图构成的 2-复形（见定义2.3），并将以下 2-胞腔粘合到该复形上：

(1) 四边形：凡是两个翻转因距离足够远而可交换之处；(2) 五边形：凡是图的某个子集中存在一个 5-圈，且该子集是具有端点匹配 $\mathcal{S}_3^5$ 的三重交叉图之处（见图 2.15），或 $\mathcal{S}_1^5$（图 2.15 的定向反转）；(3) 十边形：凡是图的某个子集中存在一个 10-圈，且该子集是具有端点匹配 $\mathcal{S}_2^5$ 的三重交叉图之处（见图 2.16）。

因此， $\mathfrak{F}$ 是单连通的。 ∎

$\mathfrak{F}$ 是单连通的这一陈述意味着，翻转图中的任意圈都可以由定理中列出的三类基本圈组合生成。该定理使我们能够针对2-2移动，给出TCD映射多维一致性的一个初等证明。

定理2.46。翻转一般位置TCD映射在 A_n上一致。 ∎

证明。由定理2.45可知，只需证明沿着 $\mathfrak{F}$中的三类基本圈时结论成立即可。对于4-圈，由于递推是局部定义的，结论显然成立。

对于10-圈，该构型至多张成一个二维空间。假设它确实张成一个二维空间，则内部点由边界点唯一确定。因此，dSKP方程沿着二维空间中的10-圈具有相容性。在一维情形下，直接进行代数计算同样可以证明该结果。

有两种5-圈构型。带有端点匹配 $\mathcal{S}_1^5$ 的图示圈没有内部点，因此显然是一致的。有趣的情况是 $\mathcal{S}_3^5$ 端点匹配。它最多可以张成一个维数为3的空间。如果它张成的空间维数为二或三

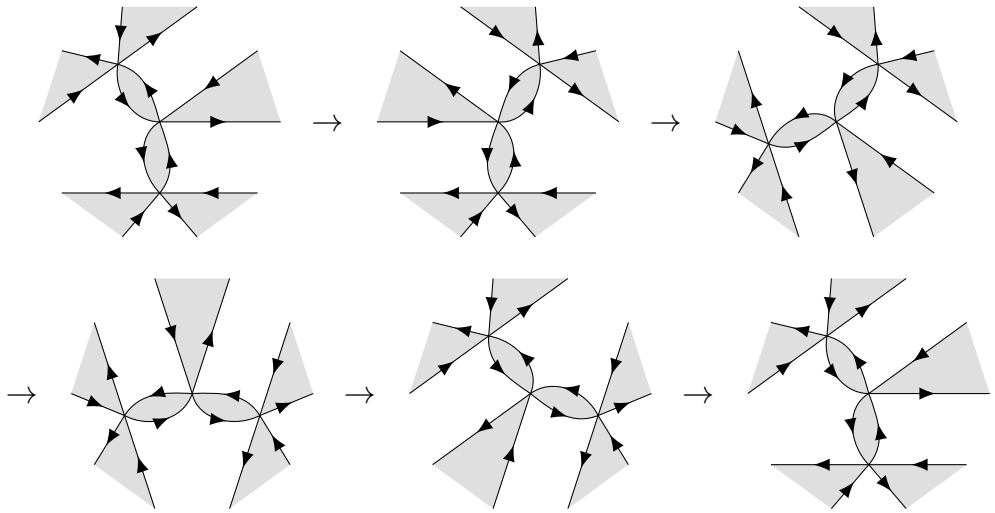


图 2.15. 三重交叉图的翻转图中的基本 5 圈。每个图都是对前一个图中的两个双边形之一应用 2-2 移动得到的。灰色面对应于 $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ 中的点。

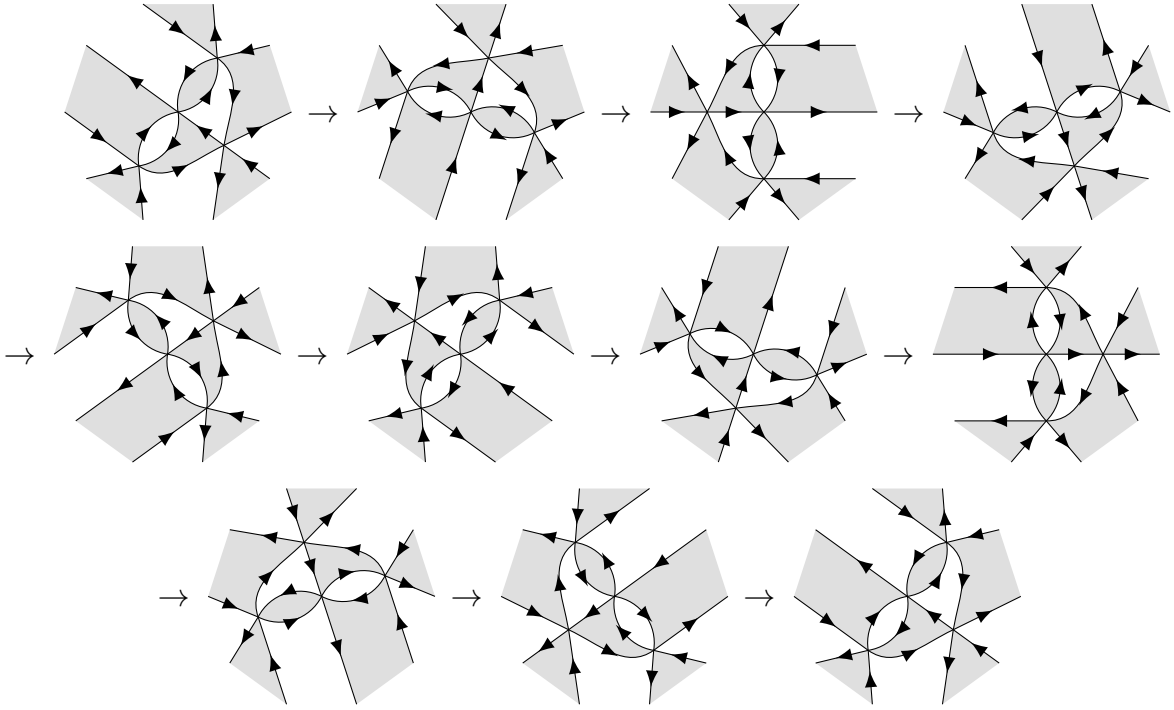


图 2.16. 三重交叉图的翻转图中的基本 10 圈。

那么它实际上就是德萨格构型（见图 2.17和定理 2.47）。例如，三角形（x_{12}，x_{13}，x_{15}）和（x_{24}，x_{34}，x_{45}）关于 x_{14}处于透视位置。因此，这两个三角形相对于通过 x_{23} 和 x_{35}的直线也处于透视位置，而 x_{25} 也位于该直线上。因此，TCD映射沿着这条10-圈是良定义的。在一维情形下，直接的代数计算再次证明了这一结果。至此，证明完成。□

请注意，对于非翻转一般位置TCD映射而言，障碍在于可能无法沿定理2.45中的每一个基本圈进行翻转，因此可能有必要检查其他圈，而不仅仅是这些圈。我们不认为非翻转一般位置TCD映射会不满足多维一致性，但我们不再进一步研究这个问题。

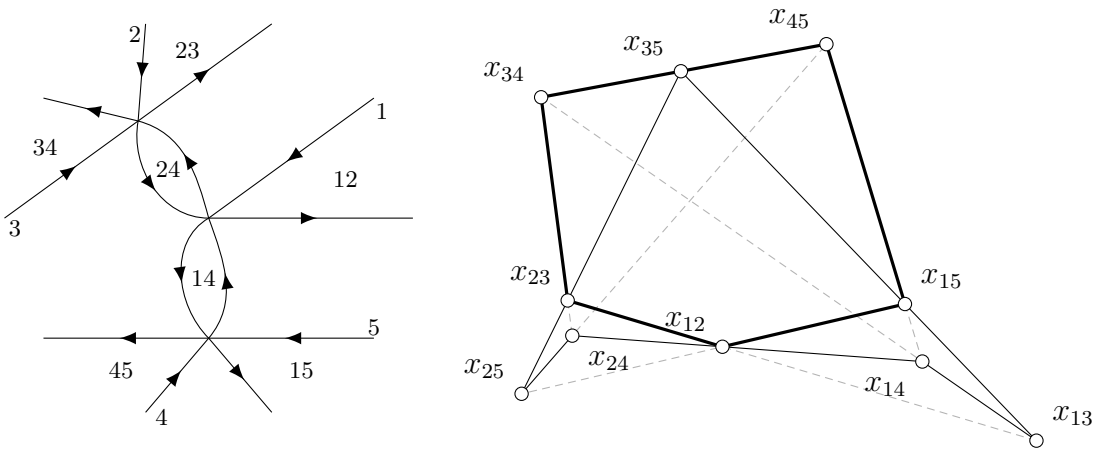


图 2.17. 笛沙格定理。左侧是右侧笛沙格构形的柯西数据。

定理2.47（笛沙格定理）。设 A_1、 A_2、 A_3 和 B_1、 B_2、 B_3 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$中的 $n \geq 2$两个三角形的顶点。则以下两个陈述等价：

(1) 三条直线 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 交于一点。(2) 三个点 $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_2A_3 \cap B_2B_3, A_3A_1 \cap B_3B_1$ 共线。 ■

如果条件 (1) 成立，则称这两个三角形关于一个点透视；如果条件 (2) 成立，则称它们关于一条直线透视。在图 2.17 中，我们看到这两个三角形 x_{14}, x_{24}, x_{34}和 x_{15}, x_{25}, x_{35}关于 x_{45}以及关于经过三个点 x_{12}, x_{23}, x_{13}的直线透视。更一般地，这两个三角形 $\{x_{ik}:$ $k \notin \{i,j\}\}$ 和 $\{x_{jk}: k \notin \{i,j\}\}$ 关于点 x_{ij} 透视。它们也关于直线 $\{x_{kl}: k,l \notin \{i,j\}\}$透视。或者，也可以说五边形 $(x_{k,k+1})$ 和 $(x_{k,k+2})$ 彼此相切外接，这意味着每个点 $x_{k,k+1}$ 都在直线 $x_{k,k+3}x_{k+1,k+3}$ 上，且每个点$x_{k,k+2}$ 都在直线 $x_{k,k+1}x_{k+1,k+2}$上。

相容性由笛沙格定理导出，这并不令人意外。早已指出，在基本直线复形的情形下，多维一致性源于笛沙格定理 [**BS15**]。此外，我们可以在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 中考察 TCD 映射，从而为 dSKP 方程的多维一致性提供一种新的组合证明。Adler、Bobenko 和 Suris 首先给出了 dSKP 方程多维一致性的另一种证明，并将其纳入八面体型可积方程的分类中 [**ABS12**]。另一方面，King 和 Schief 指出，dSKP 方程的相容性在几何上源于笛沙格定理的共形版本 [**KS12**], ，这与我们在此给出的诠释十分契合。

注 2.48。我们还将在第4.6节考察所谓的 Desargues映射。然而，在完成论文后不久，有人提醒我们，Desargues映射有一种较新的不同定义 [**Dol10a**，命题 3.1], ，其中原始定义是一个特例。这种较新的 Desargues映射定义在 A_n 上；如上所述，通过映射 $\mathcal{A}$ 嵌入 TCD映射后，TCD映射可以理解为 Desargues映射的某些子集。■

第3章

TCD映射与离散微分几何

我们的四个主要示例源自离散微分几何（DDG）：Q网、达布映射、直线复形和直线复合体。这些都是对离散微分几何至关重要的射影可积 $\mathbb{Z}^n$ 型映射。本章重点介绍如何将这些映射作为 TCD 映射来处理。为此，我们在每个示例中将一个 TCD 映射与柯西数据相关联。我们证明，柯西数据的传播对应于在 TCD 映射中执行 2-2 移动。此后，可积性便直接成为定理2.46的推论。在论文后续部分，我们将进一步论证为何应当平等地看待这四种映射。特别是，我们将证明它们可以通过取截面（第4.2节）、射影对偶（第 4.7 节）和焦变换（第 6.6 节）相互关联。此外，TCD 映射框架还提供了这些映射的一种规范代数描述，即通过作为射影不变量的簇变量来描述它们（第 5.3 节）。许多其他系统，例如 Kœnigs 网、A-网、圆网、Cox格等，都可以通过对 Q网、达布映射、直线复形或直线复合体进行约化而得到，因此它们同样也是 TCD 映射。

3.1. $\mathbb{Z}^n$中的四边形图与多维一致性

我们已经看到，在第 2.8 节中，TCD映射通常在 A_n 格上是离散可积的。然而，本章将要介绍的例子具有一项重要性质，即在 $\mathbb{Z}^n$ 上具有离散可积性。为此，我们首先解释定义在四边形图上的映射与 $\mathbb{Z}^n$ 上的离散可积性之间的关系，这与第 2.8 节中的结果类似。

首先，我们介绍一种方法，用 $\mathfrak{Q}$ 中的点为极小四边形图 $\mathbb{Z}^n$ 的顶点进行标记，其中 n 是 $\mathfrak{Q}$ 的条带数。我们还为 $\mathfrak{Q}$ 的每条条带任意选定一个定向，并为每条条带 s 分配一个唯一的索引 $i_s \in \{1, 2, \dots, n\}$。该标记是一个映射 $\mathcal{Z}\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{Z}^n$，其中我们用索引集表示 $\mathbb{Z}^n$ 中的每个点，与第 2.8 节中映射 $\mathcal{A}$ 的情形相同。我们选取一个基顶点 $v_0 \in V(\mathfrak{Q})$，并将其映射到原点。若有两个相邻顶点 v 和 v'，且 v' 位于它们的公共条带 s 的左侧，则要求 $\mathcal{Z}(v') - \mathcal{Z}(v) = \mathbf{e}_{i_s}$，其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的单位向量。或者，还存在

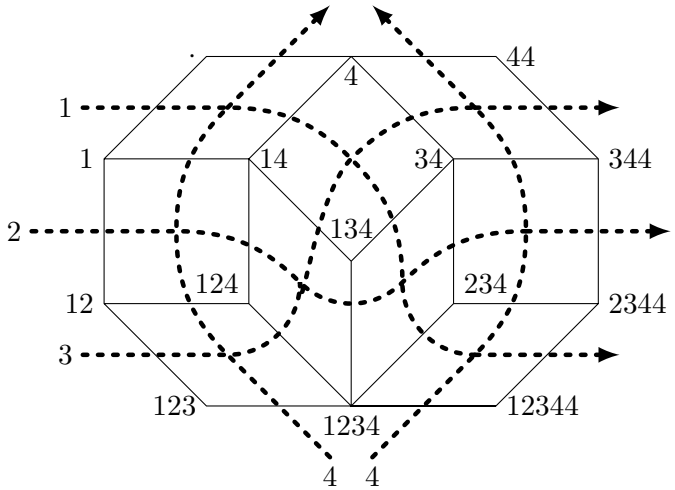


图 3.1. 四边形图的条带与标记。

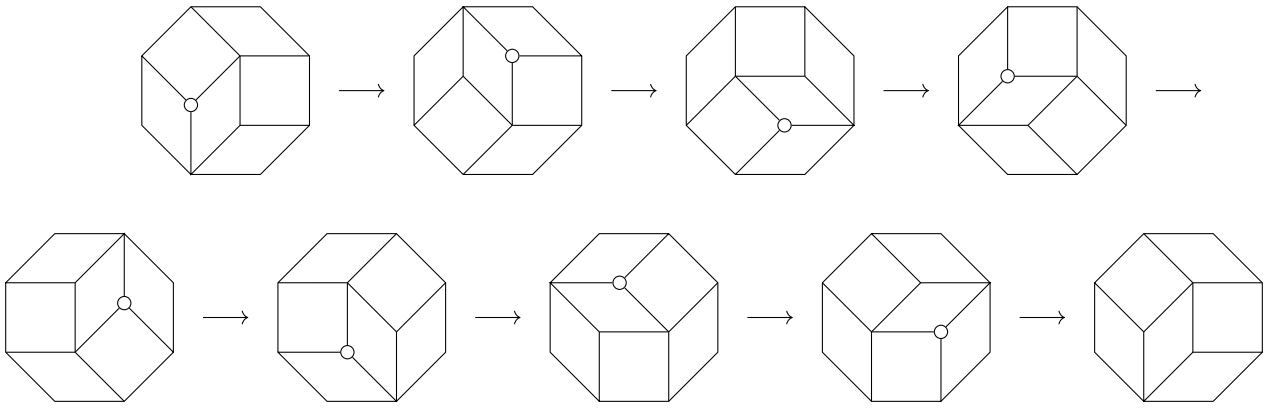


图 3.2. 四边形翻转图中的非平凡圈。

另一种映射 $\mathcal{Z}'$，它有一种直接的构造。我们按如下方式为每个顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$ 指定点 $\mathcal{Z}'(f) \in \mathbb{Z}^n$：

$$(\mathcal{Z}'(v))_i = \begin{cases} 1 & v \text{ is to the left of strip } i, \\ 0 & v \text{ is to the right of strip } i. \end{cases} \tag{3.1}$$

因此，映射 $\mathcal{Z}'$ 满足关系

$$\mathcal{Z}'(v) - \mathcal{Z}'(v_0) = \mathcal{Z}(v), \tag{3.2}$$

对于任意 $v \in V(\mathfrak{Q})$，因此它是映射 $\mathcal{Z}$的平移版本。 $\mathcal{Z}'$ 的像实际上包含在超立方体 $\{0,1\}^n$ 中。然而，如果两条条带在 $\mathfrak{Q}$中不相交，我们就可以为它们赋予相同的索引，从而得到不一定映入超立方体的标记；图 3.1 展示了一个例子。

如第 2.3 节所述，立方体翻转是四边形图上的一种局部变换。本节考察定义在四边形图的顶点、边或面上的某些映射，并介绍当四边形图发生立方体翻转时这些映射如何变化的规则。我们研究这些映射及规则是否具有多维一致性。为此，我们检查这些映射沿四边形图翻转图中的圈是否定义良好。值得注意的是，四边形翻转图中只有一个非平凡圈，即图 3.2 所示的 8 圈（参见 Felsner [**Fel04**], 的著作，其中条带称为伪直线，四边形图称为分区铺砌）。因此，要检查定义在四边形图上的映射的多维一致性，只需沿这个 8 圈进行检查。请注意，在 DDG 社群中，通常会采用其他方法检查多维一致性，通常是检查四维立方体中的数据传播是否与所经过的路径无关。我们倾向于沿 8 圈检查相容性，因为无论映射定义在 $\mathbb{Z}^n$的顶点、边还是面上，这样都能得到一个规范算法，而且 8 圈也易于可视化。不过，这并不意味着从计算角度看，沿 8 圈检查一定最简单。8 圈中的四边形图包含四条条带，这一事实对应于一个众所周知的结果 [**BS08**], ： $\mathbb{Z}^3$ 上的三维系统在 $\mathbb{Z}^n$ 上具有多维一致性，当且仅当它具有四维相容性。

正如我们所观察到的，如果 $\mathfrak{Q}$ 的每个 n 条带都带有不同的标签，那么 $\mathfrak{Q}$ 和与 $\mathfrak{Q}$通过一系列翻转相关联的四边形图 $\mathfrak{Q}'$ 的所有顶点自然都位于一个 $\mathbb{Z}^n$维超立方体中。如果某些条带彼此平行，并且我们给这些平行的条带族赋予相同的标签，那么 $\mathfrak{Q}$ 的顶点和所有 $\mathfrak{Q}'$ 都可以视为属于一个砖块 $B(\mathfrak{Q}) = \prod_{i=0}^{N-1}[0, a_i] \cap \mathbb{Z}^N$，其中所有 a_i 的总和等于 $\mathfrak{Q}$ 的条带数；我们借用了[**BMS05**]中的“砖块”一词。因此，如果一个三维系统是多维相容的，就可以在四边形图 $\mathfrak{Q}$上定义它，也可以在全部 $B(\mathfrak{Q})$ 上定义它。事实上，在离散可积系统领域，大多数系统先验地是通过在砖块（或全部 $\mathbb{Z}^N$）上的定义给出的。良定义性

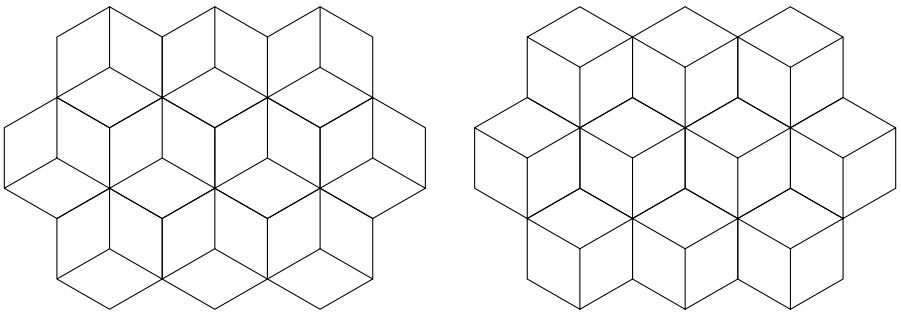


图 3.3. 传播前后的阶梯曲面部分。

由柯西数据和多维一致性出发的结论随后得到证明，从而为在砖块上的定义提供依据。相反，我们选择先给出四边形图上的定义以及柯西数据，然后根据我们关于TCD映射的结果推导出相容性，从而也证明了采用晶格上的等价定义是合理的。

此外，在离散可积系统中，通常认为四边形图不仅定义在砖块上，而且定义在整个 $\mathbb{Z}^N$ 上。由于格方程是局部的，大多数变量都是局部的或局部积分得到的，多维一致性也是一种局部现象，因此这不会造成严重问题。例如，当使用 $\mathbb{Z}^3$ 上的定义时，我们可以通过在阶梯曲面上进行研究来描述 $\mathbb{Z}^3$ 上的所有数据。作为 $\mathbb{Z}^3$ 的一个子集，阶梯曲面$U \subset \mathbb{Z}^3$ 例如是

$$U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3 \ : \ z_1 + z_2 + z_3 \in \{m-1, m, m+1\}\}, \tag{3.3}$$

对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，另见图 3.3。在这种情况下，我们考虑的映射不是定义在圆盘中的图上，而是定义在整个阶梯曲面上。如果考虑一个三维系统，那么限制在阶梯曲面上的映射就是整个 $\mathbb{Z}^3$ 上映射的柯西数据。这一点显而易见，因为我们可以应用无穷多个相互独立的立方体翻转来平移阶梯曲面。重复这一过程，我们就能覆盖整个 $\mathbb{Z}^3$。

3.2. $\mathbb{Z}^N$记号

在继续之前，我们先介绍一下 $\mathbb{Z}^N$ 中胞腔的标准记号:

(1) $V(\mathbb{Z}^N)$ 表示 $\mathbb{Z}^N$ 的顶点（0-胞腔），因此就是 $\mathbb{Z}^N$ 本身。(2) $E(\mathbb{Z}^N)$ 表示 $\mathbb{Z}^N$ 的边（1-胞腔），每条边由两个相邻点组成。(3) $F(\mathbb{Z}^N)$ 表示 $\mathbb{Z}^N$ 的面（2-胞腔），每个面都是由四个点组成的四边形。(4) $C(\mathbb{Z}^N)$ 表示 $\mathbb{Z}^N$ 的立方体（3-胞腔），每个立方体由八个点组成。

此外，我们将对偶格 $\mathbb{Z}^{N^*}$ 与平移格 $\mathbb{Z}^N + \frac{1}{2}\{1\}^N$ 等同起来。在 $N = 3$ 的情形下，这意味着将 $V(\mathbb{Z}^3)$ 与 $C(\mathbb{Z}^{3^*})$、 $E(\mathbb{Z}^3)$ 与 $F(\mathbb{Z}^{3^*})$ 等同起来，反之亦然。

此外，我们还使用移位记号。令 $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}2, \ldots, \mathsf{e}_N$表示 $\mathbb{Z}^N$的单位向量。若 $k \in \mathbb{N}$ 和 f 是定义在 $\mathbb{Z}^N$ 顶点上的函数，则我们将函数$n \mapsto f(n+\mathsf{e}_k)$简记为 f_k，并称之为沿 k 方向的移位。我们用多个下标表示多次移位，例如 f_{kl} 表示沿 k 方向和 l 方向的移位。若函数 f 定义在 $\mathbb{Z}^N$ 的边上，则将 $f(\{n, n_k\})$记为 f^k，这样 f现在就由定义在 $\mathbb{Z}^N$上的函数 N、f^1、 f^2、$\ldots$、 f^N 表示。对于定义在面上的函数 f，类似地，我们将 $f(\{n, n_k, n_l, n_{kl}\})$记为$f^{kl}$。我们也将移位记号用于定义在边和面上的函数。此外，我们在下标上方加横线表示沿负方向的移位，即 $f_{\bar{k}} = f(n - \mathsf{e}_k)$。移位记号使我们能够用简写形式处理晶格方程。若函数 f 定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上，且对任意移位， f 也满足该方程，则称该函数满足一个晶格方程。

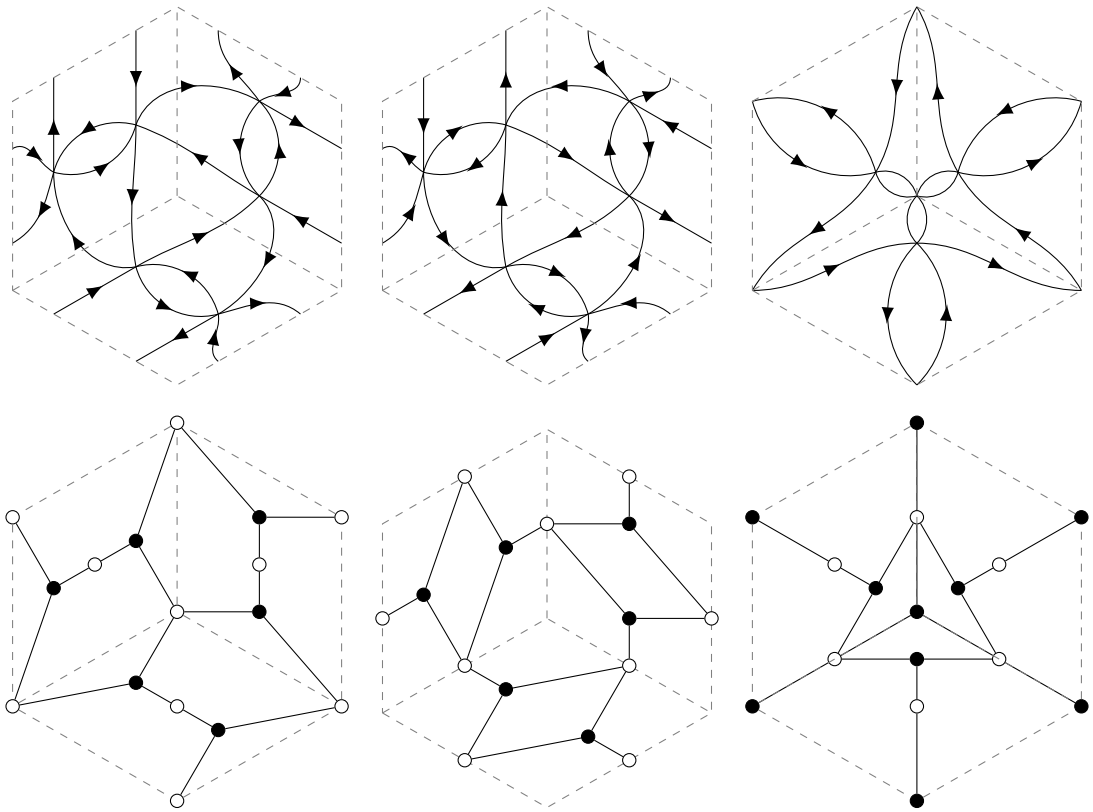


图3.4。从左至右依次为阶梯曲面的基本区域：Q-网、达布映射、直线复形。上排为 TCD，下排为对应的图 $\mathcal{G}$ 。

3.3. Q网

具有 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构的Q网最早由Sauer考虑 [**Sau33**]，，而定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上的Q网则由Doliwa和Santini [**DS97**] 作为四边形格提出。我们先定义四边形图上的Q网，并在本节末给出晶格上的Q网定义。

定义3.1. 设 $\mathfrak{Q}$ 为一个四边形图。若映射 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 满足 $n \geq 2$ ，且每个四边形的像都是共面的，则称其为*Q*-网。将被条带k, l 交叉的 q 中的四边形的顶点记为 q, q_k, q_l, q_{kl}。若一个四边形的四个点张成一个平面，我们还定义两个焦点

$$F^{kl} = qq_k \cap q_l q_{kl}, \tag{3.4}$$

$$\text{and } F^{lk} = qq_l \cap q_k q_{kl}, \tag{3.5}$$

为对边直线的交点。 ∎

焦点的记号在其两个上标中并不对称，这反映了每个四边形有两个不同的焦点。关于可积性和离散微分几何视角下 Q 网的详尽介绍，参见 Bobenko 和 Suris 的著作 [**BS08**]。

假设我们已知 Q-网 q 中三个两两相邻四边形（立方体的背面）的七个点 q、q_1、q_2、q_3、q_{12}、q_{23}、q_{13} ，且这些点张成一个 3 维空间。进行立方体翻转后，新的顶点 q_{123} 便由 Q-网条件确定，事实上

$$q_{123} = \operatorname{span}\{q_{12}, q_2, q_{23}\} \cap \operatorname{span}\{q_{23}, q_3, q_{13}\} \cap \operatorname{span}\{q_{13}, q_1, q_{12}\}. \tag{3.6}$$

这种将 q 替换为 q_{123} 的操作，就是 Q网的立方体翻转 。如果这些点仅张成二维或一维空间，也可以定义立方体翻转，详见第4.1节。

回顾一下，我们将四边形图 $\mathfrak{Q}$的顶点划分为黑色（■）和白色（□）顶点，并且每个四边形都从将$\mathfrak{Q}$ 嵌入圆盘的一个固定嵌入继承定向。

对于每个Q网，我们关联一个TCD映射。通过粘合下面这段图，我们得到关联图 $\mathcal{G}$



注意，也可以将粘合后的图形旋转90度来给出另一种定义，这同样是有效的约定。

TCD映射将与四边形顶点对应的 $\mathcal{G}$ 白色顶点映射到Q网中相应的点。每个四边形内部的白色顶点被映射到相应的某个焦点，该焦点由 $\mathcal{G}$黑色顶点的位置决定。阶梯曲面的一个基本域所对应的TCD和 $\mathcal{G}$ 显示在图3.4的左侧。

事实上，我们甚至可以通过相应的TCD映射来考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的Q网。不过在这种情况下，焦点没有明确定义，我们可以一般位置地选择其位置。第4.1节将对此作更详细的解释。

图2.5所示的十一次 2-2 移动序列会诱导出 Q-网的立方体翻转。因此，在 Q-网中传播柯西数据，对应于 TCD映射层面上的 2-2 移动序列。

备注 3.2。请注意，稍后我们将讨论一个仅包含十次 2-2 移动的序列（见图5.15），它也可以视为立方体翻转。不过，该序列不符合我们的约定，即每个四边形中由 TCD映射表示的是哪个焦点。当然，实际上没有必要明确给出与立方体翻转对应的 2-2 移动序列，因为定理 2.9 保证了这样的 2-2 移动序列确实存在：只需验证，在 Q-网关联的 TCD映射中，立方体翻转前后的弦连通性相同即可。■

Q网的多维一致性众所周知 [**DS97**]。在我们的设定中，相容性是 TCD映射的多维一致性的直接推论。

推论 3.3. 定义在极小四边形图上的 Q网具有多维相容性。

■

证明。需要检查 Q网在图3.2所示的翻转图圈下是否一致。该圈是立方体翻转的一个序列，对应于关联TCD映射中的一系列2-2移动。此外，根据定理2.46，定义在极小TCD上的TCD映射是一致的。□

既然 Q-网的多维一致性现已得到确立，我们便知道，通过应用立方体翻转，可以将 Q-网从柯西数据扩展到整个 $\mathbb{Z}^N$。现在，我们给出一个直接定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上的 Q-网的定义。

定义 3.4。固定 $n, N \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 3, N \geq 2$。映射 $q\colon\ V(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Q-网 ，如果每个四边形的像都是共面的。

■

$n \geq 3$ 这一限制对于 $N > 2$ 关联立方体翻转中涉及的八个顶点是必要的。如果我们通过相应TCD映射的 2-2移动所诱导的立方体翻转，关联这八个顶点和十二个焦点，则可以去掉约束 $n \geq 3$ 。

3.4. 达布映射

我们接下来研究的对象是 Schief [Sch03] 引入的达布映射。与 Q 网的情形一样，我们先定义四边形图上的达布映射，并在确立多维一致性之后，给出基于格的定义。

定义 3.5. 设 $\mathfrak{Q}$ 为一个四边形图。映射 $d : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 称为达布映射，若每个四边形的像均共线。■

假设我们已知达布映射 d中三个两两相邻四边形（立方体的背面）的九个点 $d^1, d^1_2, d^1_3, d^2, d^2_1, d^2_3, d^3, d^3_2, d^3_1$，且这些点张成一个二维空间。经过立方体翻转后，新的顶点 $d^1_{23}, d^2_{13}, d^3_{12}$ 便由达布映射条件确定，事实上

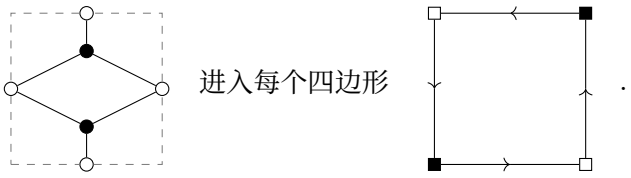
$$d^1_{23} = d^1_2 d^2_1 \cap d^1_3 d^3_1, \tag{3.7}$$

$$d^2_{13} = d^2_1 d^1_2 \cap d^2_3 d^3_2, \tag{3.8}$$

$$d^3_{12} = d^3_1 d^1_3 \cap d^3_2 d^2_3. \tag{3.9}$$

将 d^1, d^2, d^3 替换为 $d^1_{23}, d^2_{13}, d^3_{12}$，即为达布映射的立方体翻转。即使这些点仅张成一个一维空间，也可以定义立方体翻转，我们将在第4.1节中对此进行解释。

对于每个达布映射，我们都关联一个 TCD映射。通过粘合以下图的一部分，我们得到关联图 $\mathcal{G}$



每个白色顶点对应于 $\mathfrak{Q}$的一条边。因此，我们要求关联的 TCD 映射将每个白色顶点映射到达布映射中对应的点。我们注意到，每个四边形中的两个黑色顶点描述了该四边形的四个点共线这一事实。阶梯曲面的 TCD 和图 $\mathcal{G}$ 显示在图3.4中间。请注意，TCD 与 Q-网的相同，只是所有弦的定向都反转了。因此，达布映射中的立方体翻转也可以由一系列 2-2 移动来刻画，因为我们可以应用 Q-网情形中的相同序列。

达布映射的多维一致性在其提出时就已得到证明[Sch03]。在我们的设定中，相容性是 TCD 映射多维一致性的直接推论。

推论 3.6. 定义在极小四边形图上的达布映射具有多维一致性。

■

证明。需要检查达布映射在图3.2所示的翻转图圈下是否保持一致。该圈是一个立方体翻转序列，对应于相关TCD映射中的一系列2-2移动。此外，根据定理2.46，定义在极小TCD上的TCD映射是一致的。□

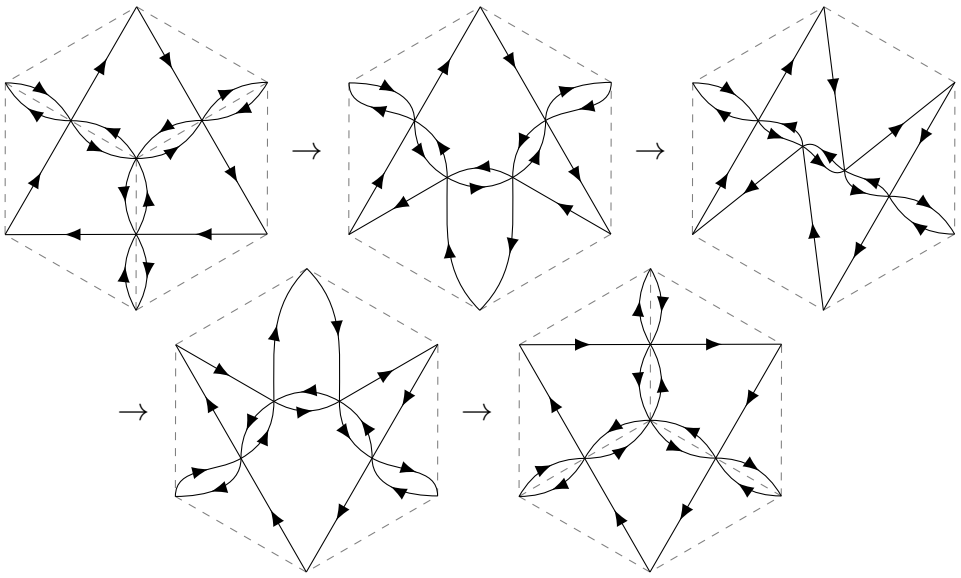


图3.5. 直线复形中的立方体翻转。

既然达布映射的多维一致性现已确立，我们给出 $\mathbb{Z}^N$ 上达布映射的定义。

定义 3.7. 固定 $n, N \in \mathbb{N}$，使得 $n, N \geq 2$。映射 $d\colon E(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 若其每个四边形的像都共线，则称为达布映射。■

需要施加 $n \geq 2$ 这一限制，才能使 $N > 2$ 关联立方体翻转中涉及的十二个顶点。如果通过相应 TCD映射的 2-2 移动所诱导的立方体翻转来关联这十二个顶点，则可以去掉约束 $n \geq 2$ 。

注意，在 $\mathbb{Z}^2$ 上的达布映射与 $\mathbb{Z}^2$上的 Q-网相同。达布映射中每四个共线点对应于等价 Q-网中的两个顶点 q, q_k和两个焦点 f_l^{kl}, f^{kl}，它们共线。

我们稍后会说明，h-嵌入（见第10.2节）是达布映射的一种特殊情形。我们还将展示，第 8.8 节中的某些各向同性达布映射与 Cox格相对应。此外，DDG 书 [BS08]中的习题 2.8 和 2.9 还揭示了一种有趣的关系。取一个 Q-网 q 和一个固定的超平面 H，然后将每条直线 qq_k 与 H相交。显然，得到的映射是一个达布映射。我们将在关于 TCD映射截面的第4.2节中对此作更深入的探讨。

3.5. 直线复形

直线复形由 Bobenko 和 Schief [BS15], 引入，其理论建立在 Doliwa、Santini 和 Mañas 对直线同余 [DSM00] 的研究之上。我们首先定义四边形图上的直线复形。本节末尾将给出定义 $\mathbb{Z}^n$ 格上的直线复形。

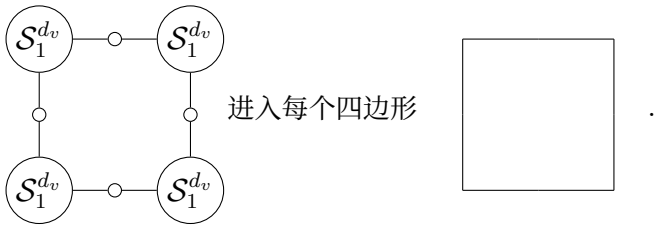
定义 3.8. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。若映射 $l\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 满足：对于每个顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$, 关联边的像都包含在一条直线上，则称其为直线复形。若映射$\ell\colon V(\mathfrak{Q}) \to \{\text{Lines of } \mathbb{C}\mathrm{P}^n\}$ 满足相邻直线相交，则称其给出了直线复形的直线。■

在文献中，直线复形 l 是通过我们称为直线复形之直线 ℓ的对象来定义的。然而，这两个定义是等价的。就我们的目的而言，通过交点 l 来定义更为规范，因此我们主要采用这种定义。

考虑这样一种情况：我们已知三个两两相邻的四边形的七条直线 $\ell, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{23}$，且这些直线张成一个 4 维空间。那么第八条直线 ℓ_{123} 必须经过三条直线 $\ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{23}$。在四维空间中，存在唯一一条与 $\ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{23}$ 相交的直线 ℓ_{123}。将 ℓ 替换为 ℓ_{123}，就是直线复形中直线的立方体翻转。当然，新直线 ℓ_{123} 也确定新的交点 $l^1_{23}, l^2_{13}, l^3_{12}$，而将 l^1, l^2, l^3 替换为 l^1_{23}, l^2_{13}, l^3_{12}，就是直线复形的立方体翻转。

如果这些直线仅张成一个三维空间，也可以定义立方体翻转。在这种情况下，直线复形以基本直线复形 [BS15]之名得到研究。此外，如果这些直线仅张成一个一维空间，甚至也可以定义立方体翻转，我们将在第4.1节中对此进行说明。

我们为每个直线复形关联一个 TCD 映射。不过，与 Q网和达布映射的情况不同，我们对相应 TCD 的定义并未消除所有局部选择。直线复形的图 $\mathcal{G}$ 是通过为Ω的每条边 e 添加一个白色顶点 w_e 到 $\mathcal{G}$ 得到的。此外，对于 Ω 的每个顶点 v，我们向 $\mathcal{G}$ 添加一小段图 $\mathcal{G}_v$，使其具有端点匹配 $\mathcal{S}_1^{d_v}$，从而将 $\mathcal{G}_v$ 的 d_v 个边界顶点与白色顶点w_{e_1}，w_{e_2}，……，$w_{e_{d_v}}$对应起来；其中 e_i 是 Ω中与 v关联的边。为了得到逐四边形图形表示，我们将……粘合



这些 $\mathcal{G}_v$ 片段表明，每个顶点相邻边上的交点都位于同一直线上。当 Ω 是一个阶梯曲面时，可以进行高度对称的粘合，见图3.4右侧。不过，如图3.6所示，这样的可能性有两种。

与Q网和达布映射的情形一样，立方体翻转对应于相应TCD映射中的一系列2-2移动，如图3.5所示。注意，由于在 Ω的顶点处 $\mathcal{G}_v$ 有不同的可能选择，因此可能需要在这些顶点处进行有限次蜘蛛移动（即对TCD映射进行重新参数化），才能开始立方体翻转序列。也就是说，我们可能需要在顶点处应用蜘蛛移动，使其处于图3.5第一个示意图所描绘的初始情形。

直线复形的多维一致性是众所周知的 [BS08]，并且可以通过多种方式验证。然而，在TCD映射的框架下，直线复形的多维一致性是TCD映射多维一致性的一个初等推论。

推论3.9. 定义在极小四边形图上的直线复形是多维相容的。■

证明. 需要检查直线复形在图3.2所示的翻转图圈下是否相容。该圈是由一系列立方体翻转构成的序列，对应于相关TCD映射中的一系列2-2移动。此外，由定理2.46可知，定义在极小TCD上的TCD映射是相容的。□

既然直线复形的多维一致性现已确立，我们给出定义在 $\mathbb{Z}^N$上的直线复形的定义。

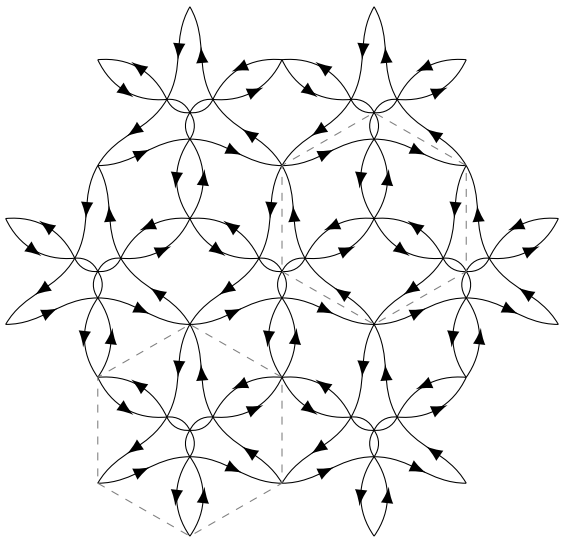


图3.6. 直线复形的 TCD 的七个基本区域。高亮显示的是两种可能的基本区域选取，它们关于水平轴反射后彼此不同。

定义3.10. 固定 n，$N \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 4$，$N \geq 2$。若映射 $l\colon E(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 满足任意顶点的相邻点都位于一条公共直线上，则称其为**直线复形**。若映射 $\ell\colon V(\mathbb{Z}^N) \to \{\mathrm{P}\ \mathbb{C}\text{的直线}^n\}$ 满足相邻顶点的直线相交，则称其为**直线复形的直线**。■

要使 $n \geq 4$ 能够关联立方体翻转中涉及的八条直线，需要满足限制条件 $N > 2$。如果通过相应 TCD映射的 2-2 移动所诱导的立方体翻转来关联十二个交点，则可以去掉约束条件 $n \geq 4$。

与达布映射的情形一样，对于 $N = 2$，直线复形只不过是定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的 Q-网的一种改述。注意，在 $\mathbb{Z}^2$ 上的 Q-网中，同一方向上的所有直线（例如，对固定的 k，qq_k）构成一个直线复形的直线。

3.6. 直线复合体

我们引入一种此前文献中从未出现过的新型映射，即直线复合体。本节稍后将讨论，为什么可以将直线复合体视为一种不同的方式，用以把直线复形的定义从 $\mathbb{Z}^3$ 扩展到 $\mathbb{Z}^N$，适用于 $N > 3$。

定义3.11. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。映射 $l\colon F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个**直线复合体**，当且仅当对于每个顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$，相邻面的像包含于一个 $(d_v - 2)$ 维空间 S_v 中，其中 d_v 是 v 的度。■

考虑一个度为三的顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$。三个相邻四边形 (v, v_1, v_{12}, v_2)、(v, v_2, v_{23}, v_3)、(v, v_3, v_{13}, v_1) 经直线复合体映射后分别得到点 l^{12}、l^{23}、l^{13}。此外，将与 v 及三个相邻四边形的其他顶点相关联的射影子空间分别记为 S、S_1、S_2、S_3、S_{12}、S_{13}、S_{23}。空间 S 显然是一条直线。对于 $i \in \{1, 2, 3\}$，将由关联于 v_i 的四边形（除去与 v相邻的三个四边形）张成的空间记为 Q_i。由于相邻面的张成空间受到维数限制，交点Q_i 与 S 是一个点。我们定义直线复合体的立方体翻转，使得立方体翻转后的新点为

$$l_1^{23} = S \cap Q_1, \quad l_2^{13} = S \cap Q_2, \quad l_3^{12} = S \cap Q_3. \tag{3.10}$$

很容易验证，新的交点满足子空间维数要求。注意，根据立方体翻转的定义，立方体各面上的六个点共线。

对于每个直线复合体，我们都关联一个TCD映射。相应的TCD并非唯一确定。相反，我们给出一个涉及某些局部选择的定义。直线复合体的图 $\mathcal{G}$ 通过为 Ω的每个面 f 向 $\mathcal{G}$ 添加一个白色顶点 w_f 而得到。此外，对于 Ω 的每个顶点 v ，我们向 $\mathcal{G}$ 添加一小段具有端点匹配 $\mathcal{S}_{-2}^{d_v}$的图 $\mathcal{G}_v$ ，使得 $\mathcal{G}_v$的边界顶点 d_v与白色顶点 w_{f_1}， w_{f_2}，……， $w_{f_{d_v}}$重合，其中 f_i 是 Ω 中与 v 关联的面。为了获得逐四边形图形表示，我们将……拼接起来。



$\mathcal{G}_v$ 这些部分表明，相邻面上的交点位于关联子空间 S_v 中。当 Ω 是阶梯曲面时，可以进行高度对称的粘合，这与直线复形阶梯曲面的 TCD 完全相同，见图3.4。

立方体翻转对应于相应 TCD 映射中的一系列 2-2 移动。事实上，这一序列与直线复形情形下的序列相同（见图3.5），只是翻转中四边形的识别方式不同。注意，可能需要在顶点处进行有限次重新分裂，才能开始立方体翻转序列。

由于直线复合体是一种新对象，多维一致性也是一项新结果，尽管它很容易由 TCD 映射的一致性推出。

推论3.12. 定义在极小四边形图上的直线复合体是多维一致的。

■

证明。我们需要检查直线复合体在图3.2所示的翻转图圈下是否具有相容性。该圈是一个立方体翻转序列，对应于相关TCD映射中的一系列2-2移动。此外，根据定理2.46，定义在极小TCD上的TCD映射具有相容性。□

既然直线复形的多维一致性现已得到证明，下面给出定义在 $\mathbb{Z}^N$上的直线复形的定义。

定义3.13。固定 $n,\ N \in \mathbb{N}$其中 $n \geq 2,\ N \geq 3$。映射 $l\colon F(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$是一个直线复合体，如果对于任意一个三维立方体，该三维立方体六个面上的点都位于一条公共直线上。映射 $\ell\colon C(\mathbb{Z}^N) \to \{\text{P 的直线 } \mathbb{C}^n\}$ 是直线复合体的直线，如果面相邻三维立方体的直线相交。■

如前所述，如果要求立方体中的点通过相关 TCD映射的 2-2移动所诱导的立方体翻转彼此关联，我们就可以取消对射影空间维数的限制。

注意，如果 Ω 是 $\mathbb{Z}^2$，那么直线复合体的定义与 Q网、达布映射和直线复形的定义相一致，只是需要对组合结构作某种识别。特别地，定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的直线复合体恰好是定义在 $(\mathbb{Z}^2)^*$上的 Q-网。此外，定义在 $\mathbb{Z}^3$ 上的直线复合体就是定义在 $(\mathbb{Z}^3)^*$上的直线复形。然而，对于 $\mathbb{Z}^N$ 中的 $N \geq 4$，直线复合体与直线复形之间不存在明显的对应关系。在研究直线复形的某种约化时，将会出现直线复合体（Doliwa复合体，见 7.10）；与其作为直线复形，它们天然地作为直线复合体具有多维一致性。

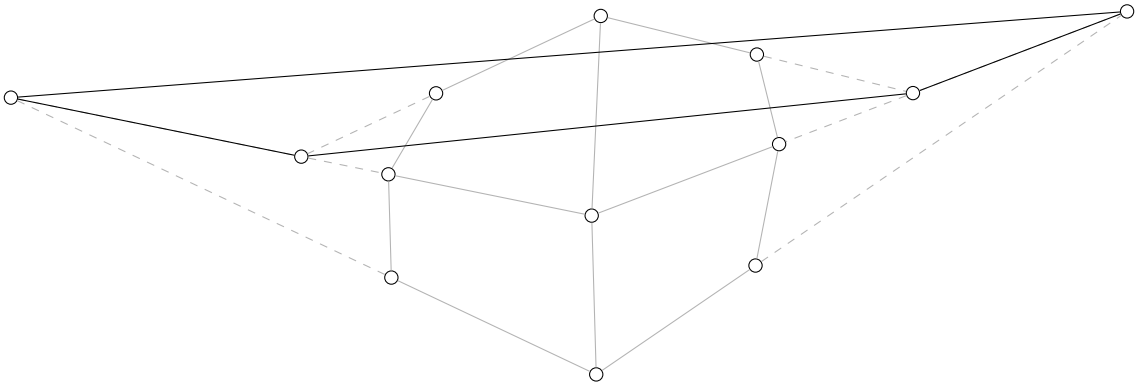


图 3.7. $\mathbb{Z}^2$ Q-网的四个四边形以灰色绘出，拉普拉斯-达布变换的一个四边形以黑色绘出。

在考虑 $\mathbb{Z}^N$ 上关于 $N \geq 4$的达布映射的截面时，也会出现直线复合体，见第4.2节。

3.7. $\mathbb{Z}^2$上的Q网与拉普拉斯-达布动力学

在本节中，我们研究定义在 $\mathbb{Z}^2$ Q-网上的拉普拉斯-达布动力学 [**Dol97**], 。

定义3.14. Q-网 $q : V(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的拉普拉斯变换 $\Delta^k(q)$ 是新的 Q-网 $\Delta^k(q) : F(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，满足

$$(\Delta^k(q))^{kl} = F^{kl} \tag{3.11}$$

在所有位置均成立，其中 $\{k, l\} = \{1, 2\}$ 和F^{kl} 是 q的焦点，如定义3.1中所述。■

考虑图 3.7 所示的拉普拉斯变换 $\Delta^k(q)$ 中的一个四边形。我们观察到

$$F^{kl}F^{kl}_l \cap F^{kl}_k F^{kl}_{kl} = q_{kl} \tag{3.12}$$

成立。因此，该四边形共面，拉普拉斯变换也确实如定义所述再次成为一个 Q-网。因此，可以迭代拉普拉斯变换。事实上，方程 (3.12) 表明

$$\Delta^1 \circ \Delta^2 = \Delta^2 \circ \Delta^1 = \mathrm{id} \tag{3.13}$$

成立。

定义3.15. 拉普拉斯-达布动力学 是对定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的 Q-网进行拉普拉斯变换 Δ^1 的迭代。■

因此，拉普拉斯-达布动力学生成一个无限的 Q-网序列，这些 Q-网随后由 Δ^1 联系起来。另一方面， Δ^2 是逆向迭代，因此我们也可以将拉普拉斯-达布动力学视为生成一个双无限的 Q-网序列。

从第 3.3 节可知，我们可以为每个 Q-网关联一个 TCD映射。因此，自然会问拉普拉斯-达布动力学是否对应于一系列 2-2 移动。答案确实是肯定的，证明只需展示这些移动，如图 3.8 所示。下面简要描述这一序列。假设初始 TCD映射捕捉了 $(q,\ \Delta^1(q))$，即 Q-网 q 的点以及焦点 ^{12}。在 TCD层面，拉普拉斯-达布动力学的一步由两个步骤组成：

(1) 第一步是在所有可能的位置应用彼此独立的蜘蛛变换。随后，我们可以将 TCD 映射数据重新诠释为由数据 $(\Delta^1(q)\ \Delta^2 \circ \Delta^1(q))$ 构成，即 $\Delta^1(q)$ 的点以及 $\Delta^1(q)$ 的焦点 ^{21} 。

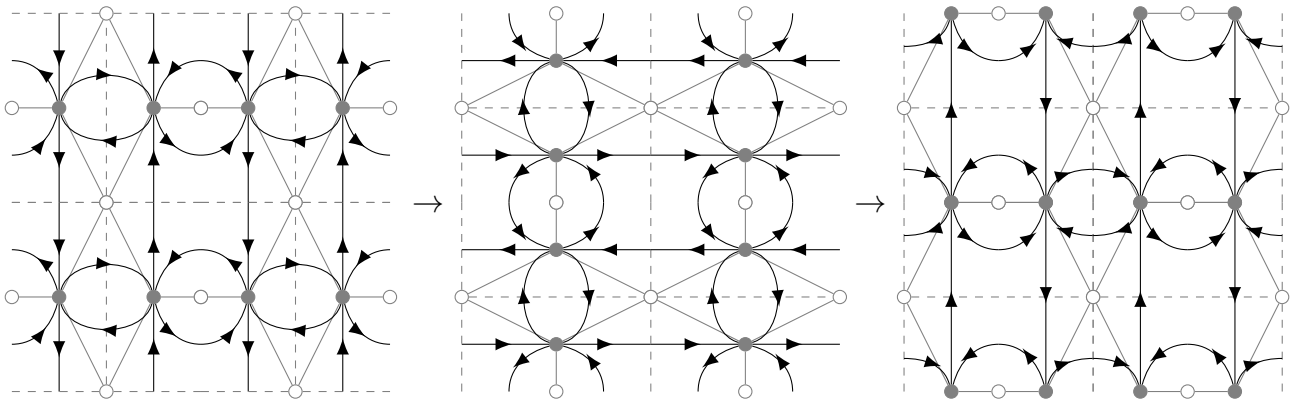


图 3.8. 拉普拉斯-达布动力学作用下的Q网的TCD，分两步进行。

(2) 第二步是在所有可能的位置应用彼此独立的重新分裂。这些重新分裂会切换所有四边形中的焦点，使得新的 TCD 映射数据由 $(\Delta^1(q)\ \Delta^1 \circ \Delta^1(q))$ 构成。

随后，我们可以重复这两个步骤，在TCD映射层面迭代拉普拉斯-达布动力学。

事实上，我们还可以研究高维格 $\mathbb{Z}^N$上的拉普拉斯变换及相关焦变换。此外，类似的定义不仅可以用于Q网，也可以用于直线复形和达布映射。我们将在第 6.6 节详细研究这些定义和构造。

由拉普拉斯-达布动力学生成的格，也以梅涅劳斯-Cox格之名出现，是一种退化的Cox格 [**KS14**]。我们将在第 8.8 节进一步考察非退化的Cox格。

第4章

TCD映射的几何与组合结构

4.1. 非一般维度中的传播

对于定义在维数不足以满足一般位置条件的环境空间中的映射，已有研究偶尔涉及此类映射；它们通常被定义为高维中相应映射的投影 [**BS08**, **BS15**]。若要在维数过低但大于 1 的空间中构造传播，可以针对具体情形寻找关联关系。在一维时，这种做法行不通，但已有研究尝试通过针对具体情形的多重比方程来刻画传播 [**KS02**, **Sch03**]。另一方面，我们展示了如何通过一系列 2-2 移动来描述Q网、达布映射和直线复形的传播。我们确实选择了一个同样适用于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的 2-2 移动定义，见定义2.34。因此，在通过TCD映射进行表述时，即使在包括一维在内的小维数情形下，为所有这些例子定义传播也不存在障碍。由此我们将展示，文献中研究过的特定多重比方程，会自然地沿着TCD的弦出现。在几何方面，这些多重比与以下对梅涅劳斯定理的推广密切相关 [**BS08**，定理9.12]。

定理4.1（广义梅涅劳斯定理）。设 p_1，$p_{1,\,2}$，p_2，……，p_m，$p_{m,\,1}$是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$ 中的 $2m$ 个点，使得每个点 $p_{k,\,k+1}$ 都在直线 p_kp_{k+1} 上，并且 p_1，p_2，……，p_m 张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{m-1}$。那么多重比方程

$$\mathrm{mr}(p_1, p_{12}, p_2, \ldots, p_m, p_{m1}) = (-1)^m \tag{4.1}$$

当且仅当 o 成立。仅当 m 点 $p_{1,\,2}$，$p_{2,\,3}$，…，$p_{m,\,1}$位于一个（$m-2$）维数子空间中。 ■

在 $m = 3$ 的情形下，这显然特化为梅涅劳斯定理（定理 2.40）。这个定理很重要，因为正如我们在引理 2.37 中所述，多重比在射影变换下保持不变；对我们的情形尤为重要的是，它们在投影到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 后也保持不变。然而，作为格方程出现的多重比要求使用一个假设更少、但只给出蕴含关系而非等价关系的梅涅劳斯定理版本。

引理4.2（梅涅劳斯引理）。设 p_1，$p_{1,\,2}$，p_2，……，p_m，$p_{m,\,1}$ 是 $2m$ P^{m-1} 中的点，且每个点 $p_{k,\,k+1}$ 都在直线 p_kp_{k+1} 上；并且 p_1，p_2，……，p_m 张成一个 n 维空间，而 $p_{1,\,2}$，$p_{2,\,3}$，……，$p_{m,\,1}$ 张成一个（$n-1$）维空间。那么，多重比方程

$$\mathrm{mr}(p_1, p_{1,2}, p_2, \ldots, p_m, p_{m,1}) = (-1)^m \tag{4.2}$$

成立。 ■

证明。选取一个仿射图，使由$p_{1,2}, p_{2,3}, \ldots, p_{m,1}$张成的空间位于无穷远处。于是，所有有向长度比相互抵消，每条边只留下一个因子（-1）。□

我们观察到的另一个性质是，TCD映射沿之字形路径的多重比（见定义2.33）在2-2移动下保持不变。

定理 4.3。设 T 为一个 TCD映射，且 $(w_1, b_1, w_2, b_2, \ldots, w_n)$ 为一条之字形路径。将每个黑色顶点 b_k 的邻点按逆时针顺序记为 (w_k, w'_k, w_{k+1})。设 T 为

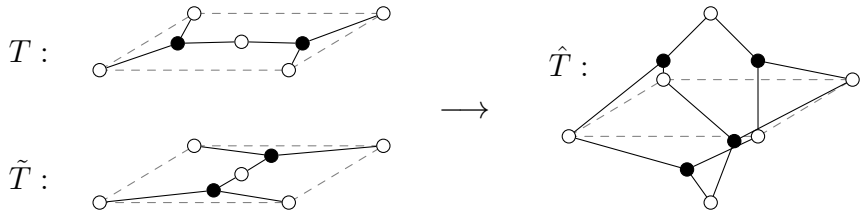


图 4.1。沿边界（虚线）粘合 T 和 T 的二分图，以获得 T。

T经过一次 2-2 移动后，$(\tilde{w}_1, b_1, \tilde{w}_2, b_2, \ldots, \tilde{w}_{\tilde{n}})$ 为同一条之字形路径上的点在 2-2 移动之后的表示。那么

$$\begin{aligned}&(-1)^n \operatorname{mr}(T(w_1), T(w_1'), T(w_2), T(w_2'), \ldots, T(w_n))\\ =&(-1)^{\tilde{n}} \operatorname{mr}(\tilde{T}(\tilde{w}_1), \tilde{T}(\tilde{w}_1'), \tilde{T}(\tilde{w}_2), \tilde{T}(\tilde{w}_2'), \ldots, \tilde{T}(\tilde{w}_{\tilde{n}}))\end{aligned} \tag{4.3}$$

成立。 ■

证明。根据引理 2.38，我们可以用边权计算多重比。边权的变化见图 2.8 和图 2.10。除非路径长度发生变化而导致符号改变，否则在 2-2 移动前后它们保持不变。□

一个有趣的推论是，我们可以考虑由 2-2移动相关联的两个 TCD映射，并将它们的 TCD 粘合在一起形成一个球面。

推论 4.4。设 T 和 T 是由一系列 2-2移动相关联的两个 TCD映射。记 T 为沿边界粘合这两个 TCD 后得到的映射，使得我们分别在 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}$ 中识别对应的边界白色顶点（见图 4.1）。设 $(w_1,\ w_1',\ w_2,\ w_2',\ \ldots\ldots,\ w_n',\ w_1)$ 为 T 的一条之字形路径（如定理 4.3 中所述）上的顶点及与其关联的顶点。那么

$$\operatorname{mr}(\hat{T}(w_1), \hat{T}(w_1'), \hat{T}(w_2), \hat{T}(w_2'), \ldots, \hat{T}(w_n'), \hat{T}(w_1)) = (-1)^n \tag{4.4}$$

成立。 ■

证明。由定理 4.3 可直接得出，因为 T 中沿着之字形路径的多重比，是 T 和 T中同一之字形路径上多重比的比值。□

请注意，T 严格来说并不是 TCD 映射，因为拼接后的 TCD $\mathcal{T}$ 位于球面上，而非圆盘上。其优点在于，我们可以将球面理解为八面体或立方体。从这个角度来看，我们将把推论 4.4 中出现的多重比方程解释为格方程。我们证明，文献中的一些格点多重比方程确实是这一构造的特例。

4.1.1. Q网与拉普拉斯-达布动力学。具有 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构的 Q网的拉普拉斯-达布动力学在 $\mathbb{CP}^2$, 中定义良好，因此唯一非平凡的维数是一维。在拉普拉斯-达布动力学中，每当我们从一个焦点切换到另一个焦点时，局部考察的都是一个梅涅劳斯构型。将重新分裂前后的 TCD映射拼接起来，就得到八面体（见图 4.1 和 4.2）。于是，dSKP 方程（公式（2.14））恰好就是推论 4.4 中出现的多重比方程。满足一维 dSKP 方程的格称为 dSKP 格 [**BK98a, BK98b, KS02**]。注意，dSKP 格对应于 Q-网各顶点与每个四边形的一个焦点的同时投影。对于 $\mathbb{CP}^n$ 中的 $n > 1$ ，所有焦点都由顶点确定；而在 $\mathbb{CP}^1$ 中，我们可以在柯西数据中自由选择每个四边形的一个焦点。每个四边形的另一个焦点则由 dSKP 方程确定。

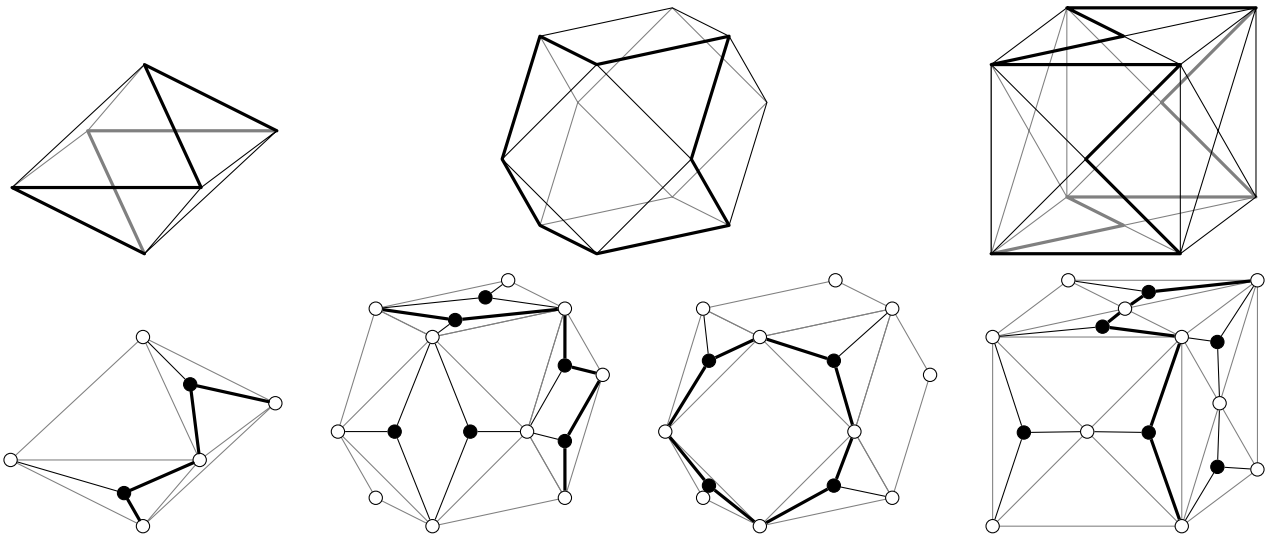


图4.2。上：分别标出一条之字形路径的八面体、截半立方体和六面体。下：TCD中对应的（可见）部分，分别属于 $\mathbb{Z}^2$ Q-网、达布映射、直线复形和 $\mathbb{Z}^3$ Q-网。

Q-网与 dSKP 格之间的关系，将对我们研究 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 中的圆网以及其他“维数退化的”构造非常有用，参见第 10.1 节。

4.1.2. 达布映射。达布映射的传播，即立方体翻转，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 及更高维空间中定义良好。Schief [Sch03]研究了 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的情形。特别是，它们满足多重比方程，并由该方程刻画：

$$\mathrm{mr}(d^3, d^1, d^3_1, d^2_1, d^3_{12}, d^1_2, d^3_2, d^2) = 1. \tag{4.5}$$

一方面，这个多重比是梅涅劳斯引理??的一个实例。这是因为我们可以将 $d^3, d^3_1, d^3_{12}, d^3_2$ 视为一个张成二维空间的四边形，而 d^2, d^2_1, d^1_2, d^2 是位于各边上且仅张成一条直线的点。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中，若已知其余七个点，该方程便能确定 d^3_{12} ，从而定义初始数据的传播；对方程作排列还可确定 d^2_{13} 和 d^1_{23}。

另一方面，方程（4.5）是截半立方体中沿之字形路径的多重比（见图4.2）。截半立方体的顶点是一个立方体的边。令 T 表示将达布映射中立方体翻转前后的两个 TCD 映射粘合在一起后得到的 TCD映射（见图 2.9，其中弦的定向反转）。于是， T 的之字形路径与截半立方体的之字形路径重合。在第5.7节介绍 TCD映射的仿射箭图时，我们会更详细地解释这一现象。

我们将在第10.2节遇到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 达布映射，它们是统计物理中使用的 h-嵌入。

4.1.3. Q网。Q网的传播，也就是立方体翻转，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中定义良好。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中，DDG 书 [BS08 的练习 2.2] 给出了一种可能的定义。特别是，要求这四个点

$$F^{ik}, F^{jk}, F^{ik}_j, F^{jk}_i \tag{4.6}$$

对于满足 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 的任意一组指标，这些点共线（见图4.3）。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中，这些点也共线，因为它们都位于平面 p^{ij}， p^{ij}_k 的交线上。若我们希望 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的 Q-网是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, 中的 Q-网的投影，那么这种共线性就是充要条件。只需该关系对一组指标 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 成立即可。这一性质决定了 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的传播。

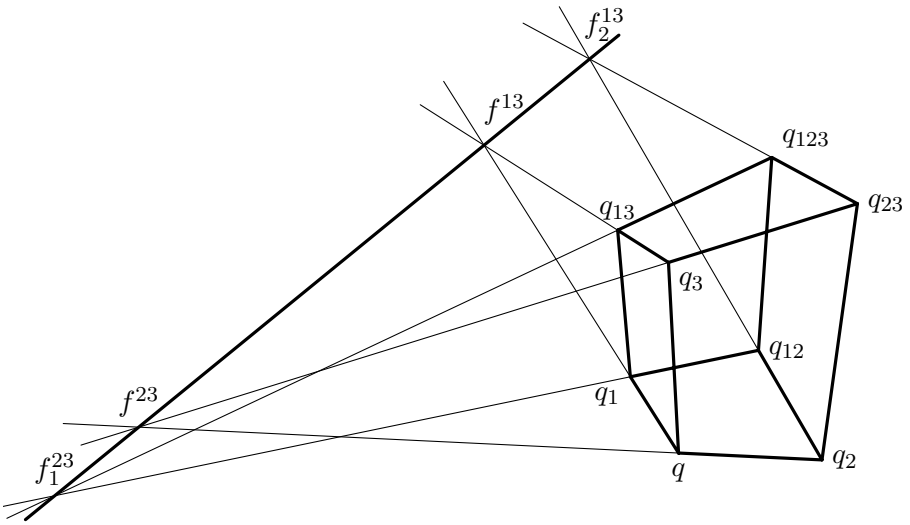


图4.3. Q-网中立方体在平面上的投影。

在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中，我们当然无法用共线性来刻画。我们已经知道，传播由一系列 2-2 移动唯一确定，因为可以将 Q-网视为 TCD 映射。目前尚不清楚是否存在符合上一节思路的多重比刻画。不过，我们可以观察到，以下多重比方程

$$\mathrm{mr}(q, q_1, F^{12}, q_{12}, q_2, F_2^{31}, q_{23}, q_{123}, F_3^{12}, q_{13}, q_3, F^{31}) = 1, \tag{4.7}$$

成立。同样，这是梅涅劳斯引理（引理 ??）的一个实例。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 及更高维空间中，点 q, F^{12}, q_2, q_{23}, q_{123}, q_3 构成一个六边形，而点 F^{31}, q_1, q_{12}, F^{23}, q_{123}, q_{13}, F^{31} 位于同一平面。然而，与之前不同，方程（4.7）涉及传播所需的两个新点。为了通过立方体翻转进行传播，我们需要求出四个点q_{123}, q_{123}, q_{231}, q_{312}。方程（4.7）的各个排列给出关于这些点的六个三线性方程。考察所有方程的乘积可知，其中一个方程可由其余五个推出。因此，剩下的是关于四个变量的五个耦合双线性方程。我们知道它们有解，但解是否唯一尚不清楚。数值模拟表明解是唯一的，但我们尚未找到证明。

我们还观察到，方程（4.7）是沿六面体中一条之字形路径的多重比方程（见图4.2）。六面体的之字形路径恰好是在立方体翻转前后拼接 Q-网的 TCD 时出现的路径。

我们将在第10.3节遇到一种称为s-嵌入的特殊 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ Q-网，它源自统计物理。

4.1.4. 直线复形。直线复形原则上仅在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ 及更高维空间中定义良好。Bobenko 和 Schief 研究了到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 的投影 [BS15]。他们指出，直线复形在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$中有两种可能的等价刻画。具体而言，

(1) 四个交点 l^i, l^i_j, l^i_k, l^i_{jk} 共面，

(2) 或者四条直线 $l^i l^i_j, l^i_k l^i_{jk}, l^k l^k_j, l^k_i l^k_{ij}$ 交于一点，

对于 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$。事实证明，第二个性质也能刻画 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$。此外，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中，我们可以像前面的例子那样，通过沿之字形路径的多重比方程来刻画传播，即

$$\mathrm{mr}(l^3, l^1, l^3_1, l^2, l^3_{12}, l^1_2, l^3_2, l^2) = 1. \tag{4.8}$$

这与 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 达布映射情形下的递推关系相同。我们也可以将其识别为广义梅涅劳斯定理的一个实例。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ 中，我们可以将 $l^1, l^1_2, l^1_3, l^1_{23}$ 视为一个四边形，它

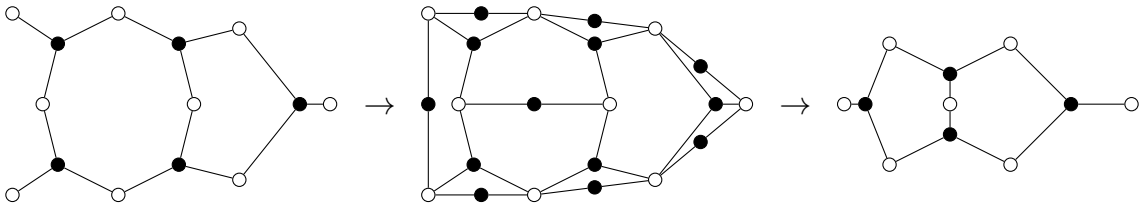


图4.4。序列 $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^i \to \mathcal{G}' = \sigma(\mathcal{G})$，或者如何截取TCD映射的一个截面。

张成一个三维空间。于是，多重比方程 (4.8) 等价于断言 $l^1, l^1_2, l^1_3, l^1_{23}$ 位于同一个平面上，这正是上文性质 (1) 的刻画。另一方面，这个多重比方程同样可以看作是将立方体翻转前后的 TCD 拼接起来所诱导的，这一次针对的是直线复形。

注意，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 中，直线复形与达布映射的组合结构和多重比刻画完全相同。因此，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$中，直线复形与达布映射之间没有区别。由此，可以将直线复形和达布映射视为同一标量系统的不同高维推广。

4.2. 截面

本节我们将考察 TCD 映射与一个超平面（环境空间中的余维一射影子空间）相交时会发生什么。更具体地说，我们将 TCD 映射中对应于交叉点的所有直线与该超平面相交，从而得到新的点。这些点满足新的关系，并且共同构成一个新的 TCD 映射。在给出 TCD 映射的截面的精确定义之前，我们先介绍一些一般位置条件。

定义 4.5. TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是*1-一般*的，当且仅当对于 $\mathcal{G}$ 的某个公共面边界上的任意三个不同的白色顶点 w_1, w_2, w_3， $T(w_1)$ $T(w_2)$ $T(w_3)$ 的张成空间是二维的。■

从某种意义上说，要求 TCD映射 T 在每个黑色顶点处的三个相邻顶点的像各不相同，可以视为其具有 T 0-一般性。我们确实将 0-一般性纳入了 TCD映射的定义，因为否则伴随的边权理论就无法成立。我们将在定义 4.16 中定义 k-一般性。请注意，定义在最大维数为 1 的 TCD 上的 TCD映射总是 1-一般的，因为不存在定义中所述的白色顶点三元组。

定义4.6. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个TCD映射。若超平面 $H \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 不包含 $\mathcal{G}$中任何白色顶点 w 的像 $T(w)$，则称其相对于处于一般位置。■

一般超平面的条件只排除了超平面中的一个闭余维一子集，因此总是存在一般位置的超平面。

定义 4.7. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ with $n \geq 2$ 是一个 1-一般 TCD 映射， H 是相对于 T 的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的一般超平面。 T 的一个 截面 $\sigma_H(T)$ 是一个 TCD 映射 $T'\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}' \to H = \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$，其构造如下所述。我们根据 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 定义组合结构的变化。我们分两步从 $\mathcal{G}$ 开始构造一个中间图 $\mathcal{G}^i$ （见图4.4）：

(1) 对任意两个相邻的边界顶点 $b_{k,\ k+1}$ 和 w_k， w_{k+1} ，添加一个黑色顶点，以及两条边 ($b_{k,\ k+1}$， w_k) 和 ($b_{k,\ k+1}$， w_{k+1})。

(2) 对于 $\mathcal{G}$的每个面 (b_1, w_1, b_2, ..., w_l)，将多边形 (w_1, w_2, ..., w_l)进行三角剖分，并为三角剖分的每条对角线 (w_j, w_k) 添加一个新的黑色顶点 b，以及两条边 (b, w_j)，(b, w_k)。

$\mathcal{G}^i$ 的每个内部面都是四边形或六边形。现在我们按以下步骤构造 $\mathcal{G}'$ 和 T'：

(3) 对于 $\mathcal{G}^i$的每个黑色顶点 b，在 $\mathcal{G}'$ 中添加一个白色顶点 w'_b。将对应的点T'(w'_b)放在 H 与 T中对应于 b的直线的交点处。(4) 对于 $\mathcal{G}^i$的每个面 f，在 $\mathcal{G}'$中添加一个新的黑色顶点 b'_f。(5) 每当 $\mathcal{G}^i$中对应的黑色顶点 b 与面 f 相关联时，就在 $\mathcal{G}'$ 中白色顶点 w'_b 与黑色顶点 b'_f 之间添加边。(6) 收缩 $\mathcal{G}'$中所有度为 2 的黑色顶点。

■

我们来做几点观察。如果 $\mathcal{G}^i$中的 f 是一个六边形，那么 T 中属于该六边形的三条直线位于同一个平面 J内；事实上，由于 T 是 1-一般的，这三条直线张成一个平面。因此，在与 H 的交集中，我们添加到 $\mathcal{G}'$ 中的对应黑色顶点表示 J 与 H的交线。注意，由于 H相对于 T处于一般位置，J 不可能包含在 H 中。如果 $\mathcal{G}^i$ 中的一个面 f 是四边形，那么该面的两个黑色顶点对应于同一条直线 ℓ。对于 f，我们在 $\mathcal{G}'$ 中添加的新黑色顶点的度为 2，并在步骤 (6) 中被收缩，因此 ℓ 在 $\mathcal{G}'$ 中由一个点表示。因此，在 $\mathcal{G}$ 的面上执行 2-2 移动（重新参数化）不会影响截面。还要注意，T 的 1-一般性保证了 σ（T）中与一个黑色顶点相邻的任意三个白色顶点的像不会重合。不过，1-一般性对于截面的存在而言略显苛刻。相反，1-一般性保证了所有截面的存在。

在步骤 (2) 中可以选择的不同三角剖分会产生不同的截面，而这些截面之间通过重新分裂相互关联。

另一个有用的观察是，$\mathcal{G}'$ 的每个新面都对应于 $\mathcal{G}$ 的一个白色顶点。

请注意，在论文的后续部分，每当我们取截面 $\sigma_H(T)$ 时，都默认假设 T 是 1-一般，且 H 相对于 T处于一般位置。

现在，我们将介绍另一种理解如何对 TCD $\mathcal{T}$ 取截面的方法。非极小 TCD 也可以取截面，但由于我们主要关注的是极小 TCD，因此将注意力限制在极小 TCD 上，这也使得论述更加简洁。我们将说明，只需对 $\mathcal{T}$ 的弦进行扰动，即可得到 $\sigma(\mathcal{T})$，而无需切割或粘合任何弦。首先，我们引入与 $\mathcal{T}$ 相关联的交替弦图 $\mathscr{A}$。Postnikov [Pos06] 最初引入了这些图来研究 Grassmann流形，但由于我们只关注下一个定义中出现的特定交替弦图，因此不再给出交替弦图的一般定义。

定义4.8. 令 $\mathcal{T}$为一个极小TCD。将每条弦沿其法向右侧微移 $\epsilon > 0$ （见图4.5），使得 $\mathcal{T}$ 的三重交叉分解为弦对之间的三个横截交叉，且不产生其他交叉。之后，对每条弦 k 移动其入端点 k，使其出现在出端点k之后，这样每条弦都会新增一个交叉。我们将所得图称为交替弦图 $\mathscr{A}(\mathcal{T})$。■

定义4.9. 设 $\mathcal{T}$为一个极小TCD，并将其视为一个图。对于每一对入端点和出端点 k，添加一个边界顶点 v_k。此外，对每条弦 k 添加边界边（v_k, v_{k+1}），并将所得的影子图 记为 $\mathscr{G}$ （见图4.5）。此外，考虑 $\mathscr{G}$ 与 $\mathscr{A}$的叠加。$\mathscr{G}$ 的每条边都恰好被弦相交两次

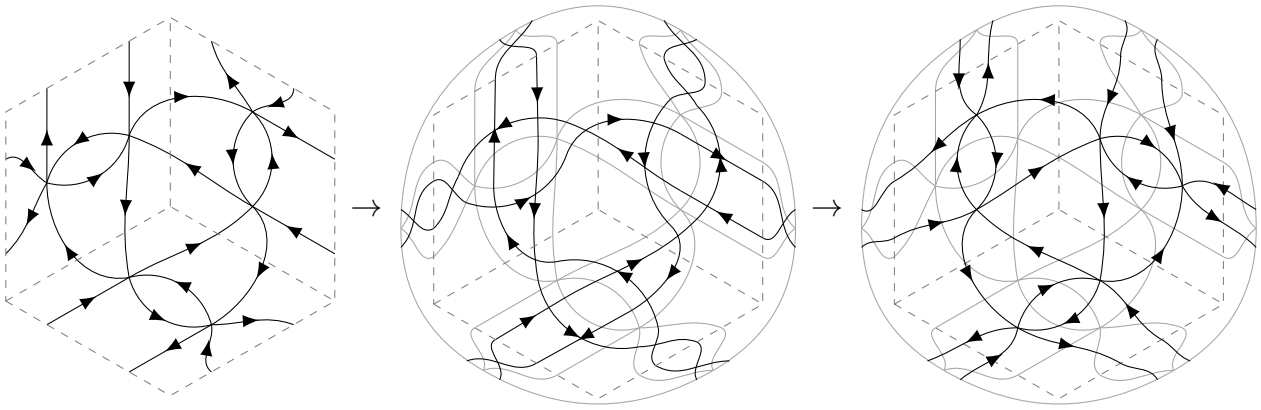


图4.5. 序列 $\mathcal{T} \to \mathscr{A}$（黑色）和 $\mathscr{G}$（灰色） $\to \mathcal{T}(\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}}) = \sigma(\mathcal{T})$，或如何取TCD的一个截面。

$\mathscr{A}$。在 $\mathscr{G}$ 的每个面 f 中，我们考虑由该面内 $\mathscr{A}$的弦所诱导的端点匹配 $C^f_{\mathscr{A}}$。称$(\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}})$为 $\mathcal{T}$的影 。■

事实上，顺时针面 f 中度为 k 的端点匹配 $C^f_{\mathscr{A}}$ 始终是 $\mathcal{S}^k_{-2}$；而在逆时针面中，它始终是 $\mathcal{S}^k_{-1}$，见图4.5。

定义4.10. 给定一个影（$\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}}$），我们通过将 $\mathscr{G}$ 中的每个面 f 替换为具有端点匹配 $C^f_{\mathscr{A}}$ 的TCD，并移除所有长度为零的弦，来定义一个TCD $\mathcal{T}(\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}})$。■

根据定义，以这种方式构造的不同图示 $\mathcal{T}(\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}})$由一系列2-2 移动相互关联。

引理4.11. 设 $\mathcal{T}$ 是一个极小TCD，且 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个TCD映射。那么，任意截面 $\sigma(T)$的TCD $\sigma(\mathcal{T})$对应于一个由影构造的TCD。因此，可以作出选择，使得

$$\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\mathscr{G}, C_{\mathscr{A}}) \tag{4.9}$$

成立。 ■

证明。我们比较 TCD 层面上截面的构造与定义 4.7 中图层面上截面的构造。将三重交点分裂以得到交替弦图 $\mathscr{A}(\mathcal{T})$ 时，我们分裂所有弦，使得一个新的逆时针面出现；这对应于图步骤 (3) 中为已存在于 $\mathcal{G}$ （而非在 $\mathcal{G}^i$ 中引入的）黑色顶点所添加的新白色顶点。我们也交换入端点和出端点，这对应于图步骤 (1) 中在边界边上引入黑色顶点，以及随后在图步骤 (3) 中将其替换为白色顶点。在影的每个面中粘合新的 TCD（$\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}}$），对应于图步骤 (2) 中的三角剖分选择，以及随后在图步骤 (3) 中引入白色顶点和在图步骤 (4) 中引入黑色顶点。我们移除长度为 0 的弦，因为它们不会为 TCD 映射提供信息，也不会出现在与 $\sigma(\mathcal{G})$ 关联的 TCD 中。□

如果我们不从 $\sigma(\mathcal{T})$ 中移除长度为 0 的弦，那么截面的端点匹配确实有一个简单的公式。

$$C_{\sigma(\mathcal{T})}(k) = C_{\mathcal{T}}(k) - 1 \tag{4.10}$$

成立。注意，我们在 $\sigma(\mathcal{T})$ 中移除的长度为 0 的弦，是 $\mathcal{T}$ 中长度为 1 的弦，它们在 $\mathcal{T}$ 中右侧只有一个白色顶点。

推论 4.12。 $\sigma(\mathcal{T})$ 的最大维数比 $\mathcal{T}$ 的最大维数小 1。■

证明。设 n 为 $\mathcal{T}$ 中弦的数量。首先，若每条弦的长度均为 1，则端点匹配为 $\mathcal{S}_1^n$，因此对应于一个 n 边形的三角剖分（见例 2.14）。属于一个 $\mathcal{S}_1^n$ TCD 的 TCD映射也是一个三角剖分（见第 5.4 节），其最大维数为 1。取截面后，TCD 仅由长度为 0 的弦组成，并且只有一个逆时针面，最大维数为 0。在其他所有情况下，都存在一条长度大于 1 的弦。选择一种标记，使这条弦连接到出端点 1，并考察半平面图。为了确定该截面的最大维数，我们使用定理 2.43，该定理指出最大维数等于左行弦的数量。 $\mathcal{T}$ 中所有长度为 1 的弦都是右行弦，因此移除它们不会改变最大维数。终止于出端点 1 的弦必定是左行弦。在截面中，出端点 1 与入端点 1 交换，我们选择一个新的半平面图，此时原来的出端点 1 成为出端点 n。终止于原出端点 1 的弦现在是右行弦。其他所有左行（分别为右行）弦仍然是左行（分别为右行）弦。因此，$\sigma(\mathcal{T})$ 的最大维数恰好比 $\mathcal{T}$ 小 1。□

Lemma 4.13. 设 $\mathcal{T}$是一个极小TCD。那么 $\sigma(\mathcal{T})$是连通且极小的 . ■

证明。根据 $\sigma(\mathcal{T})$ 的构造，没有弦被切断，因此所有弦仍与边界相连，从而 $\sigma(\mathcal{T})$ 是连通的。对于极小性，我们首先证明不存在以平行方式相交两次的弦对，然后证明不存在自相交的弦。于是定理 2.10 的条件得到满足，从而完成引理的证明。

我们来看在截面 $\sigma(\mathcal{T})$中引入新的交叉点时会发生什么。在 $\mathcal{G}$的每个面 f中，我们重新排列弦，从而得到一个新的 TCD $\mathcal{T}^f$，其连通性为 $C_{\mathcal{T}^f}(k) = (k-2)$。注意，如果两条弦在 $\mathcal{T}$中的相应面 f' 处相交一次，那么它们在 $\mathcal{T}^f$中也相交一次。如果它们在 f'中没有相交，那么它们要么在 $\mathcal{T}^f$中也不相交，要么相交两次并围成一个逆时针二边形。

设 k, l 是 $\mathcal{T}$ 中的两条弦，且 $b_1 <_k b_2 <_k \cdots <_k b_n$ 是沿弦 k 的定向排序的交点。由于 $\mathcal{T}$ 是极小的，这些交点沿弦 l 的顺序相反，即 $b_1 >_l b_2 >_l \cdots >_l b_n$，否则 $\mathcal{T}$ 中就会出现平行大二边形。在 $\sigma(\mathcal{T})$ 中，我们只成对添加新的交点 b', b''，使得：

$$b_1 <_k \cdots <_k b_n \quad \longrightarrow \quad b_1 <_k \cdots <_k b' <_k b'' <_k \cdots <_k b_n \tag{4.11}$$

$$b_1 >_l \cdots >_l b_n \quad \longrightarrow \quad b_1 >_l \cdots >_l b' >_l b'' >_l \cdots >_l b_n \tag{4.12}$$

因此， $\sigma(\mathcal{T})$ 中不会出现平行交点。

此外，我们论证了，由于 $\mathcal{T}$ 是极小元，不可能存在这样的情况：顺时针面 f 在 $\mathcal{T}$ 中被同一条弦两次界定。假设弦 k 界定了交点 b_1、b_2 之间的面 f，并且也界定了 b_i、b_{i+1} 之间的面，使得：

(1) f 位于 b_2 和 b_i之间的弦 k 的左侧，

(2) 对于 $1 < j < i$，界定 f 与 b_j, b_{j+1} 的弦互不相同。

当然 $2 < i < n-1$，否则已经存在自交。不过，围成 b_2，b_3 之间的面的弦必须要么在 b_2 处与自身相交，要么与弦 k 相交，同时

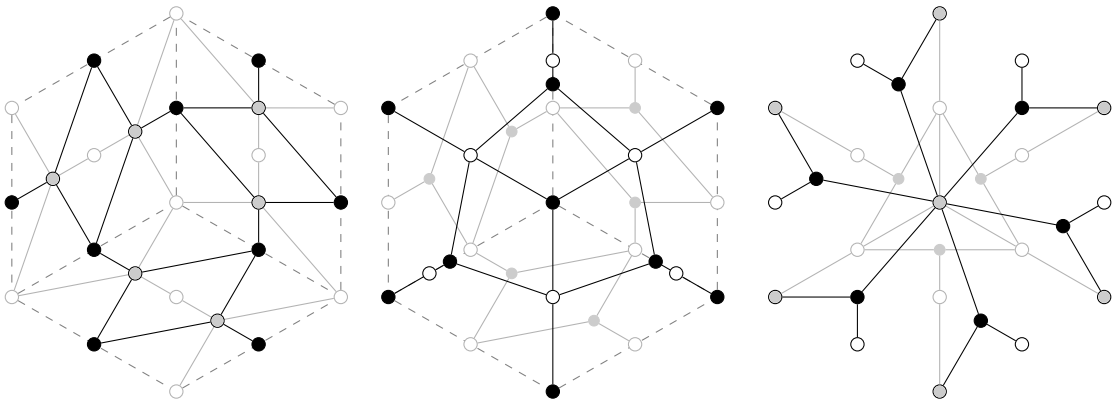


图 4.6。阶梯曲面、Q-网、达布映射和直线复形的基本区域中，图 $\mathcal{G}$ 以灰色表示， $\sigma(\mathcal{G})$ 以黑色表示。

形成平行交。因此， $\mathcal{T}$ 中顺时针面周围的所有弦彼此不同，我们不会在 σ（$\mathcal{T}$）中引入任何自交。□

离散微分几何中的几个贯穿全文的例子实际上通过截面彼此关联。

引理 4.14。考虑与 Q-网、达布映射和直线复形的阶梯曲面相关联的 TCD映射。那么可以选取截面，使得

(1) Q-网的截面是一个达布映射，

(2) 达布映射的截面是一个直线复形，

(3) 直线复形的截面是一个 Q-网。

此外，定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的 Q-网的截面又是定义在（平移后的） $\mathbb{Z}^2$上的 Q-网。如果我们考虑定义在四边形图上的映射，则可以改为作出如下选择：

(1) 直线复形的截面是一个 Q-网，(2) Q-网的截面是一个达布映射，(3) 达布映射的截面是一个直线复合体。

■

证明。由应用定义 4.7 中的截面规则可得。阶梯曲面相关陈述的示意图见图 4.6，四边形图相关陈述的示意图见图 4.7。□

我们注意到，上述前三个陈述构成了一个包含三个成员的循环关系。阶梯曲面陈述 (1) 是 DDG 书 [BS08] 中练习 2.8 和 2.9 的主题。据我们所知，其余陈述都是新的，尽管根据定义，它们都显而易见。

我们还可以取迭代截面，并且它们彼此可交换。

引理4.15. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n, n \geq 2$ 是一个 1-一般 TCD 映射。设 H_1, H_2 是关于 T 的两个不同的一般超平面，并令 $H_{12} = H_1 \cap H_2$。设 $T_1 = \sigma_{H_1}(T)$ $T_2 = \sigma_{H_2}(T)$ 是 T 的两个截面，二者都定义在一个 TCD $\mathcal{T}'$ 上，并选取一个 TCD $\mathcal{T}'' = \sigma(\mathcal{T}')$。若 T_1, T_2 是 1-一般的，且 H_{12} 关于 T_1 和 T_2 都处于一般位置，则存在唯一的 TCD 映射$T_{12}\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}'' \to H_{12}$，使得

$$T_{12} = \sigma_{H_2}(T_1) = \sigma_{H_1}(T_2). \tag{4.13}$$

■

证明。一旦选定截面的组合结构，截面上的点便随之确定。因此我们必须验证 $\sigma_{H_2}(T_1) = \sigma_{H_1}(T_2)$。$\sigma_{H_2}(T_1)$ 中的一个白色顶点 w 对应于

$$H_2 \cap H_1 \cap H_w = H_{12} \cap H_w, \tag{4.14}$$

其中，H_w 是由 T中的点张成的二维空间。同一白色顶点 w 在$\sigma_{H_1}(T_2)$中则对应于

$$H_1 \cap H_2 \cap H_w = H_{12} \cap H_w. \tag{4.15}$$

因此，组合结构与几何两者一致，引理得证。□

根据引理4.15，可以定义

$$\sigma_{H_{12}}(T) = \sigma_{H_2}(T_1) = \sigma_{H_1}(T_2) \tag{4.16}$$

并称 $\sigma_{H_{12}}(T)$为 T的余维二截面。更一般地，对于维数为 $H' = n - k$的情形，我们可以说 $\sigma_{H'}(T)$ 是 T的余维 k截面。

现在我们能够以有意义的方式进行迭代截面，接下来也来给出“迭代一般性”的定义。

定义 4.16. TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是关于 $n > k > 1$ 的-一般位置，如果 T 是 1-一般，且每个截面 $\sigma_H(T)$ 都是 $(k-1)$-一般位置。此外，余维为 k 的子空间 S 是一般位置的，如果对于所有满足 $H \supset S$ 的截面 $\sigma_H(T)$，它都是一般位置的。■

首先讨论 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中的一般子空间。从本质上说，一般位置的 $(n-k)$ 空间是不与任何由 T 张成的 $(k-1)$ 空间相交的空间，而这些空间作为点出现在 T 的第 k 个截面中。一般来说，如果 $\mathcal{G}$ 有 m 个白色顶点，那么禁空间集合是由 k 个 T 的像点张成的所有 $(k-1)$ 空间的一个子集。因此，对于任何满足$0 \le k < n-1$的 k，都存在一般位置的 k 空间。对于给定的 $\mathcal{T}$，是否存在 k-一般TCD映射并非完全显而易见。存在性证明（通过例子）留给读者。我们提出如下建议：考虑一个端点匹配为 $\mathcal{S}^n_{-1}$ 的 TCD $\mathcal{T}$。相应的图 $\mathcal{G}$ 由 n 个白色顶点组成，且没有黑色顶点，其最大维数显然为 $n-1$。考虑 $\mathcal{T}$ 上一个达到最大维数的 TCD映射。我们声称它是 $(n-2)$-一般位置的。

~ ~引理 4.17。设 $\mathcal{T}$，$\mathcal{T}$是通过一系列 2-2 移动相互关联的两个极小TCD。设 T，T~是在 $\mathcal{T}$，$\mathcal{T}$上定义的两个TCD映射。那么存在一系列 2-2 移动，将 $\sigma_H(T)$~变为 $\sigma_H(T)$。■

~证明。TCD $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}$ 的端点匹配相同。因此，各截面的端点匹配也相同。根据定理 2.9，存在一系列 2-2移动，可将其中一个截面的TCD变为另一个截面的TCD。□

4.3. 扫描与无环定向

回顾一下，对于每个 $\mathcal{T}$，我们都关联一个图 $\mathcal{G}$，并在其上定义了关联的向量关系构型。在本节及后文中，另一个相关的图将会很有用。

定义 4.18。设 $\mathcal{T}$是一个TCD，$\mathcal{G}$ 是其关联图。图 $\mathcal{G}^-$ 对 b 中的每个黑色顶点 b 都有一个黑色顶点，对 $\mathcal{G}$的每个面 w 都有一个白色顶点 f；当 f 和 b 在 $\mathcal{G}$中关联时，图 $\mathcal{G}^-$ 中有一条边 $(w,\ b)$。■

根据定义，$\mathcal{G}^-$ 是一个平面二分图，$\mathcal{G}^-$ 的所有黑色顶点均为三度。事实上，如果 $\iota(\mathcal{T})$是将所有弦的定向反转后的 TCD $\mathcal{T}$，那么 $\mathcal{G}^-$ 是 $\iota(\mathcal{T})$的关联图。

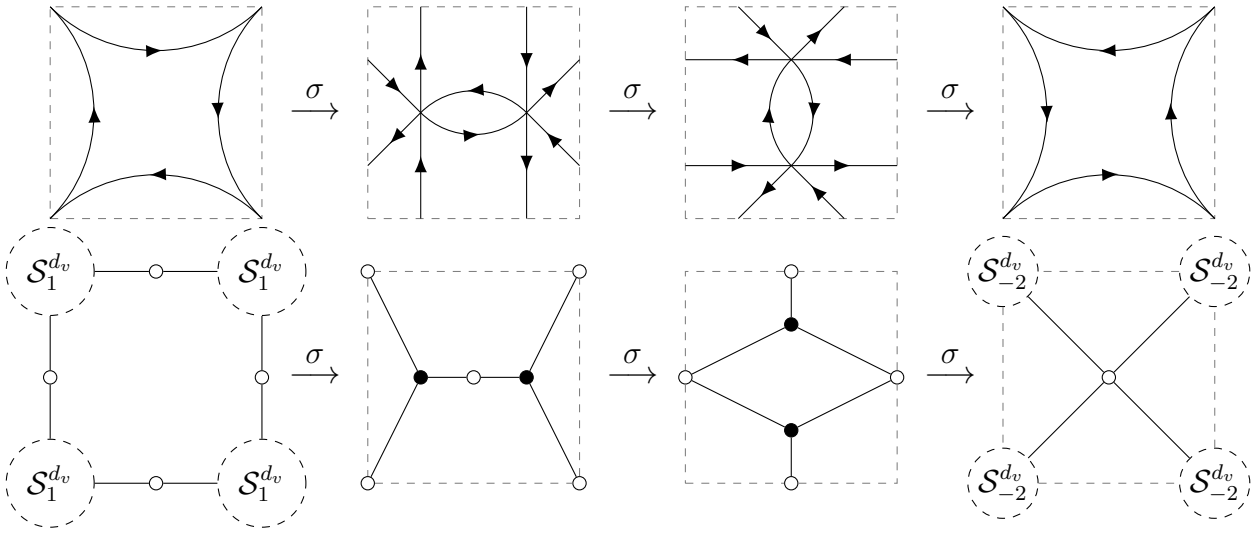


图 4.7. 我们粘接到直线复形、Q-网、达布映射以及最终一种新型映射的四边形中的 TCD 和二分图块。

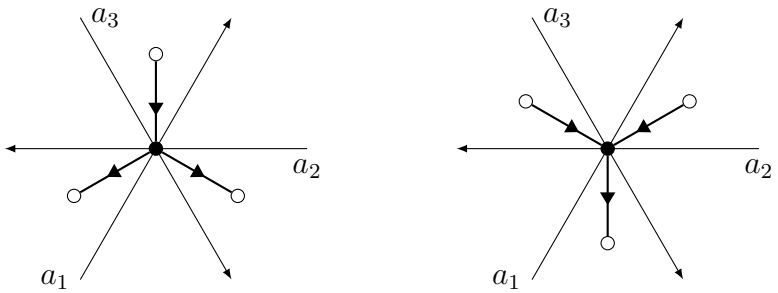


图 4.8. 左侧 $\mathcal{G}$ 和右侧 $\mathcal{G}^-$ 在 $a_1 < a_2 < a_3$ 处的黑色顶点的 li-定向。

引理 4.19. 设 $\mathcal{T}$ 是一个带标号的极小 TCD。

(1) 在每个交点 b 处，都有三条弦 a_1，a_2，a_3，它们按逆时针顺序排列。若 a_1 携带最小标签，则 $a_1 < a_2 < a_3$。(2) 在每个面或边界面 f 处，都有 d_f 条弦 a_1，a_2，……，a_{d_f}，它们按逆时针顺序排列。若 a_1 携带最小标签，则 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{d_f}$。■

证明。我们用 a_1',a_2',a_3' 表示弦 a_1, a_2, a_3 从边界到交点 b的部分。由于极小性，a_1',a_2',a_3' 只能在 b处相交。因此，引理的第一部分得证。对于第二部分，假设 a_i' 和 a_j' 在到达面 f之前相交。那么，弦 a_i 和 a_j 在 f 上必定不相邻，否则该 TCD 就不是极小的。用 a_i'',a_j''表示 a_i, a_j从 f到边界的部分。那么，a_i''或 a_j''会被 f, a_i' 和 a_j'困住。这在极小TCD中不可能，因此由反证法可得引理。□

定义4.20。设 $\mathcal{T}$是一个带标号的 TCD。 $\mathcal{G}$ 的每条边 e 都与唯一一个黑色顶点 b相邻。在 b 处有三条弦 $a_1 < a_2 < a_3$。如果 e 位于 a_1和 a_3 之间，就将 e 定向为背离 b；其他情况下，则将其定向为朝向 b。这定义了$\mathcal{G}$上的由标记诱导的定向 $\mathcal{O}(\mathcal{T})$，我们将其简称为*li*-定向。类似地，在 $\mathcal{G}^-$ 中，若 e 位于 a_1 和 a_3 之间，就将每条边 e 定向为朝向 b；否则将其定向为背离 b。这定义了 $\mathcal{G}^-$上的*li*-定向 $\mathcal{O}^-(\mathcal{T})$，另见图4.8。 ■

事实上，li-定向此前已出现在一种特殊的图示中，即所谓的单调图示 [**Pos06**]。对于任意置换（以及弦的标记选择），Postnikov 给出了一种算法，用于构造具有给定端点匹配的 TCD。该构造还为一个图 $\mathcal{O}'$ 赋予了定向；这个图是从 $\mathcal{G}^-$ 中去掉边界处若干条边后得到的。容易验证， $\mathcal{O}'$ 与 $\mathcal{O}$一致。

引理 4.21. 设 $\mathcal{T}$ 为一个极小带标号 TCD，且 $\mathcal{G}$ 的 li-定向为 $\mathcal{O}$ （分别地， $\mathcal{G}^-$的 li-定向为 $\mathcal{O}^-$）。那么，每个白色顶点恰有一条入边（分别地，出边）。此外，对于每个面 f ，恰有一条入边（分别地，出边）。入边（分别地，出边）是指不在 f 边界上的边，但与边界 f 上的黑色顶点 b 相邻，且指向（分别地，背离）该黑色顶点 b。此外，所有汇点（分别地，源点）都是 $\mathcal{G}$ （分别地， $\mathcal{G}^-$）的边界顶点。■

证明。由引理 4.19 直接得出。 □

根据构造，每个黑色顶点恰有一条入边，每个白色顶点恰有一条出边。因此，li-定向是完美定向的一个例子，参见 [**Pos06**]。

在每个黑色顶点处，li-定向会将一条边与另外两条边区分开来。因此，我们可以定义相应的 li匹配，这在后文也会很有用。

定义 4.22. 设 $\mathcal{T}$ 是一个带标号的 TCD。将 M *li匹配* M （分别为 M^-）定义为 $\mathcal{G}$ （分别为 $\mathcal{G}^-$）中指向其关联黑色顶点之外（分别为指向其关联黑色顶点）的边的子集。■

引理 4.23. 设 $\mathcal{T}$ 是一个带标号的极小 TCD，且设 M （分别为 M^-）是 $\mathcal{G}$ （分别为 $\mathcal{G}^-$）上的 li匹配。则 $\mathcal{G}$ （分别为 $\mathcal{G}^-$）的每个内部顶点恰好匹配一次。此外，每个内部面也恰好匹配一次，具体来说，对于每个面 f ，恰有一条边 e 不是 f 的边界边，且与 f 边界上的一个黑色顶点关联。■

证明。 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^-$ 的面、白色顶点和黑色顶点分别对应于 $\mathcal{T}$的面。因此，该引理由引理 4.19立即得到。□

因此，来自极小TCD的li匹配是完美匹配。注意，这些完美匹配与所谓的极值匹配密切相关；后者已在环面上的极小二分图中得到研究 [**Bro12**]。

引理 4.24。带标号的极小 TCD $\mathcal{T}$的 li-定向 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}^-$ 是无环的。 ■

证明。假设 γ是 $\mathcal{G}$的一个圈。考虑 $\mathcal{G}$的子图 $G = (B \cup W, E, F)$，该子图由圈 γ围成。另以 B' 表示 γ 上的黑色顶点集合，使得与 γ 相邻的顶点中至少有一个不属于 G。我们知道，li-定向在G 上诱导出一个li匹配，使得每个黑色顶点都得到匹配，因此有 $|W| = |B|$。此外，根据构造，边数满足 $|E| = 3|B| - |B'|$ 。另外，引理4.23保证 G 的每个面恰好对应一条匹配边，并且除与 B'的顶点相邻的边外，每条匹配边恰好对应一个面。将这一观察写成方程即为 $|F| = |B| - |B'|$。现在，我们可以将得到的三个方程代入欧拉示性数的公式中，得到

$$0 = 1 + |E| - |F| - |B| - |W| = 1 + (3|B| - |B'|) - (|B| - |B'|) - |B| - |B| = 1, \tag{4.17}$$

这就产生了矛盾。因此， $\mathcal{G}$中不存在圈。对于 $\mathcal{G}^-$ ，论证完全相同，因此我们证明了引理。□

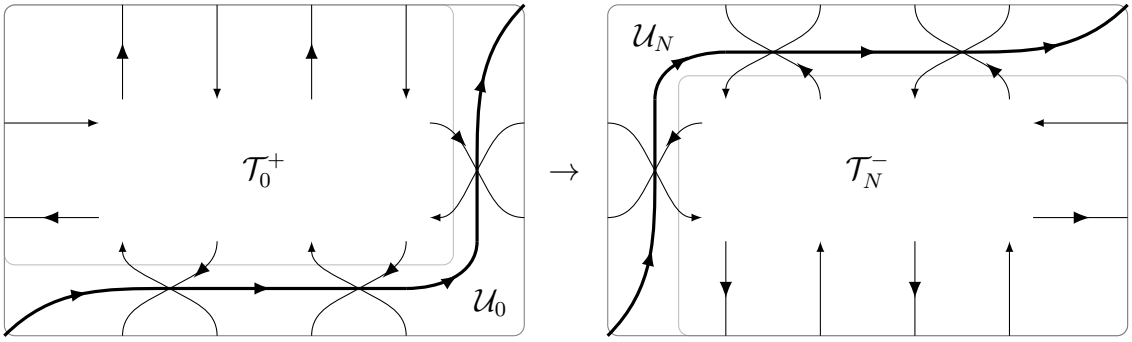


图 4.9. 扫掠前（左）和扫掠后（右）的情形。

定义 4.25. 设 $\mathcal{O}, \mathcal{O}^-$ 为带标号的极小 TCD $\mathcal{T}$ 的 li-定向。我们将由无环定向 $\mathcal{O}, \mathcal{O}^-$ 诱导的 *li-* 偏序集 $\mathcal{P}, \mathcal{P}^-$ 定义为偏序集 $(V(\mathcal{G}), \preceq), (V(\mathcal{G}^-), \preceq)$。明确地说，对于任意两个顶点 v, v'，若 $v = v'$，或在 $\mathcal{O}$（分别为 $\mathcal{O}^-$）中存在一条从 v' 到 v 的有向路径，则定义 $v \preceq v'$。■

定义 4.26. 给定一个 TCD $\mathcal{T}$，如果存在一个圆盘 D，使得 $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap D$ 是圆盘 D 中的 TCD，我们称 $\mathcal{T}'$ 为 $\mathcal{T}$ 的子图。■

定义 4.27. 设 $\mathcal{T}_0^+$ 是一个具有 n 条弦的带标号的极小 TCD，并设 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $0 \le k \le n$。我们定义一个新的 TCD $\mathcal{U}_0$，使得

(1) $\mathcal{U}_0$ 有（$n+1$）条弦，(2) $\mathcal{T}_0^+$是 $\mathcal{U}_0$的子图，(3) $\mathcal{U}_0$ 中不属于$\mathcal{T}_0^+$的额外弦称为扫描弦，并沿着 $\mathcal{U}_0$中$\mathcal{T}_0^+$的边界逆时针运行，(4) 对于$\mathcal{T}_0^+$的 $0 \le i < k$，属于出端点 i 的弦在扫描弦上与属于$\mathcal{T}_0^+$的入端点 i 的弦交叉，而且这些是 $\mathcal{U}_0$ 中不属于$\mathcal{T}_0^+$的唯一交叉点。

另见图 4.9。我们称 k 为扫描弦的长度。 ■

定义 4.28。设 $\mathcal{T}_0^+$为带标号的极小 TCD， $\mathcal{U}_0$ 为添加了长度为 k 的扫描弦后得到的图。扫掠 是一个 TCD 序列 $\mathcal{U}_0$，$\mathcal{U}_1$，$\mathcal{U}_2$，……，$\mathcal{U}_N$，满足

(1) 连续的 TCD 通过涉及扫描弦的 2-2 移动相互关联
，(2) 扫描弦右侧的面数递增，(3) 在 $\mathcal{U}_N$ 中，扫描弦左侧只有边界面。

如果存在一条长度为 k 的扫描弦所对应的扫掠，我们就称 TCD $\mathcal{T}_0^+$为 k-可扫描的 。如果存在一个数 k，使得 $\mathcal{T}_0^+$是 k-可扫描的，我们就称 $\mathcal{T}_0^+$为可扫描的 。我们还用 $\mathcal{T}_i^+$（分别用 $\mathcal{T}_i^-$）表示 $\mathcal{U}_i$ 中位于扫描弦上方（分别位于下方）的子图，见图 4.9。扫掠的示例见图 4.10。■

事实上，在一次扫掠中，每次 2-2移动都会使扫描弦下方（即其右侧）的面数增加一条。扫描弦必须穿过 $\mathcal{U}_0$的每个内部面。$\mathcal{U}_0$ 的内部面数恰好等于 $\mathcal{T}_0^+$的内部面数与（$2k-1$）之和。因此，扫描序列的长度 N 确实是

$$N = |F^{\text{int}}(\mathcal{T}_0^+)| + 2k - 1. \tag{4.18}$$

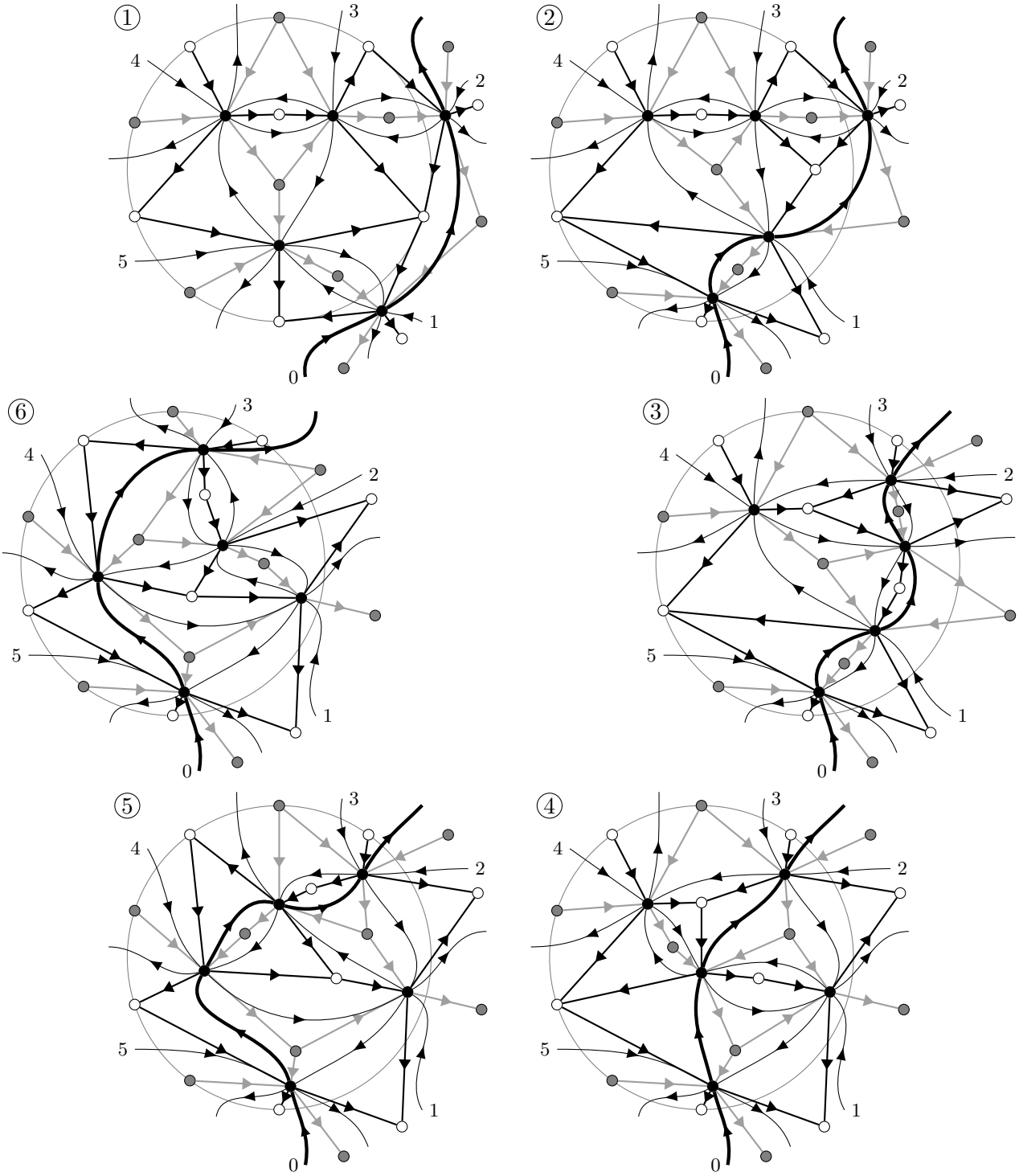


图 4.10. TCD 的一次扫掠示例。 $\mathcal{O}$ 的定向边用黑色表示， $\mathcal{O}^{-}$ 的定向边用灰色表示。

另一个显而易见的观察是，根据定义，如果 $\mathcal{T}_0^+$是可扫描的，那么对于任意其他i， $\mathcal{T}_i^+$ 也可扫描。此外， $\mathcal{U}_i$ 的端点匹配不依赖于 i，因为不同i 对应的图示可以通过 2-2 移动相互关联。因此， $\mathcal{T}_N^-$ 的端点匹配由 $\mathcal{T}_0^-$的端点匹配决定。

引理 4.29. 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有 n 条弦和端点匹配 π的带标号的极小 TCD，且 $\mathcal{T}$ 是 k-可扫描的。那么

（1）对于所有满足 $\pi(i) \leq k$ 的弦 i，我们有 $\pi(i) < i$，并且

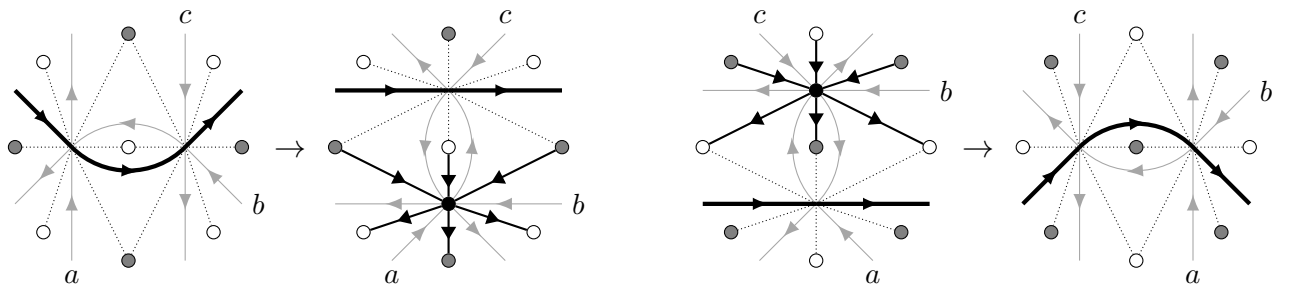


图4.11。扫掠中两类2-2移动所对应的TCD和li-定向的变化。粗弦是扫描弦。

(2) for all strands i with $\pi(i) > k$ we have that $\pi(i) > i$. ■

证明。如果第一个条件不满足，那么 $\mathcal{U}_0$ 就不是极小图。事实上，在这种情况下，存在一个 i，使得 $i < \pi(i) \leq k$。弦 i 永远不可能完全位于扫描弦下方。如果第二个条件不满足，那么 $\mathcal{U}_N$ 就不是极小图。事实上，在这种情况下，存在一个 i，使得 $i > \pi(i) \geq k$。扫描弦永远不可能越过弦 i。□

事实上，我们将证明，引理4.29中的条件不仅是TCD具有可扫描性的必要条件，也是充分条件。

引理4.30。设 $\mathcal{U}_i$ 是扫掠中的一个TCD。那么，每个在扫描弦上方且与其相邻的顺时针2-胞腔（见图4.11）都是 $\mathcal{O}^{-}(\mathcal{T}_i^{+})$的极小元。■

证明。对于所涉及的、不是扫描弦的三条弦，我们选取标记 a, b, c，见图4.11。我们来证明 $a < b < c$。首先， c 在 a的位置结束。因此，引理4.29保证了 $c > a$。由于弦 b 在我们所考虑的2-胞腔处已经与弦 a 和 c 相交，所以在该2-胞腔之前，它不可能与弦 a 和 c 的部分相交。因此， $a < b < c$，结合li-定向的定义，该2-胞腔必定是一个极小元。□

类似地，可以证明下面每个逆时针胞腔都是$\mathcal{O}(\mathcal{T}^{-})$的极大元，但在下文中我们不需要这一结论。

引理4.31。li-定向 $\mathcal{O}^{-}(\mathcal{T}_i^{+})$在扫掠过程中保持不变。更确切地说，若$v$， v' 既是 $\mathcal{G}^{-}(\mathcal{T}_i^{+})$的顶点，也是 $\mathcal{G}^{-}(\mathcal{T}_j^{+})$的顶点，那么相对于 $\mathcal{O}^{-}(\mathcal{T}_i^{+})$的 $v \leq v'$ 当且仅当相对于 $\mathcal{O}^{-}(\mathcal{T}_j^{+})$的 $v \leq v'$。■

证明。我们从图4.11中观察到，在逆时针 2-面处进行 2-2 移动完全不会影响li-定向 $\mathcal{O}^{-}$。在顺时针胞腔处，我们确实会从 $\mathcal{G}^{-}$ 中移除一个顶点，但其他关系均不受影响。此外，注意在逆时针 2-面处进行 2-2 移动会移除一条弦，但这条弦没有交叉点，因此与li-定向无关。在顺时针 2-面处，我们将弦 b 分裂成两条弦 b， b'。因此，我们需要证明沿弦 b 后续交叉点处的li-定向不受分裂影响。显然 $b' < b$，因此若 b 在后续某个交叉点处已经是最小元，这一性质便会保持不变。若在后续某个交叉点处有 $x < b < y$，则可得 $x < a$，进而得到 $x < b'$，因为否则又会与TCD的极小性矛盾。若 b 在后续某个交叉点处是最大元，即 $x < y < b$，则可得 $x < y < a$，因此li-定向保持不变。□

注意到，引理4.30和引理4.31共同表明， $\mathcal{T}_0^{+}$的逆时针面被（完全）扫掠的顺序由 $\mathcal{O}^{-}$决定。事实上，任意扫掠 $\mathcal{U}_0$，……， $\mathcal{U}_N$ 也

会得到一个逆时针面的序列 f_0，f_1，……，f'_N。从序理论的意义上说，这个序列是$\mathcal{O}^-(\mathcal{T}_0^+)$的一个线性扩张。

引理 4.32. 设 $\mathcal{T}$ 是一个满足引理 4.29 条件的带标号的极小 TCD，且没有逆时针 2-面与扫描弦相邻。那么，$\mathcal{O}^-(\mathcal{T})$ 的唯一极小元是与扫描弦相邻的顺时针 2-面。■

证明。根据引理 4.19，$\mathcal{T}$中的每个面（包括边界面）在 $\mathcal{O}^-$中至多有一条入边。只有边数为 1 的面才是边界面。如果一个顺时针边界面 f 在 $\mathcal{T}$中具有面度 3，或者它将 TCD 分隔成两个 TCDs $\mathcal{T}'$，$\mathcal{T}''$，且这两个 TCD 仅通过该 TCD 的边界彼此连通，那么它在 $\mathcal{G}^-$ 中的顶点度为 1。设 $\mathcal{T}'$ 为位于 f的边界弦右侧的 TCD。然而，$\mathcal{T}'$ 不可能具有右转弦，否则将违反引理 4.29 的条件。因此，$\mathcal{T}'$ 只能由孤立的左转弦组成，但这同样不可能，因为这样一来，扫描弦旁边就会出现一个逆时针 2-面。类似地，也可以排除不与扫描弦相邻的分隔面的可能性。因此，唯一可能的汇点确实是边界上度为 3 的面。我们已经在引理4.30中证明，与扫描弦相邻的度为 3 的面是极小元。类似的论证表明，事实上，不与扫描弦相邻的度为 3 的面是极大元。□

定理 4.33。引理 4.29 的条件蕴含 k-可扫描性。 ■

证明。由于 $\mathcal{P}^-(\mathcal{T}_i^+)$ 是有限偏序集，$\mathcal{P}^-(\mathcal{T}_i^+)$ 中总是存在极小元。如果没有可用于继续扫掠的逆时针 2-面，那么引理 4.32 保证这些极小元对应于可以继续扫掠的顺时针 2-面。□

引理 4.34。如果 TCD $\mathcal{T}_0^+$是 k可扫描的，那么 k 等于$\mathcal{T}_0^+$的最大维数，即 $k = |W| - |B| - 1$，其中 W 和 B 分别是 $\mathcal{G}$（$\mathcal{T}_0^+$）的白色顶点数和黑色顶点数。■

证明。考虑 $\mathcal{U}_0$，其标记从扫描弦开始，并采用 li-定向$\mathcal{O}(\mathcal{U}_0)$。由引理 4.19 可知，扫描弦下方的所有边界面都是极小值，扫描弦起点正左侧的边界面也是如此。所有其他边界面都有一条出边。因此，相应的 li匹配 $M(\mathcal{U}_0)$ 将 $\mathcal{U}_0$的逆时针面全部匹配，除了$(k+1)$。$\mathcal{G}(\mathcal{U}_0)$中白色顶点与黑色顶点的数量之差，与 $\mathcal{G}(\mathcal{T}_0^+)$中的相同，因此我们得到$|W| - |B| = k + 1$，这就证明了该断言。□

由于并非所有 TCD 都是可扫掠的，因此扫掠的用途尚不明确。事实上，我们将证明，在许多示例中，扫掠自然地作为一种通过 TCD映射传播信息的方式出现。特别是，它们将截面与投影联系起来（见第 4.5 节），并通过某些射影不变量，为具有给定 TCD 的 TCD映射提供一种自然的参数化方式（见第 5.6 节）。此外，我们还可以从纯组合的角度，对可扫掠 TCD 作出更多论述。

引理4.35。如果极小TCD $\mathcal{T}$是平衡的（见定义2.3），即对于某个 k，$n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{T}$具有端点匹配 $\mathcal{S}_k^n$，那么对于任意标记选择，它都是 k-可扫描的。■

证明。由于 $\mathcal{T}$中的每条弦长度均为 k，显然满足引理 4.29 的条件。根据定理 4.33，TCD $\mathcal{T}$因此是 k可扫描的。□

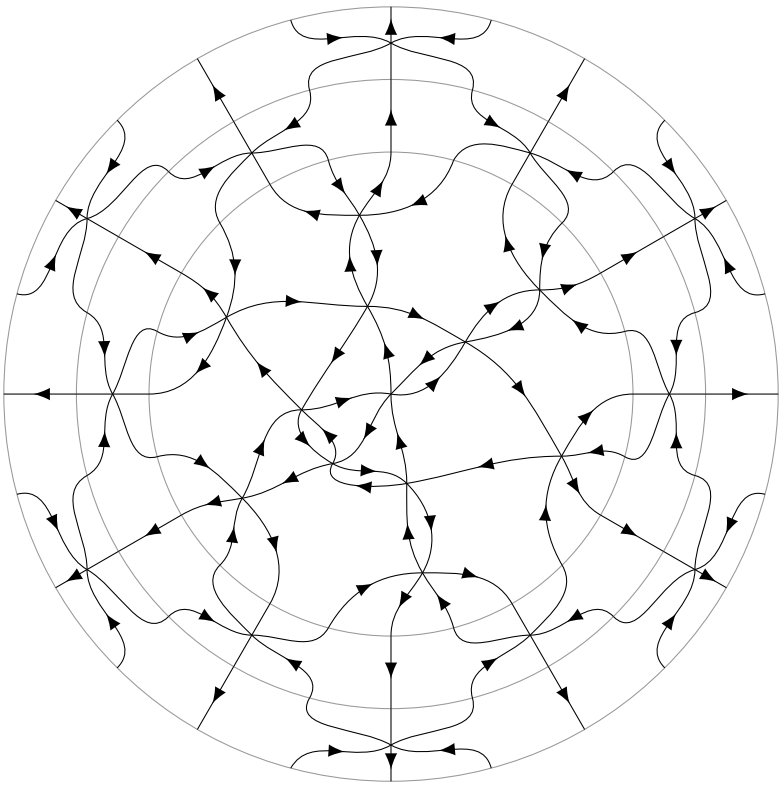


图4.12. 三个 TCD $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}''$。最内侧的 TCD $\mathcal{T}$ 不可扫描，$\mathcal{T}'$ 可扫描，而 $\mathcal{T}''$ 是平衡的。

引理 4.36. 设 $\mathcal{T}$ 是具有最大维数 k 且包含 n 条弦的极小TCD。那么存在一个 TCD $\mathcal{T}'$，使得

(1) $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}'$的子图，(2) $\mathcal{T}'$ 的最大维数也是 k，(3) $\mathcal{T}'$ 的弦数也是 n，(4) $\mathcal{T}'$ 可扫描。

■

另见图4.12。

证明. 我们证明，存在一个具有 n 条弦且最大维数为k 的平衡TCD $\mathcal{T}''$，使得 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}''$ 的子图。由引理 4.35，TCD $\mathcal{T}''$ 可扫描。这足以证明该结论。记弦 s 的长度为 $\ell(s) = \pi(s) - s$，其中 π 是端点匹配，约定 $0 \le \ell(s) < n$。我们构造一个图的序列 $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{T}_m$，使得 $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$ 且 $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}''$。如果 $\mathcal{T}_i$不平衡，则存在一条长度最大的弦 j，使得 $\ell(j) > \ell(j+1)$。令 $\mathcal{T}_{i+1}$ 为 $\mathcal{T}_i$ 的副本，但在 $\mathcal{T}$ 的边界处增加一个交叉，其中弦 j、$j+1$ 与终点位于二者之间的弦相交。因此，$\mathcal{T}_{i+1}$ 中的新长度 ℓ' 为

$$\ell'(j) = \ell(j+1) + 1 \text{ and } \ell'(j+1) = \ell(j) - 1. \tag{4.19}$$

注意，$\ell(j) \ge \ell(j+1) + 2$，否则两条弦将从同一点离开 TCD。因此在 $\mathcal{T}_{i+1}$ 中，最大长度要么减小，要么最大长度的弦的数量减少。因此，TCD 序列是有限的。弦的数量也保持不变。此外，在二分图 $\mathcal{G}(\mathcal{T}_i)$ 中，我们添加一个黑色顶点和一个白色顶点。因此，最大维数也保持不变。接下来需要验证 TCD $\mathcal{T}_i$ 也仍然是极小的。不可能出现自交，因为如果离开的弦是弦 j 或 $(j+1)$，那么 j 就不是最大长度的弦。同样，如果弦 j 和 $(j+1)$ 已经有一个

交叉，那么弦 j 的长度小于或等于弦 $(j+1)$ 的长度，这与假设矛盾。因此， $\mathcal{T}_{i+1}$ 也具有极小性。由于该序列是有限的，且只有在所有弦的长度都相等时才会停止，因此命题得证。□

注 4.37. 考虑引理 4.36 中的序列 $(\mathcal{T}_i) := \mathcal{T}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{T}_m$ ，并假设我们有一个与之配套的 TCD 映射序列 $T_i : \mathcal{T}_i \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$。那么，序列 $(\mathcal{T}_i)$ 中的步骤对应于在边界上添加 “ 标记 ” 点。因此，从某种意义上说，不可扫掠 TCD 上的 TCD 映射，只是一个在边界处缺少少量信息的 TCD 映射。其次，还有排列上的所谓圆形 *Bruhat* 序 [Pos06] 。序列 $(\mathcal{T}_i)$ 中 TCD 的端点匹配实际上构成圆形 Bruhat 序中的一个（向上）链。事实上，有一种基于圆形 Bruhat 序的置换多面体推广，并且已证明其中的链对应于 TCD 的桥分解 [Wil16]。序列 $(\mathcal{T}_i)$ 确实是这类分解的一部分。不过请注意，扫描序列 $(\mathcal{T}_0^+,\ \mathcal{T}_1^+,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{T}_N^+)$ 通常并不是桥分解。两者有可能重合：将顺时针面的扫掠 2-2 移动视为桥分解中的步骤，并将逆时针面的 2-2 移动视为随后忽略不动点即可。然而，桥分解并不允许在顺时针面上进行所有 2-2 移动，而扫掠也只允许在与扫描弦相邻的面上执行桥分解中的步骤。能否像研究桥分解那样，更深入地理解扫描分解，这无疑是一个有趣的问题。为此，将不可扫描图视为需要多条扫描弦的图或许会有所帮助。在这种情况下，扫描分解可能会将桥分解包含为一个特例。之后，我们将针对定义在可扫掠 TCD 上的 TCD 映射给出一些结果，例如在第 5.6 节中，我们将根据不变量构造 TCD 映射。对于定义在不可扫描 TCD $\mathcal{T}_0$上的 TCD 映射，或许可以通过理解在更大的可扫掠 TCD $\mathcal{T}_m \supset \mathcal{T}_0$上的扫掠来推广这些结果。如果我们观察将 $\mathcal{T}_m$ 上的扫掠限制到 $\mathcal{T}_0$所得的情形，就会发现扫描弦在 $\mathcal{T}_0$中可能并不连通，也可能沿着边界在多个不同位置进入和离开 $\mathcal{T}_0$ 。不过，扫掠仍然会通过 2-2 移动单调地穿过 $\mathcal{T}_0$ ，只是在边界处还需要一些额外操作。若能进一步理解这些受限扫掠及其中涉及的定向，将会非常有意思。■

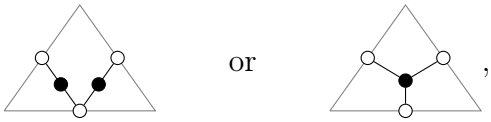
为了预备讨论几何方面的推论，我们先来考察一下迄今为止基本上被忽略的某些事物的组合结构，即 $\mathcal{T}_N^-$ 。

定理 4.38. 考虑从 $\mathcal{U}_0$ 到 $\mathcal{U}_N$ 的一次扫掠。那么可以选择一个截面，使得

$$\mathcal{T}_N^- = \sigma(\mathcal{T}_0^+). \tag{4.20}$$

■

证明。扫掠中的每一步都会从 $\mathcal{G}$（$\mathcal{T}_0^+$）中删除一个黑色顶点或白色顶点，因此我们可以用它们消失时所对应的扫掠步数来标记 $\mathcal{G}$（$\mathcal{T}_0^+$）的顶点，见图 4.13。我们可以在 $\mathcal{G}$（$\mathcal{T}_0^+$）中，将扫掠弦画成一条连接位于扫掠弦上方且与之相邻的白色顶点的直线。扫掠中在顺时针面处进行的每次 2-2 移动，都意味着我们将扫掠弦拉过相应的黑色顶点；而在逆时针面处进行的 2-2 移动，则意味着我们封闭与相应白色顶点相邻的一个开放三角形。在扫掠弦的另一侧，我们插入新的顶点和边，以得到 $\mathcal{G}$（$\mathcal{T}_N^-$ ）。具体而言，在每个对应于黑色或白色顶点的三角形中，我们粘入

(4.21)  ,

第一个三角形的旋转方式无关紧要。将所有这类三角形粘合在一起后，我们收缩度为 2 的黑色顶点，得到一个新的 TCD $\mathcal{T}'$。 $\mathcal{T}'$ 中的每个白色顶点

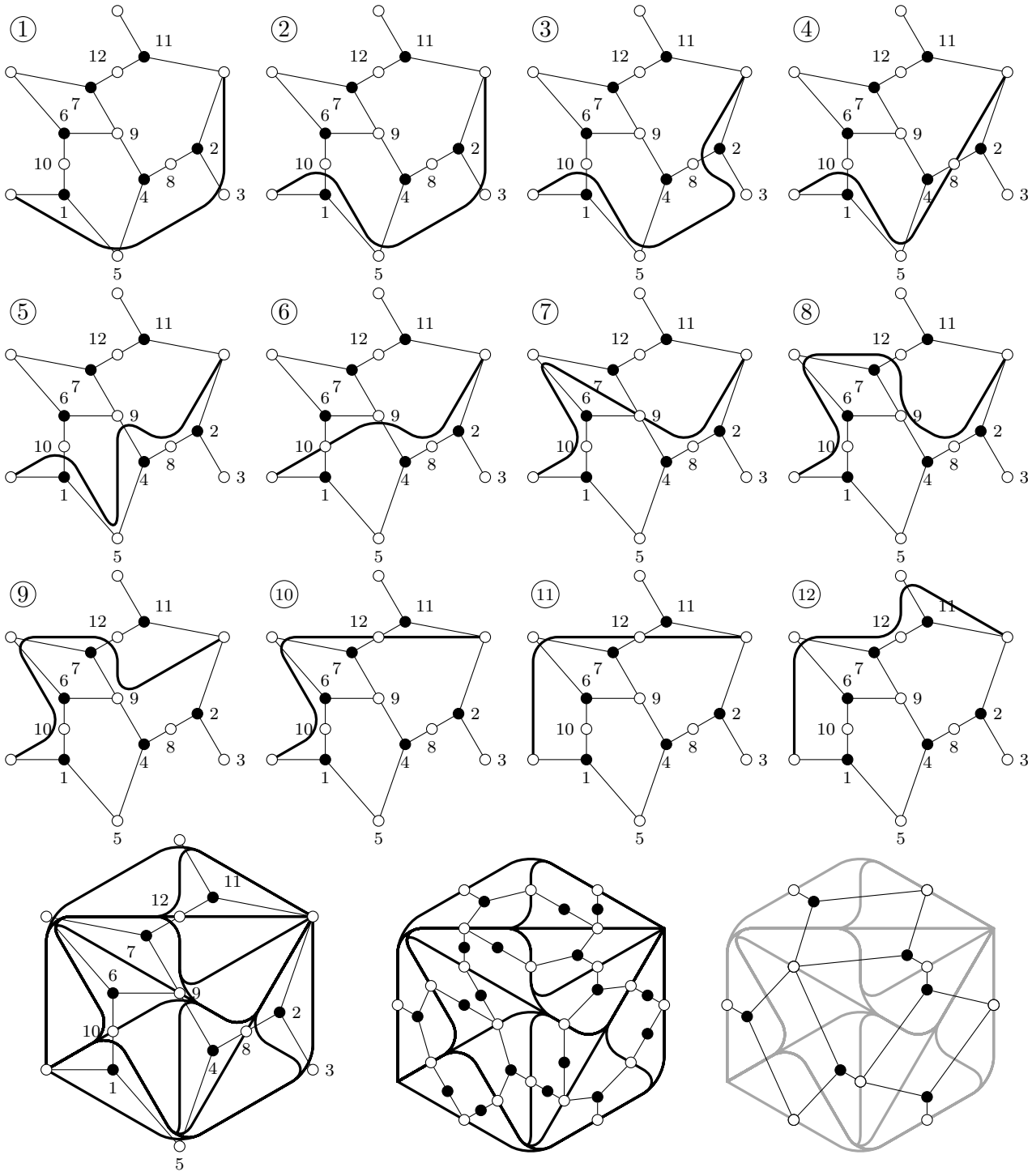


图 4.13。上：扫掠中除最后一步以外的所有步骤。下，从左到右：扫掠的所有步骤；将替换部分粘合到三角形中之后；收缩之后。

对应于一组黑色顶点，这些顶点通过 $\mathcal{G}(\mathcal{T}_0^+)$ 的 4-面、边界边或某个面的对角线彼此相邻。每个黑色顶点对应于 $\mathcal{G}(\mathcal{T}_0^+)$ 的一个面的三角剖分中的一个三角形。因此，$\mathcal{T}'$ 确实是 $\mathcal{T}_0^+$ 的一个截面。□

4.4. 扫掠化归为四边形图与伪直线排列

回顾一下，我们在第 2.3 节中引入了四边形图，并展示了四边形图可以作为 TCD 的一种特殊情形得到。具体而言，我们观察到，在一个特化为四边形图的 TCD 中，四边形图的每条条带都对应于 TCD 的两条弦（见定义 2.18）。一个极小四边形图的条带排列（见定义

2.21）也称为伪直线排列 [Fel04]。在某种程度上，上一节的结果推广了研究伪直线排列扫掠时所用的结果和方法，参见 [Fel04]。我们不需要伪直线排列（分别是四边形图）的扫掠的一般结果，因此这里只非正式地说明 TCD 上的扫掠如何归约为伪直线排列的扫掠。不过，将 li-定向 $\mathcal{O}$ 归约到四边形图是一个有用的对象，我们将在第8章中研究四边形图上可积映射的某些归约。因此，我们会在本节末对这一归约作出精确说明。

对于 TCD，我们引入了带标记的TCD（见定义2.2），我们也可以对四边形图做类似的处理，以得到带标记的四边形图。

定义4.39. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个具有 n 条带且没有闭合条带（环）的四边形图。我们按逆时针顺序用数字 $\{0,1,\dots,2n-1\}$标记条带的端点。每条条带以分配给其两个端点的两个标记中较小的标记来标记。我们称具有此类标记的 $\mathfrak{Q}$ 为标记四边形图。■

标记四边形图的端点匹配是条带端点标签的 n 对的集合。如果每条条带都与其他每条条带恰好相交一次，我们就称极小四边形图为平衡四边形图。因此，平衡标记四边形图的端点匹配由 n 对组成，$\{i,i+n\}$ 满足 i，且条带由数字 $\{0,1,\dots,n-1\}$标记。

回想一下，我们在定义2.18中说明了如何从每个四边形图 $\mathfrak{Q}$ 构造一个TCD $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$。我们已在引理 2.22中观察到，四边形图 $\mathfrak{Q}$ 是极小的，当且仅当 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 是极小的。

引理4.40. 若 $\mathfrak{Q}$ 是平衡的，则 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 是平衡的，反之亦然。 ■

证明. 假设 $\mathfrak{Q}$是平衡的，并为 $\mathfrak{Q}$选取一个标记。于是存在 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$的一个标记，使得对所有满足 $0\le a<2n$的 a，都有 $\pi(a)=a+n$ 且 $\pi(a+n)=a$，其中 π 是 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$的端点匹配。因此，$\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 是一个端点匹配为 $\mathcal{S}_n^{2n}$的平衡TCD（见定义2.3）。反过来，假设 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 是平衡的，并为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$选取一个标记。由于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 是与一个四边形图关联的TCD，$\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 有 $2n$ 条弦，并且对所有 a，b，$\pi(a)=b$ 蕴含 $\pi(b)=a$。$\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 也平衡的唯一可能情况是 $b-a=a-b$ 在 $\mathbb{Z}_{2n}$ 中，因此 $b=a+n$，这又意味着 $\mathfrak{Q}$ 是平衡的。□

要对一个带标记的伪直线排列，或等价地，对一个标记的平衡四边形图 $\mathfrak{Q}$进行扫掠，我们添加一条沿边界逆时针延伸并与每条条带恰好相交一次的条带，从而得到一个同样平衡的四边形图 $\mathfrak{Q}_0$。与 TCD 的扫掠情形一样，扫掠本身是一个四边形图序列 $\mathfrak{Q}_0$，$\mathfrak{Q}_1$，$\dots$，$\mathfrak{Q}_N$，其中 $\mathfrak{Q}_N$ 中的扫掠条带沿边界顺时针延伸，后续四边形图之间通过立方体翻转（而非 2-2 移动）相互关联，因此每一步中扫掠条带下方的顶点数都严格递增。这种扫掠总是存在，见 [Fel04]。TCD 的扫掠与四边形图的扫掠之间有一个有趣的区别。在 TCD 的情形中，我们观察到扫掠后的 TCD $\mathcal{T}_N^-$ 与扫掠前的 TCD $\mathcal{T}_0^+$截然不同。事实上，定理 4.38 表明这两个 TCD 通过取截面相互关联。另一方面，对于四边形图，我们有 $\mathfrak{Q}_N^-=\mathfrak{Q}_0^+$，也就是说，$\mathfrak{Q}$ 的组合结构在扫掠前后相同。

注 4.41. 对熟悉离散可积系统或离散曲面微分几何理论的读者而言，扫掠捕捉了有时称为达布变换或巴克伦变换的组合结构，例如在 Q-网中（见定义3.1）。■

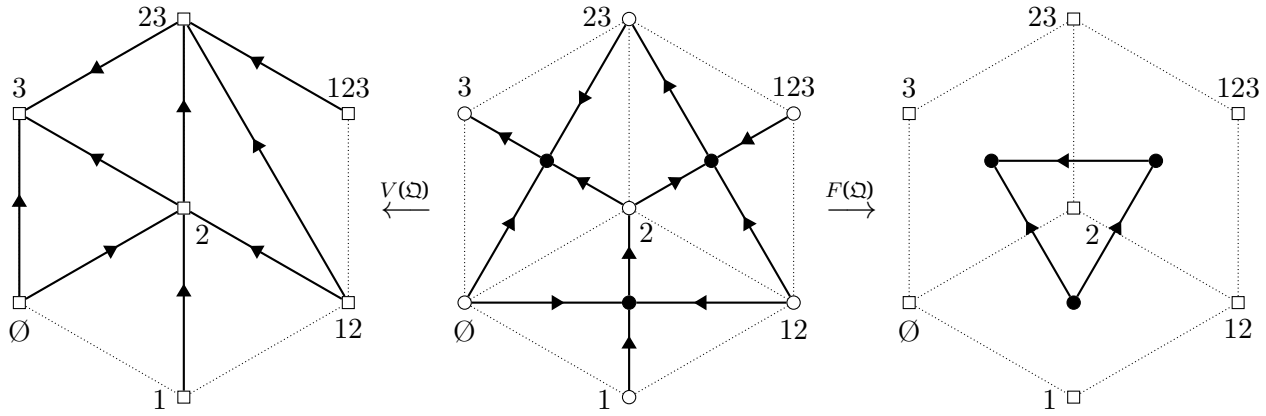
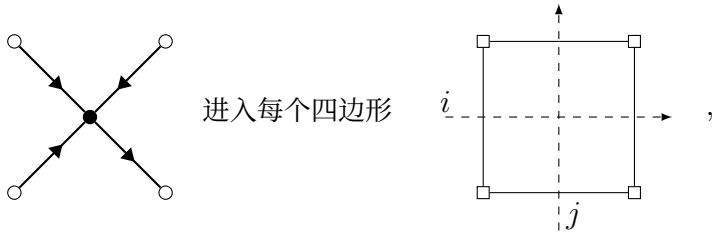


图4.14. 中间的四边形图的 li-定向 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$，以及左侧（右侧） $\mathfrak{Q}^D$ 顶点（面）上诱导的 li-定向。

根据引理2.19，我们知道 $\mathfrak{Q}$ 中的每次立方体翻转都对应于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 中的一系列 2-2 移动。因此，很可能 $\mathfrak{Q}$ 中的扫掠实际上对应于 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 的一次扫掠与一次反向扫描的复合。我们不再进一步探讨这一点，因为这与后文无关。后续结果需要理解的是，在四边形图的情形下，与 $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 相关联的平面二分图 $\mathcal{G}_{\mathfrak{Q}}$ 的 li- 定向的类似概念 $\mathcal{O}$ （见定义 4.20 ）（见定义 2.30 ）。

我们将不含外面的四边形图 $\mathfrak{Q}$ 的图对偶记作 $\mathfrak{Q}^*$ 。因此，$\mathfrak{Q}^*$ 的每个顶点对应于 $\mathfrak{Q}$ 的一个面。我们还将双图记作 $\mathfrak{Q}^D$ ，它的每个顶点对应于 $\mathfrak{Q}$ 的一个顶点或一个四边形；如果 v 对应于 $\mathfrak{Q}$ 的一个顶点，且该顶点关联于 $\mathfrak{Q}$ 的一个四边形，则 $\mathfrak{Q}^D$ 中的两个顶点 v, v' 之间有一条边。

定义4.42. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个极小四边形图。*li*-定向 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$ of $\mathfrak{Q}^D$ 由 $\mathcal{O}(\mathcal{G}_{\mathfrak{Q}})$通过收缩 $\mathcal{G}_{\mathfrak{Q}}$ 的所有不对应于 $\mathfrak{Q}$的顶点的白色顶点得到。更明确地说，我们通过粘合得到 $\mathfrak{Q}^D$ 的li-定向



其中 i, j 是两条弦的标签， $i < j$，而 $\mathfrak{Q}$ 顶点的着色无关紧要。■

当我们处理数据的逐四边形传播时，四边形图的双图的 li-定向 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$ 的重要性便显现出来（相关示例参见定理 8.9 及其证明）。考虑一个从 $V(\mathfrak{Q})$ 到某个任意集合 S 的映射 g 。假设存在一条规则，能够根据任意一个四边形的其他三个顶点上 g 的值，确定该四边形第四个顶点上 g 的值。什么是能够完全确定该系统的自由初始数据？我们又该如何从这些数据出发进行传播？我们只需在 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$ 的极小元上自由选取 g 的值。然后，沿着 li-定向 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$ 传播数据。因为

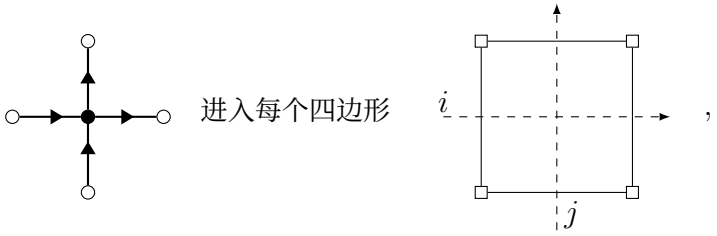
（1） $\mathfrak{Q}^D$ （ $\mathfrak{Q}$的一个面）中的任何黑色顶点在 $\mathcal{O}$（$\mathfrak{Q}^D$）中都恰有一条出边；
（2） $\mathfrak{Q}^D$ （ $\mathfrak{Q}$的一个顶点）中的每个白色顶点至多有一条入边；（3）并且 $\mathcal{O}$（$\mathfrak{Q}^D$）是无环的，

传播数据时不会出现冲突。此外，由于我们为所有极小元都选定了值，因此可以将值传播到整个四边形图 $\mathfrak{Q}$。

注意，我们还可以查看 $\mathfrak{Q}$ 上以及 $\mathfrak{Q}^*$上的局部诱导的li-定向，示例见图4.14。对于 $\mathfrak{Q}$上的li-定向，我们将 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$诱导到每个四边形中的三个箭头粘合起来。对于 $\mathfrak{Q}^*$上的li-定向，我们在 $\mathfrak{Q}$的每一对相邻面之间粘合一个箭头，其方向由 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$诱导。这是良定义的，因为 $\mathfrak{Q}^D$ 的面不能在 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$中循环地定向，并且由于上文提到的 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^D)$的性质(1)和(2)。

从伪直线排列的扫掠视角来看，扫掠集合与 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q}^*)$ 的线性扩张一一对应，只需记下扫掠过程中被扫过的伪直线交叉序列。类似地，扫掠集合也与 $\mathcal{O}(\mathfrak{Q})$ 的线性扩张（按偏序理论的含义，不包含极小元）一一对应，只需记下扫掠过程中扫掠直线首次接触伪直线排列各区域（ $\mathfrak{Q}$ 的顶点）的序列。

另一个小小的注记是，我们也可以考察 li-定向 $\mathcal{O}^-$ 在四边形图上诱导出的定向。简而言之，我们也可以收缩每个四边形中的 $\mathcal{O}^-$ ，也就是说，我们将



为 $i < j$ ，从而得到 $\mathfrak{Q}^D$ 的 li-定向 $\mathcal{O}^-(\mathfrak{Q}^+)$。注意， $\mathcal{O}^-(\mathfrak{Q}^+)$ 在每个黑色顶点处都有两条出边和两条入边，但在每个白色顶点处仍有一条入边。因此，这种定向可用于传播这样的系统：四边形中任意两条相邻边上的函数值决定该四边形另外两条边上的函数值。这类由两条边映射到两条边的系统在文献中称为 *Yang–Baxter* 映射 。它们源于 Drinfeld [**Dri92**]提出的一个关于量子 Yang-Baxter 方程的集合论解的问题。综述请参见 [**Ves07**] ；关于四有理 Yang-Baxter 映射的分类，请参见 [**ABS03b**], ，其中也阐述了它们与射影几何的关系。我们还在第 8.6 节简要讨论了后者这些映射。

4.5. 通过扫描进行扩张与提升

我们在第 4.3 节中看到，对于可扫掠TCD，可以将TCD $\mathcal{T}$本身与其一个截面 $\sigma(\mathcal{T})$ 联系起来。这里，我们将考察TCD映射中相应的关系。

回顾一下，我们在定义2.41中引入了翻转一般的概念，在定义4.5中引入了1-一般的概念，并在定义4.6中引入了一般超平面的概念。

定理 4.43. 设 $\mathcal{U}_0$，$\mathcal{U}_1$，……，$\mathcal{U}_N$是第 4.3 节中引入的扫描序列。考虑一列TCD映射 U_0，U_1，……，U_N，其中 U_i将 $\mathcal{U}_i$ 的逆时针面映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ，且相邻的TCD映射由该扫描序列中的2-2移动得到。记 $T_i^{\pm}$ 为 U_i 在 $\mathcal{T}_i^{\pm}$ 上的限制，并令 H 为T_0^-的张成空间。假设 U_0 是1-一般且翻转一般的，张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，并且 H 是$(n-1)$维的，且相对于 T_0^+处于一般位置。那么存在一种截面的选取，使得 $T_N^- = \sigma_H(T_0^+)$。■

证明。我们首先断言，每个 TCD $\mathcal{T}_i^-$ 中的每个点确实都在 H中。根据H 的定义，这对 $\mathcal{T}_0^-$成立。此外，每个将白色顶点 w 添加到下一个 $\mathcal{G}_{i+1}^-$ 的 2-2 移动

扫描序列中的 TCD $\mathcal{T}_{i+1}^-$ 都是重新分裂。每次这样的重新分裂都会将新点 $T_{i+1}^-(w)$放置在由 T_i^- 中的点张成的直线上。因此，第一个断言成立。此外，我们在定理 4.38 的证明中已经注意到，每个添加到 $\mathcal{G}_{i+1}^-$ 中的新白色顶点都与一组属于 T_0^+中某条直线的黑点相关联。事实上，根据构造，与该新白色顶点相关联的 H 中的点也位于 T_0^+中对应的直线上，因此它是该直线与 H的交点。□

因此，如果我们拥有 TCD 映射 T 的数据，就可以通过在边界上添加一些一维数据（按离散可积系统的含义），并将信息传播到整个 TCD 映射 T 中，来构造 T 的截面，从而得到一个截面。此外，也可以选择 ˜ 对 T 应用 2-2 移动，以得到另一个 TCD 映射 T。例如，这可以是两个通过立方体翻转彼此关联的 Q-网 ˜。然后可以通过一次扫掠得到 T 的截面；在这个例子中，它是一个达布映射。另一方面，由于翻转图是连通的，我们知道，也存在一系列 2-2 移动，将 T 的截面变为 $\lrcorner T$ 的截面。从这个角度来看，如果达布映射与 Q-网通过一个截面彼此关联，那么它们中的数据传播就是相容的。

我们来对反向构造作一个不那么正式的说明。注意，由于扫掠可以逆向进行，我们同样可以从 TCD $\mathcal{T}_N^-$ 开始，然后反向进行扫掠。若 k是 $\mathcal{T}_N^-$ 的最大维数，则 T_N^+ 中有 $(k+2)$ 个点。假设 T_N^- 中的点张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^j$，$j \le k$。我们可以考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^j = H'$，其中 H' 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{j+1}$的一个超平面。于是，根据定理 4.43 T_0^+是 T_N^- 的一个“提升”，且 T_N^- 是 T_0^+的一个截面。因此，也可以通过反向扫掠来构造截面的提升。

如果初始TCD映射 T_0^+: $\mathcal{T}_0^+ \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 张成空间 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，但 n 并非 $\mathcal{T}_0^+$所允许的最大维数，可以考虑 H 的维数等于 n的情况。为了理解这种情况，我们先给出一个定义。

定义 4.44. 假设我们有两个 TCD映射

$$T^\pi : \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}^\pi \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n, \tag{4.22}$$

$$T^\sigma : \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}^\sigma \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n. \tag{4.23}$$

那么，如果存在映射 T: $\mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$，使得 T^π an 扩张 of T^σ，我们就称其为 T^σ 的扩张。

$$T^\pi = \pi(T), \tag{4.24}$$

$$T^\sigma = \sigma_E(T), \tag{4.25}$$

其中 $E = \mathbb{C}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$，且 π 是到 E 上的中心投影。 ■

注意，由于投影时组合结构没有变化，因此 $\mathcal{T}^\pi = \mathcal{T}$。根据构造，$T^\sigma$ 的点位于 T^π 的直线上。因此，可以将 T^π 的直线看作是对 T^σ 的点的扩张。在讨论扫掠与扩张之间的联系之前，我们先通过一个引理说明投影提升的存在性。

引理 4.45. 设 $\mathcal{T}$ 是最大维数为 $k > 1$ 的极小TCD。设 $n < k$ 和 $S \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^k$ 是一个 n 维子空间，并设 $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^k \setminus S$ 是一个点。设 T: $\mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to S$，$n < k$ 是一个 TCD映射。那么，存在 TCD映射 T' : $\mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$，使得 T' 张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$，且 T 是 T' 从中心 P 投影得到的投影 $\pi_P(T')$。可以选择 T'，使得对所有白色顶点 w，$T'(w) \neq T(w)$。■

证明。固定 $\mathcal{T}$ 的一个标记。考虑 $\mathcal{G}$ 的 li-定向 $\mathcal{O}$ 及其诱导的 li-偏序集 $\mathcal{P}$。$\mathcal{P}$ 中有 $k+1$ 个极小元 $\hat{}w_1$，$\hat{}w_2$，$\ldots$ $\hat{}w_{k+1}$。对于每个满足 $1 \le i \le k$ 的 i，选择提升

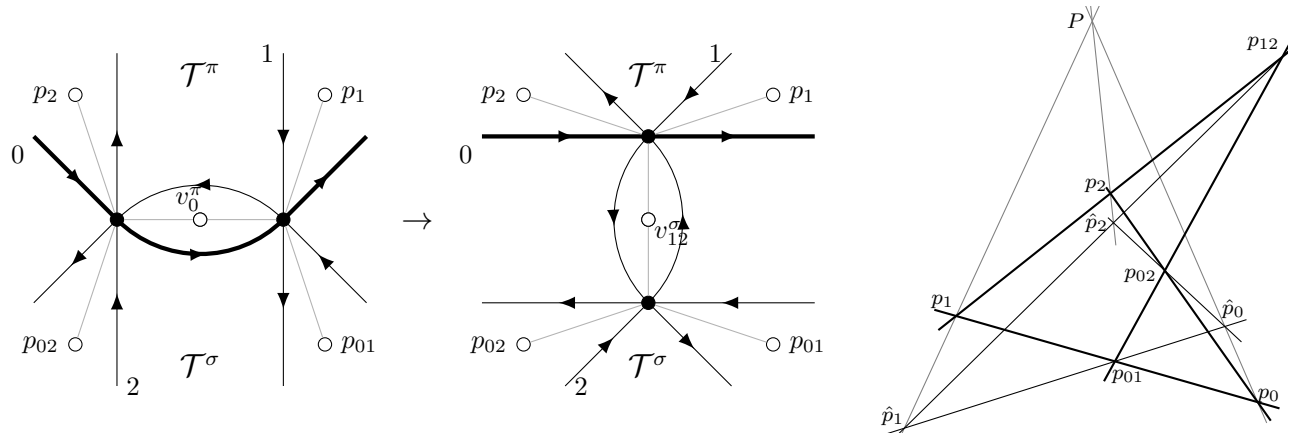


图4.15。扫掠中逆时针面上的一个2-2移动，以及右侧所涉及点的几何图示。

$T'(\hat{}w_i)$ 在直线 $PT(\hat{}w_i)$ 上，但不等于 P 或 $T(\hat{}w_i)$，使得这 $k+1$ 个点张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$。任意选取一个线性扩张。

$$\varepsilon : W(\mathcal{G}) \setminus \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_{k+1}\} \to \mathbb{N} \tag{4.26}$$

$\mathcal{P}$的。我们依次沿着 ε向上，经过相应的元素（w_1、w_2、.....、$w_{|B|}$），以确定提升 T'（w_i）。对于每个 w_i，都有一个黑色顶点 b_i，它通过li匹配lim与 w_i匹配，而 b_i 还有另外两个相邻的白色顶点 w_i'、w_i''。由于我们沿着 ε向上移动，提升 T'（w'）和 T'（w''）已经确定。因此，提升 T'（w）也随之确定，它是直线 PT（w）与 T'（w'）T'（w''）的交点。该交点确实存在，因为 P、T（w） T'（w'） T'（w''）都位于由 P、T（w'）和 T（w''）张成的平面上。通过这一迭代过程，我们构造出一个映射 T'，使得 π_P（T'） $= T$。然而， T'中的某些点仍有可能与 T中的点重合。选择 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$的一个仿射图，使得 P位于无穷远处。然后，我们可以沿着 P 的方向（即沿平行直线进行平移），将 T' 中的所有点平移任意距离 t，从而得到一个映射 T'_t。显然， π_P（T'_t） $= T$ 同样成立。由于白色顶点的数量有限，因此存在一个对 T' 进行的平移 T'_t，使得对于所有白色顶点 w，都有T'_t（w） $\neq T$（w），这就证明了该引理。□

定理4.46. 设 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_N$是第 4.3 节中介绍的扫描序列。设$n \in \mathbb{N}$ 满足 n 小于 $\mathcal{U}_0$的最大维数。考虑一列 TCD映射 $U_0, U_1, \ldots, U_N$，其中 U_i将 $\mathcal{U}_i$的逆时针面映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，且连续的 TCD映射由扫描序列中的 2-2 移动得到。记$T_i^{\pm}$ 为 U_i 在 $\mathcal{T}_i^{\pm}$ 上的限制。假设 U_0 是翻转一般的，张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，并且 T_0^+和 T_0^-也都张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$。那么 T_0^+是 T_N^-的扩张。■

证明。将 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = H \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$ 嵌入，并选择一个点 $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1} \setminus H$。现在，如引理 4.45 中所述，选择 T_0^+ 的一个提升 $\hat{} T_0^+ \colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}^+{}_0 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$。也就是说，这是一个 TCD 映射，使得每个白色顶点 w 的像 $\hat{} T_0^+(w)$ 都位于经过 P 和 $T_0^+(w)$ 的直线上，且不与 P 或 $T_0^+(w)$ 重合。换句话说，令 π 为从 P 到 H 的投影，那么我们有 $\pi(\hat{}T_0^+) = T_0^+$。根据定理 4.38，我们知道，如果以 $\hat{}T_0^+$ 而不是 T_0^+ 开始扫掠，那么 T_0^+ 确实将是 $\hat{} T_0^+$ 的截面 $\sigma_H(\hat{}T_0^+)$。现在我们声称，如果以 T_0^+ 开始，结论同样成立。根据构造，我们知道该结论在 $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{T}_0^+$ 上成立。现在我们证明，如果该结论在扫掠的第 i 步成立，那么在第 $i+1$ 步也成立。有关标签以及所涉及几何的示意图，请参见图4.15。在扫掠过程中，每次进行逆时针 2-2 移动时，都有两个点 p_{01}、p_{02} 已经被扫掠过，并且同时属于 T_i^- 和 T_{i+1}^-。类似地，还有两个点 p_1、p_2 同时属于 T_i^+ 和 T_{i+1}^+。根据构造，有两个点 $\hat{}p_1$、$\hat{}p_2$，它们分别是 $\hat{} T_i^+$ 中 p_1、p_2 的提升。同样根据构造，我们添加到 T_{i+1}^- 中的新点 p_{12} 是直线 p_1p_2 与直线 $p_{01}p_{02}$ 的交点。

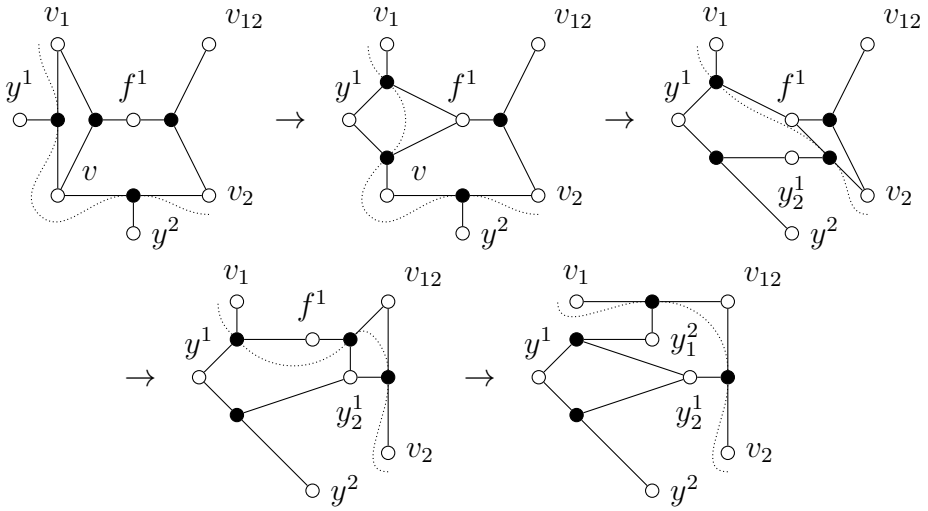


图 4.16. 通过让弦穿过图示，寻找由 Q-网扩展的达布映射。

因此自然地位于 H 中。此外，我们声称 p_{12} 也位于直线 $\hat{}p_1\hat{}p_2$ 上；如果我们证明了这一点，那么定理就通过归纳法得证。还有 p_0 中的点 T_i^+，我们将其移除，并得到其提升 $\hat{}p_0$。我们引入三个平面。平面 A_1 由 p_1、p_2、$\hat{}p_1$、$\hat{}p_2$ 和 P 张成。平面 A_2 由 p_1、p_2、p_{01}、p_{02} 和 p_0 张成。平面 A_3 由 $\hat{}p_1$、$\hat{}p_2$、p_{01}、p_{02} 和 $\hat{}p_0$ 张成，该平面因我们的归纳假设而存在。但随后我们看到，直线 p_1p_2、$\hat{}p_1\hat{}p_2$ 和 $p_{01}p_{02}$ 是 A_1、A_2、A_3 的三个两两交点，因此交于单一点 p_{12}。□

当然，阅读证明并查看图4.15后，我们意识到这又是笛沙格定理的一个体现（见定理2.47）。现在，让我们看看离散微分几何中已经出现在文献里的扩张示例，以及由于我们的一般方法而能够研究的新示例。

例 4.47（通过 Q-网 [BS08] 扩展为直线复形）。假设我们已知定义在 $\mathbb{Z}^3$ 上的 Q-网 q 的顶点，其中 T^σ 在本例中是截面。现在，我们要寻找直线复形的直线 ℓ（在本例中为投影），这些直线经过 Q-网的各个点。考虑 Q-网的一个四边形。我们断言，如果已经知道与 Q-网某个四边形的三个点相关联的直线复形的直线 ℓ、ℓ_1、ℓ_2，那么第四条直线 ℓ_{12} 就可以唯一确定。q 的三条直线与四个点共同张成一个三维空间。在这个三维空间 ℓ_{12} 必须包含点 q_{12}，并与两条直线 ℓ_1、ℓ_2 相交。由于这样的直线只有一条，因此 ℓ_{12} 可以唯一确定。现在，给定 q 中的一个立方体，我们可以指定直线 ℓ、ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3。随后，立方体的其余直线便可确定，并且必须检验 ℓ_{123} 是否定义良好，因为构造 ℓ_{123} 有三种不同的方式。一般位置下，ℓ_{123} 必须位于由 ℓ、ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 张成的四维空间中，同时还必须经过三条互不相交的直线 ℓ_{12}、ℓ_{23}、ℓ_{13}。这样的直线只有一条，因此 ℓ_{123} 是唯一的。■

在这个例子中，我们将信息从 $\mathbb{Z}^3$ 的三个坐标轴传播到所有 $\mathbb{Z}^3$，但必须检查相容性。另一方面，我们可以将 Q-网视为由某些柯西数据给定，例如阶梯曲面或坐标平面。不难验证，覆盖一个坐标平面角的有限 TCD片是可扫描的。因此，我们可以通过扫掠 Q-网的柯西数据，得到扩张直线复形的柯西数据。然后，我们可以传播直线复形的柯西数据，从而得到整个直线复形。等价地，我们也可以先传播 Q-网的数据，再进行扫掠。同样，这一过程的相容性可归结为 TCD映射的相容性。

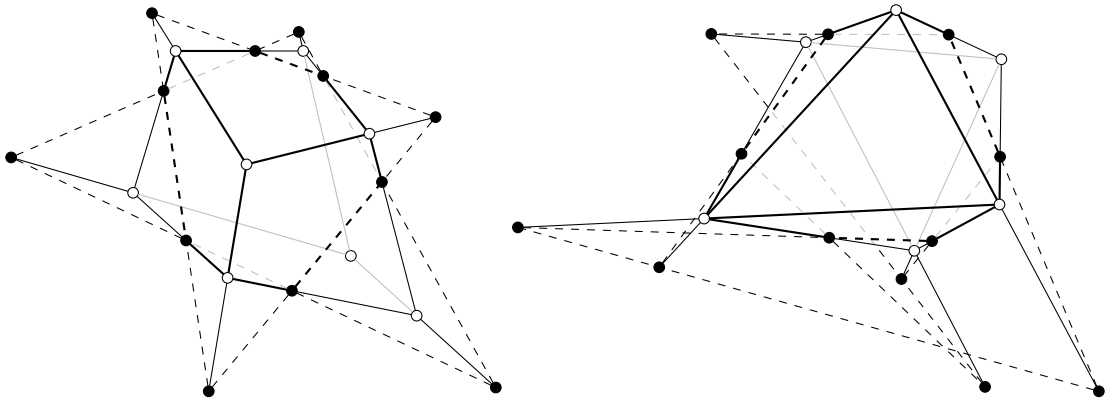


图 4.17。左：Q-网的立方体图，该Q-网扩张了一个达布映射（虚线）。右：达布映射的八面体立方体图，该映射扩张了一个直线复形（虚线）。

我们在第4.2节中观察到，在 $\mathbb{Z}^3$ 情形下，Q-网的截面是一个达布映射，而达布映射的截面是一个直线复形。结合我们构造扩张的方法，因此也可以构造扩张达布映射的 Q-网；该情形下组合结构的一个例子见图 4.16。同理，也可以构造扩张直线复形的达布映射。

另一个自然出现扩张的场合，是我们实际绘制 TCD 映射及其截面时，因为此时我们必须在二维空间中同时绘制映射及其截面，见图 4.17。

通过 TCD 映射理解扩张的另一个优点是，我们甚至可以在不再具有关联几何的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$，中定义扩张。我们将看到，扩张在若干 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 模型中相当自然地出现，而且往往以离散联络的形式呈现。例如，我们将在第 10.1 节中说明，圆模式的交点与圆模式的中心之间存在一种通过扩张建立的关系。

4.6. Desargues映射

Desargues映射由 Doliwa [Dol09] 引入。我们证明，Desargues映射的柯西数据构成一个 TCD映射。Doliwa证明了，由于 Desargues定理，Desargues映射具有多维一致性。在我们的框架中，这并不令人意外，因为所有 TCD映射的可积性都源于 Desargues定理。除了涵盖文献中的另一个重要例子之外，我们还在此介绍 Desargues映射，因为它们以相当自然的方式体现了扩张。

定义 4.48. 若映射 $D\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ with $n, m > 1$ 对每个 $z \in \mathbb{Z}$ 都满足 $D(z)$、$D(z+\mathbf{e}_1)$ $D(z+\mathbf{e}_2)\ldots, D(z+\mathbf{e}_n)$ 共线，则称其为 Desargues 映射。■

注释 4.49. 完成论文后，我们获悉，存在一种较新且不同的 Desargues映射 [Dol10a 定义，命题 3.1], ，该定义将原始定义作为一种特殊情况。我们仅考虑按照最初定义的 Desargues映射[Dol09]。 ■

请注意，与我们考虑过的其他 n维仿射空间 示例不同，坐标方向的定向很重要。例如，根据定义，三个点 D, D_1, D_2 （用移位记号表示）共线，但一般而言， D_{12}, D_1, D_2 并不共线。

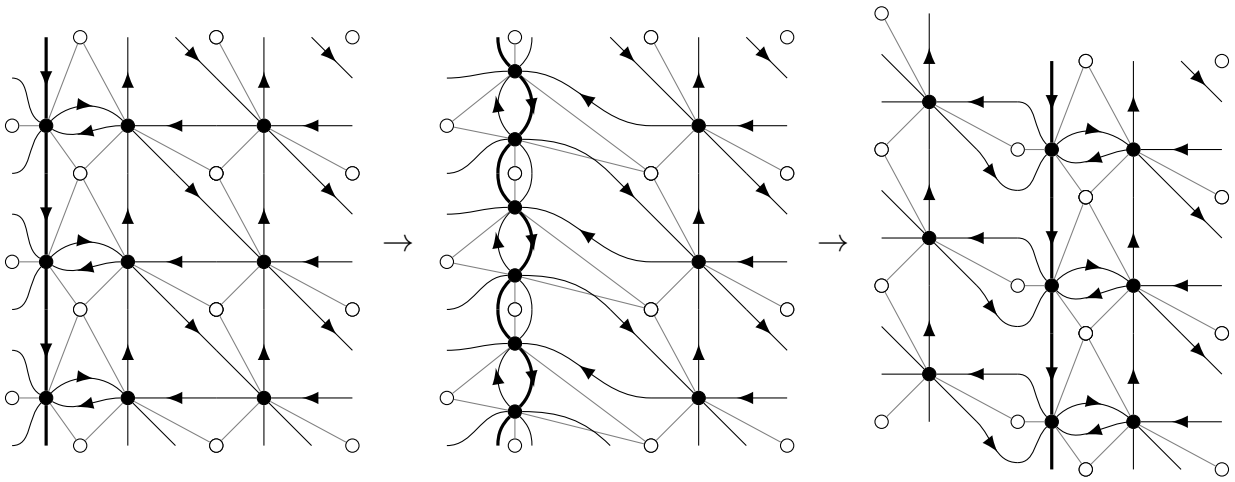
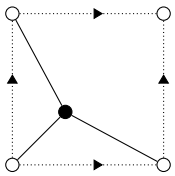


图 4.18. 德萨格映射中传播的两个步骤。粗弦为扫描弦，并从左向右穿过。

引理 4.50. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个极小四边形图，并将 $\mathfrak{Q}$ 的条带与 $\mathbb{Z}^n$ 的坐标方向对应，其中平行条带可以对应同一个坐标。Desargues 映射 $\mathfrak{Q} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ 可通过粘合表示为图 $\mathcal{G}$ 上的 TCD 映射 T，



进入每个四边形。白色顶点位于四边形的顶点处，并通过 T 映射到 Desargues 映射中的相应点。箭头表示与坐标方向的定向相对应的有向边。■

证明。根据构造，在每个四边形中，三个点 D，D_1，D_2 都在一条直线上。 □

这里不再详述，但如果相关条带不是循环定向的，就存在立方体翻转。条带与弦之间的关系更加复杂，判断相应的 TCD 是否为极小元也是如此。相反，我们将重点放在 $\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbb{Z}^3$ 组合结构上。考虑一个 $\mathbb{Z}^2$ Desargues 映射的两个相邻 D 切片 D'。根据定义，D' 的点位于 D的直线上。更具体地说，经过 D、D_1、D_2 的直线包含点 D_3。因此，D 是 D'的扩张。于是，我们可以问，是否存在合适的扫掠和扫描弦，能够将 D 构造为 D'的扩张。回想一下，对于 $\mathbb{Z}^2$ Q网，扫描弦通常沿着两个坐标轴延伸。然而，对于 Desargues 映射，充分且最大的扫描弦只沿一个坐标轴延伸。图 4.18 展示了扫描弦以及扫掠的两个步骤。

补充说明一下，考虑定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的德萨格映射。此时存在三族平行弦。因此，这样的德萨格映射自然可以与 A_2格相关联（参见第 2.8 节中的讨论）。相比之下，定义在$\mathbb{Z}^2$ 上的 Q-网的初始数据，连同拉普拉斯达布动力学（参见第 3.7 节），可以与 A_3 相关联。定义在阶梯曲面上的 Q网、达布映射和直线复形的数据，以及这些映射的传播，则可以自然地与 A_5 相关联。

4.7. 射影对偶与 TCD映射

在本节中，我们将说明如何构造一个 TCD映射 $T^\star\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}^\star \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^n)^*$，它可视为给定 TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的射影对偶。一个重要的作用

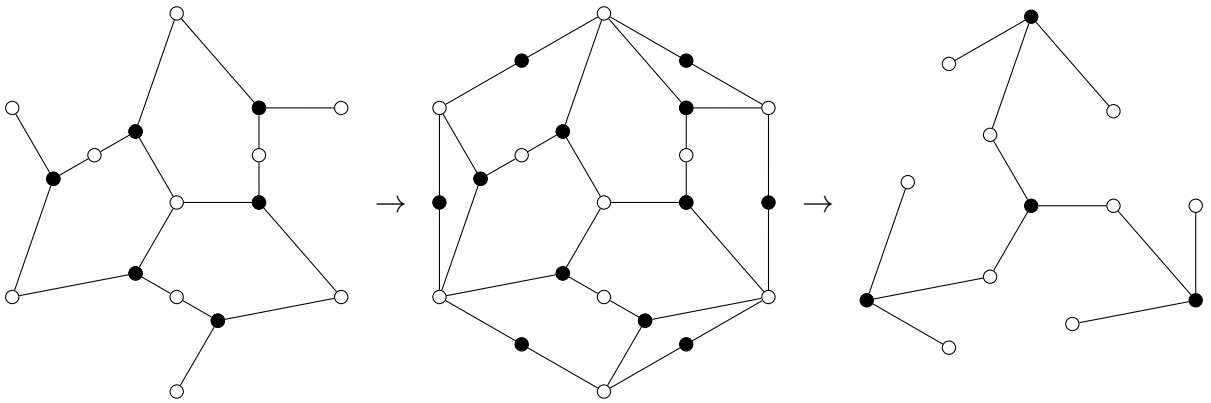


图 4.19. 序列 $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^i \to \mathcal{G}' = \eta(\mathcal{G})$，或者说如何求 TCD 映射的直线对偶。

在二分图中，与黑色顶点相关联的直线发挥这一作用。在继续之前，我们先说明一些关于射影对偶化的约定。用 $(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)^*$ 表示 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的射影对偶空间。$(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)^*$ 中的每个点 P 都对应 $H_P\,\mathrm{P}^n$ 中的一个超平面 $\mathbb{C}$。我们将这种对应关系记为 $P = (H_P)^\perp$，也记为 $H_P = (P)^\perp$。此外，$(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)^*$ 本身同构于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，因为我们还将每个 k 维空间 $S_k \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 与所有包含 S_k 的超平面构成的空间相对应；这个空间就是 $(n-k-1)$ 维空间 $S_k^\perp \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^n)^*$。为避免混淆，我们用带星号的 $T^\star$ 而非 T^* 表示对偶TCD映射。

定义4.51. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 TCD 映射。令关联直线映射为映射 $L : B(\mathcal{G}) \to \{\text{Lines of } \mathbb{C}\mathrm{P}^n\}$，使得对于每个黑色顶点 $b \in B(\mathcal{G})$，均有

$$L(b) = \operatorname{span}\{T(w), T(w')\}, \tag{4.27}$$

其中 w, w' 是与 b 相邻的两个不同白色顶点。 ■

由于构造对偶TCD映射的过程有些复杂，我们认为不妨先考察环境维数等于 $n = 2$ 的情形。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中，我们可以将对偶空间 $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2)^*$ 与 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中直线构成的空间等同。因此，我们可以问，能否将 T 中出现的直线及其关系表示为一个 TCD 映射 $T^\star$。我们通过对 T 的关联图 $\mathcal{G}$ 直接进行操作，给出肯定的答案。在继续之前，我们需要引入适当的一般性概念。

定义4.52. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 TCD 映射。考虑 $\mathcal{G}$ 的所有互不相同的白色顶点所构成的三元组 $(w,\ w_1,\ w_2)$，满足

(1) 存在一个面 f_1，与 w 和 w_1 相邻；(2) 存在一个面 f_2，与 w 和 w_2 相邻；(3) 不存在同时与 w，w_1 和 w_2 相邻的黑色顶点。

我们称 T 是共一般的，如果对于任意这样的三元组，点 $T(w)$ $T(w_1)$ $T(w_2)$ 张成一个平面 e. ■

注意，允许 $f_1 = f_2$；另请注意，k-余一般性也是一个合理的概念，但我们并不需要它。

定义 4.53. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个余一般 TCD 映射。T 的直线对偶 $\eta(T)$ 是一个 TCD 映射 $T'\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}' \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^2)^*$，由 T 按如下方式构造。我们在图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 的层面定义组合结构的变化。我们从 $\mathcal{G}$ 出发，分两步构造中间图$\mathcal{G}^i$（与定义 4.7 中前两步相同，另见图 4.19）：

(1) 对任意两个相邻的白色边界顶点 w_k, w_{k+1}，添加一个黑色顶点 $b_{k,k+1}$ ，以及两条边 $(b_{k,k+1}, w_k)$ 和 $(b_{k,k+1}, w_{k+1})$。(2) 对于 $\mathcal{G}$ 的每个面 $(b_1, w_1, b_2, \dots, w_l)$，将多边形 $(w_1, w_2, \dots, w_l)$ 三角剖分；对于三角剖分中的每条对角线 (w_j, w_k)，添加一个新的黑色顶点 b ，以及两条边 (b, w_j),(b, w_k)。

$\mathcal{G}^i$ 的每个内部面都是四边形或六边形。现在我们按以下步骤构造 $\mathcal{G}'$ ：

(3) 将 $\mathcal{G}^i$ 中代表同一条直线的每组黑色顶点收缩为单个黑色顶点 b。这就是我们为 $\mathcal{G}'$构造的起始图。换言之，将每个对应于某个$k \in \mathbb{N}$ 的、具有端点匹配 $\mathcal{S}_1^k$ 的 TCD 的极大子图 $U \subset \mathcal{G}$ ，替换为一个黑色顶点 b ，并用一条边将其与 U的每个边界白色顶点相连。(4) 交换 $\mathcal{G}'$中黑色顶点和白色顶点的颜色。因此，每个白色顶点 w' 此前都是黑色顶点 b 。令 $T'(w') = (L(b))^{\perp}$。(5) 将 $\mathcal{G}'$ 中度大于 2 的每个黑色顶点 b' 替换为一个图块，该图块对应于一个具有端点匹配 $\mathcal{S}_1^{d_{b'}}$ 且有 $d_{b'}$ 个白色边界顶点的 TCD；我们将这些白色边界顶点与 b'的邻点对应起来。(6) 删除 $\mathcal{G}'$ 中所有度为 2 的黑色顶点，以及与被删除黑色顶点关联的边。■

步骤 (1) 和 (2) 与截面的情形相同，它们记录了 T 中未表示为黑色顶点的直线的存在信息。步骤 (3) 和 (4) 将 T 中由点张成的直线表示为 $\mathcal{G}'$中的新白色顶点。步骤 (4) 还将 T 中的点表示为 T'中的直线。步骤 (5) 确保所有经过 T 中某一点的原有直线，都由位于 T'中某条直线上的点来表示。这是因为具有端点匹配$\mathcal{S}_1^k$ 的 TCD 表示一条直线上的点，而此类 TCD 的最大维数为 1。请注意， T 的 1-余一般性确保所得的 TCD 映射 T' 是 0-一般位置的。度为 2 的黑色顶点表示 $\mathcal{G}^i$ 中仅位于 T 的两条直线上的白色顶点，并且不会为 T'添加关系。因此，在步骤 (6) 中会删除度为 2 的黑色顶点。

在继续讨论直线对偶的组合结构之前，我们先补充一些背景。对于定义4.53中的 TCD 映射 Tin $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$as，直线对偶 $\eta(T)$ 已经是对偶映射 $T^\star$。显然，它捕捉了 T in 对偶空间中直线之间的关系。在高维中，直线对偶本身并不是对偶 TCD 映射，但正如我们将在本节后文看到的，它是构造对偶 TCD 映射的重要组成部分。

回想一下，在第4.2节中，我们通过对 $\mathcal{G}$ 进行一种操作，定义了 TCD 映射的截面 $\sigma(T)$。接着，引理4.11 意外地表明，这种操作对应于对 $\mathcal{T}$ 的弦进行的一种操作，而且不会切断或粘合弦。现在我们将证明，直线对偶也同样如此，这同样令人意外。回想一下，在讨论截面的情形时，我们在定义4.8中引入了交替弦图 $\mathscr{A}(\mathcal{T})$，并在定义4.9中引入了影 $(\mathscr{G},\ C_{\mathscr{A}})$。

定义4.54. 设 $\mathcal{T}$为一个极小TCD，$(\mathscr{G}, C_{\mathscr{A}})$为相应的影。考虑 $\mathscr{G}$的一个面中的端点匹配 $C_{\mathscr{A}}^f$。将 $C_{\mathscr{A}}^f$ 替换为由下式定义的端点匹配$\bar{C}_{\mathscr{A}}^f$

(1) 交换每条边上的入端点和出端点，(2) 反转所有弦的定向，(3) 对于 $\mathscr{G}$的每条边 e ，如果 e 是连接 f 与 $\mathscr{A}$ 的顺时针二边形的一条边，那么短接边 e。也就是说，如果经过前两步后， f 中的一条弦从

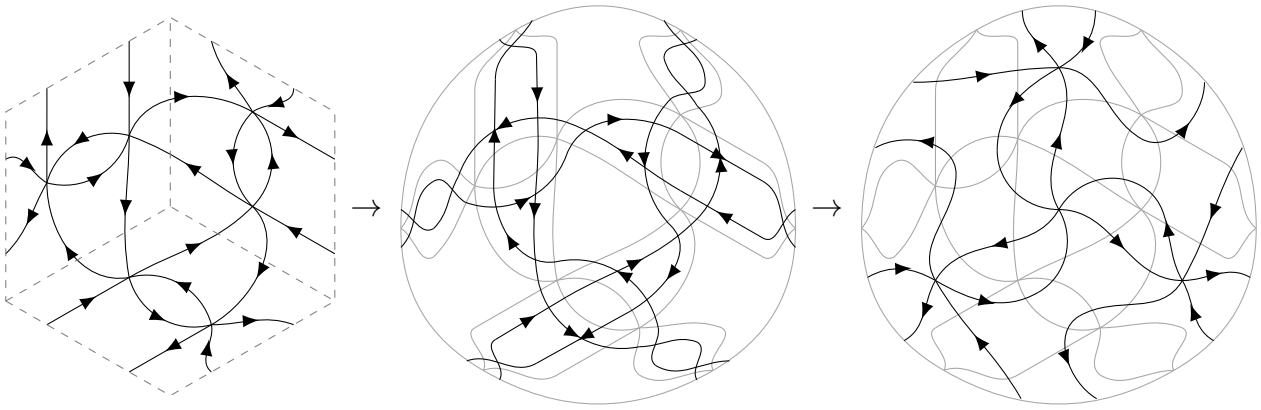


图4.20。序列 $\mathcal{T} \to \mathscr{A}$（黑色）和 $\mathscr{G}$（灰色）$\to \mathcal{T}(\mathscr{G}, C_{\mathscr{A}}) = \eta(\mathcal{T})$，或如何取 TCD 的直线对偶。

入端点 i 出发，终止于 e，穿过双边形，返回到 f，然后从 f 的出端点 j 离开，那么改为定义 $\bar{C}^f_{\mathscr{A}}(i) = j$。$e$ 上不再有任何端点。

我们将所得的对（$\mathscr{G}$，$C_{\mathscr{A}}$）称为反向影（见图4.20）。 ■

在步骤（1）中，我们实际上将两个端点彼此滑过，使它们在结果中互换。此外，步骤（3）的结果是，反向影中顺时针二边形内没有弦。回顾一下，我们在定义4.10中定义了如何从影得到 TCD。

引理 4.55. 设 $\mathcal{T}$ 为一个极小TCD，$T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 为一个 TCD 映射。那么，直线对偶 $\eta(T)$ 的 TCD$\eta(\mathcal{T})$ 对应于由反向影构造的一个 TCD。因此，可以作出如下选择，使得

$$\eta(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\mathscr{G}, \bar{C}_{\mathscr{A}}). \tag{4.28}$$ ■

证明。我们将 $\eta(\mathcal{T})$ 的构造与定义 4.53 中 $\eta(\mathcal{G})$ 的图构造进行比较；$\eta(\mathcal{T})$ 的示例见图 4.20，相应的 $\eta(\mathcal{G})$ 见图 4.19。将三重交点分裂以得到交替弦图 $\mathscr{A}(\mathcal{T})$ 时，我们扰动所有弦，使一个新的逆时针面出现。随后，我们反转弦的定向，同时在 $\mathscr{G}$ 的每条边上交换它们，因此，该面仍为逆时针面，并对应于我们在图构造步骤 (4) 中置于此处的白色顶点。与截面的情形类似，边界处的交换以及弦定向的反转，对应于在边界处引入白色顶点。我们粘贴到反向影 $(\mathscr{G}, C_{\mathscr{A}})$ 的每个面中的 TCD，在 $\mathcal{T}$ 中定向为逆时针的面上具有端点匹配 $\mathcal{S}^k_1$，其中 $k \in \mathbb{N}$。这体现了我们在 $\mathcal{G}^i$ 中分裂黑色顶点，使相邻的白色顶点位于一条直线上。我们粘贴到反向影 $(\mathscr{G}, \bar{C}_{\mathscr{A}})$ 的每个面中的 TCD，在 $\mathcal{T}$ 中定向为顺时针的面上具有端点匹配 $\mathcal{S}^k_{-2}$，其中 $k \in \mathbb{N}$。这对应于我们在图构造步骤 (2) 中选取的三角剖分以及引入的额外点。我们移除长度为 0 的弦，因为它们不会为 TCD 映射提供信息，也不会出现在与 $\mathcal{G}$ 相关联的 TCD 中。□

如果我们暂时不移除长度为 0 的弦，那么直线对偶的端点匹配就有一个简单的公式：

$$C_{\mathcal{T}}(k) = l \quad \Rightarrow \quad C_{\eta(\mathcal{T})}(l-2) = k, \tag{4.29}$$

其中，我们假设从 $\mathcal{T}$ 中的端点 k 出发的弦与在 $\eta(\mathcal{T})$ 中的出端点 k 处结束的弦是同一条弦。

推论4.56。设 $\mathcal{T}$ 是长度至少为2的极小TCD。若 $\mathcal{T}$ 的最大维数为 m，则 $\eta(\mathcal{T})$ 的最大维数为 $n-m+1$。■

证明。在边界上，我们将弦交换两次，实际上是根据推论 4.12 将最大维数从 m 变为 $(m-2)$。此外，我们还反转弦的定向，从而交换左行弦和右行弦的数量。由于必须将第一个出端点移到半平面图的最右侧，定向反转的总效果是 $m' \mapsto n-m'-1$。综合起来，我们得到 $m \mapsto n-(m-2)-1$，这就证明了该结论。□

引理4.57. $\eta(\mathcal{T})$ 是连通且极小的。 ■

证明。由于我们没有切断或插入任何弦，$\eta(\mathcal{T})$ 是连通的。为证明其极小性，我们沿用引理 4.13 证明中的论证。首先，我们说明不存在平行交。与截面的情形一样，对于两条弦上任意已有的交点，我们只按正确顺序生成新的交点，因此不会出现平行交。关于界定 $\mathcal{T}$ 中某个面的弦彼此不同的论证（见引理 4.13 的证明）对逆时针面也成立。因此，$\eta(\mathcal{T})$ 中没有自交，引理得证。□

引理4.58. 设 $\mathcal{T}$ 是一个长度至少为2的极小TCD。那么，可以在两个直线对偶中分别进行选择，使得 $\eta \circ \eta(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。■

证明。在 $\mathcal{G}$ 层面，我们观察到 η 将对应于单条直线的每组黑色顶点替换为一个白色顶点，并将每个白色顶点替换为对应于单条直线的一组黑色顶点。复合映射 $\eta \circ \eta$ 随后会逆转这些替换。通过在 $\eta(\mathcal{T})$ 中选择恰当的三角剖分，可以恢复被移除的度为 2 的白色顶点。在 $\eta(\mathcal{T})$ 中，为三角剖分边引入的白色顶点会在 $\eta \circ \eta(\mathcal{T})$ 中再次被移除。在边界上，最小长度保证不会有弦被移除。为了说明 $\eta \circ \eta(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$，回想一下，对于每两个连续的边界点，我们都会在 η 中引入额外的点。□

到目前为止，我们只研究了取值于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 的 TCD 映射的直线对偶。为了在高维中获得一个定义，我们必须在组合结构方面做更多工作。下面我们来定义一个作用于 TCD 的简单全局操作。

定义 4.59。设 $\mathcal{T}$ 是一个三重交叉图。*TCD* 对偶 $\iota(\mathcal{T})$ 与 $\mathcal{T}$ 相同，但所有弦的定向都反转。■

显然，TCD 对偶是一个对合。相应图 $\mathcal{G}$ 的黑色顶点保持不变，而面与白色顶点则相互交换。然而，目前尚无明显的直接几何方法可以将 $\iota(\mathcal{T})$ 实现为 TCD 映射。下面我们来看一些例子。

例 4.60. 存在这样的选择，使得

(1) 如果 $\mathcal{T}$ 是 Q-网的 TCD，那么 $\iota(\mathcal{T})$ 就是达布映射的 TCD，反之亦然；(2) 如果 $\mathcal{T}$ 是直线复形的 TCD，那么 $\iota(\mathcal{T})$ 就是直线复合体的 TCD，反之亦然；(3) 如果 $\mathcal{T}$ 是 Q-网的 TCD，那么 $\eta(\mathcal{T})$ 就是直线复形的 TCD，反之亦然；(4) 如果 $\mathcal{T}$ 是达布映射的 TCD，那么 $\eta(\mathcal{T})$ 就是直线复合体的 TCD，反之亦然。■

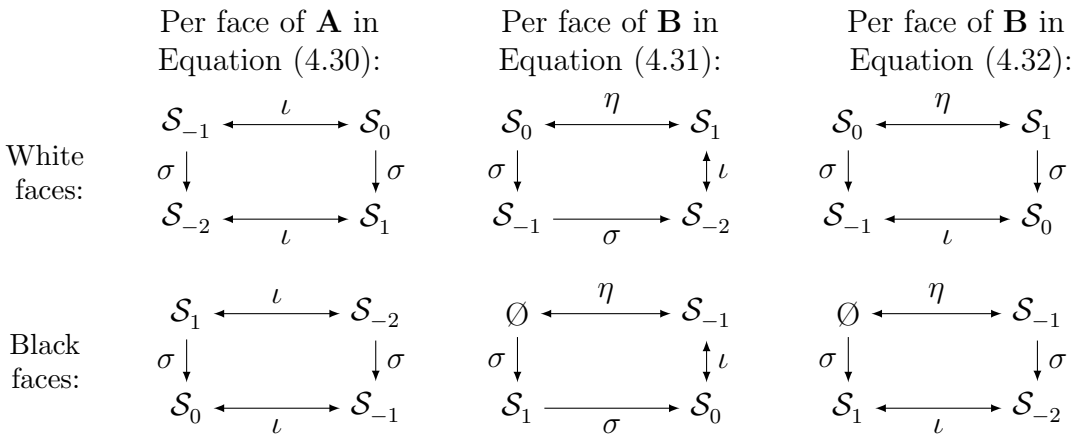


图 4.21. 引理 4.61 背后的交换图。

ι，η 与 σ 之间的以下关系本身就很有趣，同时也对理解 TCD映射的射影对偶至关重要。

引理 4.61. 设 $\mathcal{T}$ 是一个极小TCD，其极小长度至少为 2。为了使方程

$$\iota \circ \sigma \circ \iota \circ \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}, \tag{4.30}$$

成立，其中一个截面中的选择决定了另一个截面中的选择。此外，对于方程左边的任意选择

$$\sigma \circ \sigma(\mathcal{T}) = \iota \circ \eta(\mathcal{T}), \tag{4.31}$$

$$\iota \circ \sigma(\mathcal{T}) = \sigma \circ \eta(\mathcal{T}), \tag{4.32}$$

方程右边都存在满足这些方程的选择。 ■

证明. 这三个方程的证明都要将 TCD 划分为辅助图的面，然后逐面追踪端点匹配和选择，端点匹配背后的交换图见图 4.21。

我们先证明方程 (4.30)。构造一个辅助平面图 A。A 的顶点集是 $\mathcal{G}$ 中的白色顶点；如果 $\mathcal{G}$ 中恰有一个黑色顶点同时与 w 和 w' 相邻，则 A 中存在一条边 (w, w')。考虑 $\mathcal{T}$ 在 A 的各面上的限制。于是，A 中有两类面。若一个面包含 $\mathcal{G}$ 中的黑色顶点，我们称之为黑面；此时它对应一个端点匹配为 $\mathcal{S}_1$ 的 TCD。另一类面不包含 $\mathcal{G}$ 中的顶点，此时我们称之为白面，这些面对应端点匹配 $\mathcal{S}_{-1}$。令 $\mathcal{T}' = \sigma(\mathcal{T})$，并考虑 $\mathcal{T}'$ 在 A 的各面上的限制。A 的黑面恰好包含 $\mathcal{T}'$ 中的一个白色顶点，该顶点对应端点匹配 $\mathcal{S}_0$。另一方面，A 的白面包含端点匹配为 $\mathcal{S}_{-2}$ 的 TCD，其中 $\mathcal{T}'$ 的构型取决于截面时所作的选择。令 $\mathcal{T}'' = \iota(\mathcal{T}')$，并考虑 $\mathcal{T}''$ 在 A 的各面上的限制。于是，A 的黑面包含端点匹配为 $\mathcal{S}_{-1}$ 的 TCD，对应于 $\mathcal{G}''$ 的各面。A 的白面则包含端点匹配为 $\mathcal{S}_1$ 的 TCD。因此，相较于 $\mathcal{G}$，关于 $\mathcal{G}''$ 的 A 的白面和黑面的端点匹配特征恰好相反。由此，我们可以重复前面的步骤，得到 $\mathcal{T}''' = \sigma(\mathcal{T}'')$ 和 $\mathcal{T}'''' = \iota(\mathcal{T}''')$。于是，$A$ 各面中的端点匹配在 $\mathcal{T}''''$ 和 $\mathcal{T}$ 下相一致。为了使 A 的各面中的内容完全匹配，第二次取截面时所作的选择是唯一确定的。方程 (4.30) 得证。

让我们转向方程 (4.31)。回想一下，在截面的定义 4.7 和直线对偶的定义 4.53 中，我们都先构造了中间图 $\mathcal{G}^i$，其中涉及一些

选择。假设我们固定中间图 $\mathcal{G}^i$ 的一种选择。由 $\mathcal{G}^i$ 我们构造一个辅助图 B。B 的顶点集是 $\mathcal{G}^i$ 的黑色顶点，并且 B 中的边 (b, b') 的数量等于 $\mathcal{G}^i$ 中同时与 b 和 b' 相邻的白色顶点的数量。我们区分 B 的两种类型的面：包含 $\mathcal{G}^i$ 的白色顶点的白色面，以及不包含 $\mathcal{G}^i$ 中任何顶点的黑色面。注意，黑色面的度只有三度或二度。我们首先考虑 $\mathcal{G}^i$ 在 B 上的限制。此时，白色面对应于具有端点匹配 $\mathcal{S}_0$ 的 TCD，而黑色面为空。$\sigma(\mathcal{T})$ 中的选择对应于中间图的选择，我们假设该中间图为上文固定的 $\mathcal{G}^i$。现在我们考虑 $\sigma(\mathcal{T})$ 在 B 的面上的限制。在这一限制下，B 的白色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_{-1}$，而黑色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_1$。接下来，考虑 $\sigma(\sigma(\mathcal{T}))$ 在 B 的面上的限制。在这一限制下，B 的白色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_{-2}$，而黑色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_0$。$\sigma(\sigma(\mathcal{T}))$ 中的选择是 B 的白色面中构型的选择。现在转向直线对偶 $\eta(\mathcal{T})$。我们使用相同的中间图 $\mathcal{G}^i$ 来构造 $\eta(\mathcal{T})$。考虑 $\eta(\mathcal{T})$ 在 B 上的限制。B 的白色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_1$，而 B 的黑色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_{n-1}$。$\eta(\mathcal{T})$ 中的附加选择对应于 B 的白色面中构型的选择。我们观察到，在 $\iota(\eta(\mathcal{T}))$ 的限制中，白色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_{n-2}$，而 B 的黑色面对应于端点匹配 $\mathcal{S}_0$。因此，$\sigma(\sigma(\mathcal{T}))$ 和 $\iota(\eta(\mathcal{T}))$ 在 B 的面上的限制中的端点匹配是一致的。为了使 TCD 也一致，我们必须在 $\sigma(\sigma(\mathcal{T}))$ 中选取第二个截面时，以及在 $\eta(\mathcal{T})$ 中选择 $\mathcal{S}_1$ 匹配时，在 B 的白色面中作出相应的选择。至此，等式 (4.31) 得证。

方程（4.32）的证明与方程（4.31）的证明采用相同的方法。我们还将B 用作辅助图，然后追踪由固定选择的中间图 $\mathcal{G}^i$ 构造的B 中各面的选择和端点匹配。我们还假设 $\mathcal{G}^i$ 是固定的，并同时用于 $\eta(\mathcal{T})$ 和 $\sigma(\mathcal{T})$。这次，$\eta(\mathcal{T})$ 中除选择 $\mathcal{G}^i$ 以外的其他选择并不重要，因为它们会在 $\sigma(\eta(\mathcal{T}))$ 中抵消。对于B 的每个白面，相对于 $\sigma(\eta(\mathcal{T}))$ 和 $\iota(\sigma(\mathcal{T}))$ 的端点匹配均为 $\mathcal{S}_0$；对于每个黑面，端点匹配为$\mathcal{S}_{-2}$。我们只需注意，在取 $\eta(\mathcal{T})$ 的截面时，所作的选择必须与 $\mathcal{G}^i$ 中在 $\eta(\mathcal{T})$ 时丢失的二价白色顶点相对应。至此，方程（4.32）的证明完成。□

请注意，存在一些最小长度小于二的示例（见图4.22右侧），在这些示例中，即使我们不移除长度为 0 的弦，方程 (4.32) 仍然成立。我们预计，如果通过 TCDs 来刻画 σ 和 η，那么引理 4.61 的全部内容在不施加最小长度约束的情况下仍然成立。然而，我们不对此作进一步探究，因为在这种情况下，其几何意义尚不明确，但从纯组合的角度来看，这仍然可能具有一定的研究价值。

为了研究高维射影空间中 TCD 映射的射影对偶几何，我们引入 TCD 映射旗的概念。

定义4.62. 令 $n \in \mathbb{N}$。TCD映射旗 是由一组射影空间$(E_k)_{0\le k\le n}$ 和一组TCD映射$(T_k)_{1\le k\le n}$ 构成的一对，满足

(1) $0 \le k \le n$ 的维数 $E_k = k$，(2)
$0 \le k \le n-1$ 的 $E_k \subset E_{k+1}$，(3)
$1 \le k \le n$ 的 $T_k : \mathcal{T}_{\mho k} \to E_k$，(4)
$1 \le k \le n-1$ 的 $T_k = \sigma_{E_k}(T_{k+1})$。

■

隐含地，这一定义假设，对于 $1 \le k \le n$，E_k 相对于 T_{k+1} 处于一般位置，否则截面 $\sigma_{E_k}(T_{k+1})$ 就没有定义。并非每个 TCD映射 T_n 都属于

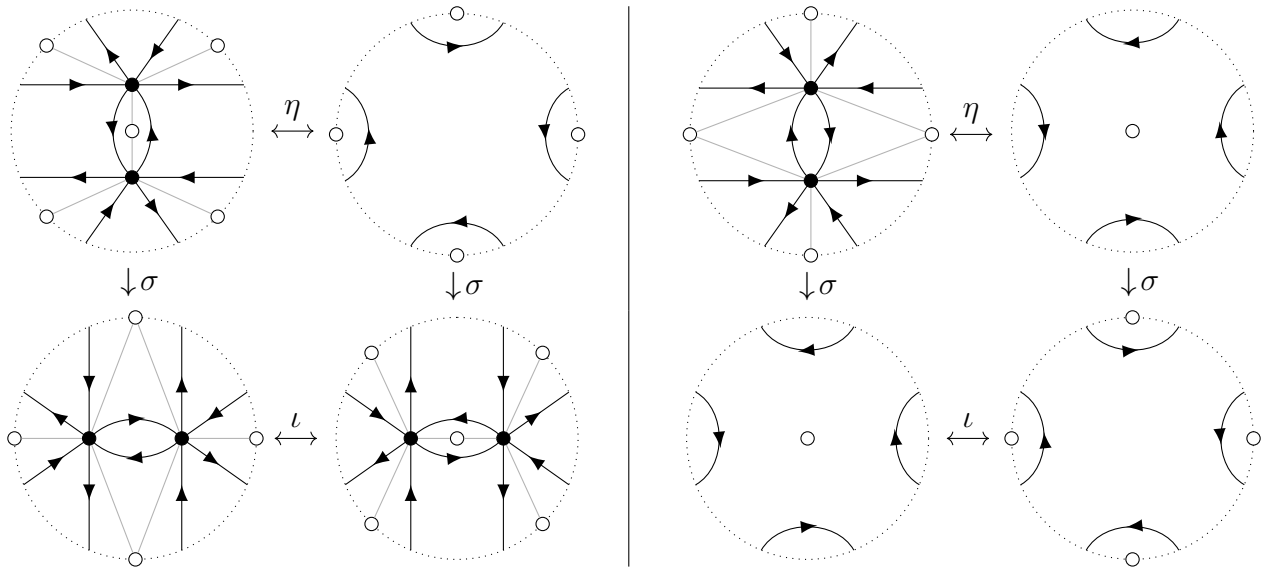


图4.22。关于 $\sigma \circ \eta = \iota \circ \sigma$ 的交换图的两个特殊例子。右侧的例子从长度小于 2 的弦开始。不过，如果不移除长度为零的弦，该图仍然交换。

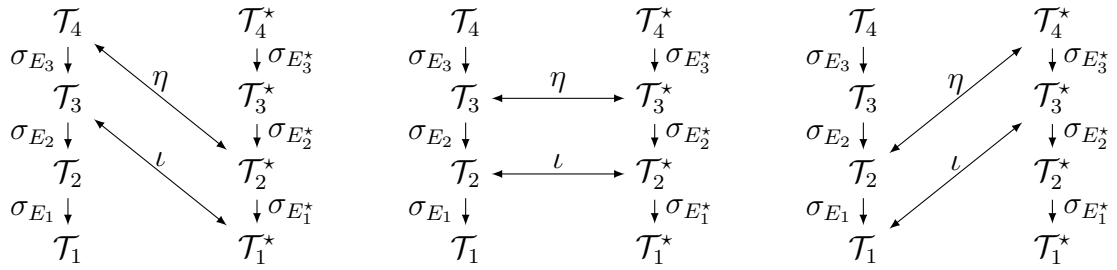


图4.23。TCD 对偶 ι 和直线对偶 η 以不同方式关联了 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ 中 TCD映射旗的射影对偶旗的 TCD。

TCD映射旗，但如果 T_n 是 $(n-1)$-一般位置的，那么根据一般性的定义（定义 4.16），它就属于。

考虑一个 TCD $\mathcal{T}$ 及其截面 $\mathcal{T}' = \sigma(\mathcal{T})$，以及相应的图 $\mathcal{G}$，$\mathcal{G}'$。回想一下，中间图 $\mathcal{G}^i$ 的每个黑色顶点都会在 $\mathcal{G}'$ 中被替换为一个白色顶点 w_b，见定义 4.7。反过来，对于 $\mathcal{G}'$ 中的每个白色顶点 w，$\mathcal{G}^i$ 中至少有一个黑色顶点曾被替换为 w。对于 $\mathcal{G}'$ 中的每个白色顶点 w，我们将 $\mathcal{G}^i$ 中这些黑色顶点之一记作 b_w。

定义 4.63。令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n \geq 2$，并考虑 TCD映射旗 $(T_k)_{1\leq k\leq n}$，$(E_k)_{0\leq k\leq n}$。对于 $1 \leq k < n$，以及 $\mathcal{G}_{k-1}$ 的每个白色顶点 w，选取 $\mathcal{G}_k$ 的两个不同白色顶点v_w，v'_w，使得 v_w 和 v'_w 与 b_w相邻。定义子空间映射

$$U_k : \mathcal{T}_{\mathfrak{O}k} \to \{(n-k)-\text{subspaces of } E_n\}, \tag{4.33}$$

对于 $1 \leq k \leq n$，使得 $U_n = T_n$，并且使得 $U_{k-1}(w) = \text{张成}\{U_k(v_w)\ U_k(v'_w)\}$ 对于 $\mathcal{G}_{k-1}$的每个白色顶点都成立。■

不仅 $U_n = T_n$，而且 $U_{n-1}(w)$也是 $= L(b_w)$，其中 L 是关联的直线映射（见定义4.51）。还需注意，$U_{k-1}(w)$定义良好，因为 v_w，v'_w 的选择无关紧要，因为其他选择张成的空间相同。

定义 4.64. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n \geq 2$。TCD映射旗$(T_k)_{1\leq k\leq n}$, $(E_k)_{0\leq k\leq n}$的一个射影对偶是TCD映射旗$(T_k^\star)_{1\leq k\leq n}$, $(E_k^\star)_{0\leq k\leq n}$，满足

(1) $E^\star_{n-k-1} \subset (E_n)^*$ 是 $E_k^\perp$在 E_n 中的射影对偶，其中 $0 \leq k < n$,

(2) TCD满足 $\mathcal{T}^\star_{k+2} = \eta(\mathcal{T}_{n-k})$，其中 $0 \leq k < n$，(3) TCD满足 $\mathcal{T}^\star_{k+1} = \iota(\mathcal{T}_{n-k-1})$，其中 $0 \leq k < n$,

(4) $T_k^\star(w)$ =张成$\{U_{n-k+1}(w)\ E_{n-k-1}\}^\perp$，对于 $\mathcal{G}_k^\star$的每个白色顶点 w 以及 $1 \leq k \leq n$。

这里，我们引入约定 E_{-1} =Ø，且 U 是与旗(T_k)相关联的子空间映射，如定义 4.63 中所述。■

引理 4.65. 令 $n \in \mathbb{N}$，$n \geq 2$，并令 $(T_k)_{1\leq k\leq n}$ 为一组余一般 TCD 映射的旗，且假设 E_0 相对于 T_1处于一般位置。存在唯一的射影对偶旗 $(T_k^\star)_{1\leq k\leq n}$，$(E_k^\star)_{0\leq k\leq n}$。■

证明. 我们首先考察组合结构。对于 $1 \leq k < n$，我们定义 $\mathcal{T}_k^\star = \iota(\mathcal{T}_{n-k})$，这是由条件 (3) 强制确定的。我们令 $\mathcal{T}_n^\star = \eta(\mathcal{T}_2)$ 取唯一的选择，这些选择由方程 (4.32) 和条件 (2) 强制确定；条件 (2) 要求 $\sigma(\mathcal{T}_n^\star) = \mathcal{T}_{n-1}^\star = \iota(\mathcal{T}_1)$。由方程 (4.30) 可知，确实存在一些选择，使得对于 $2 \leq k < n$，$\mathcal{T}_{k-1}^\star = \sigma(\mathcal{T}_k^\star)$。此外，方程 (4.31) 保证在直线对偶中确实存在一些选择，使得对于$2 \leq k < n$，$\eta(\mathcal{T}_k) = \mathcal{T}_{n-k+2}^\star$。因此，该断言的组合要求均已满足。

让我们考虑几何。子空间 $E_k^\star$ 由条件 (1) 确定，该条件要求 $E_k^\star = (E_{n-k-1})^\perp$。TCD映射 $T_k^\star$ 由条件 (4.) 确定。注意，$\mathcal{G}_{n-k+1}$ 的白顶点集与 $\mathcal{G}_k^\star$的白顶点集重合，因为 $\mathcal{T}_k^\star = \sigma(\eta(\mathcal{T}_{n-k+1}))$，且引理 4.61 的证明中也讨论了这一点。由于我们通过条件 (4) 定义 $T_k^\star$，因此对于 $\mathcal{G}_{n-k+1}$ 和$1 \leq k \leq n$的所有白色顶点 w，span$\{U_{n-k+1}(w)\ E_{n-k-1}\}$ 必须是一个超平面。等价地，对于$\mathcal{G}_k$和 $1 \leq k \leq n$的所有顶点 w，我们需要 span$\{U_k(w)\ E_{k-2}\}$ 是一个超平面。再等价地，对于与之前相同的 k、w，$U_k(w) \cap E_{k-2} =$ Ø。对于 $k = n$，$U_n(w) = T_n(w)$，并且由于 $E_{n-2} \subset E_{n-1}$ 和 E_{n-1} 处于一般位置，因此不包含 T_n 中的点，可知确实有 $U_n(w) \cap E_{n-2} =$ Ø。对于 $1 \leq k < n$，我们写出

$$U_k(w) \cap E_{k-2} = (U_k(w) \cap E_k) \cap E_{k-2} = (T_k(w)) \cap E_{k-2}, \tag{4.34}$$

这是空集，因为 E_{k-2} 相对于 T_{k-1}（w）处于一般位置。

我们还需要验证，对于 $1 \leq k < n$，$T_k^\star = \sigma_{E_k^\star}(T_{k+1}^\star)$。具体而言，对于 $\mathcal{G}_k^\star$ 的每个白色顶点，我们需要证明恒等映射

$$\mathrm{span}\{U_{n-k+1}(w), E_{n-k-1}\}^\perp = \mathrm{span}\{U_{n-k}(v_w), U_{n-k}(v'_w), E_{n-k-2}\}^\perp \cap E_k^\star, \tag{4.35}$$

其中 v_w，v'_w 与定义 4.63 中的相同。代入子空间映射的递归定义以及 $E_k^\star$ 的定义后，该等式等价于

$$\text{张成空间}\{U_{n-k}(v'_w), U_{n-k}(v_w), E_{n-k-1}\}^\perp = \mathrm{span}\{U_{n-k}(v_w), U_{n-k}(v'_w), E_{n-k-2}\}^\perp \cap E_{n-k-1}^\perp. \tag{4.36}$$

这个等式显然成立，因为 $E_{n-k-2} \subset E_{n-k-1}$。

仍需验证 $T_k^\star$是良定义的，也就是说，$T_k^\star$对于 $1 \leq k < n$是 0-一般位置。先考虑 $k > 1$ 的情形。设 w_1，w_2，w_3是 $\mathcal{G}_k^\star$中与同一个黑色顶点 b相邻的三个不同白色顶点。我们要证明，点 $T_k^\star(w_1)\, T_k^\star(w_2)\, T_k^\star(w_3) \in E_k^\star$是三个不同的点。另一方面，我们知道存在 $\mathcal{G}_{n-k+2}$ 的三个黑色顶点 b_1，b_2，b_3，使得

$$T_k^\star(w_i) = \mathrm{span}\{L_{n-k+2}(b_i), E_{k-2}\}^\perp, \tag{4.37}$$

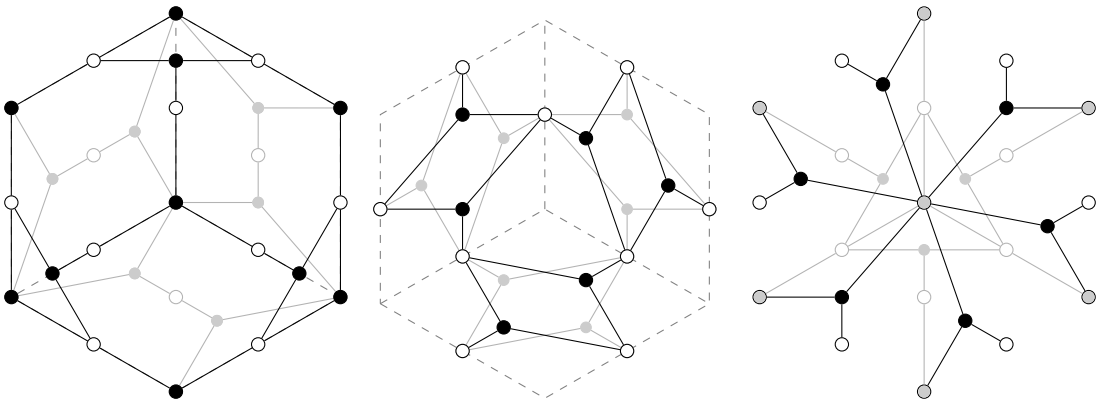


图4.24. Q-网、达布映射和直线复形的基本区域中，灰色的TCD与黑色的直线对偶。

对于 $i \in \{1,2,3\}$。T_{n-k+2} 的直线一般性保证三条直线 $L_{n-k+2}(b_i)$ 互不相同，因此三个点 $T_k^\star(w_1)$ $T_k^\star(w_2)$ $T_k^\star(w_3)$ 也互不相同。最后，考虑 $k=1$的情形。于是存在 $\mathcal{G}_n$ 中的三个白色顶点 w_1'，w_2'，w_3'，使得

$$T_1^\star(w_i) = \operatorname{span}\{T_n(w_i'), E_{n-2}\}^\perp, \tag{4.38}$$

对于 $i \in \{1,2,3\}$，因为一般而言，$\mathcal{G}$ 的白色顶点与 $\sigma(\eta(\mathcal{G}))$ 的白色顶点一一对应。此外，三个顶点 w_i' 与同一个面相邻，因此三个点 $T_n(w_i')$ 各不相同，因为我们假设 T_n 是1-一般的。□

给定两个对偶的TCD映射旗，我们将 $T_n^\star$ 视为 T_n 的射影对偶，因为 $T_n^\star$ 捕捉了 T_n 的超平面几何。一个足够一般位置的TCD映射 T 可以扩展为TCD映射旗，使得 $T_n = T$，因此可以找到一个射影对偶TCD映射 $T^\star$。然而，$T^\star$ 的组合结构取决于旗中截面的选择，因此 $T^\star$ 并不唯一。

另请注意，我们推测，通过适当调整证明中的最后一个论证，除了 T_1之外，T_k 上的余一般性假设都可以去掉。

以下 引理强调了对偶旗作为给定旗的射影对偶所起的作用 .

引理 4.66. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n \geq 2$。考虑一组 TCD映射旗 $(T_k)_{1\leq k\leq n}$、$(E_k)_{0\leq k\leq n}$及其对偶旗$(T_k^\star)_{1\leq k\leq n}$、$(E_k^\star)_{0\leq k\leq n}$。令 $U_k^\star$（$1 \leq k \leq n$）为对偶旗的子空间映射。则 $U_k^\star(w^\star) = (U_{n-k+1}(w))^\perp$，对 $1 \leq k \leq n$ 以及 $\mathcal{G}_k$中的一个白色顶点 w 成立，其中 $w^\star$ 是 $\mathcal{G}_{n-k+1}^\star$ 中与 w对应的白色顶点。■

证明。由引理 4.65 的证明可知，$\mathcal{G}_k^\star$ 的白色顶点与 $\mathcal{G}_{n-k+1}$ 中 $1 \leq k \leq n$的白色顶点一一对应。我们对 k 从 n 归纳至 1。对于$k = n$，我们看到

$$U_n^\star(w^\star) = T_n^\star(w^\star) = \operatorname{span}\{U_1(w), E_{-1}\}^\perp = U_1(w)^\perp, \tag{4.39}$$

通过采用子空间映射的定义、对偶旗的定义以及约定 $E_{-1} = \emptyset$，我们由 $U_k^\star$ 通过以下方式推出关于 $U_{k-1}^\star$ 的断言

$$U_{k-1}^\star = \operatorname{span}\{U_k^\star(v_w^\star), U_k^\star(v_w^\star)\} = \operatorname{span}\{U_{n-k+1}(v_w)^\perp, U_{n-k+1}(v_w')^\perp\} \tag{4.40}$$

$$= (U_{n-k+1}(v_w) \cap U_{n-k+1}(v_w'))^\perp = U_{n-k+2}(w)^\perp, \tag{4.41}$$

其中，v_w和 v_w'是分别对应于 $v_w^\star$和 $v_w'^\star$的顶点。注意，$v_w^\star$，$v_w'^\star$的 $\mathcal{G}_{n-k+1}$对应于 $\mathcal{G}_{n-k+2}$ 中与 w 相邻的两个黑色顶点 b，b'，它们不属于同一个$\mathcal{S}_1$配置。因此，$U_{n-k+1}(v_w)$ $U_{n-k+1}(v_w')$是两个不同的$(k-1)$维空间，根据递归定义，它们包含 $U_{n-k+2}(w)$。□

例4.67。在第4.2节中，我们已经看到，对于 $\mathbb{Z}^3$ 组合结构，Q网上的反复截面会产生达布映射、直线复形，随后又产生Q网，因为在 $\mathbb{Z}^3$上，直线复形与直线复合体相同。因此，在 $\mathbb{Z}^3$ 情形下，存在仅由这三类映射组成的TCD映射旗。现在让我们来考虑这些旗的射影对偶。构造射影对偶旗的一个结果是， $\mathbb{Z}^3$ Q网的射影对偶 $T_n^\star$ T_n 取决于射影空间 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$的环境维数 n 。在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中，对偶是直线复形。然而，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中，对偶是达布映射，而在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ 中，对偶是Q网。更一般地，令 $n \in 3\mathbb{Z} + r$ 对于 $r \in \mathbb{Z}_3$，则在表中

(4.42)

r	Q-网	达布映射直线复形	
0	达布映射	Q-网	直线复形
1	Q-网	直线复形	达布映射
2	直线复形	达布映射	Q-网

条目表示分母 注意，射影对偶 $T_n^\star$ 的类型取决于 T_n （首行）的类型。 ■

考虑一个投影 $\pi_{P\to H}$，其中心为 P，投影到超平面 H，且该超平面不包含 P。TCD映射旗 $(T_k)_{1\le k\le n}$, $(E_k)_{0\le k\le n}$ 的投影是集合 $(\pi_{P\to H}(T_k))_{1\le k\le n}$, $(\pi_{P\to H}(E_k))_{0\le k\le n}$，一般而言这不是一个 TCD映射旗，因为 $\pi_{P\to H}(E_n) = \pi_{P\to H}(E_{n-1})$。然而，若我们选择 $P = E_0$，那么 $(\pi_{E_0\to H}(T_{k+1}))_{1\le k\le n-1}$, $(H \cap E_{k+1})_{0\le k\le n-1}$ 就是一个 TCD映射旗。

引理 4.68。设 $(T_k)_{1\le k\le n}$, $(E_k)_{0\le k\le n}$ 是一个 TCD映射旗，并设 $(T_k^\star)_{1\le k\le n}$, $(E_k^\star)_{0\le k\le n}$ 是对偶旗。设 H 是一个不包含 E_0 的超平面。那么，以下对象的射影对偶旗

(4.43) $$(\pi_{E_0\to H}(T_{k+1}))_{1\le k\le n-1}, \quad (H \cap E_{k+1})_{0\le k\le n-1}$$

is

(4.44) $$(T_k^\star)_{1\le k\le n-1}, \quad (E_k^\star)_{0\le k\le n-1}.$$

■

证明。由定义 4.64 可立即得出。 □

旗的投影 $\pi_{E_0\to H}$ 的对偶旗，也可以视为对偶旗的截面 $\sigma_{E_0^\perp}$。

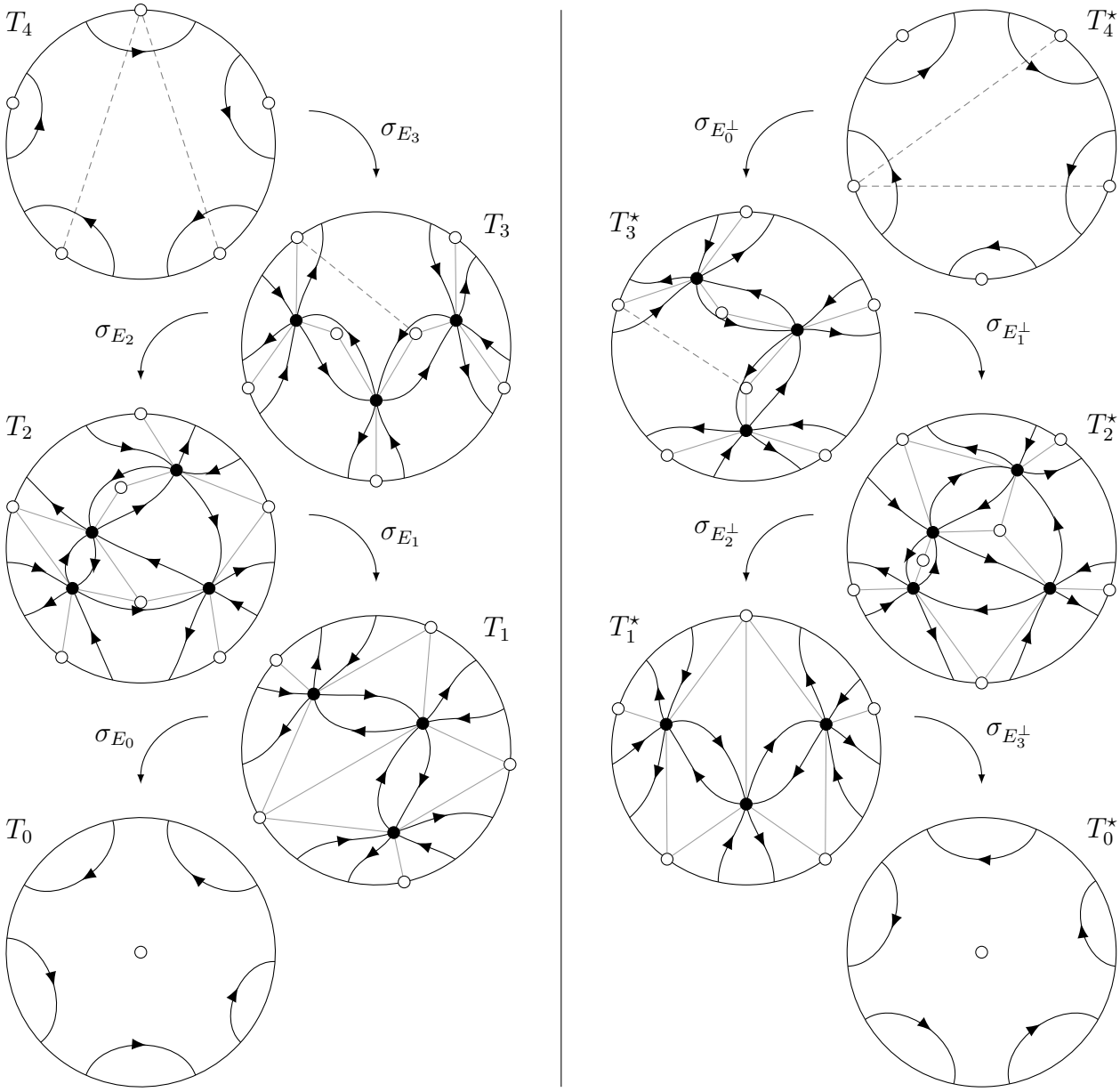


图 4.25。 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$, 中的一个 TCD映射旗及其对偶旗的示例，其中我们也纳入了 T_0 ，尽管旗的定义中并未包含它。

第5章

TCD 映射的簇结构

5.1. 二分对偶平面图的簇代数

簇代数由 Fomin 和 Zelevinsky [**FZ01**] 在一个非常一般的代数与组合结构框架中引入。不过，我们只会在非常特殊的情形下使用簇代数理论，即针对平面二分图和复数的情形。尽管如此，这种受限的表述足以描述二聚体模型以及 TCD 映射中组合结构的局部变化。当然，Fomin、Zelevinsky 等人为一般簇代数框架证明的定理，对于我们考虑的特殊情形仍然成立。

定义 5.1. *PDB* 箭图 Q 是一个平面有向图，其对偶是二分图。边的定向方式使得每个面都按顺时针或逆时针方向定向。■

这里，PDB 箭图是平面对偶二分箭图的缩写。在本论文的其余部分，我们只讨论 PDB 箭图。箭图的边称为箭头。

定义 5.2. 在 PDB 箭图 Q 的度为 4 的顶点 v 处进行突变，将生成一个新的 PDB 箭图 Q，其顶点集保持不变，但 v 的邻域中的箭头集发生变化。设 v 的邻点按照循环顺序依次为 v_1, v_2, v_3, v_4，并假设与 v 关联的箭头为 (v_1, v)、(v, v_2)、(v_3, v) 和 (v, v_4)。Q 的新箭头通过以下两个步骤从 Q 得到：

(1) 反转 v 处所有箭头的定向。

(2) 添加 $(v_1,\ v_2)$、$(v_1,\ v_4)$、$(v_3,\ v_2)$、$(v_3,\ v_4)$，必要时可抵消邻点之间先前存在的箭头。■

当我们说两条箭头 $(v,\ v')$ 和 $(v',\ v)$ 相消时，意思是如果它们同时出现在箭图中，就将它们一并移除。要理解突变对组合结构的影响，最简单的方法是画出所有可能的局部构型，正如我们在图 5.1中所做的那样。在我们的设定中，突变仅允许发生在度为 4 的顶点上。在一般的簇代数理论中，

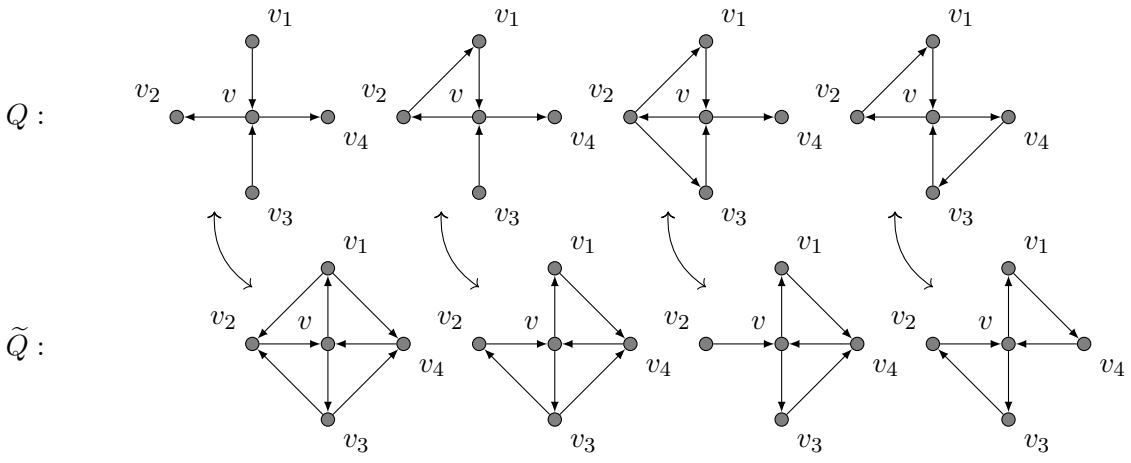


图5.1. 在顶点 v 处进行突变及其对邻域中箭头的影响。

可以在任意顶点处进行突变。但此类突变（通常）不会保持 PDB 箭图这一类，因此我们不允许进行此类突变。

我们还可以用一个反对称形式来描述箭头的定向。考虑由箭图顶点集生成的自由向量空间 $\mathcal{V}$，其上的反对称双线性形式ν： $\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{Z}$ 满足

$$\nu(v,v')=\begin{cases}+1 & \text{if there is an arrow } (v,v'),\\ -1 & \text{if there is an arrow } (v',v),\\ 0 & \text{else.}\end{cases} \tag{5.1}$$

那么，在顶点 v 处突变时， ν 的变化如下：

$$\tilde{\nu}_{v_1v_2}=\begin{cases}-\nu_{v_1v_2} & \text{if } v\in\{v_1,v_2\},\\ \nu_{v_1v_2}+\Theta(\nu_{v_1v})\Theta(\nu_{vv_2})-\Theta(\nu_{v_2v})\Theta(\nu_{vv_1}) & \text{else,}\end{cases} \tag{5.2}$$

其中， $\Theta(x)=\max(0,\ x)$。

定义 5.3. 箭图 Q 的簇变量是一组变量 $X=\{X_v\}_{v\in V}$，与该箭图的顶点 $v\in V$ 相关联，且取值于 $\mathbb{C}$。在一个顶点$\tilde{}$ v 处进行突变时，新变量 X 按如下方式确定：

$$\tilde{X}_{v'}=\begin{cases}X_v^{-1} & \text{if } v'=v,\\ X_{v'}(1+X_v) & \text{if } (v,v') \text{ is an arrow,}\\ X_{v'}(1+X_v^{-1})^{-1} & \text{if } (v',v) \text{ is an arrow,}\\ X_{v'} & \text{else.}\end{cases} \tag{5.3}$$

■

注意，对于非 PDB 箭图，簇变量和突变的定义同样成立。文献中也将 X-簇变量称为系数类型。与箭图结合时，它们也称为Y-模式 [**FZ07**]。

在簇代数理论中，箭图与簇变量的配对（$Q,\ X$）称为一个 种子 。通过反复进行突变，可以生成簇代数的所有种子，而种子的数量可能是无限的。整个簇代数作为一个代数，由所有种子中全部变量的并集模去突变所导出的关系生成。因此，簇代数可以由一个种子生成。簇结构这一术语虽常被非正式使用，但并没有明确的定义。下文中，我们将配对（$Q,\ X$）称为簇结构。

事实上，文献中存在多种变量集及其对应的突变规则。对于这些不同的变量集该如何命名或表示，目前尚无共识。我们在此引入的 X变量与本论文将要研究的几何概念关系最为直接。当它们在施加于其所源自的 TCD映射上的射影变换下保持不变时，我们用 X 表示；当它们在施加于其所源自的 TCD映射上的仿射变换下保持不变时，我们用 Y 表示。我们将在接下来的两节中解释详情。还有一组对我们有用的簇变量，我们称之为 τ 簇变量。与 X 变量不同， τ变量不能由 TCD映射唯一确定。我们采用字母 τ，因为它们常与离散可积系统领域引入的势相一致，而这些势记作 τ。

定义 5.4. 箭图 $\mathcal{Q}$ 的 τ 簇变量 是一组与箭图的顶点 $v\in V(\mathcal{Q})$相关联、取值于 $\mathbb{C}$的变量 $\tau=\{\tau_v\}_{v\in V}$。当按照图5.1在一个具有邻点 v_k 的四度顶点 v 处变异 时，新变量 $\tilde{\tau}$ 由此确定。

by

$$\tilde{\tau}_{v'} = \begin{cases} \dfrac{\tau_{v_1}\tau_{v_3} + \tau_{v_2}\tau_{v_4}}{\tau_v} & \text{if } v' = v, \\ \tau_{v'} & \text{else.} \end{cases} \tag{5.4}$$

■

我们观察到，突变律 (5.4) 是离散 KP 方程的一个局部实例，也称为八面体递推 [**Spe 07**] 或离散 Hirota 方程 [**Hir81**]。对于度不等于四的顶点，也可以定义τ变量的突变；在这种情况下，$\tilde{\tau}_v\tau_v$是 v处所有入射箭头对应的变量之乘积加上所有出射箭头对应的变量之乘积。X 簇变量可以通过以下公式由 τ 变量计算得出。

$$X_v = \frac{\prod_{(v',v)} \tau_{v'}}{\prod_{(v,v')} \tau_{v'}}, \tag{5.5}$$

其中，乘积的分子遍历所有指向顶点的箭头，分母遍历所有从顶点发出的箭头。直接验证可知，该公式与两个突变法则相容。

定义 5.5. 设 $\mathcal{Q}$ 是一个 PDB 箭图。通过反转 $\mathcal{Q}$ 的所有箭头，从 $\mathcal{Q}$ 构造一个新的箭图 $\rho(\mathcal{Q})$。我们称 $\rho(\mathcal{Q})$ 为 $\mathcal{Q}$ 的 *互反箭图*。此外，若 $(\mathcal{Q},\ X)$ 是一个簇结构，则 *互反簇结构* 为 $(\rho(\mathcal{Q})\ \rho X)$，其中对于所有顶点 $v \in V(\mathcal{Q})$，$\rho(X)_v = X_v^{-1}$。■

显然，$\rho \circ \rho$ 是恒等映射。此外，ρ 与突变相容，具体表述见下一个引理。

~ ~引理 5.6. 设 Q 是一个箭图，X 是其簇变量。设 Q 和 X 分别为在顶点 v 处突变后的箭图和变量。则有

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho(Q)} &= \rho(\tilde{Q}), \\ \widetilde{\rho(X)} &= \rho(\tilde{X}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

■

证明。通过直接计算即可证明这两个关系。 □

我们引入互反簇结构这一概念，因为在第 6.4 节将射影对偶的簇结构与原图的簇结构联系起来时，会遇到互反簇结构。不过，我们还需要在边界处进行另一种操作。

定义 5.7. 设 $\mathcal{Q}$ 是一个 PDB 箭图，v_1、v_2、.....、v_n 是 $\mathcal{Q}$ 的边界顶点，按逆时针顺序排列。我们通过添加箭头 $(v_1$、$v_2)$、$(v_2$、$v_3)$、.....、$(v_n$、$v_1)$，由 $\mathcal{Q}$ 构造箭图 $\Upsilon^+(\mathcal{Q})$。类似地，我们通过添加箭头 $(v_2$、$v_1)$、$(v_3$、$v_2)$、.....、$(v_1$、$v_n)$，由 $\mathcal{Q}$ 构造箭图 $\Upsilon^-(\mathcal{Q})$。■

显然，$\Upsilon^{\pm} \circ \Upsilon^{\mp}$ 是恒等映射，且 $\rho \circ \Upsilon^{\pm} = \Upsilon^{\mp} \circ \rho$。

5.2. 箭图的特定类别

本节研究我们考察离散微分几何对象时出现的基本箭图。巧合的是，这些箭图也出现在统计物理模型中。箭图上的这种巧合使我们之后能够通过簇代数，在这两个领域之间建立代数与组合学联系。

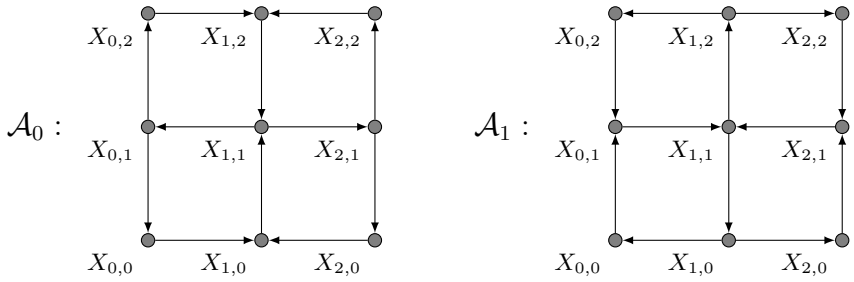


图 5.2. 在对半数顶点进行突变时交替出现的正方形箭图 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{A}_1$ 。

5.2.1. 方格箭图。该箭图只是带有一致箭头方向的 $\mathbb{Z}^2$ 格。箭头集合是以下两种之一（见图 5.2）：

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{i+j\in 2\mathbb{Z}} \{(v_{i,j}, v_{i+1,j}), (v_{i,j}, v_{i-1,j})), (v_{i,j+1}, v_{i,j}), (v_{i,j-1}, v_{i,j})\}, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{i+j\in 2\mathbb{Z}+1} \{(v_{i,j}, v_{i+1,j}), (v_{i,j}, v_{i-1,j})), (v_{i,j+1}, v_{i,j}), (v_{i,j-1}, v_{i,j})\}. \tag{5.8}$$

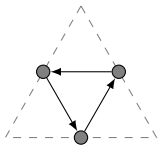
全局动力学的一步包括在箭图的每隔一个顶点处进行突变。为了确定离散时间的正方向，当处于箭图 $\mathcal{A}_k$ 时，我们在顶点 $v_{i,j}$ 处进行突变，其中 $i+j \in (2\mathbb{Z}+k)$。对 $\mathcal{A}_k$ 进行突变得到 $\mathcal{A}_{1-k}$。事实上，所有箭头的定向都会反转，而且由于在一个顶点处突变而添加的每条对角线，都会被相隔两步的另一个顶点处的突变抵消。此外，如果我们对带有箭头 $\mathcal{A}_k$ 的箭图进行突变，那么簇变量 X 将按如下方式变换：

$$\tilde{X}_{i,j} = \begin{cases} X_{i,j}^{-1} & \text{if } i+j \in 2\mathbb{Z}+k, \\ \dfrac{(1+X_{i,j+1})(1+X_{i,j-1})}{(1+X_{i+1,j})(1+X_{i-1,j})} X_{i,j} & \text{else.} \end{cases} \tag{5.9}$$

这个箭图将出现在拉普拉斯-达布动力学以及诸如 $\mathbb{Z}^2$圆模式等相关对象的研究中。

5.2.2. 三角剖分的箭图。

定义 5.8. 设 $\mathfrak{T}$ 为一个三角剖分。$\mathfrak{T}$ 的箭图 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{T}}$ 通过粘合以下部分得到。



将箭图映射到每个三角形中，使得 $\mathfrak{T}$ 的每条边对应一个箭图顶点。 ■

引理 5.9. 设 $\mathfrak{T}$ 为一个三角剖分，$\mathcal{Q}_{\mathfrak{T}}$ 为其对应的箭图。在 e 处进行边翻转，对应于在与 e 对应的箭图顶点处进行突变。■

证明。见图 5.3。 □

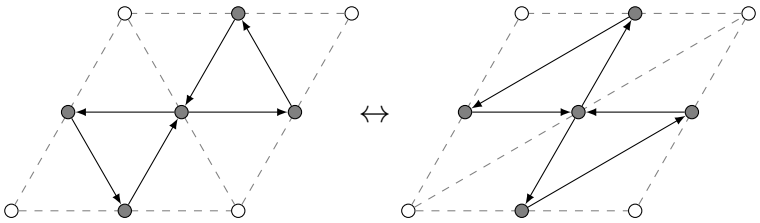


图 5.3. 三角剖分中的边翻转（白色顶点和虚线）以及三角形箭图中的相应突变（箭头和灰色顶点）。

5.2.3. 立方八面体箭图。考虑一个四边形，其顶点按逆时针顺序为 v，v_i，v_{ij}，v_j。使用移位记号（见第 3.2 节），我们将该四边形的边记为

$$e^i=\{v,v_i\},\quad e^j=\{v,v_j\},\quad e^i_j=\{v_j,v_{ij}\},\quad e^j_i=\{v_i,v_{ij}\}. \tag{5.10}$$

定义 5.10. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。$\mathfrak{Q}$ 的立方八面体箭图 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 为 $\mathfrak{Q}$ 的每条边都设有一个顶点。对于 $\mathfrak{Q}$ 的每个四边形 (v,v_1,v_{12},v_2)，我们添加四个箭头

$$e^1\to e^2\to e^1_2\to e^2_1\to e^1 \tag{5.11}$$

到箭图 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$。■

如果我们将立方八面体箭图的所有箭头反向，就称所得结果为反向立方八面体箭图。当我们指阶梯曲面的立方八面体箭图时，也会写作该立方八面体箭图。

定义 5.11. 考虑四边形图 $\mathfrak{Q}$ 中三个相互关联的四边形，并将它们视为立方体的背面，见图 5.4。立方八面体翻转 是按照以下顺序对箭图顶点 e^1,e^3,e^2 依次进行突变，然后再对 $\tilde{e}^1$ 进行突变的序列，其中 $\tilde{e}^1$ 是第一次突变后的 e^1。■

我们观察到，$\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 中的截半立方体翻转对应于 $\mathfrak{Q}$的立方体翻转。注意，有若干种可能的突变序列对应于立方体翻转。例如，在给定的序列中，e^3 和 e^2 处的突变可以互换，而不改变最终的组合结构。

立方八面体箭图出现在 $\mathbb{Z}^3$ Q-网、达布映射和直线复形中（见图 5.7、5.14），也出现在生成树模型中（见第 7.3 节）。

5.2.4. 六面体箭图。

定义 5.12. 设 $\mathfrak{Q}$ 为四边形图。$\mathfrak{Q}$ 的六面体箭图 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 对 $\mathfrak{Q}$ 的每个顶点以及 $\mathfrak{Q}$ 的每个四边形都设有一个顶点。对于每个四边形 $q=(v,v_1,v_{12},v_2)$，其中 v 为白色且按逆时针顺序排列，我们添加六个箭头。

$$v^{12}\to v\to v_1\to v^{12}\to v_{12}\to v_2\to v^{12} \tag{5.12}$$

到箭图中，其中 v^{12} 表示对应于该四边形的顶点。■

如果反转六面体箭图中的所有箭头，我们将所得结果称为反向六面体箭图。反向六面体箭图也可以通过互换顶点颜色得到。当我们指的是某个阶梯曲面的六面体箭图时，也会写作该六面体箭图。

定义 5.13。考虑四边形图 $\mathfrak{Q}$ 中两两关联的三个四边形，并将它们视为立方体的背面，见图5.5。六面体翻转 是一个突变序列：先从箭图顶点 v^{12} 开始，接着依次在 v、v^{31}、v^{23}、v^{21} 处进行突变，最后在 v_1^{23}和 v_2^{31}处进行突变。■

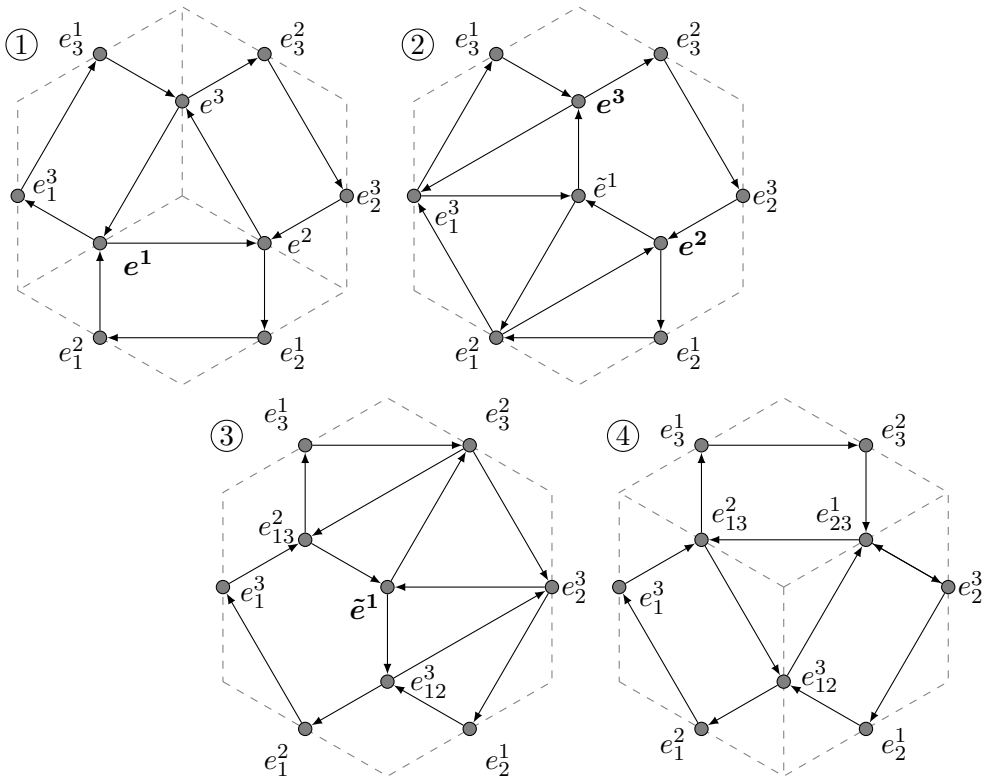


图 5.4。立方八面体箭图以及立方体翻转的四次突变。首先在 $\boldsymbol{e^1}$ 处进行突变，然后同时在 $\boldsymbol{e^2}$ 和 $\boldsymbol{e^3}$ 处进行突变，最后在 $\tilde{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{1}}$ 处进行突变。

我们注意到， $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ 中的六面体翻转对应于 $\mathfrak{Q}$中的立方体翻转。请注意，有多个可能的突变序列对应于立方体翻转。例如，在给定的序列中， v^{31} 和 v^{23} 处的突变可以互换，而不改变最终的组合结构。

六面体簇结构既出现在 Q网 和达布映射的情形中（见图 5.7、5.14），也出现在伊辛模型中（见第 7.4 节）。

5.3. TCD映射的射影簇结构

我们与 TCD映射关联的第一个簇结构具有一个箭图，该箭图是相应二分图 $\mathcal{G}$ 的对偶。箭头的定向方式是使其围绕 $\mathcal{G}$ 的黑色顶点逆时针旋转。 $\mathcal{G}$ 可能具有度为 2 的白色顶点。在这种情况下，对偶图中的两条箭头会相互抵消。从 TCD 的角度看，箭图的顶点对应于 TCD 的所有顺时针定向面，而箭头则连接具有公共三重点的面。我们在下面的定义中将这一解释形式化。

定义 5.14. 设 T 是一个 TCD映射， μ 是关联 VRC 的边权重。扩展射影簇结构 $\mathbf{Pro}^{\times}(T)$ 的顶点位于关联图 $\mathcal{G}$ 的每个面 f 上。两个面 f 之间的 f' 箭头数量 $\nu_{ff'}$ 定义为

$$\begin{aligned}\nu_{ff'} = \quad & |\{(f,w,f',b) \text{ counterclockwise} : b\in B, w\in W\}| \\ & -|\{(f,w,f',b) \text{ clockwise} : b\in B, w\in W\}|.\end{aligned} \tag{5.13}$$

设 f 是 $\mathcal{G}$ 的一个面，且 b_1、w_1、b_2、..... w_n 是沿逆时针顺序围成 f 的黑色和白色顶点。则射影簇变量 X_f 是交错比值

$$X_f = (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu(b_i,w_i)}{\mu(w_i,b_{i+1})}. \tag{5.14}$$

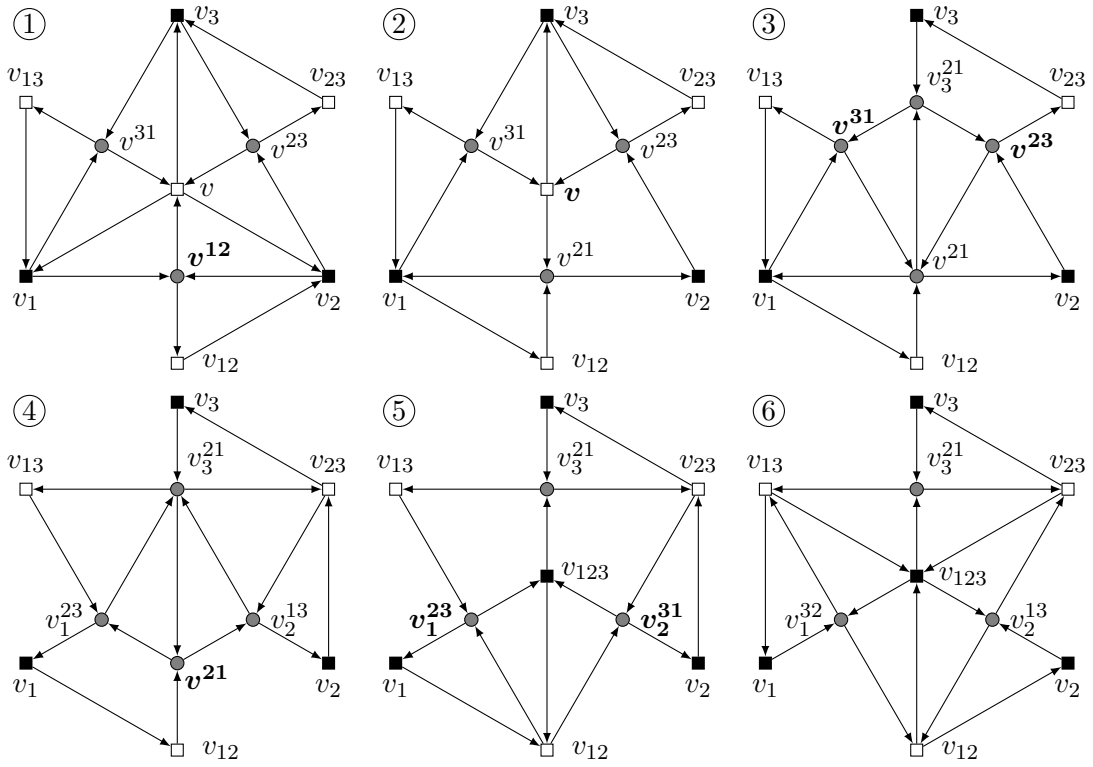


图5.5. 六面体箭图和立方体翻转的七次突变。突变序列为 $\boldsymbol{v^{12}}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v^{31}}, \boldsymbol{v^{23}}, \boldsymbol{v^{21}}, \boldsymbol{v_1^{23}}, \boldsymbol{v_2^{31}}$。

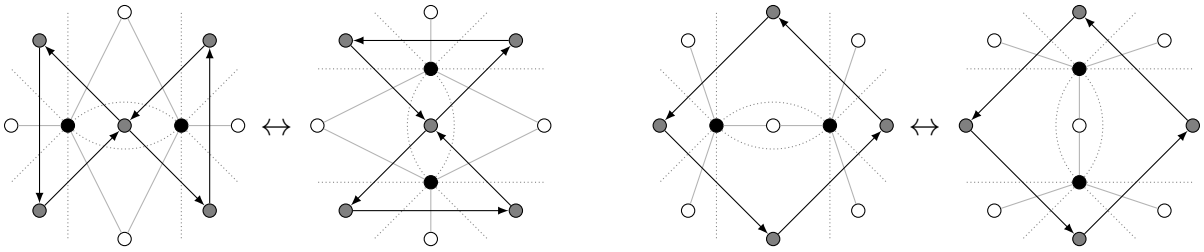


图 5.6. 蜘蛛变换前后的射影箭图（灰色顶点和箭头）（左）以及重新分裂前后的射影箭图（右）。

射影簇结构 $\mathbf{Pro}(T)$ 是将扩展射影簇结构限制到 $\mathcal{G}$ 的内部面上所得的结构。■

由于我们将射影簇变量定义为交错比，因此当我们缩放 $\mathcal{G}$ 的一个顶点周围的边权重时，内部面 f 的变量 X_f 不会改变。换言之，射影簇结构的射影簇变量 X 不依赖于齐次提升的选择，也就是说，不依赖于相关 VRC R 的选择。然而，扩展射影簇结构边界上的 X-变量确实依赖于提升，因此也依赖于 VRC 的选择。除第 6.2 节外，我们通常不会处理扩展射影簇结构。

当然，如果我们定义了一个簇结构，接下来的问题就是，是否存在某种组合结构的变化与箭图和变量的突变相对应。回想一下，对于 TCD，局部组合结构的变化是 2-2 移动，共有两种类型，参见第 2.6 节。

引理 5.15. $\mathcal{G}$ 中的蜘蛛变换对应于射影簇代数中的一次突变，而 $\mathcal{G}$ 中的重新分裂则使射影簇代数保持不变（参见图 5.6）。■

证明. 观察蜘蛛变换中的边权重（图 2.8），我们看到，在发生突变的面上进行蜘蛛变换之前和之后，˜簇变量 X，X

$$X = \frac{bd}{ac} = \tilde{X}^{-1} \tag{5.15}$$

正如预期的那样，等式成立。对于相邻面的簇变量，我们计算 X_{12}，它是与 w_1 和 w_2 关联的面的变量。我们得到

$$\frac{\widetilde{X}_{12}}{X_{12}} = \frac{ab^{-1} - dc^{-1}}{ab^{-1}} = 1 - \frac{bd}{ac} = 1 + X, \tag{5.16}$$

˜ ˜ ˜也正如预期的那样。对于 X_{23}，X_{34}，X_{14}，计算过程类似。因此，蜘蛛变换对簇变量 X 的作用就是突变。对于重新分裂（图 2.10），无需计算即可看出，四个相邻面的 X 变量均保持不变。□

正如我们在开头所解释的，与 TCD映射关联的 VRC 的边权在规范变换下由 TCD映射的点唯一确定。因此，考虑通过 TCD映射的点来表示 X-变量也是合理的。

引理 5.16. 设 T为一个 TCD映射。在 $\mathcal{G}$ 的一个面 $f = (b_1,\ w_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ w_n)$ 处的交错比 X_f 可以表示为多重比

$$X_f = (-1)^{n+1}\,\mathrm{mr}(T(w_1), T(v_2), T(w_2), T(v_3), \ldots, T(w_n), T(v_1)) \tag{5.17}$$

$$= (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} \frac{T(w_{i-1}) - T(v_i)}{T(v_i) - T(w_i)}, \tag{5.18}$$

其中 v_i、w_i、w_{i-1} 是 b_i 的三个邻点。有向长度比的定义与定义 2.35 中相同。■

证明。由引理 2.38 得出。注意，在引理 2.38 中，我们假设边权重是以仿射规范给出的。然而，改变规范不会改变 X_f 的值，因为缩放因子在定义 5.14 中会相互抵消。□

回想一下，根据引理 2.37，带有直线上附加点的多边形的多重比在射影变换下保持不变。因此，称其为射影簇结构是合理的，因为射影簇变量在射影变换下保持不变。另一个重要之处在于，射影箭图的组合结构决定了 $\mathcal{G}$ 的组合结构（允许重新分裂）。例如，从图 5.7 或定义中可以看出，箭图中所有逆时针定向的面（白色面）都恰好包含一个白色顶点。所有顺时针定向的面（黑色面）都包含 $(d_f - 2)$ 个黑色顶点和 $(d_f - 3)$ 个白色顶点，其中 d_f 是该面的度。黑色面编码了相邻白色面中的点位于一个 $(d_f - 2)$ 维射影子空间中的信息。

让我们来看图 5.7 中的标准 DDG 示例。我们注意到，$\mathbb{Z}^3$ Q网和直线复合体都具有立方八面体箭图，而达布映射具有六面体箭图。不过请注意，这两个立方八面体箭图的定向并不相同，这对应于这样一个事实：对于 Q网，黑色顶点位于箭图的四边形中，而对于直线复合体，情况恰好相反。当然，由于直线复形和直线复合体在定义于 $\mathbb{Z}^3$时重合，直线复形阶梯曲面的射影箭图也为立方八面体。不过，对于更一般的四边形图，情况就并非如此。

回顾一下，在四边形图 $\mathfrak{Q}$ 上的 Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的定义3.1中，我们还为每个四边形定义了两个焦点。另一方面，对每条边 $(v,\ v') = e \in E(\mathfrak{Q})$，我们也可以指定其相邻四边形中位于直线 $q(v)q(v')$ 上的两个焦点。

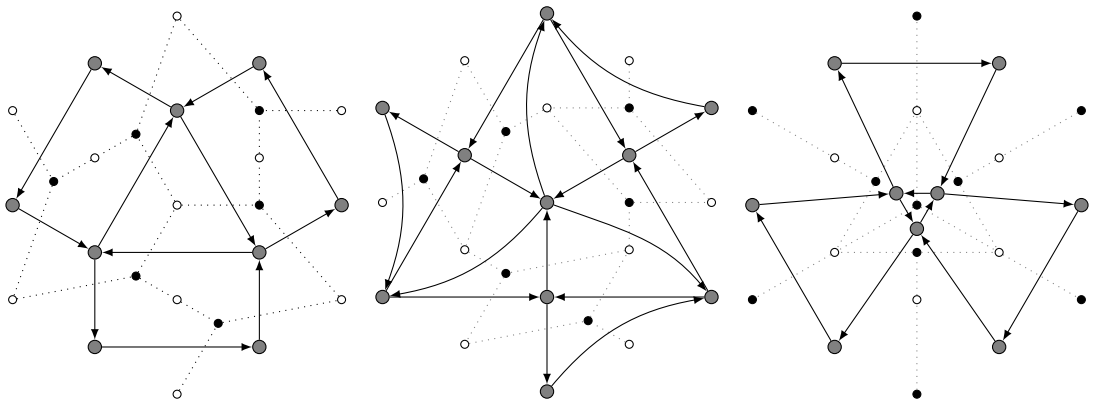


图 5.7. Q-网、Darboux 映射和直线复合体的射影箭图（箭头和灰色顶点）。图 $\mathcal{G}$ 以虚线绘制。我们可以辨认出立方八面体、六面体以及再次出现的立方八面体箭图。

定义 5.17. 设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个翻转一般的 Q-网。拉普拉斯不变量 是一个映射 $\Lambda\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$，使得

$$\Lambda_e = -\operatorname{cr}(q(v), F(f), q(v'), F(f')), \tag{5.19}$$

对于每条边 $e=(v,\ v')\in E(\mathfrak{Q})$，其中 $e^*=(f,\ f')$ 和 $v,\ f,\ v',\ f'$ 在 $\mathfrak{Q}$ 中按逆时针顺序排列。 ■

拉普拉斯不变量由 Doliwa [Dol97] 引入。

引理 5.18. 设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个翻转一般的 Q-网。对于每条非边界边$e\in E(\mathfrak{Q})$，都存在唯一的面 $f_e\in F(\mathcal{G})$，反之亦然。 q 的拉普拉斯不变量与射影簇变量相同，即

$$\Lambda_e = X_{f_e} \tag{5.20}$$

对所有 $e\in E(\mathfrak{Q})$。 ■

证明。固定一条边 $e\in E(\mathfrak{Q})$。我们总可以在相邻的焦点处进行重新分裂，使面 f_e 的度为四，因为 q 是翻转一般位置。回想一下，重新分裂不会改变射影不变量 X_{f_e}。那么， e 处的断言等价于引理 5.16。□

尤其是在第10章中，关于与统计物理相关的 TCD 映射，具有严格正 X变量的 TCD 映射尤其值得关注。不过，我们也可以立即得出一个有趣的结论。

引理 5.19。TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 定义在极小TCD $\mathcal{T}$ 上，且所有 X-变量均为严格正实数，则它是定义 2.41 意义下的翻转一般位置TCD映射。■

证明。注意，如果 T 的 X-变量严格为正，那么对于任何通过一系列 2-2移动与 T 相关的 TCD映射 T，这些变量也都严格为正˜；这是由定义 5.3 中说明的变异规则˜所致。假设某个通过 2-2 移动相关联的 TCD映射 T 中存在一个面 f，使得无法在 f处进行蜘蛛变换。那么 $X_f=-1$，这与所有 X-变量均严格为正这一事实矛盾。□

5.4. 理想双曲三角剖分

簇代数与几何相关的一个著名例子是带 puncture 曲面的 Teichmüller理论，参见 Williams [Wil12] 撰写的簇代数引言。本节将简要概述 Teichmüller理论中的 X-簇变量，也就是

所谓的剪切坐标 是我们在第 5.3 节中引入的 TCD映射的射影不变量的一种特例。关于Teichmüller理论、理想双曲三角剖分和剪切坐标的引言，我们推荐 Penner [**Pen12**]所著的书。为了避免引入 Teichmüller理论的完整框架，我们在双曲结构层面对这些变量进行比较。

考虑双曲平面的庞加莱圆盘模型。这里，圆盘 D 是复数集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$, ，其中我们将 $\mathbb{C}$ 视为$\mathbb{CP}^1$的一个仿射图。该圆盘是双曲平面的一个模型，而双曲平面的保向等距变换对应于保持圆盘边界不变的 $\mathbb{CP}^1$ 的射影变换。边界上的点称为理想点。

定义 5.20。设 $\mathfrak{T}$ 是一个三角剖分。理想双曲三角剖分是一个映射$z\colon V(\mathfrak{T}) \to \partial D$ ，它将 $\mathfrak{T}$ 的顶点映到庞加莱圆盘的边界上，并满足：边实现为测地线，且任意两条这样的边测地线都不相交。■

暂且固定三角剖分 $\mathfrak{T}$ 。于是自然会产生两个问题：两个理想双曲三角剖分 z, z' 何时由射影变换关联？在射影变换意义下，理想双曲三角剖分有多少种不同的形式？剪切坐标提供了一种回答这些问题的方法。

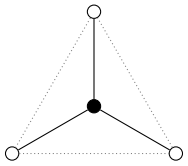
定义 5.21。设 $z\colon V(\mathfrak{T}) \to \partial D$ 是一个理想双曲三角剖分。剪切坐标 $s\colon E(\mathfrak{T}) \to \mathbb{R}_{>0}$ 定义如下：

$$s_e = -\operatorname{cr}(z_{v_1}, z_{v_2}, z_{v_3}, z_{v_4}), \tag{5.21}$$

对于每条边 $e=(v_1, v_3)$，其中 v_2, v_4 满足： v_1, v_2, v_3 和 v_3, v_4, v_1 是$\mathfrak{T}$ 中的三角形，并且 v_1, v_2, v_3, v_4 在 $\mathfrak{T}$中按逆时针顺序排列。■

事实上，两个理想双曲三角剖分由保定向的双曲等距变换关联，当且仅当它们具有相同的剪切坐标 [**Pen12**]。此外，对于任意一组剪切坐标，都存在一个理想双曲三角剖分，由此回答了上述两个问题。

我们可以通过粘合，将每个理想双曲三角剖分 z 与一个 TCD 映射 T_z 相关联： $V(\mathfrak{T}) \to \partial D$



映射到 $\mathfrak{T}$的每个三角形中。每个白色顶点 w 都与 $\mathfrak{T}$ 的一个顶点 v 相关联，而TCD映射 T_z 将 w 映射到 $z(v)$。我们注意到，TCD必然具有端点匹配$\mathcal{S}_1^n$（见定义2.3），其中 n 是 $\mathfrak{T}$的顶点数。此外，VRC的组合结构显然将所有顶点限制在一条直线上，这对应于我们正在 $\mathbb{CP}^1$中考虑三角剖分这一事实。

引理 5.22。 T_z 的 X 变量与 z 的剪切坐标重合。 ■

证明。首先，我们注意到组合结构是正确的。也就是说，对于 $\mathfrak{T}$ 的每一条边，在 $\mathcal{G}$ of T_z 中都存在一个面。此外，VRC 的每个面都是四度的，因此该结论可直接由引理 5.16 得出。□

在理想双曲三角剖分理论中，可以进行边翻转，并根据旧的剪切坐标计算新的剪切坐标。鉴于前面的引理，

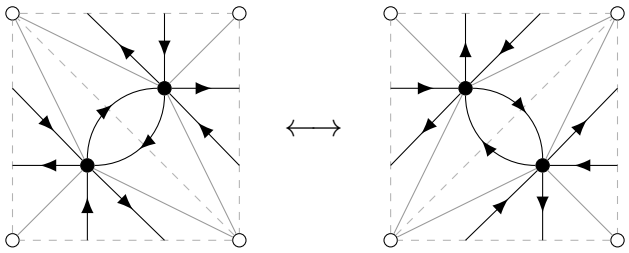


图 5.8. 三角剖分中的边翻转（虚线），对应于 $\mathcal{G}$ （黑色）中的蜘蛛变换。

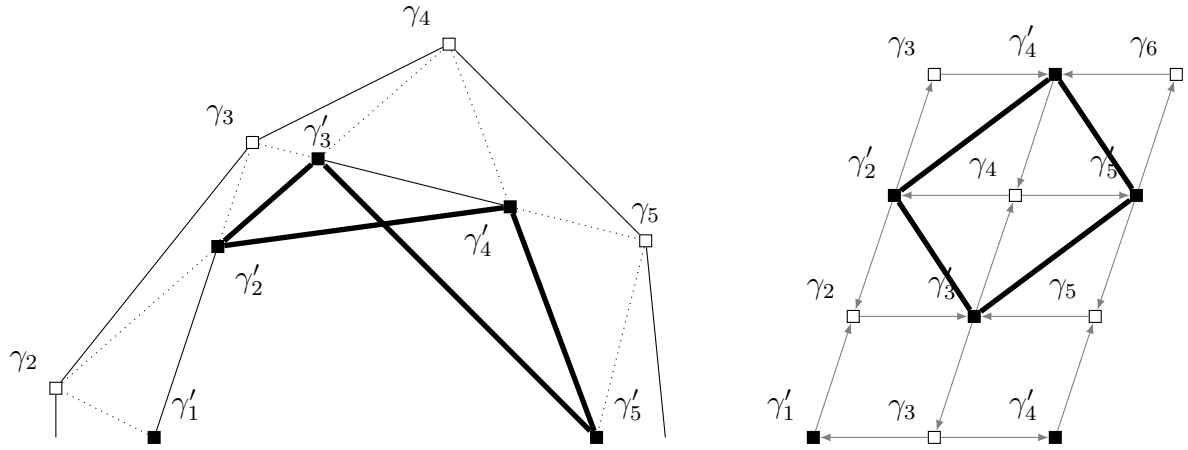


图 5.9。左：多边形 γ 的一部分，以及应用五边形映射后的多边形 γ'。右：与五边形映射相关联的射影簇结构。我们在两幅图中都突出标示了相关 Q-网 $q_{\gamma'}$ 的一个四边形。

剪切坐标的边翻转公式与簇变异一致，也就不足为奇了。图 5.8 显示，在 z 中进行边翻转对应于在 T_z 中进行蜘蛛变换。

我们将研究 Fock- Goncharov 在第 11.2 节中引入的射影 k-旗构型的推广。相应的 τ 簇变量在理想双曲三角剖分的特殊情形下与 Penner 坐标一致。

另一种推广方式是不再将像 T_z 限制在 D 中。在这种情况下，可以研究存在于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 中的三角剖分，尽管此时尚不清楚对于哪些 X- 变量，三角形的边才不会相交。还可以进一步推广，考虑定义在非极小 TCD 上的映射 T_z，也就是说，考虑具有内部顶点的三角剖分。在这种情况下， X-变量不再是自由的，而是受到某些子簇的约束，我们在此不作讨论。

5.5. 五边形映射

本节将说明，五边形映射可以通过拉普拉斯-达布动力学，视为作用于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的双周期 Q-网上的映射。

定义 5.23. 设 $\gamma\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个多边形。定义 $\mathbf{T}(\gamma)\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 为新曲线（见图 5.9），使得

$$\mathbf{T}(\gamma)(k) = \gamma(k-2)\gamma(k) \cap \gamma(k-1)\gamma(k+1), \tag{5.22}$$

成立 f 映射 $\mathbf{T}\colon (\mathbb{C}\mathrm{P}^2)^m \to (\mathbb{C}\mathrm{P}^2)^m$ 称为五边形映射 $p.$ ■

这一映射由 Schwartz [**Sch92**] 引入，后来证明它是可积的 [**OST10**]。它被称为五边形映射，因为它对 $m \geq 5$ 的作用并非平凡。

定义 5.24。设 $\gamma:\mathbb{Z}_m\to\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个多边形。定义其关联 Q-网 $q_\gamma:V(\mathbb{Z}^2/\{(m,0),(-2,1)\})\to\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 为

$$q_\gamma(k,l)=\gamma(k+2l), \tag{5.23}$$

对所有 $k,\ l\in\mathbb{Z}$。 ■

显然，q_γ 是一个 Q-网，因为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中任意四个点都共面。

定理 5.25. 设 $\gamma:\mathbb{Z}_m\to\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个多边形，q_γ 是与之关联的 Q-网。令 $\Delta^2(q_\gamma)$ 表示沿坐标方向 2 的拉普拉斯变换（参见第 3.7 节）。那么

$$\Delta^2(q_\gamma)=q_{\mathbf{T}(\gamma)}. \tag{5.24}$$

也就是说，五边形映射的迭代对应于 q_γ 上的拉普拉斯-达布动力学。■

证明. 因此，q_γ 的每个四边形都由四个点（$\gamma(k)$ $\gamma(k+1)$ $\gamma(k+3)$ $\gamma(k+2)$）组成，且对于 $k\in\mathbb{Z}$，这些点按逆时针顺序排列。因此，这种四边形的两个焦点是$\mathbf{T}(\gamma)(k+1)$ 和 $\mathbf{T}^{-1}(\gamma)(k+2)$。□

这个定理以不同措辞见于 Schief 的一场（颇有争议的）报告中 [**Sch09**]，但此前从未在文献中发表过。Glick [**Gli11**]发现了五边形映射的簇结构。

定理 5.26. Glick [**Gli11**] 为五边形映射定义的簇结构及其相关簇变异，与将五边形映射视为 TCD映射时的射影簇结构相一致。■

证明. 通过重新分裂，五边形映射作为 TCD映射的每个 X变量都对应于将五边形映射视为 Q-网时的一个拉普拉斯不变量（见定义 5.17）。这些拉普拉斯不变量是交比，与 Glick 的变量一致。□

注 5.27. 除了解释五边形映射为何是 TCD映射之外，我们在本文中不研究五边形映射。不过，我们为感兴趣的读者留下几点说明。

(1) 在第5.7节和第 6.4 节中，我们介绍了若干其他的 TCD映射簇结构。这些簇结构也适用于五边形映射，因为五边形映射可以看作 Q-网的周期约化。(2) Glick 关于簇结构的后续研究将其与有向网络联系起来[**GSTV16**]。(3) 直到最近，五边形映射的簇结构、泊松结构和哈密顿结构与二聚体簇可积系统 [**GK13**]之间的确切关系仍未明朗，尽管 Glick 和 Rupel 的讲义中对此有所勾勒 [**GR17**]。不过，Izosimov 最近的研究解决了这一问题 [**Izo21a**]。一般而言，将我们的方法与 Izosimov 以泊松-李群为基础建立的一般框架进行比较，会很有意义 [**Izo21c**]。

(4) 注意，我们解释了五边形映射是环面上的 TCD $\hat{}T:\mathcal{T}_{\circlearrowleft}\to\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ on a $\hat{}$ TCD $\mathcal{T}$on 的 TCD映射。也可以考虑环面的普遍覆盖上的 $\mathcal{T}$on。于是，我们可以考虑一个 TCD映射 $T:\hat{}\,\mathcal{T}_{\circlearrowleft}\to\mathbb{C}\mathrm{P}^2$,，使得对于 $\mathcal{G}$ 的所有白色顶点，都有 $\hat{}T(w)=T(w)$。然而，在这种情况下，VRC R 中捕获的齐次 $\hat{}$ $\hat{}$ 提升不必满足对于 $\mathcal{G}$ 的所有白色顶点都有 $R(w)=R(w)$。相反，$\hat{}$ 对于某些因子 $c_w\in\mathbb{C}$，可能有 $R(w)=c_wR(w)$。这里不作详细讨论，但事实证明，因子 c_w 并非任意，而只取决于

与环面上两个非平凡圈相关的两个常数 c_1, c_2，这两个圈生成了其基本群。这一方面对于可积系统和统计力学都具有研究意义，尤其是从二聚体构型的角度来看。关于二聚体构型与 TCD映射之间的关系（尽管并非在环面上），请参见第 7.5 节。

■

5.6. 来自射影簇变量的 TCD 映射

在第 5.3 节中，我们介绍了 TCD 映射的射影不变量——射影簇变量。但我们如何从这些不变量重构 TCD 映射呢？我们希望给出一种算法，逐步构造这样的 TCD。

让我们回顾第 4.3 节中的一些结论，这些结论将在证明中用到。回想一下，对于每个带标号的极小 TCD，我们都在图 $\mathcal{G}$ 上定义了 li-定向 $\mathcal{O}$ 。每个黑色顶点都只有一条入边，而每个白色顶点至多有一条出边。此外，每个面 f 都只有一个黑色边界顶点，它有一条来自 f 边界之外的白色顶点的入边。设带标号的极小 TCD $\mathcal{T}$ 的最大维数为 k。将 $\mathcal{O}$ 视为偏序集时，它有 $k+1$ 个极小元，且这些极小元都在边界上。再考虑限制在白色顶点上的线性扩张 $\varepsilon\colon\ W(\mathcal{G}) \to \mathbb{N}$ of $\mathcal{O}$。不是极小元的白色顶点 w 有唯一一条出边（b, w）。因此，与 b 相邻的另外两个白色顶点必定要在 w 之前出现在 ε 中。还有面 f 与 b 相邻，但不与 w 相邻。 f 边界上的所有白色顶点也都在 w 之前出现在 ε 中。

现在我们可以定义该算法了。请注意，该算法可能会失败；我们将在定义之后详细讨论这一点。

定义5.28. 设 $\mathcal{T}$是一个带标号的极小 TCD， $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 并且令 $X'\colon\ F(\mathcal{G}) \to \mathbb{C}_{\times}$。下面我们定义构造算法，该算法要么失败，要么生成一个 TCD 映射$T\colon\ \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ，使其射影不变量满足 $X_f = X'_f$ ，对所有面 $f \in F(\mathcal{G})$均成立。

(1) 选择 $\mathcal{O}$的一个线性扩张 $\varepsilon\colon\ W(\mathcal{G}) \to \mathbb{N}$ 。

(2) 在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$中任意选取与 $\mathcal{O}$ 的极小元对应的点，但要求任意两个共享同一个黑色顶点的极小元张成一条直线。

(3) 找出 ε 中尚未放置的最小白色顶点 w 。令 b 为唯一的黑色顶点，使得(b, w)是 b处的入边；令 w', w''为 b 的另外两个邻点，并令 f 为与 b 相邻但不与 w相邻的面。现在分为三种情况:

(a) 如果 $T(w') = T(w'')$，则算法失败。(b) 否则，如果 f是边界面，则在经过 $T(w')$ 和 $T(w'')$ 的直线上任意放置 $T(w)$，但不能使其与这两个点中的任意一个重合。(c) 否则，在经过 $T(w')$ 和 $T(w'')$ 的直线上，存在唯一一点 $T(w)$，使得$X(f) = X'(f)$，选择该点。

(4) 重复步骤 (3)，直到所有点都放置完毕。 ■

引理 5.29. 设 $\mathcal{T}$ 是最大维数为 k 的带标号的极小 TCD，且 $n \in \mathbb{N}_{>0}$。满足存在一个 TCD映射 $T\colon\ \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ，其射影不变量为 X' 的函数集 $X'\colon\ F(\mathcal{G}) \to \mathbb{C}_{\times}$，是 $\mathbb{C}^{|F|}$的一个开且满维子集。具有一组固定射影不变量的 TCD映射集$T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ，要么为空，要么是 $\mathbb{C}^{kn+k+n}$ 的一个开且满维子集。■

证明。考虑定义5.28中的算法。任何TCD映射都可以通过此算法构造。此外，注意，$\mathcal{O}$ 的极小元数量等于 $k+1$，而步骤(3b)命中的边界面数量为 k。因此，此构造的（复）自由度为$(k+1) \times n + k$。此外，算法唯一可能失败的情况是：白色顶点 w 的点被放置在某处，使其与白色顶点w'的一个点重合，并且 w 和 w' 共享一个在 ε中位置更靠后的黑色顶点。由于每个白色顶点只与有限个黑色顶点关联，因此每一步中不允许的选择只有有限个。因此，对于给定的TCD但不变量 X 任意的所有TCD映射构成 $\mathbb{C}^{kn+k+n+|F|}$的一个开且满维子集。显然，它分裂为引理中的两个空间。□

在 $\mathcal{T}$ 是可扫掠 TCD 的特殊情形下，$\mathcal{O}$ 的极小元是连续的边界顶点，而构造算法中遇到的边界面恰好是这些连续极小元之间的边界面。因此，构造中的自由度位于边界上。因此，该构造算法只是在二维系统中传播一维双曲型柯西数据的一种特定方式。这个系统是离散可积的，意即可以通过 2-2 移动改变组合结构，但这不会影响组合结构改变处以外的 TCD 映射构造。

定理 5.30. 设 $\mathcal{T}$ 是最大维数为 k 的可扫掠带标号 TCD。设 $T, T' : \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$ 是两个 TCD 映射，且 T 中的点以及 T' 中的点张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$。设 X, X' 是 T, T' 的射影不变量。若 $X = X'$，则存在射影变换 f，使得 $f(T') = T$。换言之，射影不变量 X 刻画了一个达到其最大维数的 TCD 映射（相差一个射影变换）。■

证明。给定一列由 $k+1$ 个不同的点张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$，以及一个不包含其中任何一点的超平面，总能找到一个射影变换，将这些点和超平面映射到另一列任意给定的同类点和一个超平面。在我们的情形中，这些点是与 $\mathcal{O}$ 的极小元相关联的 T（分别为 T'）的 $k+1$ 点。此外，在可扫描的情形中，$\mathcal{O}$ 的极小元是 $\mathcal{G}$ 的连续边界顶点 v_1、v_2、……、v_{k+1}。固定一组辅助数 $X_i^{\partial} \in \mathbb{C}_{\times}$，其中 i 从 1 到 k。记 f_i 为边界上有 v_i、v_{i+1} 的边界面。引入点 M_1、M_2、$\ldots M_i$，使得每个点 M_i 都在直线 $T(v_i)\,T(v_{i+1})$ 上，并且对于每个面 f_i，沿 f_i 的边界排列的各点与 M_i 的多重比为 X_i^{∂}。定义超平面 H 为所有 M_i 的张成空间。对 T' 重复此过程，使用相同的 X_i^{∂}，得到点 M_i' 和超平面 H'。根据证明开头的论证，存在一个射影变换 f：$\mathbb{C}\mathrm{P}^k \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$，它将 H' 映射到 H，并将点 $T'(v_i)$ 映射到 $T(v_i)$。因此，f 也将每个点 M_i' 映射到 M_i。现在，我们可以按照构造算法的步骤验证，确实有 $f(T') = T$；由此可见，数值 X_i^{∂} 与标记点 M_i 的组合决定了算法步骤 (3b) 中的选择。因此，算法中的所有选择都相同，定理得证。□

据我们所知，这是离散微分几何中的例子所呈现的一种新型结果。通常，在离散微分几何中，人们考虑从一个规模很大甚至无限的图到固定（且较小）维数的射影空间的映射，例如 $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$。然而，这些例子的最大维数会随着规模增大而增大，因此在这种情况下，只需证明不变量与边界数据共同决定了整个映射即可。不过，定理 5.30 指出，在最大维数下，实际上不存在相关的边界数据，因为映射（相差一个射影变换）由射影不变量决定。因此，较小维数下出现的边界数据，仅仅反映了我们如何将最大维数下唯一的映射投影到较小维数的空间中。

还请注意，对于不可扫掠 TCD，我们预期也有类似的结果。其自由度显然与可扫掠 TCD 相同。然而，由于极小元并不连续，因此要引入用于定义超平面的标记点，并没有那么直接。

现在我们考虑实射影空间和实正不变量的情形。在这种情况下，我们将先前的结果加以强化，使其包含一个存在性结论。

定义 5.31。设 $\mathcal{T}$ 是一个具有 n 条弦的带标号的极小 TCD。回顾一下，我们在第 2.8 节中定义了一个映射 $\mathcal{A}'$，它将 $\mathcal{G}$ 的白色顶点映射到 $\{1,2,\dots,n\}$ 的一个子集，其中，如果 w 位于弦 i 的右侧，则 $i \in \mathcal{A}'(w)$。构造一个有向图 $G^{\mathcal{LR}}$（见图 5.10），其顶点集等价于 $\mathcal{G}$ 的白色顶点 $W(\mathcal{G})$。每当满足以下条件时，$G^{\mathcal{LR}}$ 中就存在一条从 w_1 指向 w_2 的边。

(1) 存在一个黑色顶点 b，它同时与 w_1 和 w_2 相邻，并且

（2）按字典序排列的 $\mathcal{A}'(w_1) \le \mathcal{A}'(w_2)$，其中 $\mathcal{A}'(w)$ 本身按递增顺序书写。

图 $G^{\mathcal{LR}}$ 是无环的，因为它是白色顶点上的完全字典序的限制。我们将白色顶点$W(\mathcal{G})$上的*左右偏序集*（简称*lr-偏序集* $\mathcal{LR}$）定义为由无环定向 $G^{\mathcal{LR}}$ 给出的传递闭包，也就是说，如果在 $G^{\mathcal{LR}}$ 中存在一条从 w_2 到 w_1 的有向路径，则 $w_1 \le w_2$ 在 $\mathcal{LR}$ 中。■

定理 5.32. 设 $\mathcal{T}$ 是最大维数为 k 的极小TCD。设 $X' \colon F(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个正函数。那么存在一个 TCD映射 $T \colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^k$，其射影不变量为$X = X'$。如果 $\mathcal{T}$ 是可扫描的，那么在射影变换意义下，存在唯一的 TCD映射$T \colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^k$，它张成空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ 且具有射影不变量 $X = X'$。■

证明。先假设 $\mathcal{T}$ 是可扫掠的，并选择$\mathcal{T}$的一个标记。然后选择一条直线 ℓ、 ℓ 的一个仿射图 $\mathbb{R}$，以及一个中心投影 $\pi \colon \mathbb{R}\mathrm{P}^k \to \ell$，使得 $\mathcal{O}$中极小元的 $k+1$ 像，按照它们在 $\mathcal{T}$带标记的边界上出现的顺序排列后，在 ℓ的仿射图上呈递增顺序。这总是可行的，因为我们可以将 $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ 中一般位置的 $k+1$ 点映射到任意其他这样的一组点，因此也能使它们的投影处于所需的位置。现在应用构造算法（示例见图 5.10）。在步骤 (3b) 中，在 ℓ的仿射图上对应的另外两个点之间选取新点。不变量 X 的符号确保在每个步骤 (3c) 中，新点也位于另外两个点之间。为此，注意到面 f 边界上的每个黑色顶点都会给 X_f贡献一个负号， f中的极大黑色顶点除外。为说明这一点，在开始构造算法之前，将$M = (M_1, M_2, \dots, M_{k+1})$初始化为 $\mathcal{O}$ 中极小元的序列。注意，对于关于 lr 偏序集的每个i，都有 $M_i <_{\mathcal{LR}} M_{i+1}$（见定义 5.31）。与此同时，这些像在 ℓ上也满足同样的关系，即对于所有指标 i， $T(M_i) < T(M_{i+1})$。在构造算法的每一步中，按如下方式更新序列 M： 每当我们在与 w'相同的黑色顶点处放置一个新的白色顶点 w 时， w''（记号同定义5.28），也将 w 加入序列 M，置于相邻的元素 w' 和 w''之间。这样一来， M 相对于 $\mathcal{LR}$仍保持有序，而 M 中元素的像在 ℓ中也仍保持有序。然后移除所有不再与尚未在构造算法中处理过的黑色顶点相邻的白色顶点。这样也能保持 M 及其像的有序性。由于算法过程中有序性得以保持， M 中的两个点不可能重合。我们在构造算法的步骤 (3) 中考察的顶点 w'、 w''的像始终位于 M中，因此步骤 (3a) 中的失败不会发生。因此，在可扫掠的情形下，我们证明了 T的存在性。由定理 5.30 可得唯一性。在不可扫掠的情形下，回顾一下，根据引理，任意 TCD $\mathcal{T}$ 都是某个可扫掠TCD $\mathcal{T}'$ 的子图

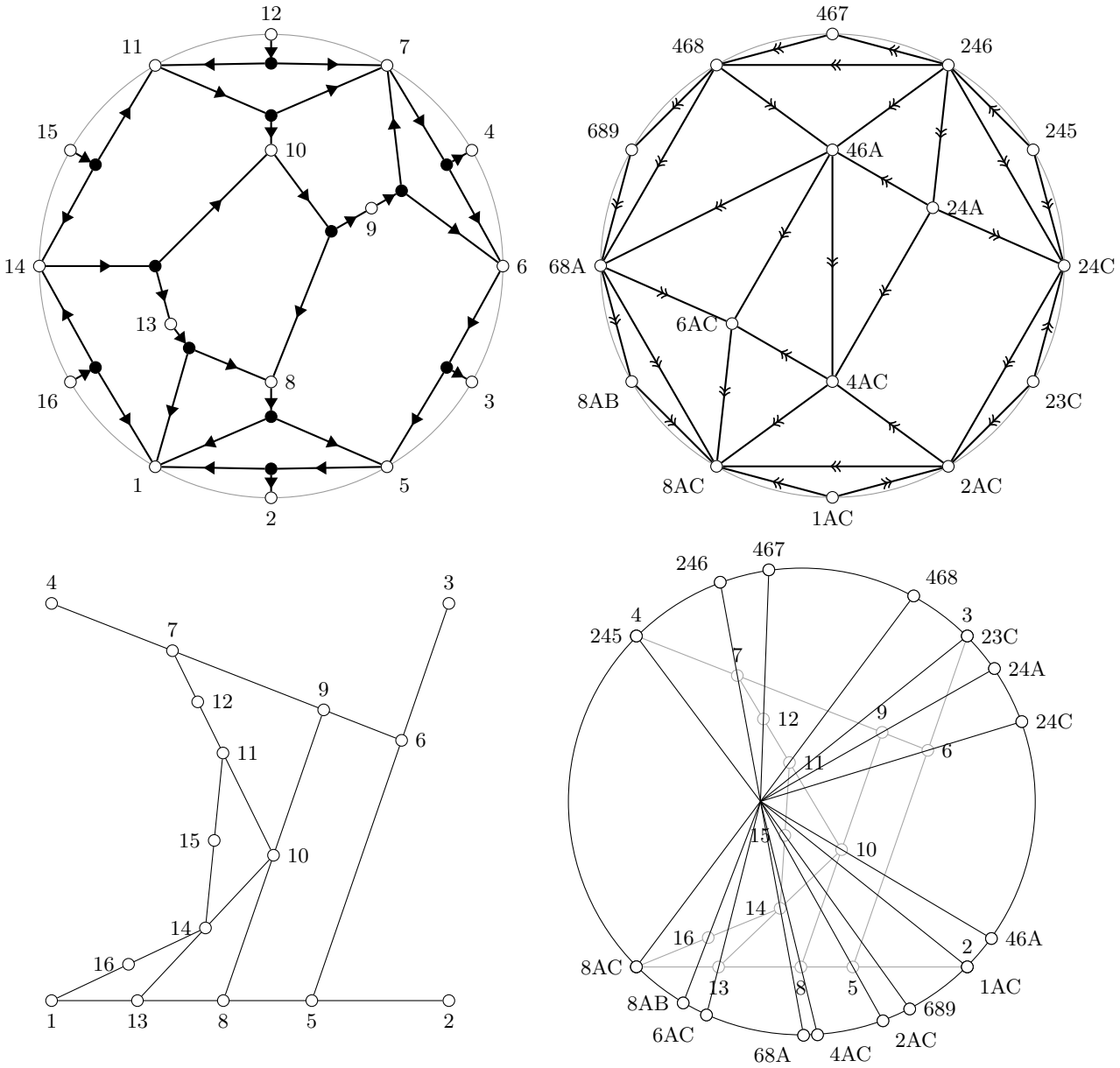


图 5.10。左上：TCD $\mathcal{T}$的 li-定向 $\mathcal{O}$，以及作为 $\mathcal{O}$线性扩张的标记。右上：lr-定向 $G^{\mathcal{LR}}$，以及按$\mathcal{A}'$进行的标记。左下：在 $\mathcal{T}$ 上的 TCD 凸绘图，其变量 X为正。右下：将该凸绘图中心投影到表示$\mathbb{R}\mathrm{P}^1$的圆上。

4.36。因此，可以按照我们所述的方式，为 $\mathcal{T}'$ 构造一个TCD映射 T'。我们可以将 T' 限制到 $\mathcal{T}$，从而得到一个满足该定理假设的TCD映射 T。□

注记5.33。考虑最大维数为 $k > 1$时的定理 5.32。此时，我们可以投影到二维平面 E，而不是投影到直线 ℓ。此外，我们用 E中的凸性取代 ℓ 上的单调性。我们将 $\mathcal{O}$ 的极小元放在一条凸曲线上。在迭代过程中，我们始终将新点放在与迭代序列 M对应的凸曲线的对角线上，见图 5.10。 ℓ 中的两个结果分别与 E 中的结果相关，它们通过从构造算法末端曲线凸包内部的一点出发的中心投影相联系。事实上，观察图 5.10 可以发现，将 TCD 映射投影到 E 所得的确实是我们此前在第 6.3 节中遇到过的映射。■

以下推论涉及我们将在第 6.3 节稍后定义的 T-图。

推论5.34. 设 $T : \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^k$ 是一个达到其最大维数k 且其射影不变量 X 为正的 TCD映射 T。那么，存在一个中心投影 π，将其投影到 $\mathbb{R}\mathrm{P}^k$ 中的一个二维平面 E，以及 E 的一个仿射图，使得 $\pi(T)$ 是一个单侧 T 图。■

证明。直接由定理 5.32和注记5.33得出。每当我们将一个白色顶点 v 放置在 E中时，就截去一个半空间 H_v。与 v 相邻的黑色顶点所对应的其他线段不能进入这些半空间。此外，根据构造，（开）线段彼此不相交。□

然而，并非每个T-图都具有正的射影不变量。例如，可以在图 6.2中看到一个T-图，其中有若干个面，其带有内部点的边界边数量不是奇数。尽管如此，我们仍然能够在第 6.3 节中对更大的T图类使用构造算法。

注记5.35。请注意，另有一个结果 [**AGPR19**] 涉及具有给定不变量和TCD的TCD映射的唯一性。该结果表明：如果一个达到最大维数、具有给定射影不变量且其所有边界顶点均已指定的TCD映射存在，那么它是唯一的。从本节结果的角度来看，指定全部边界似乎限制性过强。然而，对于达到最大维数的TCD映射的模空间，我们仍缺乏精确的理解，尤其是在不变量为实非正（甚至为复数），或TCD不可扫描（或非极小）的情况下。读者可以验证，对于许多TCD，任意一组不变量都能被唯一实现（在射影变换意义下，且在最大维数中）。然而，这对于所有TCD是否成立仍然令人怀疑，尽管我们尚未找到反例。■

注 5.36. 我们还要指出，另有一种构造算法，它更接近 Kenyon 和 Sheffield[KS04] 引入的 T-图构造（见第 6.3 节）。同样，我们要寻找一种方法，为给定的 TCD $\mathcal{T}$ 和 n 以及指定的射影不变量 X' 构造 TCD 映射 T： $\mathcal{T} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$。我们将问题分成两部分。首先，解决规范问题。也就是说，我们为 VRC R 的关系构造边权重，使得从 R 读出的射影不变量 X 与 X' 相符。考虑 $\mathcal{G}$ 的对偶$\mathcal{G}^*$，以及 $\mathcal{G}^*$ 的一棵有根生成树 $\mathcal{S}$，其根为外面。假设 $\mathcal{S}$ 的所有边都朝向根定向。对于每条满足 $e^* \notin \mathcal{S}$ 的边 e，将 R 中对应的边权重设为 1。现在从 $\mathcal{S}$ 的一个叶子 f 开始（f 是 $\mathcal{G}$的一个面），并考虑唯一的出边 $e^* \in \mathcal{S}$。由于我们位于一个叶子处，这就是 $\mathcal{S}$ 中 f 边界上的唯一一条边，因此存在唯一的边权重，使得 e^* 的面 f 上的射影不变量 X 与指定值 X' 相符。随后在 $\mathcal{S} \setminus \{f\}$ 上重复此过程，并不断迭代，直到为所有边指定边权重。每一步中的权重都是唯一的，因为每个面都只有一条离开的边。现在，任取 $\mathcal{G}$ 的一个无环完美定向 χ。此处的完美定向采用 Postnikov [Pos06] 的定义，即每个黑色顶点有一条入边，每个白色顶点有一条出边。现在按照定义5.28中的构造算法进行，但用 χ 替换 li-定向。在每一步 (3) 中，当我们添加一个新的白色顶点的点时，该点现在由 R 中对应黑色顶点处的关系确定。■

下面的引理稍后也会用到，但在此处很容易证明。

引理 5.37. 设有一个极小TCD $\mathcal{T}$、一个TCD映射 $T : \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$ 以及一条弦 s。设 $w_1, w_2, \ldots, w_m$是 s右侧的所有白色顶点，并设 U为 s右侧白色边界顶点的像所张成的空间。那么，对于$1 \le i \le m$，每个点 $T(w_i)$ 都属于 U。■

证明。选择一种对 $\mathcal{T}$的标记，使 s 带有标签 1，并考虑 $\mathcal{G}$的 li-定向。于是，在 s上的所有黑色顶点处，li-定向的出边均指向 $\mathcal{T}$的

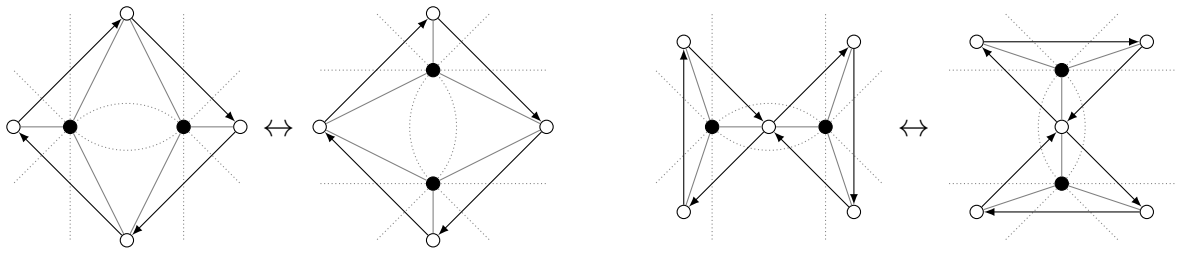


图5.11. 蜘蛛变换前后的仿射箭图（白色顶点和箭头）（左），以及重新分裂前后的仿射箭图（右）。

左侧。因此， s 右侧的任意白色顶点在其下集所看到的极小元都位于 s的右侧。□

5.7. TCD映射的仿射簇结构

定义 5.38. 设 T 为一个TCD映射， μ 为相对于某个仿射图、处于仿射规范下的相关VRC的边权重，并记 H 为该图中的无穷远超平面。假设 H 相对于 T处于一般位置。扩展仿射簇结构 $\mathbf{Aff}_H^{\times}(T)$的箭图顶点位于 $\mathcal{G}$的白色顶点处。两个白色顶点 w之间的箭头数 $\nu_{ww'}$, w' 定义如下:

$$\nu_{ww'} = |\{(w,b,w') : w' \text{ clockwise after } w \text{ around } b \in B\}| \tag{5.25}$$

$$- |\{(w,b,w') : w' \text{ counterclockwise after } w \text{ around } b \in B\}|. \tag{5.26}$$

设 w 为 $\mathcal{G}$ 的一个白色顶点，并引入标签，使得按逆时针顺序排列的邻域为

$$N(w) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \quad \text{and} \quad N(b_i) = (w, w_i, w_i'), \tag{5.27}$$

for 所有与 w相邻的 b_i 。那么仿射簇变量 Y_w 为交错比

$$Y_w = (-1)^{m+1} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mu(b_i, w_i')}{\mu(b_i, w_i)}. \tag{5.28}$$

我们也将仿射簇变量 Y_wa 称为星比。仿射簇结构 $\mathbf{Aff}_H(T)$ 是将扩展仿射簇结构限制在 $\mathcal{G}$ 的内部白色顶点上所得的结构。■

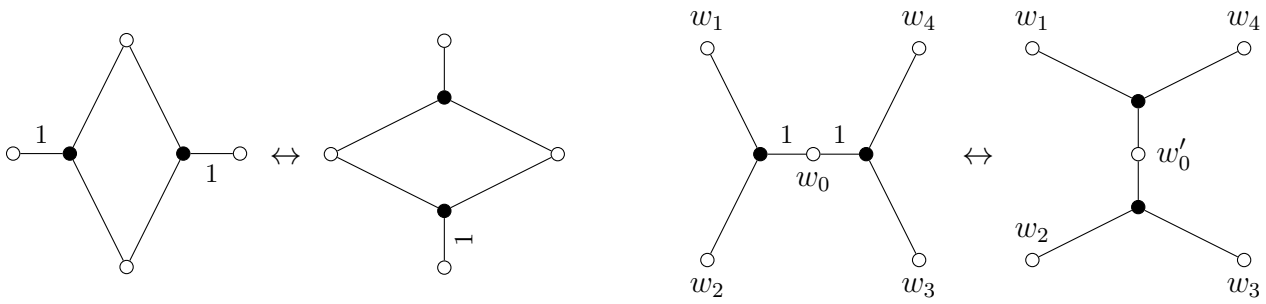
注 5.39. 考虑一个处于仿射规范下的 VRC。回顾一下，对于一个 TCD $\mathcal{T}$，还有定义 4.18，它引入了图 $\mathcal{G}^-$。在 $\mathcal{G}$ 的黑色顶点 b 处，将与 b 相邻的白色顶点和面按照逆时针顺序记为 $w_1, f_3, w_2, f_1, w_3, f_2$。将 $\mathcal{G}$ 中的每条边 (b, w_i) 与 $\mathcal{G}^-$ 中的边 (b, f_i) 对应起来。对于 $\mathcal{G}^-$ 中的一条边，赋予其在 R 中对应的 $\mathcal{G}$ 的边权重的倒数。于是，根据定义， $\mathcal{G}$ 中 w 的星比 Y_w 就是 $\mathcal{G}^-$ 中的 X_f。■

接下来，我们关注 2-2移动对箭图和簇变量的影响。

引理 5.40。重新分裂对应于仿射簇代数中的一次突变，而蜘蛛变换保持仿射簇结构不变（参见图 5.11）。■

证明。边权重的变化见图5.12。对于涉及的四个顶点中的任意一个，蜘蛛变换显然不会改变星比。对于 w_0 处的重新分裂，我们观察到

$$Y_{w_0} = -(1 + a^{-1})(1 + b^{-1}) = \tilde{Y}_{w_0'}^{-1} \tag{5.29}$$



FIG图 5.12. 仿射规范下边权重的变化，其中 $\Delta = -(1+a+b)^{-1}$.

成立。这与射影情形中的表达式相同，同理我们观察到

$$\frac{\tilde{Y}_{w_2}}{Y_{w_2}} = \frac{1}{a\Delta b} = -(a^{-1}+b^{-1}+a^{-1}b^{-1}) = 1+Y_{w_0}. \tag{5.30}$$

其余计算以相同方式进行。 □

在仿射簇变量和射影簇变量中，边权重都成对地出现在与同一个黑色顶点关联的两条边上。因此，我们也可以通过带符号的距离比来表示仿射簇变量，这并不令人意外。

引理 5.41. 设 T 是一个相对于一般超平面 H 处于仿射规范下的 TCD映射。那么，白色顶点 w 处的星比为

$$Y_w = -\prod_{i=1}^{m} \frac{T(w_i)-T(w)}{T(w_i')-T(w)}, \tag{5.31}$$

其中，商是在任意欧几里得图表中的带符号距离商，且 w_i, w_i' 与定义 5.38 中相同。■

证明。引理 2.38 的直接推论。 □

星比是在固定的仿射规范下定义的。仿射规范由在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中选择超平面 H 作为仿射图的无穷远平面所确定。将 H 映射到自身的射影变换就是仿射变换。此外，仿射变换不会改变直线上的有向距离比。因此，称其为仿射簇结构和仿射簇变量是合理的。与射影簇结构的情形一样，我们可以从仿射箭图中恢复 $\mathcal{G}$ 的组合结构，但这次只能恢复到蜘蛛变换的意义下。显然，箭图的顶点对应于 $\mathcal{G}$ 的白色顶点。正如图 5.14 或定义所示，箭图中每个顺时针（黑色）面对应一条直线，该直线由 (d_f-2) 个黑色顶点表示。于是，与箭图中一个黑面相邻的白色顶点所对应的像都位于由该黑面表示的直线上。

引理 5.42. 设 $T : \mathcal{T} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 是一个处于仿射规范下的 TCD映射，并在 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 上选取一个额外的相似结构。借助该相似结构，我们可以定义从方向 $T(w_k) \to T(w_k')$ 到方向 $T(w_{k-1}') \to T(w_k)$ 的逆时针角度 α_k ，以及从方向 $T(w_k') \to T(w_{k+1})$ 到方向 $T(w_k) \to T(w_k')$ 的角度 β_k。那么，白色顶点 w 处的星比 Y_w 等于

$$Y_w = (-1)^{m+1} \prod_{i=1}^{m} \frac{\sin\beta_k}{\sin\alpha_k}. \tag{5.32}$$

因此，可以通过有向角度来表示星比。 ■

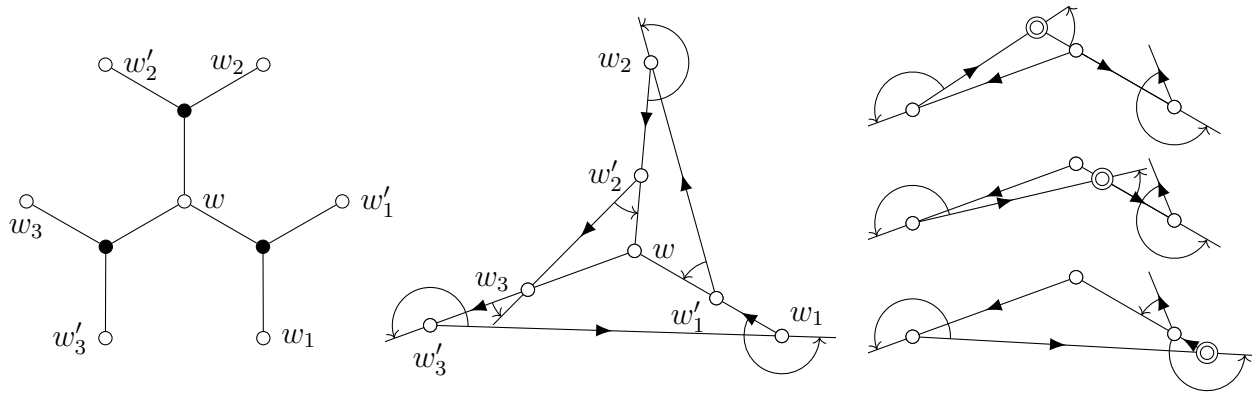


图5.1.3. 如何通过角度表示星比。右图中可以看到，正弦角度乘积的符号会随有向距离比乘积的符号而改变，移动的点已特别标出。

证明。这是引理 5.41 和正弦定理的推论。特别地，正弦定理给出

$$\left|\frac{\sin\beta_{k-1}}{\sin\alpha_k}\right| = \left|\frac{w_k - w}{w'_{k-1} - w}\right| \tag{5.33}$$

成立。为了验证符号正确，我们先考虑所有有向距离比均为正的情形。在这种情况下，每个黑色顶点都会在角度表达式中贡献一个负号，从而证实该结论（另见图5.1.3）。另一方面，每当我们沿着与某个黑色顶点对应的直线移动一个点，直到相应的有向距离比变为负数时，角度表达式中也恰好有一个符号发生改变（见图5.1.3）。□

这个引理给出了一种通过角度表示赋予 TCD映射的簇变量的方法。因此，这也提出了一种可能性：由角坐标描述的可积系统实际上与某个 TCD映射的仿射簇结构相关。事实上，我们在第 9.2 节采用这一观点，为圆形 Q网引入一种基于角度的簇结构，该结构与 Bazhanov、Mangazeev 和 Sergeev 的处理方法相关 [BMS08]。

备注 5.43. 射影箭图和仿射箭图以类似的方式从三重交叉图得到。特别地，图 $\mathcal{T}$ 的仿射箭图恰好是 TCD 对偶 $\iota(\mathcal{T})$ 的射影箭图（见定义 4.59）。给定一个 TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，因此可以思考是否实际上存在第二个 TCD映射 $T'\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}' \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，使得 T' 中的射影簇结构和仿射簇结构互换。为了处理这个问题，我们首先需要考察簇结构在截面和射影对偶下的行为，不过我们将在第 6.5 节对此问题作进一步说明。■

来考察我们的标准 DDG 示例，见图 5.14。这次我们注意到，达布映射和直线复合体都具有立方八面体箭图，而 Q网则具有六面体箭图。与射影箭图的情形一样，这两个立方八面体箭图的定向并不相同。注意，在阶梯曲面的情形下，直线复合体的仿射箭图也是立方八面体箭图，但对于一般的四边形图则并非如此。

注记 5.44。我们给出了一个由十一个 2-2 移动组成的序列，它对应于图 2.5 中一个 Q-网的立方体翻转。不过，如果翻转立方体，使得翻转后四边形图中的黑色顶点和白色顶点互换角色，那么就有一个更短的序列，只包含十个 2-2移动，见图 5.15。这些 2-2 移动中有四个是蜘蛛移动，对应于截半立方体翻转的四次突变，见定义 5.11。这些 2-2 移动中有六个是

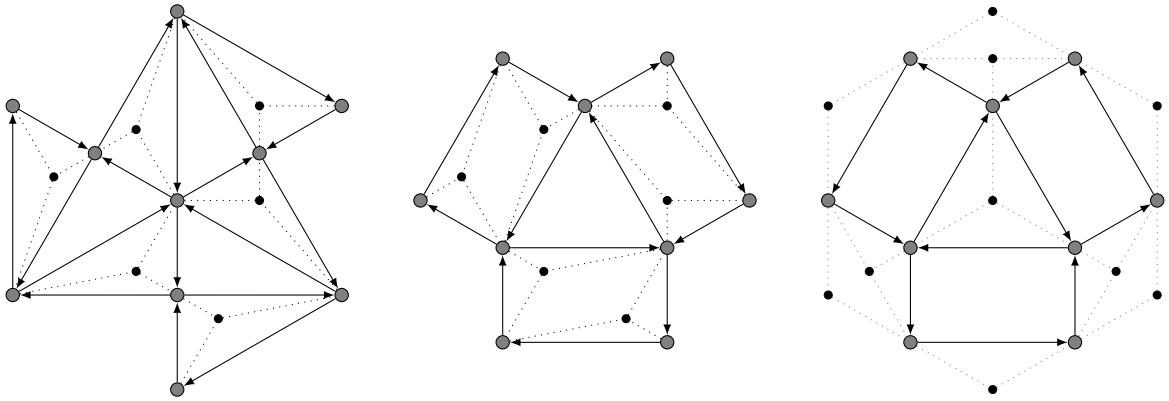


图 5.14。Q-网、达布映射和直线复合体对应的仿射箭图（箭头和灰色顶点）。图 $\mathcal{G}$ 以点线绘制。我们可以辨认出六面体箭图、立方八面体箭图和反向截半立方体箭图。

重新分裂，对应于六面体箭图中的六次突变。这是六面体翻转的简化版本，见定义 5.13；在该翻转中，四边形图中黑色顶点和白色顶点的作用也会互换。因此，TCD 翻转分解为立方八面体翻转和六面体翻转的组合。■

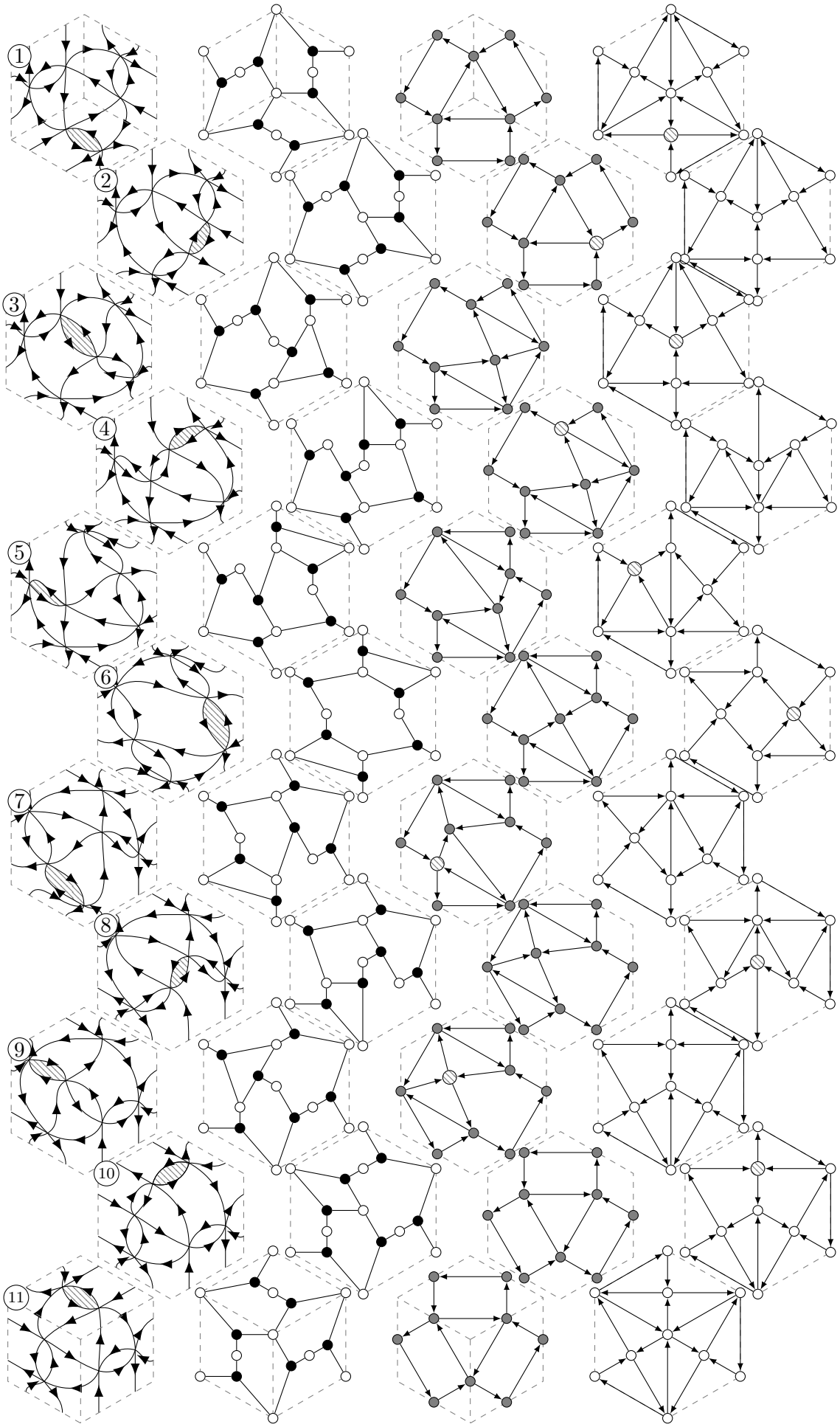


图5.15。Q-网中立方体翻转的 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{G}$、投影及仿射箭图序列。

第6章

簇结构与射影运算

6.1. TCD映射的簇变量与投影

如前所述，射影簇变量在射影变换和中心投影下均保持不变。另一方面，仿射簇变量一般不在中心投影下保持不变，但也有例外。在继续之前，让我们再给出一个一般性定义，以便精确描述投影。

定义 6.1. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 为一个 TCD映射。若不存在 $P \in L(b)$ 这样的 b 黑色顶点，$P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 就称为共一般。■

定理 6.2. 设 $T\colon \mathcal{T} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ with $n > 1$ 是一个 TCD 映射，设 H 是一个超平面，设 $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus H$ 是一个余一般点。设 $\pi\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to H$ 是以 P 为中心到 H 的投影。那么

$$\mathbf{Pro}(\pi(T)) = \mathbf{Pro}(T) \tag{6.1}$$

成立。此外，设 E 是包含 P 的超平面，使得 E 相对于 T 是 1-一般的，且 $E \cap H$ 相对于 $\pi(T)$ 是 1-一般的。如果 T 和 $\pi(T)$ 是 1-一般的，那么

$$\mathbf{Aff}_{H\cap E}(\pi(T)) = \mathbf{Aff}_E(T) \tag{6.2}$$

也成立。 ■

证明。 P 的余一般性保证了 $\pi(T)$ 的 0-一般性，从而保证其良定义性。定理中的第一个等式源于多重比以及由此得到的射影簇变量在中心投影下的不变性，见引理 2.37 和 5.16。对于第二个等式，考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的仿射坐标，其中 E 是无穷远超平面。此时，投影 π 实际上是平行投影。请记住，我们可以像引理 5.41 中那样，将星比视为由距离比给出。但由于一条直线上三点的距离比在平行投影下保持不变，星比也保持不变，因此第二个等式也得证。□

6.2. TCD映射的簇变量与截面

在第4.2节中，我们研究了TCD映射截面的几何与组合结构。现在，我们希望基于这些结果，研究截面的簇变量的行为。特别地，我们将证明，TCD映射的仿射簇结构可以与该TCD映射某个截面的射影簇结构相对应。

引理 6.3. 设 T 是一个 1-一般 TCD 映射， w 是 $\mathcal{G}$ 的一个白色顶点。对靠近 w 的顶点，采用与定义 5.38 相同的标记。设 H 是一个一般超平面， Y 是 **仿射簇** $_H(T)$ 的仿射簇变量。设 $\ell_k = T(w)T(w_k)$ 是 w 周围的直线，并用 $S_k = \ell_k \cap H$ 表示 ℓ_k 上的第四点。那么，相对于 H ，我们可以将星比 Y_w 表示为

$$Y_w = \prod_k \mathrm{cr}(T(w), T(w_k), S_k, T(w'_k)). \tag{6.3}$$

■

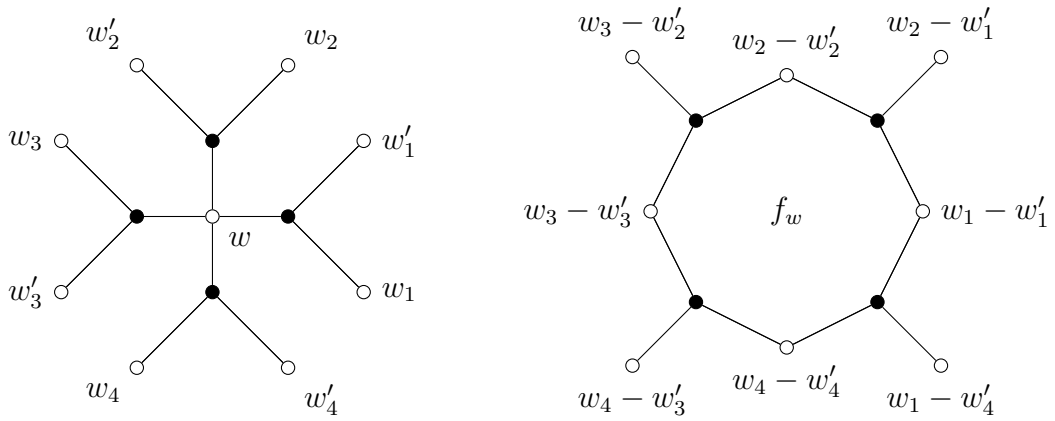


图 6.1。 R 和 $\sigma_H(R)$中的边权，如定理 6.4 的证明中所使用。未标注的边权重为 1。

证明. 选取仿射坐标，使 H 位于无穷远处。于是，距离 $|T(w_k) - S_k|$ 和 $|T(w_k') - S_k|$ 都是无穷大，因此

$$\mathrm{cr}(T(w), T(w_k), S_k, T(w_k')) = \frac{T(w_k) - T(w)}{T(w_k') - T(w)} \tag{6.4}$$

成立。结合引理 5.41，证明完成。 □

我们注意到，引理中出现的附加点实际上就是截面 $\sigma_H(T)$中的点。因此得到如下定理。

定理 6.4。设 $\mathcal{T}$ 为一个极小TCD， $T : \mathcal{T}_\circlearrowleft \to \mathbb{C}\mathbf{P}^n,\ n > 1$ 为一个1-一般且翻转一般位置的TCD映射， H 为一个一般超平面。则有恒等映射

$$\mathbf{Pro}(\sigma_H(T)) = \mathbf{Aff}_H(T). \tag{6.5}$$

■

证明。我们此前已经注意到（在第4.2节中）， $\mathcal{G}$ 的白色顶点与 $\sigma_H(\mathcal{G})$的面一一对应，内部白色顶点也与内部面一一对应。当然，这是定理在组合层面成立的必要条件，并使我们能够针对 $\mathcal{G}$的每个白色顶点 w 证明定理。设 w的度为 m 。记 $\sigma(\mathcal{G})$中与 $\mathcal{G}$中的 w 对应的面为 f_w 。我们可以在 T中进行蜘蛛移动，并在 $\sigma_H(T)$中进行重新分裂，而不影响定理的陈述。因此，再考虑到 $\mathcal{T}$的极小性，我们可以假设已经在 T 中进行了一系列蜘蛛移动，使得不存在与 w关联的四度面。注意，蜘蛛移动不会影响1-一般性。在 $\sigma_H(T)$中，对于每条直线 $T(w_k)T(w_k')$，都有一个白色顶点 $\bar{w}_k$；对于每条直线 $T(w_k')T(w_{k+1})$，我们也选取白色顶点 $\bar{w}_k'$。注意，我们可以在 $\sigma_H(T)$中应用重新分裂，从而改变截面的选择，因为由于 T的1-一般性，所有截面都定义良好。记 T 的VRC为 R，见2.24。假设我们为 $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ 选取仿射坐标，其中 H 位于无穷远处，则 $\sigma_H(R)$中的白色顶点 $\bar{w}_k$、 $\bar{w}_k'$ 表示为

$$\sigma_H(R)(\bar{w}_k) = R(w_k) - R(w_k') \text{ and } \sigma_H(R)(\bar{w}_k') = R(w_{k+1}) - R(w_k'), \tag{6.6}$$

对于 $k = 1$、2、.....、 m。选择 R 的边权重，如图 6.1 左侧所示。它们对应的关系

$$R(w) + \lambda_k R(w_k) = (1 + \lambda_k) R(w_k'). \tag{6.7}$$

另一方面，在截面 $\sigma_H(R)$ 中，我们声称可以像右侧图 6.1 那样局部选取边权重。 $\sigma_H(T)$ 中对应的关系为

$$\lambda_k(R(w_k) - R(w_k')) + (R(w_{k+1}) - R(w_k')) = (1 + \lambda_{k+1})(R(w_{k+1}) - R(w_{k+1}')), \tag{6.8}$$

$k = 1, 2, \ldots, m$。 $\sigma_H(R)$中的关系成立，因为它们等价于 R中两个关系之差。现在我们可以读出 $\sigma_H(R)$和 R的边权重，可见 f_w周围的多重比就是 T 中 w 处的星比，因此定理得证。□

还有一种证明方法，其中涉及 $\deg(w)$ 个梅涅劳斯构型。还请注意，在组合层面，扩展射影簇结构与仿射簇结构之间也存在一种关系。令 T 的扩展仿射箭图为 $\mathcal{Q}^{\times}$，令 $\sigma(T)$ 的扩展射影箭图为 $\mathcal{Q}_{\sigma}^{\times}$。那么实际上

$$\mathcal{Q}_{\sigma}^{\times} = \Upsilon^{+}(\mathcal{Q}^{\times}) \tag{6.9}$$

成立，其中 $\mathcal{Q}_{\sigma}^{\times}$ 改变边界处的箭头，见定义 5.7。然而，在几何层面，似乎不可能识别这些扩展簇结构，除非固定一些额外数据，因为 $\sigma(T)$ 的边界面上的射影簇变量在 H 位于无穷远处时，并非 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的仿射变换不变量。

引理6.5. 设 $\mathcal{T}$ 是一个极小TCD $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n,\ n > 1$ 是一个2-一般TCD映射，且 E, E' 是两个一般超平面。考虑两个截面 $\sigma_E(T)$ $\sigma_{E'}(T)$，其对应的TCD满足 $\sigma_E(\mathcal{T}) = \sigma_{E'}(\mathcal{T})$。假设 $H = E \cap E'$ 相对于两个截面都是1-一般，并且$\sigma_{E'}(\sigma_E(\mathcal{T})) = \sigma_E(\sigma_{E'}(\mathcal{T}))$。若 $\dim H > 0$，则

$$\mathbf{Pro}(\sigma_H(\sigma_E(T))) = \mathbf{Pro}(\sigma_H(\sigma_{E'}(T))) \tag{6.10}$$

成立。此外，对于 $\dim H \geq 0$，成立

$$\mathbf{Aff}_H(\sigma_E(T)) = \mathbf{Aff}_H(\sigma_{E'}(T)). \tag{6.11}$$

■

证明。第一个结论直接由引理4.15得出，该引理表明$\sigma_{E'}(\sigma_E(\mathcal{T})) = \sigma_E(\sigma_{E'}(\mathcal{T}))$。第二个结论由第一个结论推出，因为除 $n = 2$这一情形外，定理 6.4 在所有情况下均适用；而 $n = 2$意味着 H 是一个点，因此我们无法将仿射簇结构$\mathbf{Aff}_H$与射影簇结构$\mathbf{Pro}(\sigma_H)$等同起来。不过，如果 $\sigma(\mathcal{T})$的最大维数大于 1，我们可以利用引理 4.45构造一个 T，将$\sigma(T)$提升到维数大于 1的空间。根据定理 6.2，我们可以将 $\sigma_H(T)$的仿射簇结构与$\hat{T}$ 相应截面的射影簇结构等同起来，然后应用其他情形中的相同论证。如果 $\sigma(\mathcal{T})$的最大维数为 1，那么仿射箭图中没有箭头，因此无需证明。□

在某些一般位置假设下，我们现在已经建立了一种通过射影簇结构来解释每一种仿射簇结构的方法，但 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的情况除外。当然，这仅适用于未达到最大维数的 TCD映射。对于最大维数的情形，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中 TCD映射的仿射簇结构实际上是平凡的。此外，我们将在第 6.4 节中，为具有一维子空间的截面给出一种射影解释，并在其中研究射影对偶的簇结构。值得注意的是，复直线中的仿射簇结构尤其值得关注。事实上，在第10章中，我们将证明，正是 $\mathbb{C}$ 中的仿射簇结构，在近期的研究中被用于定义统计模型的嵌入。

注6.6. 考虑定义在可扫描TCD $\mathcal{T}$上的 TCD映射 T。如第 4.5 节所述，可以通过扫掠将射影簇变量与仿射簇变量联系起来。更˜确切地说，存在一个包含 $\mathcal{T}$作为子图的 TCD $\mathcal{U}$，以及一个包含 $\sigma(\mathcal{T})$˜作为子图的 TCD $\mathcal{U}$，使得这两个 TCD $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}$ 可通过一系列突变相互关联。˜ ˜此外，还存在两个定义在 $\mathcal{U}, \mathcal{U}$上的 TCD映射 U，U，它们各自的限制分别为 T和 $\sigma(T)$。因此，射影簇变量 $X(T)$以及仿射簇变量 $Y(T) = X(\sigma(T))$，都可以表示为定义在 $\mathcal{U}$上的 TCD映射 U 的所有射影簇变量的函数。当然，如果截面 $\sigma(\mathcal{T})$再次是可扫描的，这个过程便可以重复。下面考虑一个基本例子：唯一的 TCD $\mathcal{T}_{n-1}^{n}$

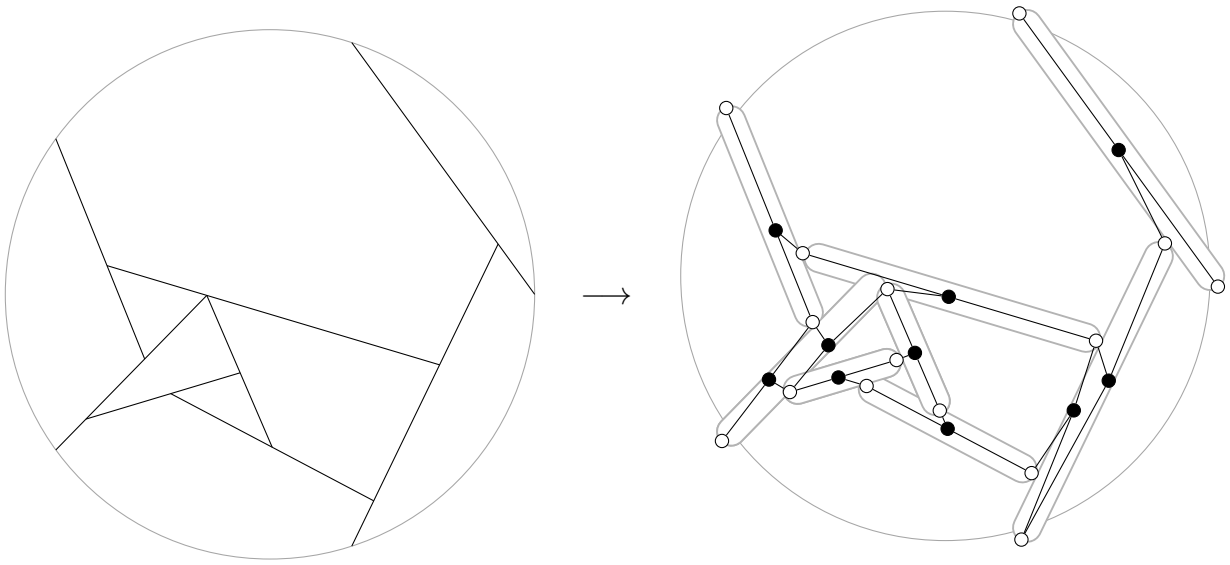


图 6.2。左侧是一个单侧 T 图。每条线段 L_v 都扩展为一个圆盘 C_v（灰色），由此得到图 $\mathcal{G}$（黑白相间）。

其端点匹配为 $\mathcal{S}_{-1}^n$。那么，存在一个 TCD映射 $T_{n-1}^n : \mathcal{T} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$，它表示一般位置的$n$ 个点。现在可以添加一条长度为 $n-1$的扫描弦，然后添加一条长度为 $n-2$ 的扫描弦，如此继续，直到最后一条长度为 1 的弦。将添加了所有弦后的 TCD 记为 $\mathcal{U}^{\cup}$，并将 $\mathcal{T}_{n-1}^n$ 的第 i 个截面记为 $\mathcal{T}_{n-i-1}^n$。那么，对于每个满足 $0 \le i \le n$ 的 i，都存在 $\mathcal{U}^{\cup}$ 的一次突变，使得 $\mathcal{T}_{n-1}^n$ 是 $\mathcal{U}^{\cup}$的子图。因此，所有截面中出现的射影变量，都是定义在 $\mathcal{U}^{\cup}$上的 TCD映射的射影变量的函数。通过计数可以证明，整个 $\mathcal{U}^{\cup}$ 上的变量数为 $\binom{n-1}{2}$。然而，所有截面中出现的变量总数为 $\binom{n-1}{3}$。因此，对于 $n > 5$，截面中出现的变量比包含它们的 TCD $\mathcal{U}^{\cup}$中的变量更多。这说明，截面中出现的簇变量之间必定还存在其他关系。若能理解这些关系，将会非常有意思。这仍是一个开放问题。■

6.3. T图

T图由 Kenyon 和 Sheffield [**KS04**] 引入，用于研究二部平面图、平面马尔可夫链与凸多边形铺砌之间的关系。本节将说明，考察某些一般位置的 T图时，我们可以将 T图的关联关系表示为 TCD映射；此外，T图上已知的簇结构[**KS04**] 与相应 TCD映射的仿射簇结构一致。

定义 6.7。设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 与一个闭圆盘同胚。设 $L = (L_1,\ L_2,\ \ldots\ldots,\ L_m)$ 是一组两两不相交的开线段，使得 $\partial D \cup (\cup_i L_i)$ 是连通且闭的，并且 $\cup_i L_i$ 包含于 D。我们将*T*-图 $G_{\mathrm{T}} = (V,\ E,\ F)$定义为，其中

(1) V 是线段端点的集合，(2) E 若 v, v' 在线段上连续出现，则包含 (v, v')，(3) F 是 $D \setminus (\cup_i L_i)$中的圆盘集合。

∂D 中的顶点称为边界顶点，其余顶点称为内部顶点。对于每个内部顶点 v，将包含 v 且 v 位于其内部的线段记为 L_v。■

如果我们在定义中加入一个条件，那么 T-图就可以表示为 TCD映射。

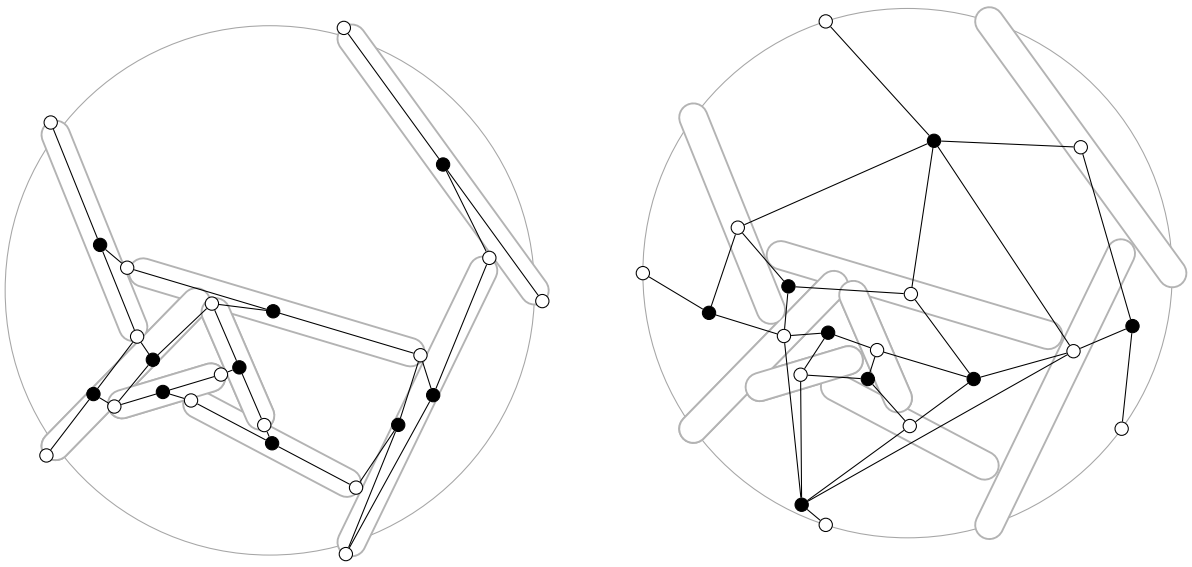


图 6.3。左侧是 T-图的 VRC（灰色）。右侧的 G_{D} 也是左侧 VRC 的截面。

定义 6.8. 设 G_{T} 为一个 T-图。如果我们可以为 G_{T} 的每个内部顶点 v 分配一个半空间 $H_v \subset \mathbb{R}^2$，使得 $L_v \subset H_v$，并且对于每条线段 L_i 和每个内部顶点 $v' \in \partial L_i$，都有 $L_i \subset H_{v'}$，则称 G_{T} 为单侧 *T* 图。■

因此，如果我们考察单侧 T 图中的一个内部顶点 v，那么终止于 v 的其他线段只能位于 L_v的一侧，而不能分居两侧。另请注意，对于所有内部顶点 v，H_v 实际上是唯一确定的。我们可以将单侧性视为一种一般位置约束，因为一个不具单侧性的顶点可以看作多个单侧顶点的极限情形。

下面说明如何将 TCD映射 T 与单侧 T 图 G_{T}关联起来。首先，移除 G_{T} 中所有不包含顶点的线段。如果剩下的内部顶点中，有些不在任何线段的边界上，也将它们移除。然后，将每条剩余线段 L_v 加厚，使其成为一个圆盘 C_v，见图 6.2。对于 G_{T} 的每个顶点，在 $\mathcal{G}$中添加一个白色顶点 w_v，使新顶点 w_v 位于 $\partial C_v \cap H_v$中离 v最近的点上。现在，每个圆盘 C_v 的边界上都有 j_v 个白色顶点。我们在 C_v 内部添加$j_v - 2$ 个黑色顶点，并添加边，从而得到一个对应于 TCD 的图，其中每个圆盘 C_v内都有 $\mathcal{S}_1^{j_v}$个端点匹配。TCD映射 T 只需将每个白色顶点 w_v 映射到 $v \in \mathbb{R}^2$。每个圆盘 C_v 中的图块体现了相应白色顶点共线于 $\mathbb{R}^2$这一事实。G_{T} 具有单侧性这一条件，保证我们能够将白色顶点放置在每个圆盘 C_v 的边界上，从而确实可以将$\mathcal{S}_1^{j_v}$图块拼接成 C_v。如果 G_{T} 不具单侧性，我们仍可通过向 $\mathcal{G}$添加足够多的黑色顶点来捕捉G_{T} 中顶点的直线关联，但 $\mathcal{G}$ 将不再是平面图。

接下来，我们想将二分图 $\mathcal{G}$ 与 Kenyon 和 Sheffield 得到的二分图 G_{D} 进行比较。

定义 6.9。设 G_{T} 为一个 T-图。通过为 T-图的每条线段 L_i 添加一个白色顶点 w_i，并为 G_{T}的每个面 f 添加一个黑色顶点 b_f，定义共面二分图 G_{D}（另见图 6.3）。若 L_i 与 f 在 G_{T}中关联，则在 G_{D} 中的 w_i 和 b_f 之间添加一条边 e。■

请注意，为了与我们的惯例更加一致，我们在定义 6.9 中将黑色和白色进行了互换，这与 Kenyon 和 Sheffield 给出的定义不同。

引理 6.10. 设 G_{T} 为单侧 T 图，T 为其关联的 TCD映射。那么存在一种 $\sigma(\mathcal{G})$ 的选取，使得若我们在 $\sigma(\mathcal{G})$ 中收缩所有二价白色顶点，则 G_{D} 两个图重合。■

证明。设 $G_{\mathrm{T}}{}'$ 为移除了所有不包含顶点的线段后的 T-图 G_{T}。根据定义，$\sigma(\mathcal{G})$ 中每条 $G_{\mathrm{T}}{}'$ 的线段都对应一个白色顶点。$\sigma(\mathcal{G})$ 中所有其他白色顶点的度数均为二，因此会被收缩移除。同样根据定义，G_{D} 中 G_{T} 的每条线段都对应一个白色顶点，而属于 G_{T} 但不属于 $G_{\mathrm{T}}{}'$ 的线段所对应的白色顶点会被收缩移除。因此，$\sigma(\mathcal{G})$ 与 G_{D} 的白色顶点集合相同。此外，$\sigma(\mathcal{G})$ 收缩后，$G_{\mathrm{T}}{}'$ 的每个面都对应一个黑色顶点。另一方面，G_{D} 的每个面都对应一个黑色顶点。然而，收缩会将 G_{T} 中仅被不属于 $G_{\mathrm{T}}{}'$ 的线段隔开的面连接起来。因此，$\sigma(\mathcal{G})$ 与 G_{D} 的黑色顶点集合也相同。显然，边也相同，因此命题得证。□

注 6.11。请注意，这里存在一种有趣的现象。我们将 T-图的讨论限制在单侧 T 图的范围内，是因为我们需要 $\mathcal{G}$ 是共面的。然而，从几何角度来看，即使 $\mathcal{G}$ 不是共面的，定义 $\sigma(\mathcal{G})$ 也是直观可行的。而且，T-图的情形表明，即使 $\mathcal{G}$ 不是共面的，$\sigma(\mathcal{G})$ 也可以是共面的。因此，很可能还存在其他一些系统，对于这些系统，无法将平面图 $\mathcal{G}$ 与系统关联起来，但系统的某个（可能经过多次迭代的）截面可能存在一个平面图。■

Kenyon和Sheffield定义了一种与T-图 G_{T} 相关联的二聚体模型。由于我们仅在第 7.2 节中介绍二聚体模型，因此我们直接将 Kenyon 和 Sheffield 的定义转换为簇结构。

定义 6.12. 设 G_{T} 为一个 T-图，G_{D} 为定义 6.9 中的图。根据 G_{D} 的定义，G_{D} 的每条边都对应于一对 $(f_e,\ L_e)$，其中 f_e 是 G_{T} 的一个面，L_e 是 G_{T} 的一条线段。为 G_{D} 的各条边赋予边权 ω_e，使得对于每条边 $e=(f_e,\ L_e)$，ω_e 等于线段 L_e 在 G_{T} 中位于 f_e 边界上的部分的长度。$\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$ 的簇结构 $(\mathcal{Q}_{\mathrm{T}},\ U)$ 的 G_{T} 的箭图，其定义方式与定义 5.14 中为 $\mathcal{G}$ 定义射影簇结构的方式相同。变量 U_f 定义为边权 ω 围绕各个面形成的交错比，即

$$U_f=\prod_{i=1}^{n}\frac{\omega(b_i,w_i)}{\omega(w_i,b_{i+1})}, \tag{6.12}$$

其中 $f\in F(G_{\mathrm{D}})$ 是按逆时针顺序排列的面 $(b_1,\ w_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ w_n)$。■

定理 6.13. 设 G_{T} 是 $\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中一个单侧 T 图，且无穷远处有直线 H，并设 T 是与之关联的 TCD 映射。那么 G_{T} 的簇结构 $(\mathcal{Q}_{\mathrm{T}},\ U)$（见定义 6.12 ）与 T 关于 H 的仿射簇结构一致。■

证明。注意，由于 G_{T}, T 的定义是 1-一般，且 H 关于 T 一般位置。我们可以使用引理 5.41，为 G_{T} 的每个顶点 v 定义仿射簇结构的变量 Y_v。显然，出现的距离对应于定义 6.12 的边权 ω。此外，我们已在定理 6.4 中确立了 T 的仿射簇结构如何对应于 $\sigma_H(T)$ 的射影簇结构。剩下需要检查符号是否正确。显然，所有变量 U_f 根据定义均为正。另一方面，所有星比 Y_v 也为正，因为对于 G_{T} 的每个顶点 v，定义 Y_v 中的负号与沿 L_v 的有向距离比所产生的唯一负号相互抵消。□

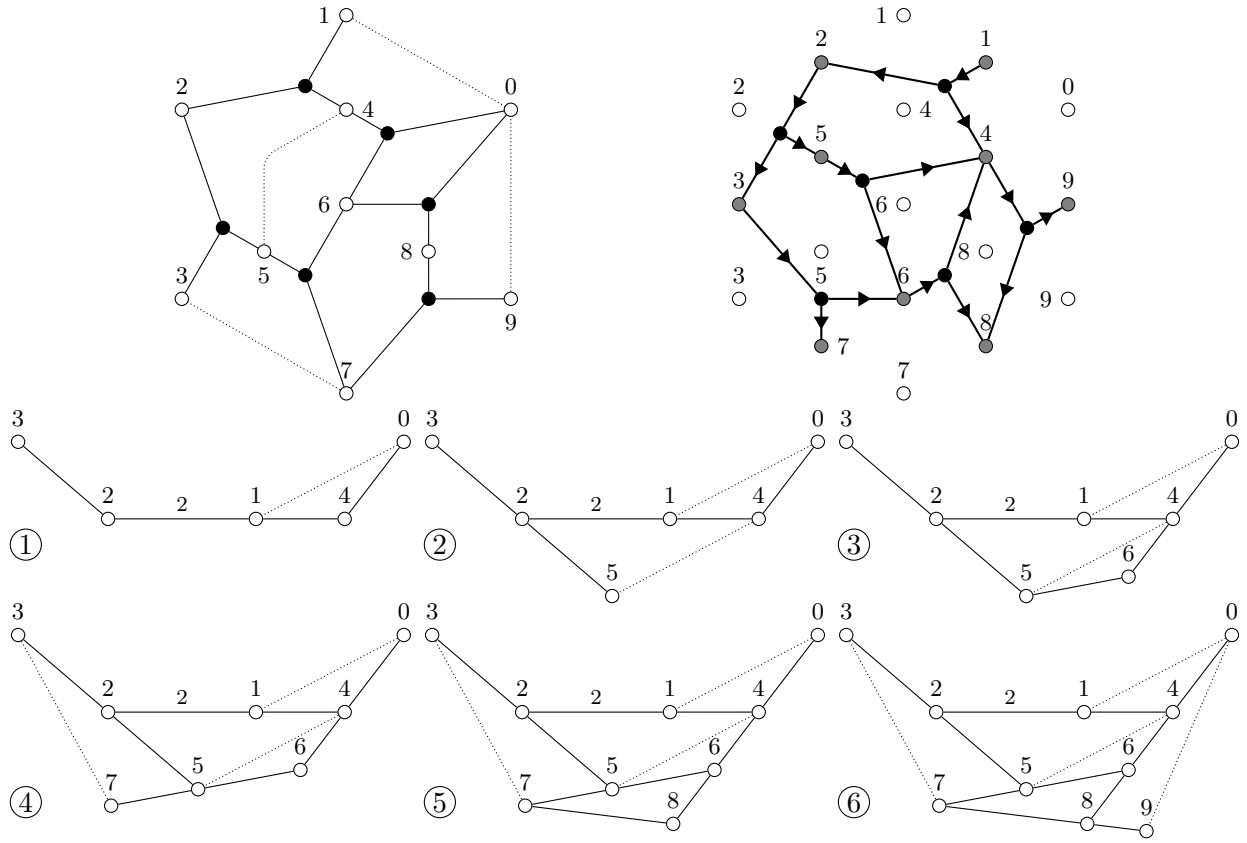


图6.4。左上方是一个 TCD $\mathcal{T}$，以及一条指定对角线和边界线（虚线）。右上方是截面$\sigma(\mathcal{T})$的 li-定向。下方我们逐步从 $\mathcal{T}$构造一个 T图。

对于 TCD 映射，我们已在前面的章节中讨论了如何进行 2-2 移动。我们不作详细探讨，但 T-图也可以进行 2-2 移动。蜘蛛变换对应于与 T-图 G_{T} 对应的 TCD 映射 T 的重新参数化，并且不会影响G_{D}。另一方面，重新分裂对应于 G_{T}的簇结构中的突变；这一事实此前已由 Kenyon和Sheffield 观察到，并且可作为我们关于 T的仿射簇结构的结果的推论得出。不难验证，重新分裂后 T 仍然是一个 T-图。

根据定义，与 T图关联的 TCD映射的仿射簇变量只取正值。人们可能会想，也许 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中所有仿射簇变量均为正的 TCD映射都是 T图，但事实并非如此。不过，若固定组合结构和仿射簇变量的取值，在许多情况下便可能找到相应的 T图。我们先针对相应的 TCD $\mathcal{T}$ 为极小TCD的情形给出这样一个结论，然后也会提及 Kenyon和Sheffield 得出的（更强）结果。

定理 6.14。设 $\mathcal{T}$为一个极小TCD，且 $Y'\colon W(\mathcal{G}) \to \mathbb{R}_+$ 是定义在 $\mathcal{G}$白色顶点上的正函数。那么存在一个 T图 $T\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}^2$，使得仿射簇变量 $Y(T)$满足 $Y(T) = Y'$。■

证明。我们给出一个显式构造。考虑 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$，并令 H 为无穷远直线。由定理 6.4 可知 $Y_E(T) = X(\sigma_H(T))$。我们首先通过定理 5.32 求解问题 $X(\sigma_H(T)) = Y'$。然后只需证明我们可以由 $\sigma_H(T)$ 构造一个 T-图 T。图 6.4 给出了一个例子。首先假设 $\mathcal{T}$ 可扫描，并且我们选定了一个标记。考虑截面上的 li-定向 $\mathcal{O}(\sigma(\mathcal{G}))$。截面的每个白色顶点（图中的灰色顶点）对应一条直线，每个面对应一个点

属于 T-图。此外，在通过定理 5.32 构造 $\sigma_H(T)$ 时，我们在 H 中选取了一个无穷远点，它对应于 $\mathbb{R}^2$ 中一类平行直线的等价类。不失一般性，令该方向为 $\mathbb{R}^2$ 中的竖直方向。 T 中出现的直线方向遵循 lr-序 $\mathcal{LR}(\sigma(\mathcal{G}))$。因此，$T$ 中扫描弦上方的边界线按斜率递增的顺序排列。我们先通过选取 T 中扫描线以上的边界点来构造 T，使相邻点落在由 $\sigma_H(T)$ 预先确定的直线上，并使这些点构成一个凸多边形的边界。由于前述斜率顺序，该多边形朝竖直方向开放。接着，我们沿截面的 li-定向向下遍历，逐步放置 T 的新直线。每一步中，我们从 $\sigma(\mathcal{G})$ 中选取一个尚未选过且极大的白色顶点 w。 $\sigma(\mathcal{G})$ 中与 w 相邻的一个面对应于 T 中一个已放置的点，因此，对应于 w 的 T 中的直线便确定了。与 w 相邻的另一个面 f 并不对应于一个已放置的点。然而， f 有另一个唯一的白色顶点 w'，且该顶点已被选取。因此， T 中对应于 f 的点现在就确定了，它是对应于 w 和 w' 的两条直线的交点。由于直线的排列顺序，对应于 f 的新点必定位于界定我们所构造图形的凸曲线下方。因此，在可扫描的情形下，我们确实可以逐步构造一个没有线段相交的 T-图。由于每个 TCD $\mathcal{T}$ 都是某个可扫掠TCD $\mathcal{T}'$ 的子图，我们可以先对较大的可扫掠TCD $\mathcal{T}'$ 求解问题，再将其限制到 $\mathcal{T}$。□

注 6.15. Kenyon和Sheffield证明了一个比定理 6.14 [**KS04**],更强的定理，因为他们证明，即便对于某些非极小 TCD，也存在 T-图。他们首先解决规范问题（如第 5.6 节所述），然后利用 Kasteleyn 矩阵的可逆性构造一个解。我们认为，本文提出的构造有一个优点：只涉及初等步骤，不需要矩阵演算。不过，对于 T-图而言，排除非极小 TCD 是一种相当严格的限制，因为许多自然的 T-图示例都是非极小的。另一方面，并非每个非极小 TCD 都能实现为 T-图。不可实现的 T-图已通过所谓的 k-割集 [**KS04**] 予以刻画。理解 k-割集与 TCD 极小性之间的确切关系将会很有意义。此外，一个有趣的问题是：通过选择 li-定向的适当推广，我们给出的使用 li-定向的构造算法是否可能推广到所有 T-图。如果这种推广存在，那么我们预计，非极小情形下相应的构造算法将涉及一些局部自由度，而这些自由度无法预先通过边界上的选择来确定。 ■

6.4. TCD映射的簇变量与射影对偶

在第 4.7 节中，我们介绍了一种描述 TCD映射与射影对偶之间几何关系和组合关系的方法。至此，我们已经了解了相关箭图，因此可以在下一个引理中提出如下观察。回顾一下，ρ 和 Υ^- 分别如定义 5.5 和定义 5.7 所定义。

引理 6.16. 设 $\mathcal{T}$为一个 TCD，且 σ（$\mathcal{T}$）为一个截面， η（$\mathcal{T}$）为 $\mathcal{T}$的直线对偶，使得ι（σ（$\mathcal{T}$））$=\sigma$（η（$\mathcal{T}$）），见引理 4.61。设$\mathcal{Q}_\sigma^\times$为 σ（$\mathcal{T}$）的扩展仿射箭图，$\mathcal{Q}_\eta^\times$为 η（$\mathcal{T}$）的扩展仿射箭图。则我们断言 $\mathcal{Q}_\eta^\times=\Upsilon^-$（$\rho$（$\mathcal{Q}_\sigma^\times$））。类似地，设 $\mathcal{Q}_\sigma$ 为 σ（$\mathcal{T}$）的仿射箭图， $\mathcal{Q}_\eta$ 为 η（$\mathcal{T}$）的仿射箭图。则我们断言 $\mathcal{Q}_\eta=\rho$（$\mathcal{Q}_\sigma$）。

■

证明。我们采用引理 4.61 的证明方法来证明这一结论，另见图 4.21。事实上，若给辅助图 **B** 在各面周围赋予一致的定向并消去方向相反的箭头，则 B 会根据一致定向的选择变为 $\mathcal{Q}_\sigma$ 或 $\mathcal{Q}_\eta$。

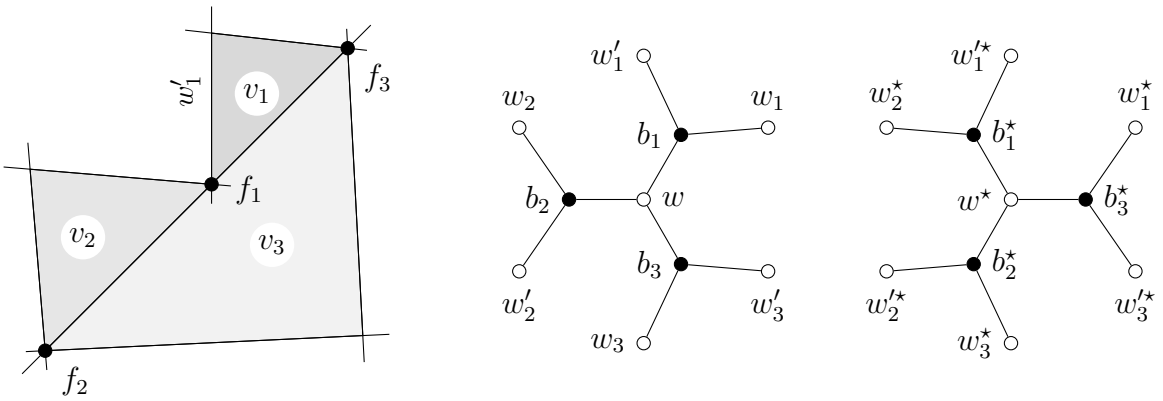


图6.5。 $n = m = 3$ 和 $k = 2$的一个例子。左侧是 T_{k+1}的几何构型图，平面以 $\mathcal{G}_{k-1}$的顶点为标记，直线以 $\mathcal{G}_k$ 的顶点为标记，点以 $\mathcal{G}_{k+1}$的顶点为标记。中间是 w 处的$\mathcal{G}_k$ ，右侧是 $w^\star$处的 $\mathcal{G}_{\bar{k}}^\star$ 。

定向。 σ（$\mathcal{T}$）的黑色面（分别为 η（$\mathcal{T}$））包含一个端点匹配为 $\mathcal{S}_{-1}$（$\mathcal{S}_1$）的 TCD，而白色面包含一个端点匹配为 $\mathcal{S}_1$ （$\mathcal{S}_{-1}$）的 TCD。因此，根据定义 5.38，若将**B** 的白色面定向为顺时针，就会得到 $\mathcal{Q}_\sigma^\times$；但若改为将**B** 的黑色面定向为顺时针，就会得到 $\mathcal{Q}_\eta^\times$，这就证明了该引理。关于非扩展箭图的论断可由限制得到。□

既然我们已经建立了箭图之间的这种对应关系，自然会想知道簇变量之间是否也存在对应关系。下面给出肯定的回答。

定理 6.17。设$(T_k)_{1\le k\le n}$、$(E_k)_{0\le k\le n}$是一个TCD映射旗，$(T_k^\star)_{1\le k\le n}$、$(E_k^\star)_{0\le k\le n}$是其射影对偶旗。假设 $\mathcal{T}$是极小元，且所有TCD映射 T_k， $T_k^\star$都是翻转一般的。那么恒等映射

$$\mathbf{Aff}_{E_{k-1}}(T_k) = \rho(\mathbf{Aff}_{E_{n-k}^\star}(T_{n-k+1}^\star)), \tag{6.13}$$

对 $1 \le k < n$ 成立。 ■

¯证明。为证明这一点，令 $k = n - k + 1$。从组合结构的角度来看，我们有 $\mathcal{T}_k = \sigma(\mathcal{T}_{k+1})$ 和 $\mathcal{T}_{\bar{k}}^\star = \eta(\mathcal{T}_{k+1})$，因此根据引理 6.16， $\mathcal{T}_k$ 和 $\mathcal{T}_{\bar{k}}^\star$ 的仿射箭图相同。我们固定 T_k 的仿射箭图中的一个白色顶点 w ，并将 $T_{\bar{k}}^\star$ 的仿射箭图中对应的白色顶点记为 $w^\star$。我们需要证明 $Y_w Y_{w^\star} = 1$。由于我们假设 T_k 和 $T_{\bar{k}}^\star$ 是翻转一般的，且 TCD 是极小的，因此可以在 T_k 和 $T_{\bar{k}}^\star$ 中应用蜘蛛变换，直到没有四度面与 w 和 $w^\star$ 相邻，同时不改变仿射簇变量。由于仿射箭图相同， w 和 $w^\star$ 的度 m 也相同。我们对顶点进行标记，使得邻域为

$$N(w) = (b_1, \dots, b_m), \qquad N(w^\star) = (b_1^\star, b_2^\star, \dots, b_m^\star), \tag{6.14}$$

$$N(b_i) = (w, w_i, w_i'), \qquad N(b_i^\star) = (w^\star, w_i'^\star, w_{i+1}^\star), \tag{6.15}$$

参见图6.5。我们假设，在此标记中， w_i in $\mathcal{G}_k$ 对应于 $w_i^\star$ in $\mathcal{G}_{\bar{k}}^\star$， w_i'和 $w_i'^\star$对于 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$也依此类推。根据引理 6.3，我们可以将星比 Y_w 表示为交比的乘积，每个交比都对应于一个黑色顶点 b_1， b_2，……， b_m。同理， $Y_{w^\star}$ 也可以表示为对应于黑色顶点 $b_1^\star$，$b_2^\star$，……， $b_m^\star$的交比。证明思路是将每个交比分解为两部分贡献，然后证明 Y_w 中的总贡献与 $Y_w^\star$中的总贡献互为倒数。我们回顾一下，根据引理 4.66，这些子空间映射之间的关系为

$$U_k(w) = (U_{\bar{k}}^\star(w^\star))^\perp, \quad U_k(w_i) = (U_{\bar{k}}^\star(w_i^\star))^\perp, \quad U_k(w_i'^\star) = (U_{\bar{k}}^\star(w_i'^\star))^\perp, \tag{6.16}$$

对所有指标 i均成立。我们将 v_i 记为 $\mathcal{G}_{k-1}$ 中的白色顶点，它在取截面时替代 b_i ；同理，将 $v_i^\star$ 记为 $\mathcal{G}_{\bar{k}-1}$ 中的白色顶点，它替代 $b_i^\star$。采用与引理 4.66 的证明相同的论证，我们可以观察到

$$U_{k-1}(v_i) = \operatorname{span}\{U_k(w), U_k(w_i), U_k(w_i')\}, \tag{6.17}$$

$$U_{\bar{k}-1}^\star(v_i^\star) = (U_k(w) \cap U_k(w_i') \cap U_k(w_{i+1}))^\perp, \tag{6.18}$$

对于所有指标 i。通过引理 6.3，我们得到

$$Y_w = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{cr}(T_k(w), T_k(w_i), T_{k-1}(v_i), T_k(w_i')), \tag{6.19}$$

$$Y_{w^\star} = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{cr}(T_{\bar{k}}^\star(w^\star), T_{\bar{k}}^\star(w_i'^\star), T_{\bar{k}-1}^\star(v_i^\star), T_{\bar{k}}^\star(w_{i+1}^\star)). \tag{6.20}$$

注意，第二个方程中的每个交比都是对偶空间中一条直线上四个点的交比。在原空间中，这四个点对应于四个相交于一个余维二空间的超平面。在射影几何中，通常通过这些超平面在对偶空间中的代表元来定义它们的交比。记 $H_k(w) = \operatorname{span}\{U_k(w), E_{k-2}\}$ 为子空间映射到超平面的“补全”。于是，利用定义 4.64，我们可以写出

$$Y_{w^\star} = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{cr}(H_k(w), H_k(w_i'), H_{k+1}(f_i), H_k(w_{i+1})), \tag{6.21}$$

其中 f_i 是 $\mathcal{G}_{k+1}$ 的白色顶点，取截面后会成为 $\mathcal{G}_k$ 中的面，该面在其边界上有 $w,\ w_i',\ w_{i+1}$。接下来，我们打算重新表示 Y_w，使其与 $Y_{w^\star}$的超平面公式一致。我们选取 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的一个仿射图，使得 E_k 位于无穷远处。上述四个超平面的交比还有一个众所周知的性质：它也等于这四个超平面与一条一般直线的交点的交比。令 $U_k(w_i)$表示平移后的 $\dot{}$ 空间 $U_k(w_i)$，使其包含 $U_{k+1}(f_i)$，并令 $H_k(w_i) =$ 张成空间$\{U_k(w_i), E_{k-2}\}$。那么

$$Y_w = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{cr}(U_k(w), \dot{U}_k(w_i), \operatorname{span}\{T_{k-1}(v_i), U_{k+1}(f_i)\}, U_k(w_i')), \tag{6.22}$$

因为这四个自变量是 $U_{k-1}(v_1)$的四个超平面子空间，它们都包含$U_{k+1}(f_i)$，并且与直线 $L_k(b_i)$ 的交点分别为 $T_k(w)$ $T_k(w_i)$ $T_{k-1}(v_i)$ $T_k(w_i')$，其中 L_k 是 T_k的直线映射（见定义4.51）。考虑与 E_{k-2}的张成空间后，我们得到

$$Y_w = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{cr}(H_k(w), \dot{H}_k(w_i), \operatorname{span}\{T_{k-1}(v_i), E_{k-2}, U_{k+1}(f_1)\}, H_k(w_i')). \tag{6.23}$$

另一方面，张成空间$\{T_{k-1}(v_i), E_{k-2}\} = E_{k-1}$，因此

$$Y_w = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{cr}(H_k(w), \dot{H}_k(w_i), H_{k+1}(f_1), H_k(w_i')). \tag{6.24}$$

这个表达式与公式 (6.21)中的表达式几乎一致，区别仅在于阶-$\dot{}$的顺序不同，且出现的是 $H_k(w_i)$而不是 $H_k(w_i)$。然而，在我们选择的仿射图中，$H_k(w_i)$和 $H_k(w_i)$属于同一类平行超平面，而代表元的选择不会影响交比。此外，项的顺序不同解释了为什么是 $Y_w Y_{w^\star} = 1$ 而不是 $Y_w = Y_{w^\star}$。因此，所述结论得证。□

当然，只要定理 6.17 等式两边都不涉及零维对象，该定理也可以改述为关于射影簇结构的结论。

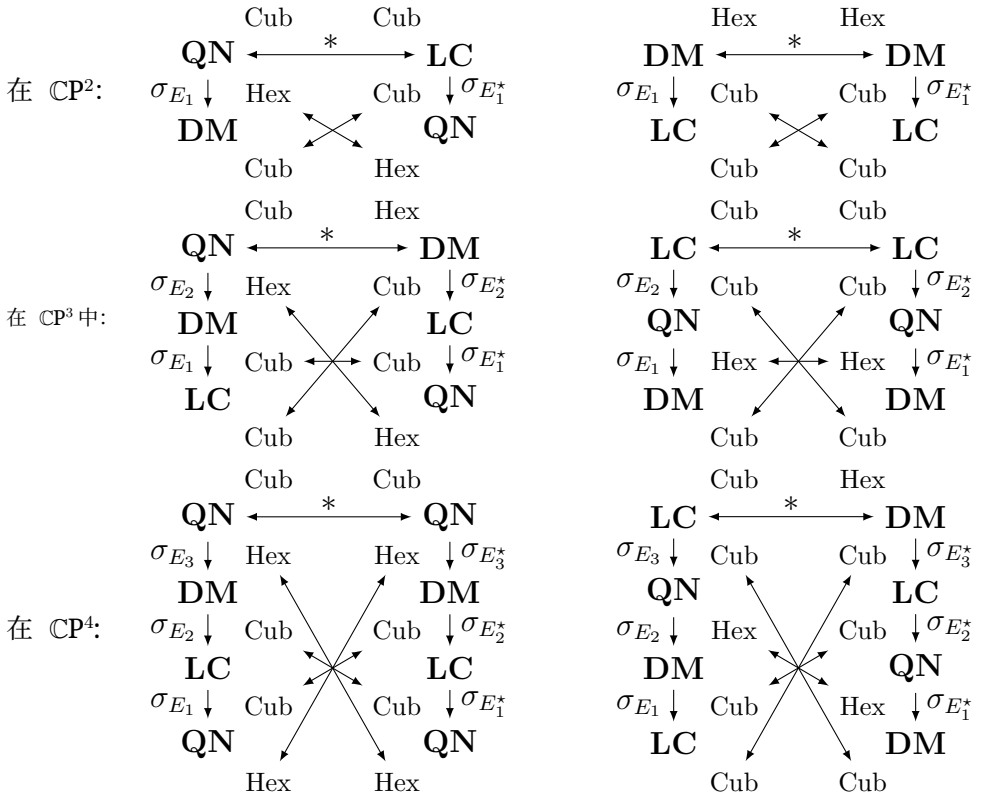


图 6.6。我们考虑的是 $\mathbb{Z}^3$ 组合结构。每个映射的上标表示其射影簇结构，下标表示其仿射簇结构。由对角箭头连接的两个簇结构互为倒数。我们认为顶行中的两个 TCD 映射互为射影对偶。

推论 6.18。设 $(T_k)_{1\le k\le n}$、$(E_k)_{0\le k\le n}$ 是 TCD映射旗，且 $(T_k^\star)_{1\le k\le n}$、$(E_k^\star)_{0\le k\le n}$ 是射影对偶旗。假设 $\mathcal{T}$ 是极小元，并且所有 TCD映射 $T_k, T_k^\star$ 都是翻转一般位置的。那么恒等映射

$$\mathbf{Pro}(T_k) = \rho(\mathbf{Pro}(T^\star_{n-k-1})), \tag{6.25}$$

对 $1 \le k < n$ 成立。 ■

证明。由定理 6.17 和定理 6.4 直接得出。 □

此外，定理 6.17 确实通过以下方式将“零维”仿射簇结构与射影簇结构联系起来

$$\mathbf{Aff}_{E_0}(T_1) = \rho(\mathbf{Pro}(T^\star_{n-1})). \tag{6.26}$$

从几何上看，这意味着给定点 $E_0 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^n$，我们可以考虑出现在 T_n 中的 $(n-2)$-空间，并通过 E_0 将它们扩展为 $(n-1)$-空间。T_1 的仿射变量于是对应于这些 $(n-2)$-空间的交比。注意，总体而言，现在我们从一个 TCD 映射得到 $(n+2)$ 种不同的簇结构。原始映射给出 $(n+1)$ 种结构，而射影对偶恰好增加一种，即 **射影对偶**$(T_n^\star)$。

例 6.19. 考虑具有 $\mathbb{Z}^3$ 组合结构的 Q 网、达布映射和直线复形。若将这些映射的柯西数据表示为阶梯曲面，那么例 4.14 表明，我们可以考虑仅由 Q 网、达布映射和直线复形组成的 TCD 映射旗。根据例 4.60，射影对偶旗也由这三种映射组成。因此，这些旗的簇结构要么是立方八面体簇结构，要么是六面体簇结构。定理 6.17 随即推出这些簇结构之间存在对应关系，

见图 6.6。稍后我们会看到这一点尤为重要，因为我们将证明，簇变量中的电阻子簇和伊辛子簇分别对应于 Q 网、达布映射和直线复形的某些几何约化。定理 6.17 随即表明，对偶旗中也会出现相同的约化。■

查看图 6.6，原旗中的所有簇结构在对偶旗中都有对应项，唯独 $\mathbf{Pro}(T_n)$ 除外，这可能看起来有些奇怪。我们认为这只是观察视角造成的假象。首先，我们的例子大多来自离散微分几何。在这些例子中，TCD映射的目标空间的维数通常远小于最大维数。此外，我们对取截面 $\sigma_E(T)$ 进行了广泛研究，但没有引入或探讨一种可能的 σ^{-1}？(T) 操作，尽管例如第 4.3 节的结果表明，从组合层面来看，这种操作当然是可行的，并且在第 4.5 节中我们也讨论了一些几何方面。因此，让我们也考虑一个在几何和组合意义上都是“最大的”例子。

例 6.20. 考虑 TCD映射的一旗 $(T_k)_{0\le k\le n}$, $(E_k)_{0\le k\le n}$，使得 $\mathcal{T}_k$ 的端点匹配为 $\mathcal{S}^n_{k-1}$，且 T_k 将其维数扩展至 $0 \le k \le n$ 的最大维数；组合结构的一个例子见图 4.25。注意，我们纳入了维数为 0 的平凡 TCD映射，它将一个白色顶点映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ 中的一个点。于是实际上 $\mathbf{Pro}(T_n)$,$\mathbf{Pro}(T_{n-1})$ 都是平凡的，因为这些箭图没有顶点；回想一下，我们只将二分图的内部面视为射影簇结构的箭图。同理，$\mathbf{Aff}\,(T_1)$,$\mathbf{Aff}(T_0)$ 也都是平凡的。因此，对于所有满足 $0 \le k \le n$ 的指标，恒等式$\mathbf{Aff}_{E_{k-1}}(T_k) = \rho(\mathbf{Aff}_{E^\star_{n-k}}(T^\star_{n-k+1}))$ 和 $\mathbf{Pro}(T_k) = \rho(\mathbf{Pro}(T^\star_{n-k-1}))$ 均成立。■

6.5. TCD映射的完美对偶

我们此前已经遇到过 TCD 对偶 ι，它会反转三重交叉图中所有弦的定向。我们还注意到，TCD $\mathcal{T}$ 的仿射箭图恰好是 $\iota(\mathcal{T})$ 的射影箭图，反之亦然。因此，我们不禁会想，是否存在两个 TCD映射，使它们的射影簇结构与仿射簇结构互换。

定义 6.21. 设 T, T' 为分别定义在 $\mathcal{T}_\circlearrowleft$ resp. $(\iota(\mathcal{T}))_\circlearrowleft$ 上并映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的两个 TCD映射，且设 E 为相对于 T 和 T' 均处于一般位置的一个超平面。若满足以下条件，我们称 T' 为 T 的 完美对偶。

$$\mathbf{Pro}(T) = \rho(\mathbf{Aff}_E(T')) \quad \text{and} \quad \mathbf{Pro}(T') = \rho(\mathbf{Aff}_E(T)). \tag{6.27}$$

■

在上一截面中，我们观察到 ι 在定义对偶射影 TCD映射时发挥着作用。观察图 6.6 中的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 示例，我们发现，位于 E_1 中的截面实际上满足方程（ 6.27 ）！ 在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$, 中也能看到相同的现象：在这种情况下， E_2 中的截面满足方程（6.27）。

定理 6.22. 设 $n = 2m,\ m \in \mathbb{N}$，且 $(T_k)_{1\le k\le n}$ 为 TCD映射旗，$(T^*_k)_{1\le k\le n}$为其对偶旗。那么 T_m 是 T^*_m的完美对偶。■

证明。 这是完美对偶定义和定理 6.17 的直接推论 . □

此外，假设给定一个 TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_\circlearrowleft \to E_m = \mathbb{C}\mathrm{P}^m$。假设我们可以将其提升为一个 TCD映射 $\hat{}T\colon \hat{}\,\mathcal{T}_\circlearrowleft \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2m}$，使得 $\sigma_{E_m}(\hat{}\,T_{2m}) = T$。那么我们可以将 $\hat{}T$扩张为一旗 $\hat{}$ TCD映射，其中涉及 T，并可构造相应的射影对偶旗 T^*。接着，定理 6.22 指出，$\hat{}\sigma_{E^*_n}(T^*)$ 实际上是 T 的一个完美对偶。因此，一个合理的问题是：在什么情况下这些提升存在？我们已在关于扩张的第 4.5 节中讨论了如何构造提升。此处的先决条件是 TCD 的可扫描性。我们声称

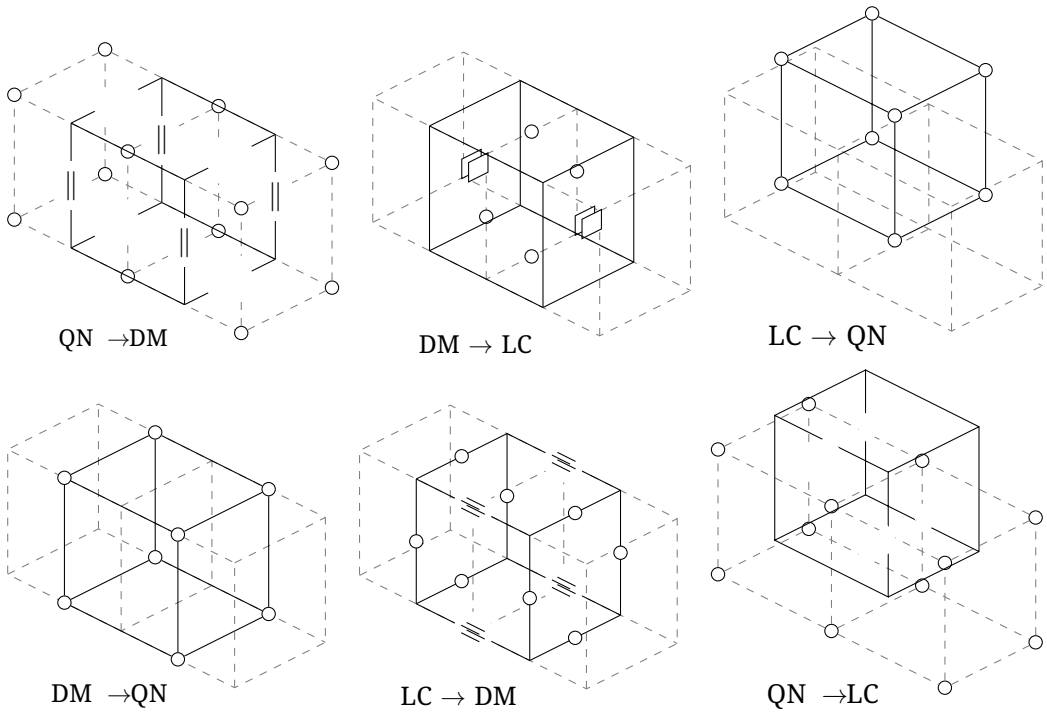


图 6.7. 一种网（虚线）的六种类型对应的焦网（实线）。白色的点表示与原映射中的点重合的点。两条（分别为四条）平行直线表示 $\mathbb{Z}^3$ 中两条（分别为四条）同类型直线的交点。两个平行平面表示与 $\mathbb{Z}^3$ 中两个同类型四边形相关联的两条直线的交点。

但对于 Q-网、达布映射以及这些弦在$\mathbb{Z}^2$ 矩形子图上的直线复形，无须证明它们总是存在，因此提升也总是存在，完美对偶也总是存在。不过，对于更一般的组合结构，这个问题的答案尚不明确。

对于特别关注完美对偶的读者，我们提及，在定理 10.37（关于 h-嵌入和正交对角映射）中还出现了另一种完美对偶的情形，其中 $T' = \sigma(T)$。

在第 5.5 节中，我们展示了五边形映射如何成为环面上的 TCD映射。一个有趣且通常仍未解决的问题是，是否存在作为 TCD映射时具有完美对偶的多边形。然而，对于五边形映射，不可能构造一个提升到 $\mathbb{R}\mathrm{P}^4$ ，使其截面再次成为初始多边形。事实上，似乎并非每个多边形都存在这样的完美对偶。Izosimov [Izo21b] 的研究中简短提及了完美对偶与 Glick算子之间的关系。

6.6. 焦网与拉普拉斯变换

我们已经从 $\mathbb{Z}^2$ Q网的拉普拉斯-达布动力学角度考察过涉及焦点的网变换，见第 3.7 节。不过， $\mathbb{Z}^3$ Q网也存在拉普拉斯变换。DDG 书 [BS08]中对此作了介绍。在这一背景下，Q网的焦直线复形也是一个重要概念。现在我们引入一种焦网和拉普拉斯变换的处理方式，使 Q网、达布映射以及定义在 $\mathbb{Z}^3$ 上的直线复形能够得到同等对待。由于我们在 $\mathbb{Z}^3$上工作，因此将直线复形与直线复合体视为相同对象，但采用直线复合体的定义。也就是说，我们认为直线复形的点位于 $\mathbb{Z}^3$的面上。还请注意，我们不会分析焦点变换和拉普拉斯变换所需的一般位置条件，而是假定所涉及的映射一般性足够，使这些变换能够存在。

定义 6.23. 对于每种映射类型——Q-网、达布映射和直线复形——我们都定义其余每种映射类型的一个焦网 。每个焦网 f_i 都沿一个指定方向$i \in \{1,2,3\}$取定。正方向 i 与负方向 i 决定了我们得到的焦网类型。

(1) Q-网 $V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 沿方向 i 的焦直线复形 $f_{\bar{i}}$ 由与边 $(v, v_i) \in E(\mathbb{Z}^3)$ 相关联的所有直线组成。焦直线复形的交点自然地位于 $\mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}(e_j + e_k)$ 的面上（见图 6.7），由 Q-网的所有点以及所有焦点 $(v, v_i) \cap (v_j, v_{ij})$ 和 $(v, v_i) \cap (v_k, v_{ik})$ 组成。(2) Q-网 $V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 沿方向 i 的焦达布映射 f_i 由与面 $(v, v_j, v_k, v_{jk}) \in F(\mathbb{Z}^3)$ 相关联的所有平面组成。该达布映射的交点自然地位于 $\mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}e_i$ 的边上，由 Q-网的所有点以及所有焦点 $(v, v_j) \cap (v_i, v_{ij})$ 和 $(v, v_k) \cap (v_i, v_{ik})$ 组成。(3) 达布映射 $E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 沿方向 i 的焦 Q-网 $f_{\bar{i}}$ 由与边 $(v, v_i) \in E(\mathbb{Z}^3)$ 相关联的所有点组成。焦 Q-网的交点自然地位于 $\mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}e_i$的边上。(4) 达布映射 $E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 沿方向 i 的焦直线复形 f_i 由与面 $(v, v_j, v_k, v_{jk}) \in F(\mathbb{Z}^3)$ 相关联的所有直线组成。焦全等的交点自然地位于 $\mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}(e_j + e_k)$ 的面上。这些交点由达布映射中位于类型为 (v, v_j) 和 (v, v_k) 的边上的所有点，以及与达布映射各面相关联的直线的交点 $(v, v_j, v_k, v_{jk}) \cap (v_i, v_{ij}, v_{ik}, v_{ijk})$ 组成。(5) 具有交点 $F(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的直线复形沿方向 i 的焦 Q-网 f_i 由与面 $(v, v_j, v_k, v_{jk}) \in F(\mathbb{Z}^3)$ 相关联的所有点组成。Q-网的点自然地位于 $\mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}(e_j + e_k)$ 的面上。它们是直线 $\bar{\ell} \cap \ell_i$的交点。 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中所得四边形的平面性是直线复形 [BS15] 的共面性所导致的结果。(6) 具有交点 $F(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的直线复形沿方向 i 的焦达布映射 $f_{\bar{i}}$ 由所有平面组成，这些平面由关联于 $(v, v_j, v_k, v_{jk}) \in F(\mathbb{Z}^3)$ 的两条直线张成。如果将达布映射的点与 $\mathbb{Z}^{3*}$的边对应起来，那么这些点自然地位于 $\mathbb{Z}^3 + \frac{1}{2}e_i$的面上。这些点由直线 $\ell \cap \ell_j$和 $\ell \cap \ell_k$的交点以及点 $f^{ij}f_i^{ij} \cap f^{ik}f_i^{ik}$组成。■

我们引入了记号 f_i ，因为我们声称，焦网的焦网及其迭代可以用一个交换图来描述，该图具有 $\mathbb{Z}^3$ 的商的组合结构。

定理 6.24。对于焦网，方程

$$f_{\bar{i}} \circ f_i = \mathrm{id}, \tag{6.28}$$

$$f_j \circ f_i = f_i \circ f_j, \tag{6.29}$$

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}, \tag{6.30}$$

保持。■

证明。这些方程可根据焦网的定义逐一验证。□

该定理的核心结论是，我们可以将焦网的交换图表示为 $\mathbb{Z}^3$ 格的商，见图 6.8。

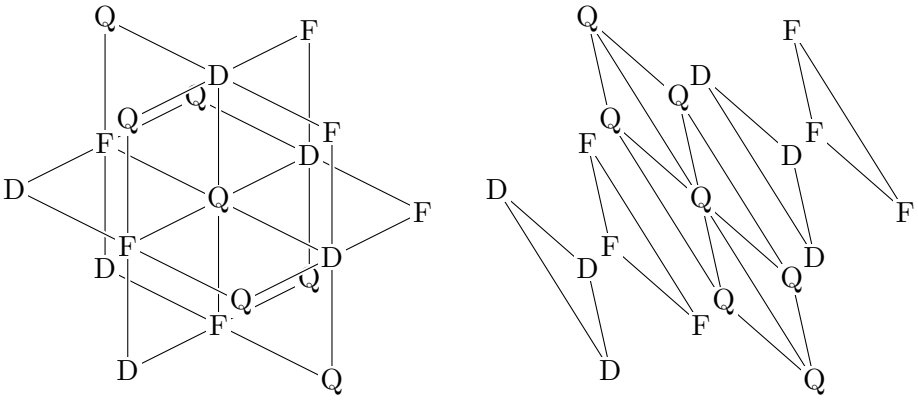


图 6.8。左：焦网交换图的一部分。右：相同部分，但标出了对应于拉普拉斯变换的边。

推论 6.25。考虑格 $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^3/(1,1,1)$，即 $\mathbb{Z}^3$ 沿 $(1,1,1)$ 方向取整数平移的商。我们可以赋予

- 一个 Q-网对应每个点 $n = (n_1,\ n_2,\ n_3) \in \mathbb{Z}^3$ 满足 $n_1 + n_2 + n_3 \in 3\mathbb{Z}$,
- 一个达布映射对应每个点 $n \in \mathbb{Z}^3$ 满足 $n_1 + n_2 + n_3 \in 3\mathbb{Z} + 1$,
- 一个直线复形对应每个点 $n \in \mathbb{Z}^3$ 满足 $n_1 + n_2 + n_3 \in 3\mathbb{Z} + 2$

使得对于任意 $n \in L$，映射 h 在 n 处与映射 h' 在 $n + \mathbf{e}_k$ 处满足关系

$$h' = f_k(h) \quad \text{and} \quad h = f_{\bar{k}}(h'). \tag{6.31}$$

■

证明。我们首先将一个 Q-网赋给 $\mathcal{L}$的原点。然后通过方程（6.31）将映射赋给 $\mathcal{L}$ 的其余部分。由于定理 6.24 的第一个方程，这在一条边上是相容的。绕一个四边形的相容性由同一定理的第二个方程推出。综上，我们在 $\mathbb{Z}^3$上得到相容性。最后，由定理 6.24 的第三个方程，在商 $\mathcal{L}$ 上的相容性也随之成立。□

因此，尽管我们可以沿三个方向生成焦网，但所生成的格 $\mathcal{L}$实际上只是一个厚度为 3 层的二维格。此外，我们还可以如下定义一般的拉普拉斯变换。

定义 6.26。我们将 拉普拉斯变换 $\Delta_{ij} = f_j \circ f_{\bar{i}}$ 定义为 $i \neq j$。 ■

对于 Q网，该定义与拉普拉斯变换的经典定义相一致。事实上，$f_{\bar{i}}$ 对应于取一个坐标方向上的所有直线，而 $f_j \circ f_{\bar{i}}$ 对应于与另一坐标方向上相邻的 $f_{\bar{i}}$ 的直线相交，这正是拉普拉斯变换的经典定义。因此，$\Delta_{ij} \circ \Delta_{ji} = \mathrm{id}$（见方程（3.13））仅仅是以下事实的结果：$\Delta_{ij}$ 对应于在 $\mathcal{L}$ 上向前走两步，而 Δ_{ji} 对应于向后走这两步。我们注意到，$\mathcal{L}$ 分解为三个 A_2 晶格$\mathcal{L}_r = \{n \in \mathcal{L} :\ n_1 + n_2 + n_3 = r\}$。拉普拉斯变换总是将 $\mathcal{L}_r$ 中的一个映射变为 $\mathcal{L}_r$中的另一个映射。显然，$\mathcal{L}_r$ 中的两个映射通过一系列拉普拉斯变换相关，因为向量 $\{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3}\}$ 张成 A_2，见图 6.8。因此，A_2 晶格 $\mathcal{L}_r$ 就是拉普拉斯变换的三个互不相交的交换图，分别对应 Q网、达布映射或直线复形。

既然我们现在也将 Q网、达布映射和直线复形与焦网和拉普拉斯变换同等看待，那么我们实际上可以再次通过 TCD映射中的移动来刻画焦网，这也就不那么令人惊讶了。

定理 6.27. 设 $h' = f_i(h)$ 是由焦变换 f_i 联系的两个映射。考虑 h 和 h'的阶梯曲面柯西数据，并设 T （分别为 T'）是与 h （h'）对应的两个 TCD映射。那么， T 可通过一系列 2-2 移动与 T' 联系起来。■

证明。我们通过图6.9中的仿射箭图，给出将一个Q-网变为达布映射或直线复形的2-2 移动全局序列。设 q 是一个Q-网，而TCD映射 T 将方向$(k,\ k+1)$上的焦点作为点，其中指标 $k \in \mathbb{Z}_3$按循环排列。该序列首先突变所有类型为$(i-1,\ i)$的焦点，接着突变阶梯曲面上度为3的 $\mathbb{Z}^3$ 的所有顶点。若要得到 $f_i(q)$，第三步则突变所有焦点$^{i,\ i+1}$。若要得到 $f_{\bar{i}}(q)$，第三步则突变所有焦点$^{i+1,\ i-1}$。我们将验证所得的点恰好是定义6.23中焦网的定义点这一点留作练习。通过以不同顺序组合上述序列的步骤，即可得到达布映射和直线复形的焦变换序列。□

暂且不考虑几何，定理 6.27 的一个有趣推论是，可以通过一系列突变将立方八面体箭图变为六面体箭图，反之亦然。

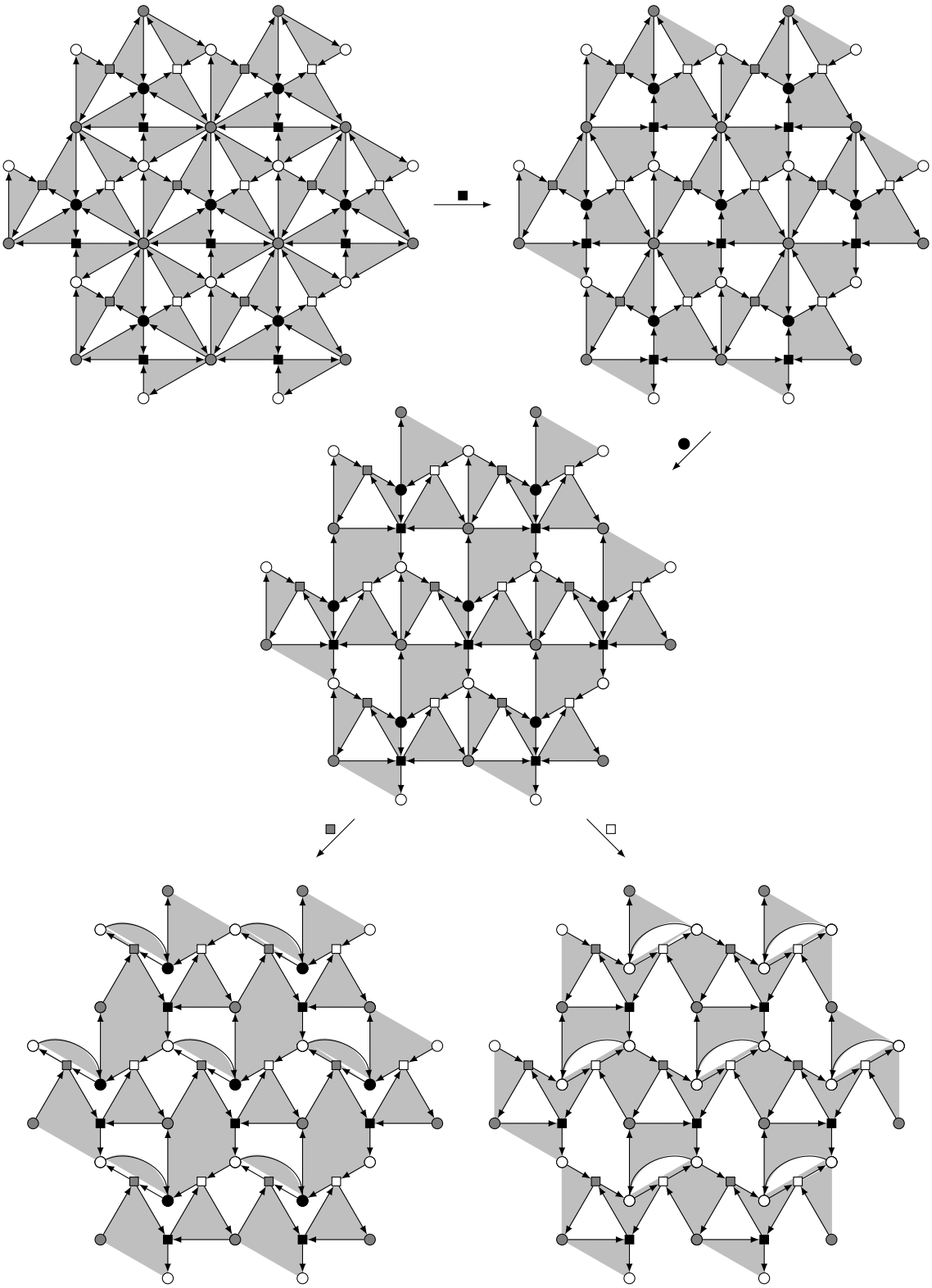


图6.9. 一系列突变将阶梯曲面的仿射箭图从 $\mathbb{Z}^3$ Q-网 q（左上）变为直线复形 $f_{\bar{i}}(q)$（左下）或达布映射 $f_i(q)$（右下）。 q 中的焦点绘制为正方形，顶点绘制为圆形。灰色区域边界上的点共线。

第7章

Z不变性与 TCD映射

本章将 PDB 箭图（见定义 5.1）与统计物理中熟知的二聚体模型 联系起来。为此，我们重述文献中的一些相关基础知识和结果。尤其是，我们展示箭图中的突变如何对应于二聚体模型中的 Z不变变换。随后，我们重述生成树模型 [**Ken99, Tem74, GK13**] 以及伊辛模型 [**Len20, Dub11, KP16**] 如何分别与具有特定组合结构及簇变量的二聚体模型相对应，这些簇变量分别位于电阻子簇 和伊辛子簇中。在这些子簇中， Z不变变换会重现已知的离散可积方程：离散*KP*、离散*BKP*和*dCKP*方程。离散微分几何或离散可积系统中，也有许多值得关注的对象呈现这些方程。这些对象实际上是 Q-网、达布映射或直线复形的各种约化；在文献中，人们逐个研究这些对象，通过寻找恰当的计算和变换序列来发现其中的可积方程。将离散可积方程与簇子簇关联起来这一思路，使我们能够以规范的方式在这些对象中找到可积方程。事实上，我们可以给出精确的论述，说明当对象被视为 TCD映射时，其 BKP 或 CKP 结构究竟属于该对象的射影簇结构、该对象的射影对偶的射影簇结构，还是该对象与某个超平面的截面。将讨论限制在射影簇结构时，我们证明，只有当 Q-网是*Kœnigs* 网[**BS07a, Dol07**]时，才能在 Q-网中准确地恢复 BKP 方程。在达布映射中，只有卡诺映射的情形才能恢复 CKP 方程；这种映射由 Schief 发现，并被他称为*CKP Darboux* 映射。此外，对于直线复形，我们发现*Doliwa* 复形满足 BKP 方程；我们正是为此目的而引入这种复形。不过，Doliwa 复形与 Doliwa 提出的另一种 Kœnigs 网定义密切相关 [**Dol02**], ，我们将在第7.10节中对此加以说明。我们还考察映射截面的簇结构。例如，我们证明*Schief* 映射 [**Sch03**], 最初作为 BKP 映射提出，是仿射达布映射的一种特殊情形。我们还证明，Doliwa 将*CQ*网作为 C-四边形格引入 [**Dol10b**] ；它们恰好就是仿射 CKP Q-网。第8章将重点讨论与双线性形式相关的特殊映射；这些映射又能与更多 BKP 和 CKP 方程的规范实例联系起来，但我们将有关这些映射及关系的讨论留到该章。

7.1. 统计物理中的 Z-不变性

在本节中，我们将介绍研究离散统计力学模型时会用到的基本概念，但我们特别关注三种模型：二聚体模型、生成树模型和伊辛模型。

设 G 是嵌入在圆盘中的一个有限共面图， E 是其边集，并令 $w : E \to \mathbb{R}^+$ 表示 边权重。那么，某个子集 $R \subset E$ 的权重定义为

$$w(R) = \prod_{e \in R} w(e). \tag{7.1}$$

由于我们关注任意边权重下的统计量，因此通常将边权重 w_e 视为形式变量。为了得到有趣的统计量，我们选取边的一个子集族 $\Omega \subset 2^E$ 作为允许的构型。Ω 的选取定义了统计模型。

定义 7.1。设 $\Omega \subset 2^E$ 为 样本空间。配分函数 Z 定义为形式多项式

$$Z : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}, \quad Z = \sum_{R \in \Omega} w(R), \tag{7.2}$$

而元素 $R \in \Omega$ 的概率 定义为

$$\mathbb{P}_Z(R) = \frac{w(R)}{Z} \ . \tag{7.3}$$

■

配分函数 Z 具有一项实用性质：我们可以通过求导来计算某条边出现的概率，即

$$\mathbb{P}_Z(e \in R) = w_e \frac{\partial \log Z}{\partial w_e} \ . \tag{7.4}$$

许多其他可观测量也可以通过对配分函数求导来表示。例如，某些相关性，如两条固定边同时出现的概率。

在本文讨论的情形中，统计模型并非只针对某一个特定的图 G 给出，而是针对一整类图。为此，这些模型通过依赖于图 G 的样本空间 Ω 的定义来确定。

在聚焦于特定模型之前，我们先讨论 Z-不变性这一关键概念。这个概念将统计物理模型与离散可积系统联系起来。

˜定义 7.2. 设 L 和 L 是有限共面图，并将其˜边界顶点 $\partial L \leftrightarrow \partial L$对应起来。设 G 是一个平面图，使得 L 是其子图，且令$L^c = G \setminus L$。

˜(1) 我们可以通过沿着 ∂L 进行对应，用 L 替换 G 中的 L，从而得到新图G。我们称这种替换为组合结构的局部变化。

˜(2) 设 f： $\mathbb{R}^{E(L)} \to \mathbb{R}^{E(L)}$ 是一个函数，使得

$$(f(\omega))_e = \omega_e \qquad \text{对所有 } e \in E(L^c), \tag{7.5}$$

$$\partial_{\omega_{e'}} (f(\omega))_e = 0 \qquad \text{for all } e \in E(\tilde{L}), e' \in E(L^c). \tag{7.6}$$

˜ ˜那么 $f(\omega)$定义了 G上的新边权重 $\tilde{\omega}$。三元组 (L, L, f)定义了一个局部变换。

˜(3) 若一个局部变换 (L, L, f) 呈现 Z-不变性，则

$$Z_{\tilde{G}} = \lambda Z_G \tag{7.7}$$

对于某些 $\lambda \in \mathbb{R}$。 ■

我们之所以称这些变换为局部变换，是因为函数 f 不会改变这些˜子图之外的边权重，而且 L 中的新边权重仅取决于旧子图的边权重L。局部变换的一个重要性质是它能够保持边概率不变，即

$$\mathbb{P}_{Z_G}(e \in R) = \mathbb{P}_{Z_{\tilde{G}}}(e \in R) \tag{7.8}$$

对于任意 $e \in E(L^c)$ 都成立。一般来说，给定决定 Ω_G 的规则后，我们感兴趣的是寻找 Z-不变局部变换。这意味着我们要寻找两个图 L 和 $L^{\tilde{}}$，以及一个相应的函数 f，使三元组 (L, L, f) 对所有图 G 都是 Z-不变的。如果固定 L 和 L，那么 f 必须满足一组代数方程。特别地，对于每个 $R \in \Omega_G$，我们都会得到一个方程。若记 $R^e = R \cap E(L^c)$，则条件是

$$\sum_{R' \in \Omega_G : R' \cap E(L^c) = R^e} w(R') = \lambda \sum_{\tilde{R}' \in \Omega_{\tilde{G}} : \tilde{R}' \cap E(L^c) = R^e} w(\tilde{R}') \tag{7.9}$$

对于所有 $R \in \Omega_G$ 和一个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都成立。在等式左边和右边的每一项中， L^c 上出现的边权重完全相同，因此我们可以将这些方程改写为

$$\sum_{R' \in \Omega_G : R' \cap E(L^c) = R^e} w(R' \cap E(L)) = \lambda \sum_{\tilde{R}' \in \Omega_{\tilde{G}} : \tilde{R}' \cap E(L^c) = R^e} w(\tilde{R}' \cap E(\tilde{L})). \tag{7.10}$$

然而在实际应用中，许多边子集 R 会导出同一个方程。事实上，在我们将要考虑的特定 Z-不变变换中，方程只有有限多个。

注释 7.3。 Z-不变性的一个有趣之处在于，在统计物理学界，这些变换的存在有时被视为可积性的一种体现。这是有道理的，因为统计模型通常涉及在二维数据上已经具有因子分解形式的边权重，也就是说，边权重是定义在一维数据上的参数的函数。因此，在这些具有因子分解形式的情形下，我们研究的是具有三维一致性的二维系统，因而从离散可积系统的意义上来说，它们也是可积的。对于定义在 G上的非因子分解边权重，这些变换本身的存在建立了一个三维系统，但不一定是具有四维一致性的三维系统。因此，对于任意边权重而言， Z-不变性的存在先验上并不足以保证离散可积性。令人惊讶的是，在我们所考虑的例子——二聚体模型、生成树模型和伊辛模型——中，结果表明这些模型实际上都具有四维一致性，因此也是离散可积的。■

注 7.4. 据我们所知，在任何统计模型中，都没有一种方法能够系统地分类所有可能的 Z 不变局部变换。因此，我们在以下各节介绍的局部变换并非由某种算法推导而来。因此，我们将局部变换的存在视为发现；目前没有已知的规律，除了对统计模型的组合以及相对简单的组合结构变化进行反复试验。■

7.2. 二聚体、离散 KP 与簇代数

根据上一节的定义，要定义二聚体统计量，我们只需定义依赖于 G的样本空间。

定义 7.5. 二聚体模型的样本空间为

$$\Omega_G = \{R \subset E : \forall v \in V \ \exists! e \in R \text{ with } v \in e\}. \tag{7.11}$$

每个集合 $R \in \Omega_G$ 都称为一个二聚体构型。 ■

换言之，对于每个二聚体构型 $R \in \Omega_G$ 以及每个顶点 $v \in V$，恰有一条边 $e \in E$ 包含 v。也就是说，每个二聚体构型 R 都由顶点集的不相交边覆盖组成。请注意，在组合学领域，二聚体构型称为完美匹配。该模型在一般图上都有定义，但就我们的目的而言，只需考虑共面二分图。

在本节中，我们假设所考虑的所有图 G 均满足 $\Omega_G \neq \emptyset$。一般而言，能够容纳二聚体构型的二分图可由霍尔定理刻画。在第 7.5 节中，我们将完美匹配推广为近乎完美匹配，并证明只要 G 是某个 TCD 的关联图 $\mathcal{G}$ ，那么 $\mathcal{G}$ 就具有一个近乎完美匹配。

在二聚体模型中，存在一种特殊的规范自由度。假设我们固定 $\rho \in \mathbb{R}^+$， $v \in V$并将权重函数 w 替换为

$$w' : E \to \mathbb{R}, \quad w'_e = \begin{cases} w_e & e \not\sim v, \\ \rho w_e & e \sim v. \end{cases} \tag{7.12}$$

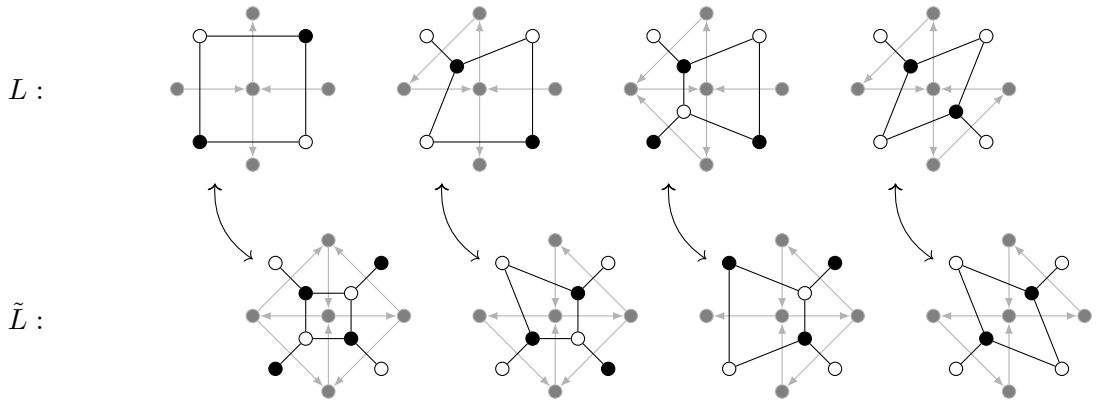


图 7.1. 二分图中组合结构的局部变化 G。对应的箭图突变以灰色绘出。

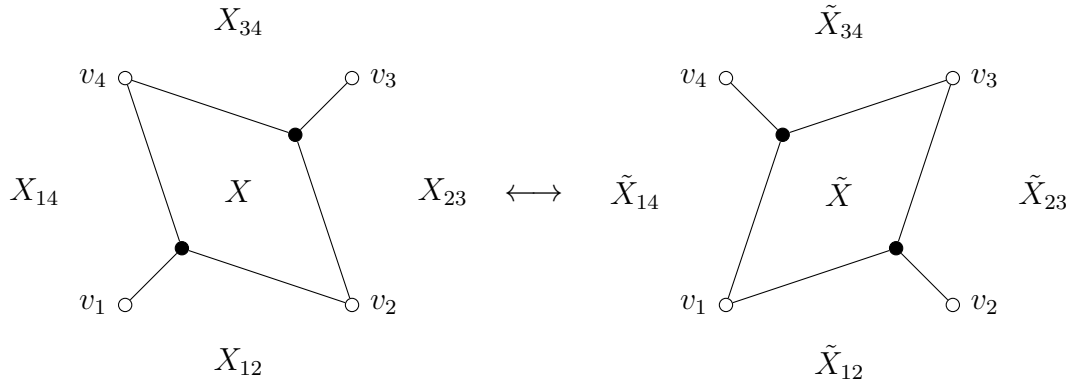


图 7.2. 蜘蛛变换中边权重的标记。

这一操作会缩放固定顶点周围的边权重。我们分别将 $Z[w]$ 和 $Z[\omega']$记为关于边权重 ω 和 ω' 的配分函数多项式。给定一个二聚体构型，每个顶点恰好出现在其中一条边上，因此我们观察到

$$Z[w'] = \rho Z[w], \tag{7.13}$$

因此，每种二聚体构型的概率（如方程 (7.3) 所示）都保持不变。因此，每个顶点都具有一种不影响统计量的规范或缩放自由度。关于规范的一组完备不变量称为面变量

$$X : F \to \mathbb{R}^+,\ X_f = \frac{w(e_1)\cdot w(e_3)\cdots w(e_{m-1})}{w(e_2)\cdot w(e_4)\cdots w(e_m)}, \tag{7.14}$$

其中，$(e_k)_{0<k\le m}$ 是一个以黑色顶点为起点、围绕 f 的逆时针定向环。面权重具有规范不变性，因为顶点处的任何缩放因子 ρ 要么不会出现在 X_f 中，要么会在分数中抵消。如果我们把外面也包括在内，那么面变量唯一的约束是

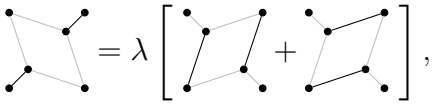
$$\prod_{f\in F} X_f = 1. \tag{7.15}$$

事实上，对于任何一组满足全局约束的面变量，都存在能够实现这些面变量的边权重。这一点早已在注 5.36 中得到证明，当时我们称之为“求解规范问题”。因此，我们将面变量视为给定图 G 上可能的二聚体统计量的坐标。

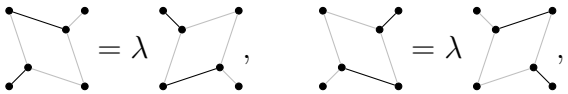
现在让我们将注意力转向 Z-不变变换的存在性。我们选择 X 作为面变量的字母并非偶然，事实上，这些变量正是箭图 $\mathcal{Q} = G^*$ 的 X-簇变量，其中箭头沿每个

˜黑色顶点逆时针定向。我们给出四对子图 L, L。对于每一对，都存在一个函数 f˜，使得 (L, L, f) 是一个 Z-不变变换。此外，对于每一对，都存在一个函数 g，使得 ˜(L, L, g) 是一个 Z-不变变换。这些子图列于图 7.1 中，并且恰好是图5.1中所示图的对偶图；在图5.1中，我们列出了允许的箭图变异。注意，每个局部变换都以一个度为 4 的面为中心，如图 7.1 所示。我们对其中一对子图进行计算，即通过蜘蛛变换相关联的那一对。其标记如图 7.2 所示。相应的图形方程由比较二聚体构型所诱导，该比较确定 L 的哪些边界顶点与 L 的哪些边界顶点相匹配，具体为

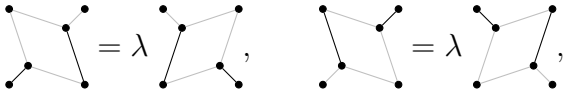
(7.16)



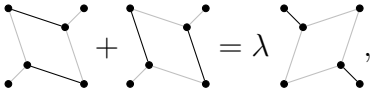
(7.17)



(7.18)



(7.19)



其中 $\lambda \in \mathbb{R}$。用边权重表示，我们得到

$$w_{24}^1 w_{24}^3 = \lambda[w_{34}^1 w_{12}^3 + w_{23}^1 w_{14}^3], \tag{7.20}$$

$$w_{24}^1 w_{23}^4 = \lambda w_{23}^1 w_{13}^4, \qquad w_{14}^2 w_{24}^3 = \lambda w_{13}^2 w_{14}^3, \tag{7.21}$$

$$w_{24}^1 w_{34}^2 = \lambda w_{34}^1 w_{13}^2, \qquad w_{24}^3 w_{23}^4 = \lambda w_{12}^3 w_{13}^4, \tag{7.22}$$

$$w_{14}^2 w_{23}^4 + w_{34}^2 w_{12}^4 = \lambda w_{13}^2 w_{13}^4. \tag{7.23}$$

如前所述，边权重具有规范自由度，因此新边权重没有唯一解也就不足为奇了。相反，考察面变量必须如何变化才能使局部变换保持 Z-不变，是有意义的。结果表明，对于任意一对˜(L, L)，面变量对应的方程都相同。

定理7.6. 设 L, $\tilde{L}$ 是图 7.1 中的一对图。设 $f\colon \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^{\tilde{E}}$ 是一个函数˜，使得 (L, L, f) 是一次局部变换，且面权重满足

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X^{-1}, \\ \tilde{X}_{12} X_{12}^{-1} &= \tilde{X}_{34} X_{34}^{-1} = 1 + X, \\ \tilde{X}_{23} X_{23}^{-1} &= \tilde{X}_{14} X_{14}^{-1} = (1 + X^{-1})^{-1}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

˜那么 (L, L, f) 是一个 Z-不变变换。 ■

证明。直接计算即可。 □

二聚体模型中的局部变换与相关簇结构中的突变之间实际上存在对应关系。

定义7.7. 设 G 是一个二分平面图，我们在其上考虑一个面权重为 $X_G\colon F(G) \to \mathbb{C}$的二聚体模型。设 $\mathcal{Q}$ 是G 的有向图对偶所得到的 PDB 箭图，且设 $X\colon V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 是 $\mathcal{Q}$ 上的簇变量，满足对 $\mathcal{Q}$的每个顶点v ，都有 $X(v) = X_G(v^*)$。我们称($\mathcal{Q}, X$)为 G上的二聚体模型的簇结构。在度为 4 的顶点$v \in V(\mathcal{Q})$处进行突变，对应于以 $v^* \in F(G)$为中心的局部变换。■

这是良定义的，因为正如我们在图 7.1 中所观察到的， G 的组合结构与 $\mathcal{Q}$ 对偶，并且始终与 $\mathcal{Q}$ 保持对偶关系；同时，方程 (7.24) 对应于簇变量突变的方程，如定义 5.3 所述。反过来也可以实现：对于任意一个具有簇结构的 PDB 箭图 $\mathcal{Q}$ （参见定义 5.1），都可以在 $\mathcal{Q}^*$ 上指定一个二聚体模型，使其面权重等于簇变量。

现在我们来展示离散 KP 方程在二聚体模型中出现的一种方式。假设边权重可分解为面势和顶点势的乘积，即

$$w_e = \frac{\theta_v \theta_{v'}}{\tau_f \tau_{f'}} \quad \text{where } e^* = (f, f') \text{ and } e = (v, v'). \tag{7.25}$$

若我们在面 f 处进行突变，边权重仍像之前一样分解为面势和顶点势。顶点势不影响面权重，因此可以任意选取。新的面势 $\tilde{\tau}$ 与旧势仅在 f 处不同。若 f_1， f_2， f_3， f_4 是 f 的相邻面，则这些势满足

$$\tau_f \tilde{\tau}_f = \tau_{f_1}\tau_{f_3} + \tau_{f_2}\tau_{f_4}. \tag{7.26}$$

这就是离散 *KP* 方程 [**Hir81**]。它也是簇变量 τ 的突变规则，见定义 5.4。

备注 7.8. 我们对二聚体模型作了非常简短的介绍；更全面的介绍可见 Kenyon 的讲义 [**Ken03**]。下面列出一些我们认为从可积性或几何角度特别有趣的参考文献。

- 当 Kasteleyn [**Kas61**] 以及 Temperley 和 Fisher [**TF61**] 能够利用行列式给出共面情形的精确解时，二聚体模型受到了广泛关注。
- Z不变变换首次由 Kuperberg 提出 [**Kup98**]。值得注意的是，二聚体模型上的 Z 不变变换可以解释为某些矩阵行列式上的 Desnanot–Jacobi 恒等式 [**Zei97**]。
- Z不变变换已由 Propp [**Pro03**] 成功应用，以生成均匀分布的二聚体构型。
- Goncharov 和 Kenyon [**GK13**] 发现了所谓的二聚体可积系统，它们以配分函数的形式为环面上的二聚体模型提供哈密顿量。
- 自 Kenyon 的一篇文章 [**Ken02**]开创了等辐图上的二聚体模型研究以来，已有大量相关研究成果。更多综述及参考文献请参见 [**BdT12**] 。我们还想特别强调近期非常有趣的进展 [**BCdT20**] ，这些进展揭示了等辐图、二聚体与椭圆曲线之间的联系。■

7.3. 生成树、离散BKP与立方八面体箭图

本节考察生成树的统计量、 Z-不变量变换以及与簇结构的关系。最早研究生成树的是基尔霍夫 [**Kir47**], ，尽管他并未以概率论的方式思考它们。

定义 7.9。生成树模型 的样本空间为

$$\Omega_G = \{R \subset E : R \text{ covers } V,\ R \text{ is cycle free}, R \text{ is connected}\}. \tag{7.27}$$

每个 $R \in \Omega_G$ 都称为一棵生成树。 ■

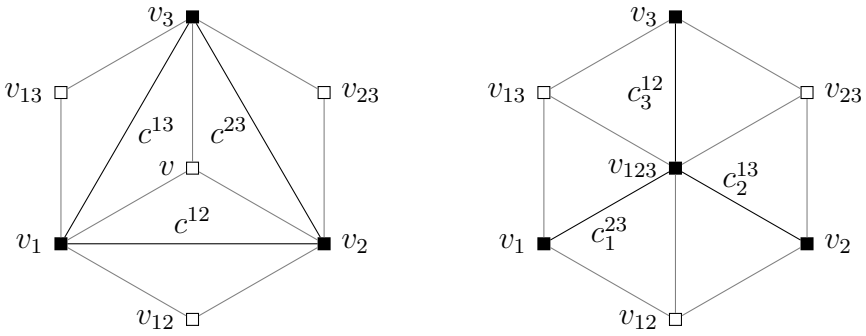
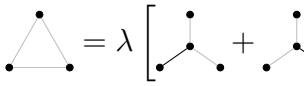
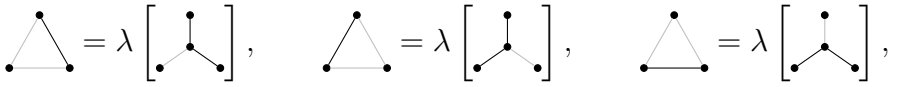
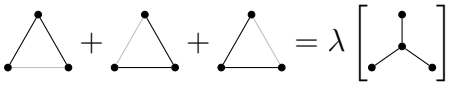


图 7.3。生成树立方体正面（左）和背面（右）的标记约定。

我们可以在图 G 中用星形替换三角形，反之亦然。由于我们打算寻找一种 Z-不变变换，这就引出了图形方程。

(7.28) 

(7.29) 

(7.30) 

我们将星形中出现的四个顶点与立方体的四个黑色顶点对应起来。随后，将星形和三角形的六条边与立方体的六个四边形对应起来，见图 7.3。在这一对应下，将上述图形方程转化为代数表达式可得

$$1 = \lambda[c^{12} + c^{23} + c^{13}], \tag{7.31}$$

$$c_3^{12} = \lambda[c^{23}c^{13}], \qquad c_1^{23} = \lambda[c^{12}c^{13}], \qquad c_2^{13} = \lambda[c^{12}c^{23}], \tag{7.32}$$

$$c_3^{12}c_1^{23} + c_2^{13}c_1^{23} + c_3^{12}c_2^{13} = \lambda[c^{12}c^{23}c^{13}]. \tag{7.33}$$

由这些方程可计算得出，以下定理成立。

˜定理 7.10. 设 L 为三角形， L 为星形。设 f 为将三个边权重 c^{kl} 映射到

$$c_j^{kl} = \frac{1}{c^{kl}} \frac{c^{12}c^{23}c^{13}}{c^{12} + c^{23} + c^{13}} \quad \text{for } \{j,k,l\} = \{1,2,3\} \tag{7.34}$$

并设 g 为将边权重 c_j^{kl}映射到的函数

$$c^{kl} = \frac{1}{c_j^{kl}}(c_3^{12}c_1^{23} + c_3^{12}c_2^{13} + c_1^{23}c_2^{13}) \quad \text{for } \{j,k,l\} = \{1,2,3\}. \tag{7.35}$$

˜ ˜那么，三元组 (L， L， f) 和 (L， L， g) 是 Z-不变变换。这些变换称为星-三角变换 [**Ken99**]. ■

Temperley 双射 [**Tem74**] 将 G 上的生成树与细化图 G^D上的二聚体构型联系起来。由于我们关注二聚体图对偶上的簇表述，因此直接在箭图 [**GK13**]层面解释相关构造。

定义 7.11. 设 G 为平面图， $\mathfrak{Q}_G$ 为其关联的四边形图（定义 2.23）， $\mathcal{Q}$ 为 $\mathfrak{Q}_G$的立方八面体箭图（定义 5.10），另见图 7.4。设 c ：

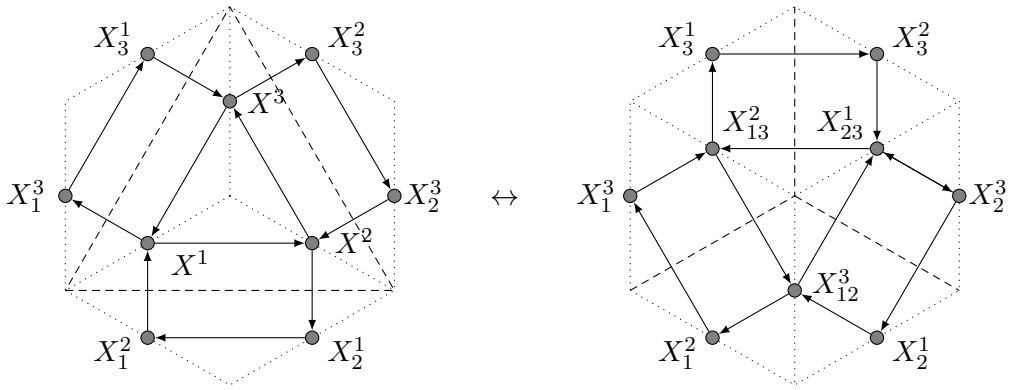


图 7.4. 立方体翻转前后：生成树的图 G （虚线）、四边形图 $\mathfrak{Q}_G$ （点线）以及相应的立方八面体箭图 $\mathcal{Q}$ （箭头和灰色顶点）。

$E(G) \to \mathbb{C}$ 为定义在 G 的边上的函数（称为电导），并定义函数X： $V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 为

$$X_{(e,e')} = \frac{c_e}{c_{e'}}, \tag{7.36}$$

其中 $e,\ e' \in E(G)$ 和 $(e,\ e')$ 是 G 的一个角（因此也是 $\mathcal{Q}$ 的一个顶点），满足在 e 和 e' 的公共顶点处， e' 按逆时针顺序排在 e 之后。于是我们称 $(\mathcal{Q},\ X)$ 为 G 的电阻簇结构 。■

特别是，我们从图 7.4 中观察到， G 的三角形和星形被立方八面体箭图的两个基本区域所取代（参见第 5 节.2.3）。请注意，我们在图 7.4 中使用了移位记号（参见第 47 页），因此每当 $e = (v_i,\ v_j)$ 时， c_e 就会被 c^{ij} 取代。

引理 7.12. 设 c 为图 G 上生成树模型的边权重， $\tilde{c}$ 为在 G 上进行星-三角变换后 G 上的~ ~ ~边权重。设 $(\mathcal{Q}, X)$,$(\mathcal{Q}, X)$ 分别为 G 和 G 在星 - 三角变换前后的电阻簇结构。那么，$(\mathcal{Q}, X)$ 可通过立方八面体翻转从 $(\mathcal{Q}, X)$ 得到，该翻转由四次突变构成（见定义 5.11）。■

证明。利用 $X^1X^2X^3 = 1$ 属于电阻子簇这一事实进行简单计算。 □

并非每个具有立方八面体箭图的簇结构都是电阻器簇结构，但存在一个简单的判据。

定义 7.13. 设 (Q, X) 是四边形图 $\mathfrak{Q}$ 的立方八面体箭图簇结构。那么，如果对于每个非边界顶点 v ， $\mathfrak{Q}$ 的簇变量 X 都属于 电阻子簇 [**GK13**] 。

$$\prod_{(e,e')\sim v} X_{(e,e')} = 1 \tag{7.37}$$

成立，其中乘积遍历与 v 相邻的角 (e, e') 。 ■

电阻簇结构位于电阻子簇中，因为四边形图的四边形上所对应的电导，其四边形边上的簇变量是这些电导的商 c_e 。反过来，如果 X 是电阻子簇中的变量，那么我们可以对它们积分，得到四边形上的电导。我们可以选取的积分常数会导致所有电导同时缩放。这种同时缩放不会影响生成树模型的统计量，因此被视为规范自由度。

注 7.14。“电阻网络子簇”这一名称源于电导替换规则最初是在研究电阻网络上的星-三角变换时提出的。特别是，由基尔霍夫电路定律 [**基尔47**] 和欧姆定律 [**欧姆27**]可知，电压满足离散拉普拉斯方程。现在我们再次要在图 G中用一个替换一个三角形，并指定新的电导（与 I 和 U无关），使得电流 I 和电压 U 的解只需在相关边上改变。由此得到以下三个方程

$$(U_1-U_2)c^{12}+(U_1-U_3)c^{13}=(U_1-U_{123})c_1^{23}, \tag{7.38}$$

$$(U_2-U_1)c^{12}+(U_2-U_3)c^{23}=(U_2-U_{123})c_2^{13}, \tag{7.39}$$

$$(U_3-U_1)c^{13}+(U_3-U_2)c^{23}=(U_3-U_{123})c_3^{12}. \tag{7.40}$$

当且仅当电导满足星-三角变换中出现的电导方程时，这些关系才成立，见定理 7.10。注意，也可以将电压视为从 $U\colon V\to\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 到二维空间的函数，此时星-三角变换得到的电导仍满足上述方程。但在高维情形下，这通常是不可能的。事实上，要使这种电导变换存在，其条件恰好是：立方体中对应于黑色顶点的所有电压都映射到同一个平面上。这个条件将在 Kœnigs 网中体现出来，见第7.7节。■

我们来探究生成树与电阻子簇在何种意义上与离散BKP方程相关。

定义 7.15. 映射 $f\colon \mathbb{Z}^3\to\mathbb{C}$ 满足离散 *BKP* 方程 [**Miw82**] ，如果它在 $\mathbb{Z}^3$ 的每个立方体上都满足

$$ff_{123}+f_1f_{23}+f_2f_{13}+f_3f_{12}=0. \tag{7.41}$$

■

我们定义电导 $c\colon\ F(\mathbb{Z}^3)\to\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{Z}^3$ 的四边形上，依据函数 $f\colon\ \mathbb{Z}^3\to\mathbb{C}$

$$c^{kl}=\begin{cases}\frac{ff_{kl}}{f_kf_l} & f \text{ is at a white vertex},\\ \frac{f_kf_l}{ff_{kl}} & f \text{ is at a black vertex}.\end{cases} \tag{7.42}$$

若电导以此方式定义，直接计算 [**GK13**] 可得，立方体周围的电导满足

$$c_j^{kl}c^{kl}=\frac{c^{12}c^{23}c^{13}}{c^{12}+c^{23}+c^{13}}=c_3^{12}c_1^{23}+c_3^{12}c_2^{13}+c_1^{23}c_2^{13}, \tag{7.43}$$

对 $\{j,k,l\}=\{1,2,3\}$ 成立。因此，离散BKP方程与因式分解 (7.42) 一起推出定理 7.10 中的星形-三角形关系。反过来，$F(\mathbb{Z}^2)$ 上或 $F(\mathbb{Z}^2)$ 的矩形子图上的任意电导，都可以按 (7.42) 进行因式分解。当且仅当每个立方体中的电导都满足星形-三角形关系时，这种因式分解才能扩展到整个 $\mathbb{Z}^3$ 。

注 7.16。在枚举组合学中，离散BKP方程也称为立方体递推 [**CS04**]。以此别名，Henriques 和 Speyer [**HS10**]证明了离散 BKP 方程的四维一致性。■

7.4. 伊辛模型、dCKP 与六面体箭图

伊辛模型为图 G 的每个顶点 v 赋予一个自旋 s_v （向上或向下）。我们将这种赋值称为自旋态 $s\in 2^V$。自旋态的权重 ω（s）为

$$\omega(s)=\prod_{v\in V(G)}\prod_{v'\sim v}\begin{cases}\omega_e & \text{if } s_v\neq s_{v'},\\ 1 & \text{if } s_v=s_{v'},\end{cases} \tag{7.44}$$

其中 ω_e 为边权重。因此，伊辛模型的配分函数为

$$Z_{\mathcal{I}} = \sum_{s\in 2^V} \omega(s). \tag{7.45}$$

现在再假设 G 也是共面的。那么每个自旋态 s 都可以视为对偶边 $R_s \subset E^*$的一个子集，其中，当且仅当 $s_v \neq s_{v'}$成立时，边 e^* （ $e = (v, v')$）才属于 R_s 。每个子集 R_s 都由若干圈的并组成，称为 G^*的轮廓。此外，当且仅当 $s = s'$ 成立时， $R_s = R'_s$ 才成立；或者，与 s相比，s' 的所有自旋都反转。因此，伊辛模型的配分函数也可以写作

$$Z_{\mathcal{I}} = \sum_{s\in 2^V} \prod_{e^*\in R_s} \omega_e. \tag{7.46}$$

这使我们能够通过图 G上的边子集来定义伊辛模型，其中我们认为自旋态实际上位于对偶 G^*上。

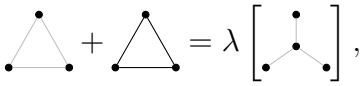
定义 7.17。伊辛模型 的样本空间为

$$\Omega_G = \{R \subset E : \forall v \in V : |\{e \in R : v \in e\}| \in 2\mathbb{Z}\}. \tag{7.47}$$

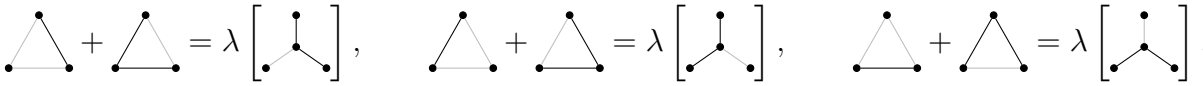
每个 $R \in\Omega_G$ 称为一个轮廓。 ■

与二聚体和生成树模型的情形一样，我们要寻找一个 Z-不变的局部变换。与生成树的情形一样，我们可以在图中用星形替换三角形G ，反之亦然。由此得到图形方程

(7.48)



(7.49)



我们可以将其转化为以下四个代数方程

$$1 + w^{12}w^{13}w^{23} = \lambda, \tag{7.50}$$

$$w^{jk} + w^{ik}w^{ij} = \lambda w^{ik}_j w^{ij}_k \tag{7.51}$$

其中 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$。这些方程可以求解，从而得到以下定理。

~定理 7.18。设 L 为三角形， L 为星形。设 f 为将三个边权重 w^{ij} 映射到

$$w^{ij}_k = \sqrt{\frac{(w^{jk} + w^{ik}w^{ij})(w^{ik} + w^{jk}w^{ij})}{(w^{ij} + w^{ik}w^{jk})(1 + w^{12}w^{13}w^{23})}} \tag{7.52}$$

for $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 并设 g为将边权重 w^{ij}_k 映射到的函数

$$w^{ij} = \frac{(w^{ij}_k w^{ik}_j)^2 + (w^{ij}_k w^{jk}_i)^2 - (w^{ik}_j w^{jk}_i)^2 - 1 + \sqrt{S^{+++}S^{+--}S^{-+-}S^{--+}}}{2((w^{ij}_k)^2 - 1)w^{ik}_j w^{jk}_i} \tag{7.53}$$

对于 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 其中

$$S^{\pm_1\pm_2\pm_3} = 1 \pm_1 w^{ij}_k w^{ik}_j \pm_2 w^{jk}_i w^{ij}_k \pm_3 w^{ik}_j w^{jk}_i. \tag{7.54}$$

~ ~因此，三元组 $(L,\ L,\ f)$ 和 $(L,\ L,\ g)$ 是 Z-不变变换。这些变换称为伊辛模型的星-三角变换 [**Kas96**]。■

要找到 τ 簇变量，我们需要进行变量变换：

$$\frac{1}{4}\left(w^{ij}-\frac{1}{w^{ij}}\right)^2=\frac{\tau\tau_{ij}}{\tau_i\tau_j}. \tag{7.55}$$

为了定义传播，即从其他变量中 τ_{123}，我们需要为平方根选择符号。我们选择正根，但也可以作出其他选择，Leaf [**Lea19**]对此进行了研究。τ 变量满足

$$(\tau\tau_{123}-\tau_1\tau_{23}-\tau_2\tau_{13}-\tau_3\tau_{12})^2=4(\tau_1\tau_2\tau_{23}\tau_{13}+\tau_2\tau_3\tau_{13}\tau_{12}+\tau_3\tau_1\tau_{12}\tau_{23}-\tau_1\tau_2\tau_3\tau_{123}-\tau\tau_{12}\tau_{23}\tau_{13}). \tag{7.56}$$

该方程称为离散 *CKP* 方程，也称为卡沙耶夫递推 [**Kas96**]。为了将这些 τ 变量识别为某个箭图的簇变量，我们首先定义相应的箭图。

定义 7.19。设 G 为一个平面图。 $\mathcal{Q}$ 伊辛簇结构的箭图是 $\mathfrak{Q}_G$ G的四边形图的六面体箭图，见定义 5.12。四边形图各顶点处伊辛簇结构的 τ 簇变量由方程（7.55）确定。四边形图各四边形中心处的 τ 簇变量由下式确定

$$\tau^{kl}=\sqrt{\tau\tau_{kl}+\tau_k\tau_l}, \tag{7.57}$$

其中， τ^{kl} 是四边形中心的变量，而 τ， τ_k， τ_{kl}， τ_l 是顶点处的变量。■

我们注意到，三角形和星形被六面体箭图的两个基本区域所取代（见图5.5中的 1○ 和 6○）。Kenyon 和 Pemantle [**KP16**] 证明，事实上，卡沙耶夫递推是由六面体翻转所诱导递推的一种约化。这一发现可表述为以下引理。

引理7.20. 设 ω 为图 G 上伊辛模型的边权重， $\tilde{\omega}$ 为在 G上进行星-三角变换后 G 上的边权重。设$(\mathcal{Q},\ X)$，$(\tilde{\mathcal{Q}},\ \tilde{X})$分别为星-三角变换前后的伊辛簇结构。那么，$(\tilde{\mathcal{Q}},\ \tilde{X})$可由$(\mathcal{Q},\ X)$通过六面体翻转得到；该翻转由六次突变组成（见定义 5.13）。■

证明。直接计算。 □

并非所有具有六面体箭图的簇结构都是伊辛簇结构。此外，相较于 τ 变量，我们更关注 X 变量，因为 X 变量由TCD映射唯一确定。幸运的是，有一个代数判据可以确定六面体箭图的 X 变量是否构成某个图的伊辛簇结构。

定义7.21. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图，且$(\mathcal{Q},\ X)$是一个具有六面体箭图 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$的簇结构。若簇变量 X 满足以下方程，则称其属于伊辛子簇 [**KP16**]：

$$(X_v)^2\prod_{f\sim v}(1+X^f)=1,\quad \text{for every black non-boundary vertex } v \text{ of } \mathfrak{Q}, \tag{7.58}$$

$$(X_v)^2\prod_{f\sim v}(1+(X^f)^{-1})^{-1}=1,\quad \text{for every white non-boundary vertex } v \text{ of } \mathfrak{Q} \tag{7.59}$$

其中， X^f 是四边形 f 中心的簇变量，而乘积遍历与 v相邻的所有四边形。■

引理 7.22. 图 G （定义 7.19）的伊辛簇结构中的 X 变量属于伊辛子簇。反过来，对于伊辛子簇中的任意 X 变量，都存在某个图 G对应的 τ 变量。■

证明。设 τ 变量是某个伊辛簇结构中的变量，它们位于图 Ω的顶点上。我们对变量进行标记，使得 τ 位于一个黑色顶点上， X也如此。我们将关联四边形中心处的簇变量分别记为 $\tau^{k,\ k+1}$ 和 $X^{k,\ k+1}$。然后，由方程（5.5）可知， X 变量满足

$$X = \prod_k \frac{\tau_k}{\tau^{k,k+1}} = \prod_k \frac{\tau_k}{\sqrt{\tau_k\tau_{k+1} + \tau\tau_{k,k+1}}}, \tag{7.60}$$

$$1 + X^{k,k+1} = \frac{\tau_k\tau_{k+1} + \tau\tau_{k,k+1}}{\tau_k\tau_{k,k+1}}. \tag{7.61}$$

因此，方程（7.59）成立。若考察的是白色顶点，类似的论证同样适用。现在我们证明逆命题，即从伊辛子簇中的 X 变量出发，可以恢复定义伊辛模型的 τ 变量。我们沿用标准思路，按照第 4.4 节的说明，利用 li-定向在四边形图上的二维系统中传播数据。给定标记四边形图极小元上 τ 变量的一些初始值后，我们可以通过四边形中心中的 X 变量，将数据传播到四边形顶点上的其余 τ 变量。随后，四边形中心中的 τ 变量由方程（7.57）确定。因此，所有 τ 变量均由四边形中心中的 X 变量确定。根据方程（7.61），如此确定的 τ 变量也与四边形顶点处的 X 变量相容，证明完毕。□

注7.23。我们提及一些观察，这些观察有助于理解伊辛模型及其与TCD映射的关系，但在本论文中无法进一步展开，因为这将需要对组合结构和代数作大量超出比例的解释。

- 伴随 Kashaev方程的线性问题与伴随生成树模型的电阻方程类似。它涉及旋量，在研究伊辛模型的 s-嵌入和等辐射嵌入方面具有核心作用 [**CS12**]。

- （1）2环模型是伊辛模型的轻微推广。事实上，伊辛子簇所包含的数据比定义伊辛模型统计量所需的数据更多，但这些数据恰好定义了 C（1）2环模型的数据 [**Mel18**]。

- 在研究直线复形时出现的卡沙耶夫递推与M系统之间的关系由Bobenko和Schief发现 [**BS15, BS16**]。我们将在第8.4节研究类似的关系。

- 关于定义在等辐图上的伊辛模型的更多有趣结果，请参见例如 [**BdT11, BdTR19, dT21**]. ■

7.5. 近乎完美匹配与 TCD映射

在第 7.2 节中，我们引入了平面二分图上的二聚体模型，以建立其与 TCD映射之间的关系。回顾一下，与每个 TCD $\mathcal{T}$ 相关联的图 $\mathcal{G}$ 都是平面二分图。此外，每个 TCD映射的 VRC 都带有定义在 $\mathcal{G}$的边上的边权，我们还为 VRC 引入了局部变换，见第2.4节。因此， $\mathcal{G}$ 是研究二聚体模型的自然候选对象。

此时，我们想指出，TCD映射的射影簇结构与 $\mathcal{G}$ 上二聚体模型的簇结构一致。不过，首先有一个重要细节需要注意。只有当 $\mathcal{G}$ 上确实存在二聚体构型时，在图 $\mathcal{G}$ 上定义二聚体模型才有意义。 $\mathcal{G}$ 存在二聚体构型的一个必要条件是白色顶点的数量等于黑色顶点的数量。然而，根据定理 2.43，白色顶点与黑色顶点的数量之差等于

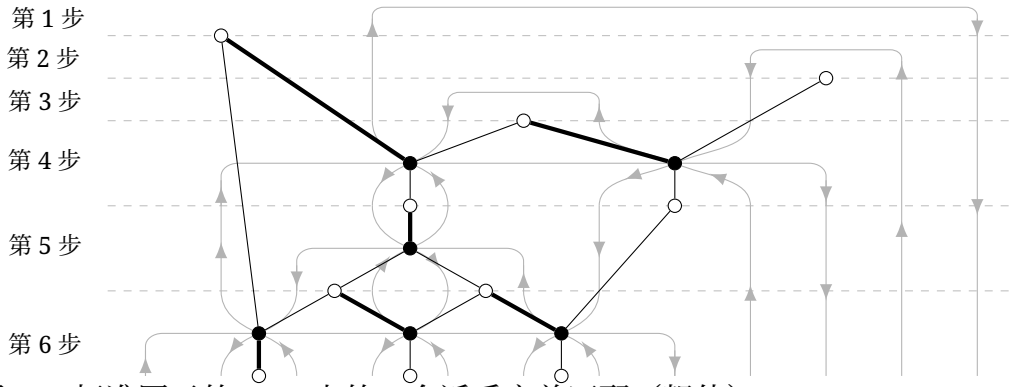


图 7.5. 标准图示的 VRC 上的一个近乎完美匹配（粗体）。

$\mathcal{T}$ 的最大维数加一。但极小TCD $\mathcal{T}$ 的最大维数始终至少为零。因此，为了在 $\mathcal{G}$ 上定义二聚体模型，我们需要对完美匹配稍作推广。

定义 7.24。设 G 是一个共面二分图，其中所有边界顶点均为白色，且满足 $|W| \geq |B|$。一个 近乎完美匹配 是边的一个子集，使得每个顶点至多被匹配一次，每个内部顶点都被匹配，且所有外部顶点中除 $|W| - |B|$ 之外的顶点都被匹配。若 $|W| > |B|$ ，我们将 G 上的二聚体模型的样本空间 Ω_G 定义为 G 的近乎完美匹配集合。■

当 G 存在完美匹配时，我们有 $|W| = |B|$ ，此时定义 7.24 与定义 7.5 一致。对于每个由 TCD 映射得到的图 $\mathcal{G}$ 是否都存在近乎完美匹配，这一点并非先验显然。

引理 7.25. 每个与 TCD 相关联的二分图 $\mathcal{G}$ 都存在一个近乎完美匹配。■

证明。首先注意到，如果 $\mathcal{G}$ 存在几乎完美匹配，那么任何通过蜘蛛变换或重新分裂与 $\mathcal{G}$ 相关的˜也存在几乎完美匹配。原因是我们可以在局部替换几乎完美匹配。图形方程 (7.16)–(7.19) 展示了蜘蛛变换的情形，而重新分裂的情形也很容易验证。回顾一下，在定义 2.4 中，我们为给定的端点匹配构造了标准图。我们沿用定理 2.43 证明中的思路，在那里我们为给定的端点匹配构造了一个最大维数的 TCD映射，另见图 2.13。在该证明中，我们逆向执行标准图的构造步骤。这里我们再次逆向执行这些步骤来构造标准图，同时在此过程中也为$\mathcal{G}$ 选择几乎完美匹配的边，构造示例见图 7.5。第一步是在外面添加一个白色顶点；由于没有边，它未匹配。每当添加一条右行弦时，我们就在该弦下方添加与黑色顶点数量相同的白色顶点。令 w_1、……、w_{k+1} 为该弦上方的白色顶点，令 v_1、……、v_k 为该弦下方的白色顶点，令b_1、……、b_k 为弦上的黑色顶点。如果 w_i 与 $i \leq k$ 尚未匹配，我们就将边 (w_i, b_i) 加入匹配中；否则，将边 (b_i, v_i) 加入匹配中。我们注意到，未匹配顶点的数量保持不变，且只有边界顶点未匹配。每当添加一条左行弦时，我们在该弦下方添加的白色顶点数比弦上的黑色顶点数多一个。令 w_1、……、w_{k-1} 为该弦上方的白色顶点，令 v_1、……、v_k 为该弦下方的白色顶点，令 b_1、……、b_{k-1} 为弦上的黑色顶点。如果 w_i 与 $i < k$ 尚未匹配，我们就将边 (w_i, b_i) 加入匹配中；否则，将边 (b_i, v_i) 加入匹配中。我们注意到，未匹配顶点的数量增加了一个，且只有边界顶点未匹配。因此，我们总能构造一个具有相同

端点匹配：任何具有几乎完美匹配的给定 TCD。由于这一性质在重新分裂和蜘蛛变换下保持不变，故该断言得证。□

除了组合结构之外，在将二聚体模型与 TCD映射相关联之前，还有另一个重要方面需要处理。请注意，TCD映射的 X-簇变量的定义 5.14 中包含一个符号因子，而我们在公式 (7.14) 中引入二聚体模型的 X-簇变量时并没有这个因子。因此，我们无法直接将 TCD映射的 VRC 中出现的边权与二聚体模型的边权对应起来。我们还需要一个额外的相位因子。

定义 7.26. 设 G 是一个二分平面图。Kasteleyn 相位 $\varphi\colon E\to\mathbb{C}$ 是定义在 G 的边上的函数，满足

$$\prod_{e\sim f}\varphi_e=(-1)^{\frac{1}{2}\deg f+1}, \tag{7.62}$$

对于 G 的每个面 f，均有此性质。 ■

几乎显而易见，每个二分平面图都存在 Kasteleyn 相位；例如，可以沿用我们在注 5.36 中解决规范问题时所用的论证。此外，还可以定义取值仅为 $\{\pm1\}$ 的 Kasteleyn 相位，而对于任何二分平面图 [**Kas61, TF61**]，这类相位也都存在。不过，有时（例如参见第 10.1 节）使用取值在 $\mathbb{C}$ 中的 Kasteleyn 相位会更方便。

定义 7.27. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft}\to\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 TCD映射，设 $\mathcal{G}$ 为其关联的二分图，并设 φ 是 $\mathcal{G}$ 的一个 Kasteleyn 相位。与 TCD映射 T 关联的二聚体模型是定义在 $\mathcal{G}$上的二聚体模型，其样本空间由定义 7.24 中所述的近乎完美匹配集合构成。该二聚体模型的边权 ω 由 VRC 的边权 λ 和 Kasteleyn 相位 ϕ 按 $\omega_e=\varphi_e^{-1}\lambda_e$ 确定，其中所有 $e\in E$均满足此关系。■

在此定义中，二聚体模型的边权可能并且一般确实不是正实数。因此，无法对其作统计学解释。不过，其代数性质，尤其是配分函数在局部变换下的不变性以及面变量的变换行为，均保持不变。另一方面，也存在一些 TCD映射，其关联的二聚体模型的边权为正实数；著名的例子见第10章。当且仅当所有 X变量均为正时，TCD映射才能配备具有正边权的 VRC。此外，当然不仅可以将二聚体模型与 T 本身关联，也可以与 T的各个截面关联。事实上，第10章中的所有例子都是针对 T的第一个截面而言的。研究具有正 X 变量的所有 TCD映射，无论是 T 本身的，还是相对于其某个截面的，肯定都是一项有趣的工作。

定理 7.28. 设 T 是一个具有向量关系构型 R的 TCD映射。定义 5.14 中 T 的射影簇结构，与定义 7.27 中 T 的二聚体模型的簇结构相同。■

证明. 引入 Kasteleyn 相位后，由定义可知结论成立。 □

值得注意的是，历史上 [**Kas61**]，人们使用 Kasteleyn 相位来引入 Kasteleyn 矩阵 K，其列和行分别对应平面二分图 G 的黑色顶点和白色顶点，而矩阵元素对应于 $\varphi_e\omega_e$。令人惊讶的是，这使得配分函数 Z可以简单地写成 $Z=|\det K|$。还值得注意的是，可以将 TCD映射的提升视为 K的余核中的元素。我们在此不深入探讨这种方法，但事实证明，它在环面上定义的 TCD映射的研究中很有用，例见我们与 George 和 Ramassamy 合作的工作 [**AGR21**]。

本节的主要结果和目的在于定理 7.28，即确认 TCD映射的簇结构与二聚体簇结构相一致。不过，二聚体模型也可用于为 TCD映射关联全局不变量。我们尚未对此主题进行完整分析，因此也无法给出全面阐述。作者认为，所需的大多数工具和结果已在另一种背景下取得，即 Postnikov 理论的背景下 [**Pos06**]（另见 [**AHBC+14**]，其中的阐述技术性较低）。尽管如此，我们仍想简要概述一下其中的可能性。

考虑一个 TCD 映射 T 及其 VRC。固定图 $\mathcal{G}$的边界顶点的一个子集 I，使得 $|I| = |W| - |B|$。令 Z_I 为与 $\mathcal{G}$ 相关联的配分函数，该函数限制在与 I匹配的近乎完美匹配上。根据第 7.2 节的结果， Z_I 在为 $\mathcal{G}$的内部顶点选取不同的齐次提升时保持不变，因为这相当于缩放与这些顶点相邻的边权。此外，在局部变换下，配分函数 Z_I 仅会乘上一个因子。因此，任意量 $\frac{Z_I}{Z_{I'}}$ 都是 T 在局部变换以及内部顶点缩放下的不变量。此外，考虑存在两族集合I_1， I_2，……，I_m和 I'_1， I'_2，……， I'_m，使得 $\cup_{i=1}^m I_i = \cup_{i=1}^m I'_i$的情形。那么实际上，量

$$\frac{\prod_{i=1}^m Z_{I_i}}{\prod i = 1^m Z_{I'_i}} \tag{7.63}$$

在不同的提升、局部变换和射影变换下保持不变。因此，我们得到了 T 的真正全局射影不变量。对于哪些集合 I，受限配分函数 Z_I 实际上是非平凡的，也就是说，对于哪些 I，与 I 匹配的几乎完美匹配集合非空，这一点并非先验显而易见。不过，我们强烈猜测，对于定义在平衡TCD上的TCD映射，也就是端点匹配为循环移位的情形，所有 Z_I 都是非平凡的。此外，并非所有 Z_I 都彼此独立。相反，它们可以解释为 τ-簇变量。正如方程（7.63）中的某些真正全局不变量集合，可以解释为 X-簇变量。另一个问题是，能否以及如何从真正全局不变量重构TCD映射。我们也相信这可以做到，而且我们还相信，只需将 Postnikov 理论中的答案转换过来即可。

最后需要指出的是，对于特定仿射规范下的TCD映射，还可以赋予其他不变量。在即将与 Melotti 和 de Tilière 合作开展的研究中，我们将重点讨论一些例子，其中 $\mathcal{G}$ 的顶点可以解释为位于格 A_3 上 [**AMdT22a**]。

7.6. 电阻子簇和伊辛子簇中的 TCD映射几何

我们已经证明，每个 TCD映射都具有一个二聚体模型，见定义 7.27。每个二聚体模型都会导出一种簇结构。如果二聚体模型与某个 TCD映射相关联，那么该二聚体模型的簇结构就是该 TCD映射的射影簇结构。此外，我们还发现，如果二聚体模型的簇变量属于电阻子簇（定义 7.13），它们就会导出一个生成树模型。类似地，如果簇变量属于伊辛子簇（定义 7.21），它们就会导出一个伊辛模型。因此，我们不妨提出这样的问题：对于哪些 TCD映射，簇变量的取值会落在电阻子簇或伊辛子簇中？要回答这个问题，首先必须确认组合结构是正确的。电阻子簇和伊辛子簇都与四边形图相关联，不过对应的箭图不同。我们将在接下来的章节中证明

(1) 当且仅当 Q网的射影簇变量位于电阻子簇中（第7.7节）时，Q网才是 Kœnigs 网 [**BS08**]；(2) 当且仅当达布映射的射影簇变量位于伊辛子簇中（第7.8节）时，达布映射才是 Carnot映射 [**Sch03**]；(3) 当且仅当直线复合体的射影簇变量位于电阻子簇中时，直线复合体才是 Doliwa 复合体。

另一方面，我们已经证明，电阻子簇总是伴随着离散BKP方程，而伊辛子簇总是伴随着离散 CKP 方程。离散KP、离散BKP和 dCKP 方程的出现，为研究离散可积系统提供了联系。这些方程也被反复发现会伴随离散微分几何中的对象出现，尽管必要的计算都是针对具体情况分别进行的。

定义 7.29. 设 T 是一个 TCD映射。我们称 T

(1) 若射影箭图是立方八面体，且 T 的射影簇变量属于电阻子簇，则称其为射影 *BKP*；
(2) 若射影箭图是六面体，且 T 的射影簇变量属于伊辛子簇，则称其为射影 *CKP*。

我们还称 T 关于某个超平面是仿射 *BKP*（分别为 *CKP*），如果仿射箭图是立方八面体（六面体），且仿射簇变量属于电阻（分别为伊辛）子簇。■

根据这个定义，Q网是 Kœnigs 网当且仅当其射影簇变量属于电阻子簇这一结论，等价于声称：Q网是射影 BKP 当且仅当它是 Kœnigs 网。类似地，我们可以重新表述本节开头的另外两个结论：达布映射是射影 CKP 当且仅当它是 Carnot映射，而直线复合体是射影 BKP 当且仅当它是 Doliwa复合体。

备注 7.30。请注意，在文献中，Q网、达布映射和直线复形（例如 Kœnigs 网等）的约化，是通过将这些映射视为定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上来定义的。另一方面，电阻子簇和伊辛子簇的定义适用于一般四边形图。与之前一样，我们可以将（极小）四边形图视为定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上的映射的柯西数据。我们将证明，与定义在 $\mathbb{Z}^N$ 上的映射约化相关的条件，确实对应于柯西数据的簇变量所满足的子簇条件。■

我们已经列出了射影簇结构的子簇与几何约化之间的等价关系。下面列出我们将要证明的其他结果。

(1) CQ 网（也称为 C-四边形格）相对于无穷远平面是仿射 CKP，见第7.8节。(2) 线性直线复形相对于一条关于关联的反对称双线性形式为各向同性的直线是仿射 CKP，见第8.4节。(3) S-图相对于任何经过指定无穷远点的直线是仿射 CKP，见第8.3节。(4) s-嵌入相对于无穷远点是仿射 CKP，见第10.3节。(5) Schief 映射相对于无穷远平面是仿射 BKP，见第7.12节。(6) 如果首先将互易图形提升到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$，，则它相对于一条直线既是射影 BKP，也是仿射 BKP，见第7.13节。(7) 内接于圆锥曲线的 Q 网在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中相对于圆锥曲线上的任意点是仿射 BKP，见第8.1节。(8) 内接于二次曲面的 Q 网在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中相对于二次曲面的一个生成元是仿射 BKP，见第8.2节。(9) 与二次曲面相切的达布映射相对于二次曲面的一个生成元是仿射 BKP，见第8.5节。

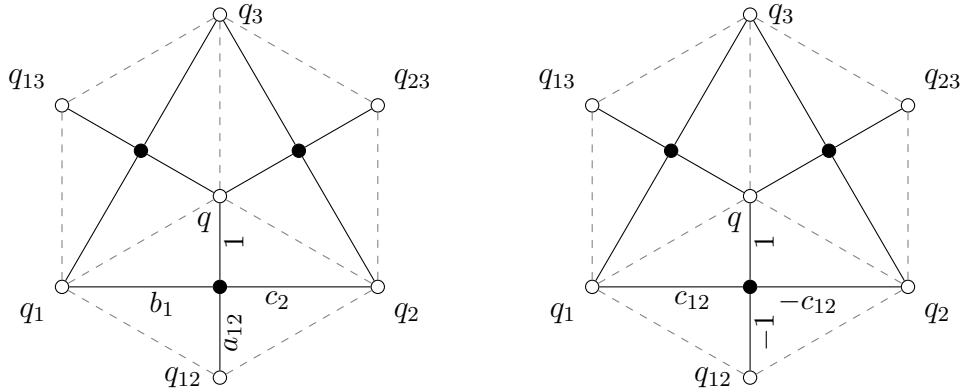


图 7.6. 左侧为 Q网立方体中三个相邻四边形的 VRC 标签和边权，右侧为 T-网的标签和边权。

(10) A-网的普吕克提升相对于普吕克二次曲面的一个各向同性平面是仿射 BKP，见第8.7节。(11) Cox 格的普吕克提升相对于普吕克二次曲面的一个各向同性直线是仿射 BKP，并且相对于特定的三维空间也是仿射 BKP，见第 8.8 节。(12) h-嵌入相对于无穷远点是仿射 BKP，见第10.2节。

7.7. Kœnigs 网、BKP 与电阻子簇

本截面所讨论的 Kœnigs 网由 Bobenko 和 Suris [**BS07a**]提出，Doliwa [**Dol07**], 也独立提出了这一概念，并将其称为 B-四边形格。关于格上的 Kœnigs 网，有多种几何和代数刻画，参见 DDG 书[**BS08**，第 2 截面3]。我们直接在四边形图上给出一个定义，它既是对 $\mathbb{Z}^2$ [**BS07a**] 中几何刻画的推广，也是对 $\mathbb{Z}^N$ [**Dol07**]中几何刻画的改述。

定义7.31. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图， $q:\ V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Q-网。在任意一个度为 d_v的顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$处，有 d_v 个相邻顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_{d_v}$，以及 d_v 个对角相邻顶点 $v_{12}, v_{23}, \ldots, v_{d_v 1}$。如果在每个顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$处，我们称 q 为一个 ***Kœnigs*** 网 。

$$\dim \operatorname{span}\{q(v), q(v_1), q(v_2), \ldots, q(v_{d_v})\} = d_v, \tag{7.64}$$

and

$$\dim \operatorname{span}\{q(v_{12}), q(v_{23}), \ldots, q(v_{d_v 1})\} = d_v - 1, \tag{7.65}$$

均得到满足。 ■

注意，方程 (7.64) 是对 Q-网 q 的一般位置假设，而方程 (7.65) 刻画了 Kœnigs 网。

定理 7.32. 满足一般位置条件 (7.64) 的 Q-网 $q:\ V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是射影 BKP，当且仅当它是 Kœnigs 网。■

证明。我们需要检查对于任意 $v \in V(\mathfrak{Q})$，方程 (7.65) 都成立。先考虑 $d_v = 3$ 的情形。请看图 7.6，我们对黑色顶点进行了缩放，使得与 v 关联的边权重均为 1。因此我们得到关于

齐次提升

$$\hat{q} + b_1\hat{q}_1 + a_{12}\hat{q}_{12} + c_2\hat{q}_2 = 0, \tag{7.66}$$

$$\hat{q} + b_2\hat{q}_2 + a_{23}\hat{q}_{23} + c_3\hat{q}_3 = 0, \tag{7.67}$$

$$\hat{q} + b_3\hat{q}_3 + a_{13}\hat{q}_{13} + c_1\hat{q}_1 = 0. \tag{7.68}$$

我们可以从第二个方程中解出 q_2，从第三个方程中解出 q_3，然后将这两个表达式代入第一个方程，从而得到

$$\hat{q}\left(1 - \frac{c_2}{b_2} + \frac{c_2}{b_2}\frac{c_3}{b_3}\right) + a_{12}\hat{q}_{12} - a_{23}\hat{q}_{23} + a_{13}\hat{q}_{13} + \hat{q}_1\left(b_1 + \frac{c_2}{b_2}\frac{c_3}{b_3}c_1\right) = 0. \tag{7.69}$$

如果 $\hat{}q$ 的系数为零，那么 q_1、q_{12}、q_{23}、q_{13} 共面，由此可以推出整个立方体是共面的，这与一般性假设相矛盾。因此，q、q_{12}、q_{23}、q_{13} 共面，当且仅当 $\hat{}q_1$ 的系数为零，即当

$$\frac{c_1c_2c_3}{b_1b_2b_3} = -1 \tag{7.70}$$

成立。根据定义 7.29，如果一个 Q-网的射影簇变量（定义 5.14）属于电阻子簇，则该 Q-网是 BKP；而根据定义 7.13，这又意味着在四边形图的每个顶点周围，簇变量的乘积均为 1。在 v 处，三个关联的簇变量为

$$X^k = -\frac{c_k}{b_k}. \tag{7.71}$$

因此，$X^1X^2X^3$ 的乘积为 1 等价于 q、q_{12}、q_{23}、q_{13}共面。若 $d_v \neq 3$，证明过程相同。□

如果不考虑与电阻子簇的关系，定理 7.32 的结果早已为人所知，具体而言：一个 Q-网是 Kœnigs 网，当且仅当其拉普拉斯不变量的乘积为一 [BS08，练习 2.21]。这里的拉普拉斯不变量（参见定义 5.17）为离散微分几何中已知的概念，并且恰好是该 Q-网的射影簇变量（参见引理 5.18）。

注意，定理 7.32 中对 Kœnigs 网的刻画是通过射影不变量给出的，因此在投影下保持不变。因此，我们可以去掉一般性假设，并将 Q-网视为 Kœnigs 网，当且仅当射影簇变量属于电阻子簇。

以下定理广为人知 [Dol07], ，但现在它也可由定理 7.32 轻松推得。

推论 7.33. Kœnigs 网具有一致性。 ■

证明。我们需要验证，如果映射 $q\colon V(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Kœnigs 网，那么经过立方体翻转后它仍然是一个 Kœnigs 网。然而，我们知道电阻子簇在立方体翻转下保持不变，因此该结论直接由定理 7.32 得出。□

在定理 7.32 中，我们已经证明 Kœnigs 网的射影簇变量属于电阻子簇。我们还在第 7.3 节给出了 Goncharov 和 Kenyon 的一个结果，说明簇变量与离散 BKP 方程（定义 7.15）之间的关系。现在我们简要概述这两个结果在 Kœnigs 网情形下如何一致。

Doliwa [Dol07] 证明，Kœnigs 网的 VRC 存在特定的边权重，使得每个四边形中的提升方程 ($\hat{}q$，$\hat{}q_i$，$\hat{}q_j$，$\hat{}q_{ij}$) 变为

$$\hat{q} - \hat{q}_{ij} = c_{ij}(\hat{q}_i - \hat{q}_j), \tag{7.72}$$

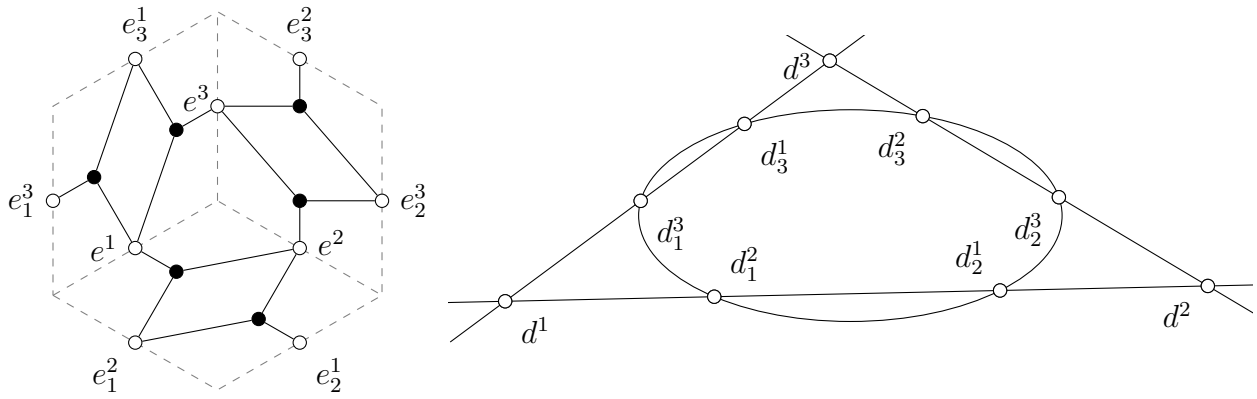


图 7.7. 达布映射的二分图 $\mathcal{G}$ 以及 Carnot 映射的几何。

其中 $c_{ij} \in \mathbb{C}$。该方程也称为***Moutard* 方程** [**Miw82**]，满足 $\mathbb{C}^n$ 中的 Moutard 方程（而非 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$）的网称为***T* 网** [**BS07a**]。请注意，在这种表示中，簇变量（分别是拉普拉斯不变量）变为

$$X^i = -\frac{c_{i,i-1}}{c_{i,i+1}}. \tag{7.73}$$

该方程与定义 7.11 中关于电阻簇结构的簇变量的方程相同。因此，我们可以将系数 c_{ij} 与生成树模型中的电导对应起来。Goncharov 和 Kenyon [**GK13**] 给出的将电导与 BKP 方程联系起来的因式分解（见第 7.3 节），与 Doliwa [**Dol07**]给出的将 T-网的系数与 BKP 方程联系起来的因式分解相同。若能利用四边形图的 li-定向，重现 Doliwa 关于 T-网存在边权 (7.72) 的结果，也会很有意思。不过，由于余下部分不再讨论 T-网，我们在此不探讨这个问题。

7.8. 卡诺映射、CKP 与伊辛子簇

Schief 引入了达布映射的一种相容约化 [**Sch03**], ，并将其与多重比方程和 CKP 方程联系起来。我们给出一种略有不同的刻画，这种刻画在研究四边形图时更为有利。

定义 7.34. 设 $\mathfrak{Q}$ 为一个四边形图，$d : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 为一个达布映射。在任一度为 d_v 的顶点 $v \in V(\mathfrak{Q})$ 处，将相邻边记为 e^1，e^2，$\dots e^{d_v}$，将与 v相邻的四边形中的其他边记为 e_2^1，$e_3^2, \dots, e_1^{d_v}$ 和 $e_{d_v}^1$，$e_1^2, \dots, e_{d_v-1}^{d_v}$。若在 $\mathfrak{Q}$ 的每个顶点 v 周围

$$\dim \operatorname{span}\{d(e^1), d(e^2), \dots, d(e^{d_v})\} = d_v - 1, \tag{7.74}$$

且 $d(e_2^1)$ $d(e_3^2) \dots, d(e_1^{d_v})$ $d(e_{d_v}^1)$ $d(e_1^2) \dots, d(e_{d_v-1}^{d_v})$ 位于同一个二次曲面上。 ∎

标记和几何的示例见图 7.7。注意，方程 (7.74) 是关于 d 的一般位置假设，而我们将公共二次曲面的存在视为卡诺映射的特征性质。Schief 将这些映射称为***CKP* 晶格**。遗憾的是，在我们看来，具有 CKP 方程的映射或晶格并非只有一种，因此我们选择了另一种名称。稍后便会明白我们为何选择“卡诺映射”这个名称。还要注意，Schief 的刻画是针对 $d_v = 3$ 的特殊情形，此时二次曲面是圆锥曲线。在 $\mathbb{Z}^n$ 上，Schief 的刻画意味着上述针对作为 $\mathbb{Z}^n$ 子图的极小四边形图的刻画。

定义 7.34 中的点是多边形 $(d^1,\ d^2,\ \ldots\ldots,\ d^n)$ 与二次曲面的交点。这使我们能够通过 Carnot[Car06] 的一个著名定理来刻画 CKP 达布映射。

定理 7.35（Carnot 定理）。设 $d^1, d^2, \ldots d^n$ 为张成空间 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$的 n 点。对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，设 d_i^{i+1}, d_{i+1}^i 为直线 $d^i d^{i+1}$ 上的两个点，但不是 d^i 或 d^{i+1}。那么，点 $2n$ d_i^{i+1}, d_{i+1}^i 位于一个不包含任何点 d^i 的二次曲面上，当且仅当

$$\mathrm{mr}(d^1, d_1^2, d^2, d_2^3, \ldots, d^n, d_n^1)\,\mathrm{mr}(d^1, d_2^1, d^2, d_3^2, \ldots, d^n, d_1^n) = 1 \tag{7.75}$$

成立。 ■

证明。让我们为每个 d^i 固定一个齐次提升 $\hat{}d^i$，并通过.....确定其他提升。

$$\hat{d}_{i+1}^i = u_i \hat{d}^i + v_{i+1}\hat{d}^{i+1} \quad \text{and} \quad \hat{d}_i^{i+1} = s_i \hat{d}^i + t_{i+1}\hat{d}^{i+1}. \tag{7.76}$$

将二次曲面视为由双线性形式 b 给出，并写作 $b_{ij} = b(\hat{}d^i, \hat{}d^j)$。于是我们得到方程

$$u_i v_{i+1}^{-1} b_{ii} + u_i^{-1} v_{i+1} b_{i+1,i+1} + 2b_{i,i+1} = 0, \tag{7.77}$$

$$s_i t_{i+1}^{-1} b_{ii} + s_i^{-1} t_{i+1} b_{i+1,i+1} + 2b_{i,i+1} = 0. \tag{7.78}$$

我们可以消去 $b_{i,i+1}$，从而得到

$$b_{i+1,i+1} = \frac{s_i t_{i+1}^{-1} - u_i v_{i+1}^{-1}}{u_i^{-1} v_{i+1} - s_i^{-1} t_{i+1}} b_{ii} = \frac{s_i u_i}{t_{i+1} v_{i+1}} b_{ii}. \tag{7.79}$$

如果我们将这个方程应用于所有指标 i，就会得到相容性条件

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{s_i u_i}{t_{i+1} v_{i+1}} = 1. \tag{7.80}$$

另一方面，我们可以采用引理 5.16 中相同的论证，通过方程 (7.76) 中的系数来表示定理陈述中的多重比。因此，方程 (7.80) 的左端不过是定理陈述中的多重比的乘积，由此证明完毕。□

在初始选定 b_{11} 后，证明中出现的方程也确定了系数 $b_{i,\ i+1}$。因此，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中，二次曲面（圆锥曲线）完全确定；但对于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中的 $n > 2$，情况并非如此。

推论 7.36 ([Sch03])。满足一般位置条件 (7.74) 的达布映射 $d : E(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是 Carnot映射，当且仅当方程 (7.75) 在四边形图的每个顶点周围都成立。 ■

请注意，Carnot 定理中的维数一般位置假设就是定义 7.34 的一般位置假设，而 Carnot 定理中关于某些点互不重合的附加假设，就是 TCD 映射上的一般 0-一般性假设。

定理 7.37. 满足一般位置条件 (7.74) 的达布映射 $d : E(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是 Carnot 映射，当且仅当它是射影 CKP。 ■

证明。我们将推论 7.36 与伊辛子簇的定义7.21进行比较。对于四边形图的一个黑色顶点 v，我们给出证明；对于白色顶点，证明过程类似。达布映射在 v 附近的射影簇变量为

$$X^{i,i+1} = -\,\mathrm{cr}(d^{i+1}, d^i, d_i^{i+1}, d_{i+1}^i), \tag{7.81}$$

$$X = \mathrm{mr}(d^1, d_1^2, d^2, d_2^3, \ldots, d^n, d_n^1), \tag{7.82}$$

其中 X 是与 $\mathfrak{Q}$ 的顶点及 $X^{i,\ i+1}$ 是与 $\mathfrak{Q}$ 的面相关联的变量。利用交比的对称性，我们可以重新排列为

$$1 + X^{i,i+1} = \mathrm{cr}(d^{i+1}, d_i^{i+1}, d^i, d_{i+1}^i) = \mathrm{cr}(d^i, d_{i+1}^i, d^{i+1}, d_i^{i+1}). \tag{7.83}$$

现在我们回顾一下，簇变量属于伊辛子簇，当且仅当

$$(X)^2 \prod_{i=1}^{n} (1 + X^{i,i+1}) = 1, \tag{7.84}$$

在四边形图的每个顶点处，参见定义7.21。若将上文中 X 和 $(1 + X^{i,i+1})$ 的表达式代入并消去各项，则最后一个方程等价于 Carnot 定理。□

达布映射的相容性在其引入时便已得到证明 [**Sch03**]。在我们的设定中，相容性几乎可直接作为推论得出。

推论7.38. Carnot映射是一致的。 ■

证明。我们需要验证：如果一个映射 $d : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是 Carnot 映射，那么经过一次立方体翻转后，它仍然是 Carnot 映射。然而，我们知道伊辛子簇在立方体翻转下保持不变，因此该结论可直接由定理 7.37 得出。□

7.9. CQ 网

让我们将 Carnot 映射与文献中出现的另一类映射联系起来。Doliwa 引入了*C*-四边形格 [**Dol10b**], ，这是 Q网的一种约化，并且在仿射规范下体现了 CKP方程。为使论文中的措辞保持一致，我们将这些网称为 CQ网。Doliwa 通过 $\mathbb{Z}^N$ 中关于三维立方体的一条性质给出了 CQ网的定义。由于下文将解释的原因，如何将这一定义直接推广到四边形图并不明显。因此，我们先给出 Doliwa 的定义；在解释其与 Carnot映射的关系之后，再说明如何理解四边形图上的 CQ网。请注意，在此之前，我们也不会解释 Carnot映射的精确一般位置假设。

定义7.39。设 H 为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中的一个超平面，且 $q : V(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 为一个 Q-网。在每个立方体中，考虑三条直线 ℓ^1, ℓ^2, ℓ^3 它们是对面所在平面的交集，即

$$\ell^k = \mathrm{span}(q, q_i, q_j) \cap \mathrm{span}(q_k, q_{ik}, q_{jk}) \tag{7.85}$$

对于任意一对彼此不同的指标 i、j、$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$。若直线 ℓ^k 与 H 的三个交点共线，则称 q 是关于 H 的*CQ* 网。■

Doliwa 本人通过*Darboux*系统 [**Dol10b**]给出了与卡诺映射的关系。本文不讨论 Darboux系统。不过，我们将展示卡诺映射与 CQ 网之间存在另一种关系。归根结底，我们与卡诺映射的关系很可能与 Doliwa 的相同，但采用了大幅简化的方法，使其几乎变得显而易见。

引理7.40。Q-网 $q : V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是关于 H 的 CQ 网，当且仅当 $\sigma_H(q)$ 是一个 Carnot映射。■

证明。记 $d = \sigma_H(q)$ 为一个达布映射。若六边形 d^1、d_1^2、d_{12}^3、d_{23}^1、d_3^2、d^3 的各顶点位于同一圆锥曲线上，则该映射是 Carnot 映射。根据 Pascal 定理 [**Bla40**]，当且仅当该六边形的对边交点共线时，条件成立。六边形的六条边是每个三维立方体的六个平面与 H 的交线。□

因此，四边形图上的 CQ 网定义是明确的，它是一个 1-一般 Q-网 $q : V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，满足 H 处于一般位置，且 $\sigma_H(q)$ 是 Carnot映射。其原因之一

不能立即将 Doliwa 的 CQ网 定义推广到四边形图，其原因在于，与梅涅劳斯定理和 Carnot 定理不同，据我们所知，目前没有将 Pascal 定理明显推广到更大多边形的方法。让我们用两个显然但相关的推论结束本节。

推论 7.41. Q-网是仿射 CKP 网，当且仅当它是 CQ 网。 ■

证明。由于 Q-网的截面是一个达布映射，且达布映射是射影 CKP 当且仅当它是 CKP，参见定理 7.37。□

推论 7.42。CQ网是一致的。 ■

证明。由推论7.38立即得出。 □

7.10. Doliwa复合体、BKP与电阻子簇

本节将介绍一种与电阻子簇对应的直线复合体约化（见第3.6节）。我们先考察直线复合体的一些有用性质。回顾一下，直线复合体 l 会为每个度为d_v的顶点 $v \in V(\Omega)$关联一个($d_v - 2$)-空间 S_v，见定义3.11。设 f、$f' \in F(\Omega)$是与 v相邻的两个面，并将 $S^{f,f'}_v$ 记作由 S_v中所有满足以下条件的点 $l(f'')$张成的子空间： f''与 v相邻，但既不等于f，也不等于 f'。

定义7.43. 设 $l: F(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 为一个直线复合体。那么， l 的焦点是满足以下条件的映射： $\vec{E}(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$

$$F(e) = l(f)l(f') \cap S^{f,f'}_{v'}, \tag{7.86}$$

其中， $e = (v, v')$和 f、f'是与 e相邻的两个面。 ■

注意，我们用 $\vec{E}(\Omega)$ 表示 Ω 的定向边，即

$$\vec{E}(\Omega) = \{(v, v') : \{v, v'\} \in E(\Omega)\}. \tag{7.87}$$

焦点的这一 [定义类似于 **AGPR19**]中为计算簇变量而定义的辅助点。引入焦点使我们也能够以与 Q网 情形非常相似的方式引入拉普拉斯不变量（见定义 5.17）。

定义 7.44. 设 $l: F(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个直线复合体。拉普拉斯不变量 是一个映射 $\Lambda: E(\Omega) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$，满足

$$\Lambda_e = -\operatorname{cr}(l(f), F(v'), l(f'), F(v)), \tag{7.88}$$

对于每条边 $e = (v, v') \in E(\Omega)$，其中 $e^* = (f, f')$ 以及 v，f，v'，f' 在 Ω 中按逆时针顺序出现。 ■

现在，我们用拉普拉斯不变量给出四边形图上 Doliwa 复合体的定义。下面我们还将根据格点多重比方程给出一种解释，稍后也将讨论其几何解释。

定义 7.45. *Doliwa*复合体 是一种直线复合体 $l: F(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$，满足在 Ω 的每个内部顶点周围，拉普拉斯不变量的乘积为 1。■

据作者所知，文献中尚未明确定义过 Doliwa 复合体。不过，它们隐含地出现在与 Kœnigs 网以及 Doliwa 定义的另一种 Kœnigs 网版本相关的讨论中。本节将详细阐述这些关系。首先来看它与电阻子簇的关系。

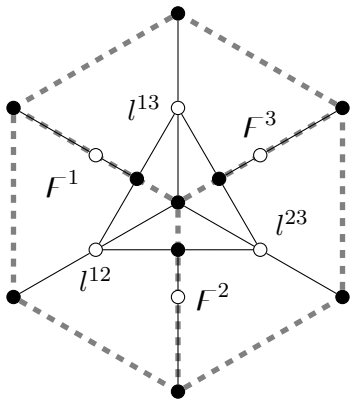


图 7.8. 直线复合体中三个四边形（虚线、粗线）的标记及图 $\mathcal{G}$ 。

引理 7.46. 设 $l\colon F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个翻转一般的直线复合体。对于每条非边界边 $e \in E(\mathfrak{Q})$，存在唯一的面 $f_e \in F(\mathcal{G})$，反之亦然。l 的拉普拉斯不变量与射影簇变量相同，即

$$\Lambda_e = X_{f_e} \tag{7.89}$$

对于所有 $e \in E(\mathfrak{Q})$。 ■

证明。固定一条边 $e \in E(\mathfrak{Q})$。我们总能在 $\mathcal{G}$ 的白色顶点处进行重新分裂，这些白色顶点对应于 $\mathfrak{Q}$ 的相邻顶点，从而使面 f_e 的度为四，因为 l 是翻转一般的。回想一下，重新分裂不会改变射影不变量 X_{f_e}。那么， e 处的断言等价于引理 5.16。□

定理 7.47. 直线复合体是射影 BKP，当且仅当它是 Doliwa复合体。 ■

证明。根据电阻子簇的定义 7.13、Doliwa 复合体的定义 7.45 以及引理 7.46，可立即得出。□

推论 7.48. Doliwa 复合体是一致的。 ■

证明。我们需要验证：若映射 $l\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Doliwa 复合体，那么经过立方体翻转后，它仍然是一个 Doliwa 复合体。然而，我们知道电阻子簇在立方体翻转下保持不变，因此该结论直接由定理 7.47 得出。□

因此，我们也可以将 Doliwa 复合体视为定义在 $\mathbb{Z}^N$ 格上的对象。Doliwa 复合体有一个简单的格刻画。回忆一下，在线复合体中，每个立方体 $C(\mathbb{Z}^N)$ 都对应于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$中的一条直线。

引理 7.49. 设 $N \in \mathbb{N}, N \geq 3$，且设 $l\colon F(\mathbb{Z}^N) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$是一个 Doliwa 复合体。那么，对于 $\mathbb{Z}^N$ 中的每个三维立方体，六个交点成对合，即

$$\mathrm{mr}(l^{12}, l^{23}, l^{13}, l_3^{12}, l_1^{23}, l_2^{13}) = \mathrm{mr}(l^{12}, l^{23}, l^{13}, F^3, F^1, F^2) = -1, \tag{7.90}$$

成立，标记见图 7.8。 ■

证明。请参见图 7.8。注意，由于直线复合体的定义和焦点的定义，立方体翻转前的三个焦点对应于立方体翻转后的直线复合体的三个点，即

$$l_1^{23} = F^1, \quad l_2^{13} = F^2, \quad l_3^{12} = F^3. \tag{7.91}$$

根据 Doliwa 复合体的定义，与 $\mathcal{G}$ 的三个面相关联的三个交比的乘积必须等于 -1 。与此同时，这三个交比的乘积也正是命题中的多重比，从而完成了证明。□

当然，在 $\mathbb{Z}^3$ 上，直线复形与直线复合体并无区别，因此我们也可以通过引理 7.49 在 $\mathbb{Z}^3$ 上定义 Doliwa 复形。然而，根据定义，只有 Doliwa 复合体具有多维一致性。与 Doliwa 复合体不同，目前尚不清楚 Doliwa 复形是否存在某种多维一致性版本。一种自然的设想是： $\mathbb{Z}^N$ 上的 Doliwa 复形是 $\mathbb{Z}^N$ 上的直线复形，并且每条直线上的 $2N$交点成对合，但我们尚未研究这类映射是否存在。

下面我们转而讨论 Doliwa 复合体的几何解释。

定理 7.50. 设 $l\colon F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Doliwa 复合体。设 $v \in V(\mathfrak{Q})$是一个内部顶点，其邻点为 v_1，v_2、……、v_{d_v}，并设 f_1，f_2、……、f_{d_v}是与 v相邻的面，使得对于每个循环指标 i，均有$(v,\ v_i) = (f_i,\ f_{i+1})^*$。假设 $l(f_1)$ $l(f_2)$……，$l(f_{d_v})$张成一个(d_v-2)维空间。若 $d_v \geq 4$ 且 $d_v \in 2\mathbb{Z}$，则这些 $2d_v$ 点

$$F(v,v_1), F(v,v_2), \dots, F(v,v_{d_v}) \quad \text{and} \quad F(v_1,v), F(v_2,v), \dots, F(v_{d_v},v) \tag{7.92}$$

位于同一个二次曲面上。若 $d_v \geq 5$ 且 $d_v \in 2\mathbb{Z}+1$，则两条直线 $l(f_1)l(f_2)$ 和 $(v,\ v_1)$ $(v,\ v_2)$ 与由 $(v,\ v_3)$、$(v,\ v_4)$……$(v,\ v_{d_v})$ 张成的 (d_v-3) 维空间相交于一点。■

证明。先考虑偶数情形。我们将 d_v 个点 $l(f_i)$ 视为一个 d_v 边形$\mathfrak{P}$ 的顶点，并将 $2d_v$ 个焦点视为 $\mathfrak{P}$ 各边上的标记点。首先我们证明

$$\mathrm{mr}(l(f_1), F(v_1,v), l(f_2), F(v_2,v), \dots, F(v_{d_v},v)) = 1. \tag{7.93}$$

假设 $\mathfrak{P}$ 的顶点张成尽可能大的维数，即一个 (d_v-2) 维空间。在这个空间内，为涉及的点选取齐次提升，并用带帽符号表示这些提升。于是可以写成

$$\hat{F}(v_i,v) = \det(\hat{l}(f_{i+1}), \hat{l}(f_{i+2}), \dots, \hat{l}(f_{i-1}))\hat{l}(f_i) - (-1)^{d_v}\det(\hat{l}(f_{i+2}), \hat{l}(f_{i+3}), \dots, \hat{l}(f_i))\hat{l}(f_{i+1}). \tag{7.94}$$

公式（7.92）中的多重比可用公式（7.94）中系数的交错比表示。在这个表达式中，所有行列式均会消去，剩下的只是符号因子 $(-1)^{d_v+d_v^2}$，其值为 1。另一方面，我们证明

$$\mathrm{mr}(l(f_1), F(v,v_1), l(f_2), F(v,v_2), \dots, F(v,v_{d_v})) = (-1)^{d_v}. \tag{7.95}$$

左侧的多重比表现为围绕 $\mathcal{G}$ v的边权交错比。它等于（-1）$^{d_v}X_{f_1}X_{f_2}\cdots X_{f_{d_v}}$，根据定理 7.47，它又等于（$-1$）^{d_v}。于是，根据 Carnot 定理（见定理 7.35），定理的结论便可推出，因为当 d_v为偶数时，上述两个多重比的乘积为 1。请注意，在 Carnot 定理中，$\mathfrak{P}$ 的点张成最大维数。若这些点位于二次曲面上，那么这一假设对于多重比条件成立并非必要，这从 Carnot 定理的证明中显而易见。另一方面，n维实空间中的一个二次曲面总是存在且经过 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{d_v-2}$ d_v 个点，尽管它不一定唯一。下面来看 d_v为奇数的情形。在这种情形下，式（7.95）中的相应多重比为 -1。因此，这属于梅涅劳斯定理的一个实例（见定理4.1），不过维数是 d_v-2，而非 d_v-1。然而，这意味着，多边形l（f_1） l（f_2）……，l（f_{d_v}），连同其标记点（v，v_1）、（v，v_2）……、（v，v_{d_v}），是维数为 d_v-1的梅涅劳斯构型的投影。定理结论中的交点重合，直接源于这样一个事实：将多边形提升到维数为d_v-1 的空间后，点（v，v_1）、（v，v_2）、……、（v，v_{d_v}）仅张成一个维数为 d_v-2的空间。□

注意，定理 7.50 中的焦点（f_i，v）是作为 TCD映射片段 T_v 中表示空间 S_v的内部白色顶点出现的点。如果我们要求

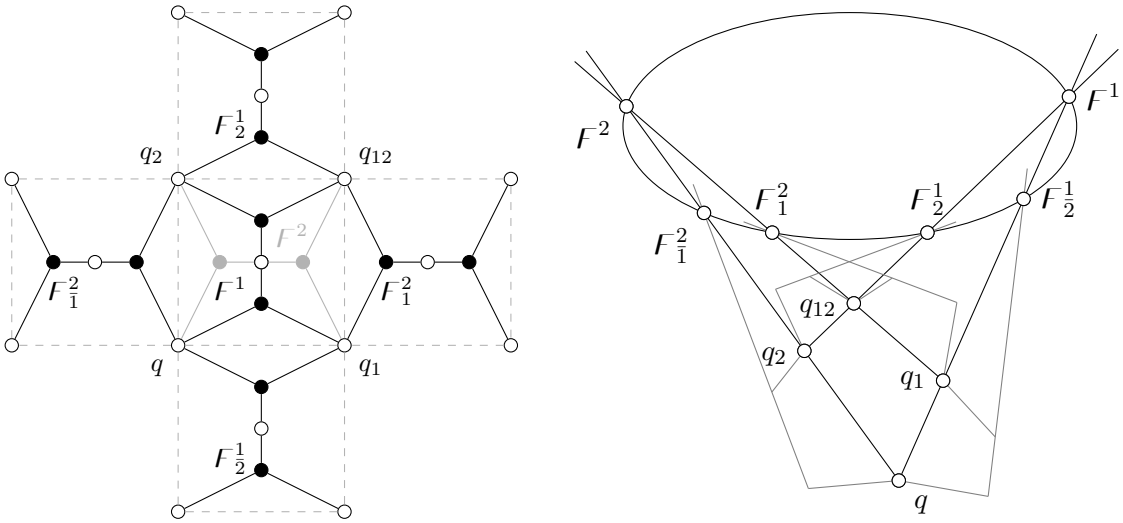


图 7.9。右：Doliwa-Kœnigs 网中出现的圆锥曲线。左：其中 f^1 周围的射影簇变量之积为 1 的 VRC。注意，重新分裂不会影响射影簇变量。

二次曲面经过 T_v中作为内部白色顶点出现的所有点，那么该二次曲面将被唯一确定。这是因为恰好有 $\binom{d_v}{2} - d_v$ 个内部白色顶点。因此，连同 d_v 个点（v，v_i），我们要求二次曲面经过 $\binom{d_v}{2}$个点。一般而言，E 个二次曲面由 $\binom{d_v}{2} - 1$ 个点确定，这与我们对这些点提出的一个方程恰好吻合。

原则上，定理 7.50 中的观察可用于刻画 Doliwa 复合体，但内部顶点的度为 3 的情况除外。在这种情况下，这些点局部仅张成一个 1 维空间，因此不可能进行关联几何刻画。

上述偶数情形的几何刻画，源于 Doliwa 复合体与 Q网的一种约化之间的关系，该约化由 Doliwa [Dol02]提出。

定义 7.51。设 $q : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Q-网，并令 $_1$，$_2$ 表示 q沿两个格方向的焦点。若六个点

$$F_{\bar{2}}^1, F^1, F_2^1, F_{\bar{1}}^2, F^2, F_1^2 \tag{7.96}$$

位于一条圆锥曲线上，见图 7.9。 ■

引理 7.52. Doliwa 复合体在 $\mathbb{Z}^N$ 上定义的焦点 Q 网的一个 $\mathbb{Z}^2$ 切片是一个 Doliwa-Kœnigs 网。 ■

证明。我们在第 6.6 节讨论了焦网，尤其是如何取直线复形的焦点 Q 网。电阻子簇的因式分解性质也适用于 Doliwa 复形的$\mathbb{Z}^2$ 切片。定义 7.51 中的刻画等价于定理 7.50 中对 Doliwa 复形的几何刻画。 □

Doliwa-Kœnigs 网中某些拉普拉斯不变量的乘积为 1 这一事实已在 [BS08，习题 2.21] 中提及。

7.11. 对角交网

从某种意义上说，上一截面的结论是：Doliwa 复合体是将 Doliwa 网扩张到 $\mathbb{Z}^N$的一种——也可能是唯一一种——可积扩张。在 DDG 书中还指出了另一个关系，适用于 $\mathbb{Z}^2$ 情形 [BS08]。这里我们将在更一般的情形下给出这一关系

对于 $\mathbb{Z}^N$，这进一步支持了在直线复合体上定义 Doliwa 复合体的做法。

定义7.53。Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的对角线交点网 $m\colon F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 由每个四边形的对角线交点组成。■

引理 7.54。Kœnigs 网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 的对角线交点网 $m\colon F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 Doliwa 复合体。■

证明。我们基于映射的格解释给出证明。根据定义7.31，在 Kœnigs 网的每个三维立方体中，所有黑色顶点都位于平面 H 上，所有白色顶点都位于平面 H' 上。因此，三维立方体中所有对角线的交点都位于直线 $L = H \cap H'$ 上。由此，对角线交点网是一个直线复合体。此外， L 上的 m 个点是由四个点 $q, q_{12}, q_{23}, q_{13}$ 所定义的六条直线的六个交点。这构成一个完全四边形。众所周知，完全四边形的各条直线与一条直线的交点是六个点，其多重比为 -1。根据引理 7.49（该引理通过多重比刻画 Doliwa 复合体），这就证明了所述结论。□

注意到，这一构造的逆向过程也是可行的，参见 Steinmeier 的论文[**Ste18**]。此外，若加入一些一般位置假设，对角线交点网的构造就是一种特殊的截面（截面在第4.2节中引入）。

引理 7.55. 设 $U = [0, 1, \dots, k]^3 \subset \mathbb{Z}^3$，且 $q\colon U \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{3k}$ 是一个 Kœnigs 网，使得q 张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{3k}$。那么，存在一个余维为 2 的射影子空间 $H \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{3k}$，使得 q 的对角线交点映射就是截面 $\sigma_H(q)$。■

证明。首先注意，坐标轴上的点是该 Q-网的柯西数据。它们至多张成 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{3k}$，而根据引理中的假设，它们确实张成整个 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{3k}$。在每个立方体中，都有一条直线 L，它由两个平面 E, E' 的交点定义，如引理 7.54 的证明所述。现在令 H 为所有直线 L 的张成空间。此外，如果只考察坐标轴上各立方体中的所有直线 L 的张成空间 H'，那么实际上 $H' = H$。这是因为在任意一组四边形排列的立方体中，第四个立方体里的直线已经与另外两条直线相交。然而， H' 的维数为 $(3k - 2)$， H的维数也如此。因此，在一般位置下， $m = \sigma_H(q)$。□

为避免证明中的技术性论证，我们将引理的陈述限制在立方域上。不过原则上，我们认为可以考虑任意四边形图，并将维数 $3k$ 替换为与该四边形图关联的 TCD 的最大维数。

7.12. Schief 映射

Schief [**Sch03**], 还引入了 BKP 映射的概念，即具有 BKP 结构的达布映射。我们将这类映射称为 Schief 映射，因为在我们看来，“BKP 映射”这个名称不够简洁。特别是，在高维射影空间中，达布映射可以有多种方式成为 BKP 映射。我们确实证明了 Schief 映射是仿射 BKP 映射，但它们只是仿射 BKP 达布映射的一种特殊情形。

定义7.56. 若达布映射 $d\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 相对于超平面 H 是一个*Schief* 映射，且存在某个仿射图 $\mathbb{C}^n$，使得 H 位于无穷远处，并且每个四边形都映射为平行四边形，则称其为 Schief 映射。■

请注意，平行四边形是一个仿射概念，因此下一个陈述也是仿射的，这并不令人意外。

定理 7.57. 一个 Schief $d : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 映射关于 H 是仿射 BKP。 ■

证明。考虑仿射簇变量，也就是 d 的星比。达布映射的星比位于四边形图的边上。每个星比都是关联的平行四边形的两个膨胀比之商。因此，如果我们将四边形图某个顶点周围的星比相乘，结果为 1。因此，仿射簇变量属于电阻子簇，且 Schief 映射是仿射 BKP。□

然而请注意，并非每个仿射 BKP 达布映射都是 Schief 映射。它与 Doliwa 复形的关系如下。

推论 7.58。设 $d : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个 1-一般 Schief 映射，且 H 是一般位置。那么截面 $\sigma_H(d)$ 是一个 Doliwa 复形。 ■

证明。在第 6.2 节中，我们证明了，带超平面 H 的截面 $\sigma(T)$ 的射影簇结构，是相对于 H 的 T 的仿射簇结构。此外，达布映射的截面是直线复形。Schief 映射是相对于无穷远的仿射 BKP。因此，与无穷远相交的截面是一个直线复合体，它是射影 BKP，因而是一个 Doliwa 复形。□

备注 7.59。在引理 7.55 的特定一般位置设定中，任何与超平面 $H' \supset H$ 相交的截面都是 Schief 映射。我们将此命题的证明留作练习。■

7.13. 互易图形

King 和 Schief [**KS03**]也曾研究过定义在 $\mathbb{Z}^3$ 的面上、满足晶格方程的 $\mathbb{C}$ 中的映射；该方程指出，六个点的多重比等于 -1。他们将这些映射解释为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中满足这一附加六点方程的达布映射，并证明它们伴有一个 BKP 方程。然而，我们在第 4.1.4 节提到，$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的达布映射与直线复形是一致的。现在我们打算论证，将这些映射视为直线复形更为自然。事实上，我们将证明这些映射是射影 BKP，因此是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的 Doliwa 复合体。为简化论述，我们仅考虑 $\mathbb{Z}^3$，而不考虑任意四边形图。由于我们将讨论范围限定于 $\mathbb{Z}^3$，本节中我们视直线复形与直线复合体为同一概念。

定义 7.60。互易图形映射 $r : V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{R}^2$ 是一个 Q-网，使得每个四边形中的两条对角线都平行。令 $r = (r^x, r^y)$，并将四边形中的斜率 $\phi^{ij} \in \mathbb{R}$ 定义为

$$\phi^{ij} = \frac{r^y_{ij} - r^y}{r^x_{ij} - r^x}. \tag{7.97}$$

■

定理 7.61（[**KS03**]）。互易图形映射的斜率 ϕ 是一个达布映射$\phi : E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{R} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$，并满足多重比方程

$$\mathrm{mr}(\phi^{ij}, \phi^{jk}, \phi^{ik}, \phi^{ij}_k, \phi^{jk}_i, \phi^{ik}_j) = -1. \tag{7.98}$$

对于 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$。 ■

King 和 Schief 的文章 [**KS03**] 中给出了基于显式计算的证明。请注意，定义 7.60 中的斜率是在四边形的面上定义的，而定理 7.61 中相应的达布映射则定义在 $\mathbb{Z}^3$ 的边上。这是可行的，因为我们可以将定义 7.60 中的四边形图看作定义在 $(\mathbb{Z}^3)^*$ 上。

我们接下来将互反图形映射纳入框架，然后便可根据此前关于 Kœnigs 网与 Doliwa 复形之间关系的观察，得出定理。

在下文中，若将 $\mathbb{R}^2$ 视为 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 的一部分，那么平行对角线是指每一对对角线都交于给定的直线 L （无穷远处）。

定义 7.62. 将 $V(\mathbb{Z}^3)$ 的顶点分为白色和黑色两类。定义互易图形映射 $r = (r_x, r_y)$ 的提升 $\hat{r}: V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ 为

$$\begin{aligned} \hat{r} &= [r_x, r_y, 1, 1] \text{ for black vertices,} \\ \hat{r} &= [r_x, r_y, 0, 1] \text{ for white vertices.} \end{aligned} \tag{7.99}$$

■

注意，括号 $[\cdot]$ 表示射影化。我们将 $\hat{r}$ 视为 $\hat{r}$ 的一个提升的齐次提升，该提升位于 $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$，的两个超平面之一中：一个超平面对应白色顶点，另一个对应黑色顶点。将 $\hat{r}$ 投影到其前两个坐标上，显然就是到 $\mathbb{R}^2$ 的投影，它将 $\hat{r}$ 映回 r。

引理 7.63. 互易图形的提升 $\hat{r}$ 是一个 Kœnigs 网。 ■

证明. 首先，由于对角线 rr_{ij} 和 r_ir_j 按定义平行，因此按照定义 7.62 的选取，$\hat{r}\hat{r}_{ij}$ 与 $\hat{r}_i\hat{r}_j$ 的齐次提升也平行。因此，$\hat{r}$ 是一个 Q-网。此外，根据提升的定义，$\hat{r}$ 中每个立方体的所有黑色顶点都位于同一平面上，白色顶点也如此。因此，$\hat{r}$ 是 Kœnigs 网。□

正如我们在第7.7节中所讨论的，Kœnigs 网是射影 BKP，而且很容易证明，这个 BKP 结构与 King 和 Schief 在文章 [**KS03**] 中讨论的第一个 BKP 结构相同。接下来，我们将从斜率的角度解释他们发现的另一个 BKP 结构（已在定理 7.61 中指出）。

定理 7.64. 考虑直线 $L = [1, \psi, 0, 0]$, $\psi \in \mathbb{R} \cup \infty$ 和截面 $\sigma_L(\hat{r})$。那么$\sigma_L(\hat{r})$ 是一个 Doliwa 复形，而 ψ 是定义 7.60 中的斜率 ϕ 。■

证明。由于 L 的余维为 2，截面 $\sigma_L(\hat{r})$ 是一个直线复形。此外， L 是包含 $\hat{r}$ 的所有白色顶点的平面与包含 $\hat{r}$ 的所有黑色顶点的平面的交点。由四边形 $(r,\ r_i,\ r_j,\ r_{ij})$ 张成的平面与

$$r - r_{ij} = [r^x_{ij} - r_x, r^y_{ij} - r_y, 0, 0]. \tag{7.100}$$

将此表达式代入 L 的仿射参数化 $[1, \psi, 0, 0]$ 后，我们确实可以看到$\psi = \phi$。此外，与 L 的截面也是$\hat{r}$ 的对角线交点映射，因此根据引理 7.54，它是一个 Doliwa 复形。□

总而言之，互易图形具有两种 BKP 结构。一种结构源于可以将互易图形提升为 Kœnigs 网，而后者是射影 BKP。另一种结构则源于该提升与定理7.64中的直线 L 的截面是一个 Doliwa 复形，它同样是射影 BKP。

第8章

通过双线性形式约化 TCD 映射

在本节中，我们研究满足线性约束（这是由定义决定的）以及额外二次约束的 TCD映射。在简要回顾二次曲面和零极性之前，先通过一个引理和一个定理来说明本节的动机，这两者均见于 Doliwa [Dol99]。

引理8.1. 如果 Q网立方体的七个点位于一个二次曲面 B中，那么第八个点也位于其中。■

定理 8.2. 如果 Q-网的柯西数据内接于一个二次曲面，那么整个 Q-网也内接于该二次曲面。■

注意，Doliwa 对于 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 表述了定理 8.2，但该定理对 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 同样成立，且无需对证明作任何修改。证明依赖于关于关联点的定理，该定理也可在 DDG 书 [BS08], 中找到，适用于 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$。对于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$，证明同样无需修改。

我们通过引用 Doliwa [Dol99]，强调定理 8.2 的重要性。

推论 8.3。“上述结果显然可以推广到由多个二次超曲面的交集所得到的空间中的四边形格。由于常曲率空间、格拉斯曼流形以及塞格雷簇或维罗内簇都可以通过这种方式实现，因此原则上，上述结果也可以用于在这类空间中构造可积格。”■

这两个定理的另一大优势在于，许多经典几何（莫比乌斯几何、拉盖尔几何、李几何、普吕克几何）都可以通过射影空间中的一个二次曲面，以及保持该二次曲面的射影变换群来表述。尤其是在离散曲面理论中，这种表述使我们能够研究关于适当变换群保持不变的离散化 [BS07b]。下面列出充分利用了这种表述优势的三个具体例子。

(1) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 中的圆网是莫比乌斯几何的研究对象。它们对应于$\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}$中的Q-网。从射影的观点来看， $\mathbb{S}^n$ 只是一个惯性指数为（$n+1$，1）的二次曲面 [Bob99, CDS97]。我们将在第8.2节讨论 $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$中球面上的圆网，并在第 9.2 节讨论更一般的圆网。(2) $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ 中的圆锥网是拉盖尔几何的研究对象。它们对应于布拉施克圆柱中的Q-网；在三维情形下，布拉施克圆柱是惯性指数为（3，1， 1）的退化二次曲面 [LPW+06]。(3) $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ 中的A-网是射影几何的研究对象。不过，我们可以将A-网的直线提升到普吕克二次曲面上；该曲面是 $\mathbb{R}\mathrm{P}^5$ 中惯性指数为（3，3）的二次曲面。因此，我们也将A-网视为 Plücker 几何的研究对象。更确切地说，A-网对应于普吕克二次曲面中的各向同性直线复形 [Dol01]。我们将在第8.7节更详细地讨论A-网。

因此，圆网、圆锥网和A-网都是相对于二次曲面处于非一般位置的TCD映射。本章受此启发，将展示满足额外二次约束的某些Q-网、达布映射和直线复形具有相关的簇结构，其变量位于电阻子簇或伊辛子簇中。这进而将这些映射与BKP或CKP方程联系起来。

我们先简要回顾一下二次曲面和零极性。我们称一个映射

$$m : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \tag{8.1}$$

a双线性的，当 m 它对两个自变量都呈线性时。点 $r \in \mathbb{C}^n$ 的极空间 是集合

$$\{x \in \mathbb{C}^n : c(r, x) = 0\}. \tag{8.2}$$

双线性形式 c 若存在一个 $x \in \mathbb{C}^n$，使得其极空间为整个空间，则称其为退化的；否则称为非退化的。如果一个双线性形式是对称的 （此时记作 b），则称之为对称双线性形式，若

$$b(x, y) = b(y, x), \tag{8.3}$$

对所有 $x,\ y \in \mathbb{C}^n$。我们称双线性形式反对称的 （此时记作 ω）i f

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x), \tag{8.4}$$

对所有 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 均成立。在这两种情况下，我们注意到，如果 $b(x, y) = 0$（分别地， $\omega(x, y) = 0$），那么同样有$b(y, x) = 0$（分别地， $\omega(y, x) = 0$）。因此，在这两种情况下， x 属于 y 的极空间是一个对称关系。若 x 属于 y 的极空间，我们称 x 与 y 极共轭。此外，如果 $x, x' \in \mathbb{C}^n$ 是同一个射影点 $\hat{}x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 的提升，即存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $x' = \lambda x$，那么对于所有 $y \in \mathbb{C}^n$，$b(x, y) = 0$（分别地，$\omega(x, y) = 0$）等价于 $b(x', y) = 0$（分别地， $\omega(x', y) = 0$）。因此，极空间是一个射影概念。因此我们在一定程度上滥用记号，对于点 $\hat{}x, \hat{}y \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 也将表达式 $b(\hat{}x, \hat{}y) = 0$ 写作如此，因为该表达式的定义与所选提升无关。若对于所有 $\hat{}x, \hat{}y \in I$，$b(\hat{}x, \hat{}y) = 0$（分别地， $\omega(\hat{}x, \hat{}y) = 0$），则称射影空间 $I \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 为各向同性空间。

对于双线性形式 b，我们将点集称为

$$B = \{\hat{x} \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} : b(\hat{x}, \hat{x}) = 0\} \tag{8.5}$$

与 b相关的二次曲面 B。术语“二次曲面”源于 $b(x, x) = 0$ 是关于 $x \in \mathbb{C}^n$分量的二次方程。若 b 退化，我们就称 B 退化。若两个极点$\hat{}x, \hat{}y$ 位于二次曲面 B 上，那么根据线性性质，直线$\hat{}x\hat{}y$ 上的所有点也都位于B上。对于 B 上的点$\hat{}x$，我们将其极空间称为切空间。

对于反对称形式 ω，所有点$\hat{}x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 都满足 $\omega(\hat{}x, \hat{}x) = 0$。因此，这种情况下不存在二次曲面的对应物。映射 $x \mapsto \omega(x, \cdot)$是从原空间 $\mathbb{C}^n$ 到对偶空间$(\mathbb{C}^n)^*$ 的映射，这种映射称为极性。由于对于所有$\hat{}x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$， $\omega(\hat{}x, \hat{}x) = 0$，因此 ω 称为零极性。此外，若 $\omega(\hat{}x, \hat{}y) = 0$ 对$\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$中的两个不同点成立，那么对直线$\hat{}x\hat{}y$上的所有点$\hat{}z$，都有 $\omega(\hat{}x, \hat{}z) = \omega(\hat{}y, \hat{}z) = 0$。因此，尽管反对称形式不存在二次曲面，各向同性直线仍然具有特殊性。具体而言，对于每个点$\hat{}x \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$，所有经过$\hat{}x$ 且同时包含在$\hat{}x$ 的极平面内的直线都是各向同性的。

8.1. 内接于圆锥曲线的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的 Q网

定义8.4. 设 A, A' 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的两个不同点，且 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。若 Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 满足：直线 AA' 处于一般位置（按定义4.6的含义），并且对于 $\mathfrak{Q}$ 中的每个四边形，六个点 $A, A', q, q_1, q_2, q_{12}$ 都位于一条非退化圆锥曲线上，则称该 Q-网为二重圆锥 。■

注意，圆锥曲线是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的二次曲面。一个自然的问题是，Q网的立方体翻转是否保持二圆锥网。为回答这个问题，我们来考察米克尔定理[**米克尔38**] 的一个推广。

定理 8.5（Miquel复射影定理）。设 A, A' 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中两个不同的点。假设这三组点

$$\{A, A', q, q_1, q_2, q_{12}\}, \quad \{A, A', q, q_1, q_3, q_{13}\} \text{ and } \{A, A', q, q_2, q_3, q_{23}\} \tag{8.6}$$

分别位于一条非退化公共圆锥曲线上，且所有出现的点均不在直线 AA' 上。那么存在唯一的点 q_{123}，位于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$，使得

$$\{A, A', q_3, q_{13}, q_{23}, q_{123}\}, \quad \{A, A', q_2, q_{12}, q_{23}, q_{123}\} \text{ and } \{A, A', q_1, q_{12}, q_{13}, q_{123}\} \tag{8.7}$$

分别位于一条公共圆锥曲线上。 ■

证明。将 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 视为 $H \mathrm{P} \mathbb{C}$ 中的一个超平面，并选择两条直线 ℓ_A、$\ell_{A'}$，分别经过 A、A'，且交于另一个点 C，该点不在 H 中。现在，选择一个非退化二次曲面 B（以及相应的双线性形式 b），使得 ℓ_A、$\ell_{A'}$ 是各向同性的。定义对应点的提升 $\hat{}q$、$\hat{}q_1$、$\hat{}q_2$、$\hat{}q_3$、$\hat{}q_{12}$、$\hat{}q_{13}$、$\hat{}q_{23}$、$\hat{}q_{123} \in B \setminus \{C\}$，使得从 C 到 H 的中心投影还原原来的点 q、q_1、q_2、q_3、q_{12}、q_{13}、q_{23}、q_{123}。现在我们声称，提升 $\hat{}q$、$\hat{}q_1$、$\hat{}q_2$、$\hat{}q_{12}$ 共面，当且仅当它们的投影以及 A 和 A' 位于一条公共圆锥曲线上。点 $\hat{}q$、$\hat{}q_1$、$\hat{}q_2$ 确定一个平面 E 和一条圆锥曲线 $\hat{}c = E \cap B$。我们分两种情况讨论。第一种情况下，E 包含 C。因此，q、q_1、q_2 位于一条直线上。只有当 q_{12} 位于退化圆锥曲线 $q_1q_2 \cup AA'$ 上时，这些投影才位于一条公共圆锥曲线上；因此，根据假设，q_{12} 位于直线 q_1q_2 上。这等价于 $\hat{}q_{12}$ 位于 E 中。第二种情况下，E 不包含 C。我们考虑圆锥曲线 c，它是 $\hat{}c$ 在 E 上的投影。圆锥曲线 c 必须包含 A、A'，因为 E 与直线 ℓ_A、$\ell_{A'}$ 分别交于 $\hat{}c$ 上的两点，这是因为这两条直线是各向同性的。在 B 中投影到 c 上的点只有 $\hat{}c$ 中的点，或 ℓ_A、$\ell_{A'}$，因为该二次曲面是非退化的。因此，$\hat{}q_{12}$ 位于 $\hat{}c$ 上（从而位于 E 中），当且仅当 q_{12} 位于 c 上。因此，在提升到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$，后，定理的陈述等价于引理8.1；该引理保证存在唯一的点 $\hat{}q_{123}$。$\hat{}q_{123}$ 在 H 上的投影就是唯一的点 q_{123}。□

经典的米克尔定理指的是这样一种特殊情形：我们将 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 的一个仿射图等同。圆是包含复化后的 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$（其中 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ [**RG11** 中齐次坐标为 $(\pm i, 1, 0)$ 的两个点 I 和 J，见第 1.6] 节）的圆锥曲线。这两个点在德国文献中称为虚圆点；由于缺少对应的英文表达，我们沿用“imaginäre Kreispunkte”这一称呼。米克尔定理针对的是这样的 Q网：每个四边形的四个点都位于一个圆上。这是 A，A' 为虚圆点的特殊情形。在这种特殊情形下，可以将二次曲面 B取为球面，而投影就是标准的立体投影。

定理 8.5 的一个推论是：如果 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中一个 Q-网的柯西数据是二重圆锥的，那么整个 Q-网也是二重圆锥的。既然我们已经证明二圆锥 Q-网是一种相容约化，下面给出关于它们的主要定理。

定理 8.6. 设 $q : V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个 1-一般且二圆锥的 Q-网。那么截面$\sigma_{AA'}(q)$ 是一个仿射 BKP 达布映射，相对于 A 如此，相对于 A' 亦然。■

为了证明这个定理，我们还需要另一个经典定理，参见 Coxeter 的著作[**Cox03**，第 9 节3]，其中给出了相关参考文献和证明。

定理 8.7（Desargues 对合定理）。设 $q, q_1, q_2, q_{12}, A, A' \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是圆锥曲线 c 上六个互不相同的点，且 ℓ 是直线 AA'。记 d_k^l 为直线q_kq_{kl} 与 ℓ 的交点（见图 8.1）。那么多重比方程

$$\mathrm{mr}(d^1, d^2, A, d_2^1, d_1^2, A') = -1 \tag{8.8}$$

成立。 ■

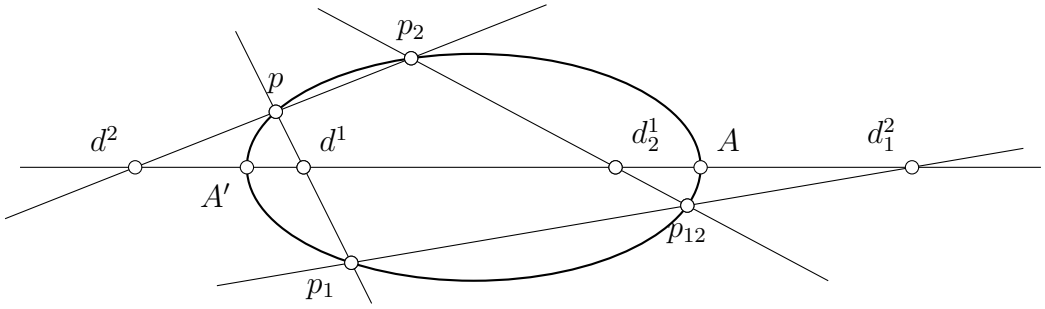


图 8.1. 笛沙格对合定理

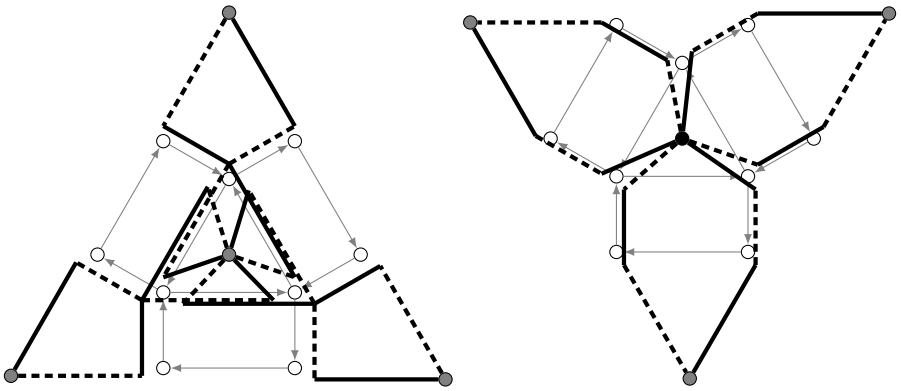


图 8.2。白色点是二重圆锥 Q-网的截面中的点。左侧展示了仿射 BKP 关于 A（灰色点）所要求的因式分解性质。右侧展示了关于 A（灰色点）和 A'（黑色点）的笛沙格对合定理的三个实例。

定理 8.6 的证明。我们在图 8.2 中展示了三个相邻四边形的证明，但该证明很容易推广到 $m, m > 3$ 个四边形。设 $d = \sigma_{AA'}(q)$ 为 q 的截面对应的达布映射。星比的仿射 BKP 要求为（我们使用引理 6.3），即

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{cr}(d^k, d_k^{k+1}, A, d_k^{k-1})}{\mathrm{cr}(d^k, d^{k-1}, A, d^{k+1})} = 1 \tag{8.9}$$

成立。另一方面， m 笛沙格对合定理的应用得出， t

$$(-1)^m \prod_{k=1}^{m} \mathrm{mr}(d^1, d_k^{k+1}, A, d_{k+1}^k, d^{k+1}, A') = 1 \tag{8.10}$$

成立。对最后两个表达式中的项进行约去后，它们都得到

$$\mathrm{mr}(d^k, d_k^{k+1}, A, d_{k+1}^k, d^{k+1}, d_{k+1}^{k+2}, A, d_{k+2}^{k+1}, \ldots, A, d_k^m) = 1 \tag{8.11}$$

因此二者等价。 □

备注 8.8。如前所述，如果我们选择一个二圆锥网的两个特定点为虚圆点，那么二圆锥网中的所有圆锥曲线实际上都是圆。在第 10.1 节中，我们将把这些映射称为 圆模式，但会将其视为映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ，而不是 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$。我们还将找到两个相关的簇结构，但其组合结构不同。此外，对于在 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中考虑的圆模式，自然的变换是立方体翻转，它由簇结构中的一系列突变组成。另一方面，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中，我们将进行另一种变换，该变换对应于一次突变，并且更类似于八面体翻转。另外，我们刚刚证明，在 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中，圆模式的仿射簇结构自然位于电阻子簇中。对于在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中考虑圆模式时得到的簇结构，情况则并非如此。

■

定理 8.6 的朴素逆命题并不成立，并非每个双重仿射 BKP 达布映射都是二圆锥网的截面。不过，在附加一些假设后，可以得到一个提升。

定理 8.9. 设 A, A' 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$中的两个点。设 $d\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是一个达布映射，使得在每个四边形中

$$\mathrm{mr}(d^1, d^2, A, d_2^1, d_1^2, A') = -1 \tag{8.12}$$

成立。则存在一个 Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$，使得 q 相对于这两个点 A, A' 是二重圆锥的，并且 $\sigma_{AA'}(q) = d$。■

证明。我们在第 4.5 节讨论了如何构造 TCD 映射的提升。假设我们已知提升中一个四边形的三个点 q, q_1, q_2。这三个点与 A, A' 共同确定圆锥曲线 c，而 q_{12} 必须位于其上。由于我们还知道 d_2^1，点 q_{12} 也就确定了，因为q_{12}必须位于交点 $c \cap d_2^1 q_2$ 处，且不能是 q_2。然而，既然 q_{12} 现在已确定，点d_1^2 便不能任意取值，而是由提升唯一确定。此外，d_1^2 也由方程 (8.12) 唯一确定。根据笛沙格对合定理（见定理 8.7），这两个点相同。因此，提升在每个四边形上都是相容的，我们可以按照第 4.4 节所述，沿着 $\mathfrak{Q}$ 的 li-定向逐个四边形地传播。□

推论 8.10。定理 8.6 对如下 Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 同样成立：其所有点都包含在同一条圆锥曲线 c 中。反过来，设 $d\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是定理 8.9 中的达布映射。那么，也可以找到 d 的一个 Q-网提升，使得提升中的所有点都包含在同一条圆锥曲线中。■

该推论的证明只需沿用所引用的两个定理的证明，无需作任何修改。这引出了一个引人入胜的构造。

推论 8.11。设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个关于两个不同点 A，A' 的 1-一般且二圆锥网（定义 2.41）。设 $d = \sigma_{AA'}(q)$ 是一个达布映射截面。选取 $\mathfrak{Q}$ 中的一个四边形 $(v,\ v_1,\ v_2,\ v_{12})$，并固定经过该四边形各点及 A，A' 的圆锥曲线 c。那么存在唯一的 Q-网 $q'\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$，使得

(1) q' 的点包含在 c 中，即 $q'(V(\mathfrak{Q})) \subset c$,
(2) q 和 q' 的截面重合，即 $\sigma_{AA'}(q') = d$，(3) q，q' 在 v 和 v_1上重合。

■

例如，考虑 $\mathrm{P}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的圆网 q。在这种情况下，A，A' 是无穷远处的虚圆点。因此，由推论可知，存在一个包含于圆中的 Q-网q'，其边平行于 q 的边。根据构造，q' 与 q具有相同的星比。

对于包含在同一条圆锥曲线 c 中的 Q-网 q，我们也可以考虑从一个余一般点 $S \in c$ 到直线 AA' 的立体投影。将 q 的立体投影记为 q^∞，并将 c 在 S 处的切线与 AA' 的交点记为 S^∞。那么我们断言：

$$\mathrm{mr}(S^\infty, q^\infty, A, d^1, q_1^\infty, A') = -1 \tag{8.13}$$

对于 Q-网的每一条边都成立。事实上，这是笛沙格对合定理的一个极限情形，其中 S 对应于两个重合的点。但这意味着，如果我们知道截面$d = \sigma_{AA'}$（q）以及投影 q^∞ 上的一个点，那么就能确定整个投影。在一般情况下，由截面求投影是一个二维系统（见第 4.5 节）。与一般情况不同，这里我们只剩下一个一维系统。

这也与 Schief 映射（见定义7.56）有关，它们出现在特殊的极限情形 $A \to A'$ 中，此时我们沿着固定直线 L 移动 A 趋向 A' 来取极限。

定义 8.12. 设 $A \in L$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中直线上的一个点。如果 Q-网 $q\colon \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 满足 接触圆锥曲线 条件，即 L 处于一般位置，并且对于 q 的每个四边形，五个点 A, q, q_1, q_2, q_{12} 都位于一条圆锥曲线上，且其在 A 处的切线为 L，则称之为如此。■

定理 8.13。关于 $A \in L$的 1-一般接触二圆锥网的截面 $\sigma_L(q)$ 是 L 的一个仿射图中的 Schief 映射，其中 A 在无穷远处。■

证明。在二圆锥网中，每个四边形的截面中的点都满足方程

$$\mathrm{mr}(d^1, d^2, A, d_2^1, d_1^2, A') = -1. \tag{8.14}$$

在 L 的仿射图中选取极限 $A,\ A' \to \infty$，我们得到

$$d^1 - d^2 = d_1^2 - d_2^1 \tag{8.15}$$

成立。□

同样，也有一个逆定理。

定理 8.14. 设 A 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$中直线 L 上的一点。设 $d\colon E(\mathfrak{Q}) \to L$ 是一个达布映射，使得对于每个四边形

$$\mathrm{mr}(d^1, d^2, A, d_2^1, d_1^2, A) = -1 \tag{8.16}$$

都成立。则存在一个 Q-网 $q\colon \mathfrak{Q} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$，使得 q 相对于 $A \in L$是接触圆锥的，并且 $\sigma_L(q) = d$。■

证明. 证明与定理 8.9 的证明类似。□

同样，我们可以考虑 q 的所有点都包含在一条圆锥曲线中的特殊情形，但这次我们取相对于过点 A且与 c 相切的切线 L 的截面。我们考虑多重比方程

$$\mathrm{mr}(S^\infty, q^\infty, A, d^1, q_1^\infty, A') = -1 \tag{8.17}$$

在取极限 $A,\ A' \to \infty$之后，得到

$$S^\infty + d^1 = q^\infty + q_1^\infty. \tag{8.18}$$

一方面，这使得一维系统的形式格外简单。另一方面，Schief 引入 Schief 映射（即 BKP 映射 [Sch03]）时，还引入了一个辅助映射$m\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$，使得

$$d^k = \frac{m + m_k}{2} \tag{8.19}$$

对于任意方向 m。在我们的设定中，我们将 d 视为接触圆锥 Q-网 q 的截面，其切线为 L。在此设定下，辅助映射 m 实际上是 Q-网 q的立体投影（相差一个整体平移和缩放）。显然，选择不同的投影点 S 只会使投影发生平移，因为它只会改变 S^∞。

注记 8.15. 考虑一个相对于 A, A' 的二圆锥 Q-网 q。那么定理 8.6 表明，$\sigma_{AA'}(q)$ 相对于 A 和 A' 都是仿射 BKP。然而，根据定理 6.5，我们可以考虑任意一条经过 A 的直线 J，仍然得到 $\sigma_J(q)$ 相对于 A 是仿射 BKP。类似的说法也适用于接触圆锥 Q-网。不过，我们尚未考虑在这些情形下是否存在能够再次从截面得到提升的构造。对这些情形进行更深入的分析，或许能帮助我们理解如何将一般仿射 BKP 达布映射提升到特定的 Q-网。■

8.2. 内接于二次曲面的 $\mathbb{C}P^3$ 中的 Q网

定理 8.16. 设 B 是 $\mathbb{C}P^3$ 中的一个非退化二次曲面，且 I 是B中的一条各向同性直线。设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to B$ 是一个点位于 B中的二重一般 Q-网。假设 I 处于一般位置。那么截面 $\sigma_I(q)$是一个 Doliwa 复形，即一个射影 BKP 直线复形。■

证明。取直线 I 上的另一个点 K 。还有一条经过 K 的各向同性直线 I'。 I 和 I' 一起张成一个切平面 E。取另一个与 B, K, I 和 I' 处于一般位置的平面 H 。将交点标记为 $L = E \cap H, A = L \cap I$ 和 $A' = L \cap I'$。证明的关键在于展示以下四个命题依次等价：

(1) $\sigma_I(q)$ 是射影 BKP。(2) $\sigma_E(q)$ 关于 I 是仿射 BKP。(3) $\pi_{K\to L}(\sigma_E(q))$ 关于 A 是仿射 BKP。
(4) $\sigma_L(\pi_{K\to H}(q))$ 关于 A' 是仿射 BKP。

命题 (1) 是我们打算证明的定理的论断。命题 (2) 等价于 (1)，因为 $\sigma_I(q) = \sigma_I(\sigma_E(q))$，因此 $\sigma_I(q)$ 的射影簇变量就是关于 I 的 $\sigma_E(q)$ 的仿射簇变量，见定理 6.4。命题 (3) 等价于 (2)，因为中心投影 $\pi_{K\to L}$ 从位于 I 上的点 K 投影。因此，该投影保持仿射簇变量，见定理 6.2。命题 (4) 等价于 (3)，因为我们断言 $\pi_{K\to L}(\sigma_E(q)) = \sigma_L(\pi_{K\to H}(q))$。 $\mathfrak{Q}$ 的每条边 e 都对应于 q 的一条直线 ℓ_e 。映射 $\pi_{K\to L}(\sigma_E(q))$ 和 $\sigma_L(\pi_{K\to H}(q))$ 都将 $\mathfrak{Q}$ 的边映射到 L 中的点；事实上，它们都将 e 映射到 $L \cap (\ell_e \cup K)$。最后，(4) 由定理 8.6 得出，该定理指出二圆锥网关于 A, A' 是 BKP。立体投影$\pi_{K\to H}(q)$ 是二重圆锥网这一事实，可由定理 8.5 的证明中的论证得出。□

与 $\mathbb{C}P^2$, 中的圆锥曲线情形不同，我们无需对 Doliwa 复形作出额外假设，即可得到一个逆定理。

定理 8.17. 设 B 是 $\mathbb{C}P^3$ 中的一个非退化二次曲面，且 I 是B中的一条各向同性直线。设 $l\colon F(\mathfrak{Q}) \to I$ 是一个 Doliwa 复形。那么存在一个提升，即一个 Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to B$，使得 $\sigma_I(q) = l$。■

证明. Q-网的平面确定了 Q-网的点，因为每个点都是至少三个平面的交点。映射 l 在 Q-网的每个平面中确定一个点。考虑 Q-网的一个立方体。我们先选择经过 l^{12}的平面。接着选择经过 l^{23}， l^{13}， l_1^{23}， l_2^{13}的平面。作出这些选择后，便有唯一一个平面U ，使得由 B中的点构成的 Q网立方体得以补全。根据定理 8.16，我们知道

$$\mathrm{mr}(l^{12}, l^{23}, l^{13}, U \cap I, l_1^{23}, l_2^{13}) = -1 \tag{8.20}$$

成立。但这恰好也是代入 l_3^{12} 后满足的方程，因此 U 确实包含 l_3^{12}。□

我们还提及一个稍作推广的结果。

推论 8.18. 设 I 是 $\mathbb{C}P^3$ 中的一条直线，且 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to B$ 是一个 Q-网，使得 q 中每个立方体的点都包含在一个也包含 I的二次曲面内。那么截面 $\sigma_I(q)$ 是一个 Doliwa 复形，也就是一个射影 BKP 直线复形。■

仔细考察定理 8.16 的证明即可得到该推论。该证明仅基于对一个立方体的考察。因此，所有立方体对应的二次曲面B 是否相同并不重要，重要的只是 I 是所有这些二次曲面的生成元。接下来，为了探究 B ，我们回到所有立方体都对应同一个固定二次曲面的情形。

当 B 退化时会发生这种情况。不过，建议读者自行思考按照推论 8.18 的思路进行推广。

定理 8.19. 假设 B 是一个圆锥面（因而是一个退化二次曲面），使得 E 是包含各向同性直线 I 的切平面。令 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to B$ 为一个点位于 B 中的 Q-网。那么截面 $d = \sigma_E(q)$ 是相对于 I 的 Schief 映射。■

证明. 对于 q 的任意一个四边形的平面 U，我们实际上处于定理 8.13（关于接触圆锥网的截面）所述的情形。交点 $U \cap B$ 是圆锥曲线 C，而 $T = U \cap E$ 是在 $P = I \cap U$ 处与 C 相切的切线。根据定理 8.13 σ_I，$q(U)$ 是相对于 P 的平行四边形，因此也相对于 I。□

我们甚至可以考虑二次曲面 B 退化为两个平面 B_+，B_-，它们相交于直线 I 的情形。不过，不能以任意方式将 Q-网的点分配到这两个平面上。记 $V_+(\mathfrak{Q})$ 为 $\mathfrak{Q}$ 的黑色顶点，$V_-(\mathfrak{Q})$ 为其白色顶点。

定理 8.20. 设 $B_\pm$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中相交于直线 I 的两个平面。设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 是一个 Q-网，使得

$$q(V_+(\mathfrak{Q})) \subset B_+ \quad \text{and} \quad q(V_-(\mathfrak{Q})) \subset B_-. \tag{8.21}$$

那么，截面 $\sigma_I(q)$ 是一个 Doliwa 复数。■

证明。Q-网 q 是 Kœnigs 网的一个特别简单的情形；定理的假设满足定义7.31。唯一的区别在于，此处所有三个立方体对应的两个平面实际上相同。我们还注意到，I 与 q 各四边形所在的所有平面都相交于其对角线交点。因此，根据引理 7.54，σ_I（q）是 Doliwa 复形的一个特例。□

唯一一个似乎无法导出定理的退化二次曲面情形是双平面情形。可能存在一种特殊的 Q-网，位于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中，并且是由上述情形取极限而产生的。最后一个定理使得这样一种推测具有合理性：这些极限实际上是 Kœnigs 网，而截面则被对角线交点网所取代。然而，我们在此不对此进行研究。

本节的核心论述是定理 8.16：该定理将一个 BKP 结构与具有位于非退化二次曲面 B in $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$上的点的 Q网联系起来。我们考察了两种可能的变体。一方面，我们将二次曲面推广为某些二次曲面的铅笔。另一方面，我们还考察了退化程度（相关双线性形式的秩）各不相同的二次曲面。一个有趣的后续问题是，如果我们考察 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ with $n > 3$，会发生什么。不过，我们将关于这一问题的讨论推迟到第 8.10 节。

8.3. S-图

定义 8.21. 若 Q-网 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 满足以下条件，则称其为 *S*-图：存在一点 $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2$，使得对每个四边形而言，两个焦点与 P 共线。■

在以 P 为无穷远点的仿射图中，这意味着每个四边形的两个焦点所张成的所有直线彼此平行（见图 8.3）。这个定义是 Chelkak [Che20], 所给定义的一种变体；后者与折纸映射和 s-嵌入密切相关。

定理8.22. 设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 是一个关于点 P 的 1-一般 S-图，并设 H 是一条经过 P 的一般直线。那么 q 是关于 H 的仿射 CKP，或者等价地，$\sigma_H(q)$ 是一个 Carnot映射。■

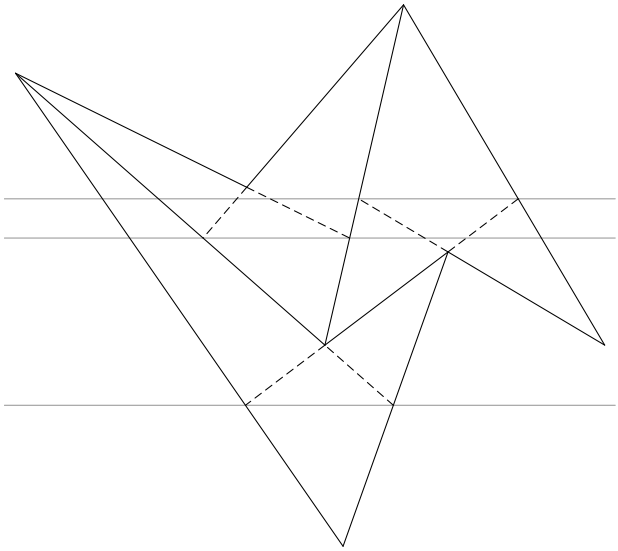


图8.3. S-图中的三个四边形。

证明。考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 作为平面 $U \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^3$，并令 $\hat{q}: V(\Omega) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 为一个 Q-网，且 $N \in \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \setminus U$ 为一点，使得 q 是 $\pi_{N\to U}(\hat{q})$ 的投影。令 K 为经过 N 和 P 的直线，并令 E 为由 K 和 H 张成的平面。接下来我们将证明 $\sigma_E(\hat{q})$ 是一个 Carnot映射。因此（结合定理 6.2），q 关于 $E \cap U = H$ 是仿射 CKP。引入这些直线

$$\ell^{ij} = \operatorname{span}\{F^{ik}, F^{ik}_j, F^{jk}, F^{jk}_i\}, \tag{8.22}$$

$$h^{ij} = \operatorname{span}\{F^{ij}, F^{ji}\}, \tag{8.23}$$

$$h^{ij}_k = \operatorname{span}\{F^{ij}_k, F^{ji}_k\}, \tag{8.24}$$

对于所有指标不同的三元组 i，j，k，其中 F 是定义3.1中定义的焦点。将相应的提升记为 ℓ 和 h，也就是对应于q的直线。我们注意到，六条直线h^{ij} 中的任意一条都与关联于 $\mathbb{Z}^3$的一个立方体的三条直线ℓ^{kl} 相交。因此，直线h 和ℓ 是二次曲面 $B \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^3$上不同类型的母线。由于 K 包含P，它与直线 h^{ij}相交。由于我们从位于 K 上的 N 进行投影，直线 K 也与直线 h^{ij}相交，因此它本身也是与直线ℓ^{ij}同类型的母线。因此，E 是二次曲面 B的切平面。因此，除了属于另一类型的 K之外，E 还包含第二条母线 G，因而与直线ℓ^{ij}相交。不过，此时我们处于 CQ 网的情形，见定义7.39和引理7.40。根据该引理，我们知道q 相对于任何包含 G 的平面都是仿射 CKP，因此相对于 E也如此。由于 q 是从 N对q进行投影所得，q 相对于 $E \cap U = H$是仿射 CKP。□

定理8.22的证明是局部的，因为我们的论证是针对每个立方体分别进行的。因此，逆命题不一定成立，并非 CQ 网从仿射无穷远的每一个投影都必定是一个 S-图。

S-图既有助于我们在第8.4节中展示线性直线复形与CKP之间的关系，也有助于我们在第10.3节中展示s-嵌入是CKP。

8.4. $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$中的线性直线复形

在本小节中，我们研究与反对称双线性形式相关的直线复形，而不是与对称双线性形式相关的直线复形。关于线性直线复形与反对称双线性形式之间关系的优秀引言，可参见Semple-Kneebone的第15章[SK52]。Pottmann和Wallner [PW01]撰写了一部关于直线几何的一般性论著，其中包括关于线性直线复形的一章。关于可积性，线性直线复形被研究为 [BS15] 这样的直线复形：其所有直线到 the

普吕克二次曲面位于 $\mathbb{C}\mathbf{P}^5$ 的一个余维为 1 的空间中。这里我们研究 Bobenko 和 Schief [**BS15**], 定义的相同离散线性直线复形，但我们从反对称双线性形式的角度来考察它们。特别地，可以在 $\mathbb{C}\mathbf{P}^3$ 的齐次坐标 $\mathbb{C}^4$ 上选取一个反对称双线性形式ω： $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ 。在本小节中，我们始终假设 ω 是非退化的。对于两个点 $p, p' \in \mathbb{C}\mathbf{P}^3$ ，我们稍微滥用一下记号，写作 $\omega(p, p') = 0$ ，其中将 p 和 p' 的一些齐次代表元代入 ω。等式是否成立与代表元的选取无关。下面总结 ω 的一些基本性质。给定 $p \in \mathbb{C}\mathbf{P}^3,$ ，所有满足 $\omega(p, p') = 0$ 的点 p' 显然构成一个平面，我们称之为 p 的极平面 $p^\perp$ 。此外，对于两个点 $p, p' \in \mathbb{R}\mathbf{P}^3$ ，由 ω 的反对称性可知:

$$\omega(p,p) = 0 \tag{8.25}$$

$$\omega(p,p') = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega(p',p) = 0 \tag{8.26}$$

$$\omega(p,p') = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(p,\mu p + \mu' p') = 0 \quad \forall \mu, \mu' \in \mathbb{C} \tag{8.27}$$

因此，每个点都位于其自身的极平面内。若一条直线 ℓ 满足对于所有 $p,\ p' \in \ell$ 均成立$\omega(p,\ p') = 0$，则称其为各向同性直线。给定 p ，设 ℓ 是平面 $p^\perp$ 中经过 p 的任意一条直线，则 ℓ 是各向同性直线。因此，经过每个点都存在一个一参数的各向同性直线族，反之亦然。总共存在一个三参数的各向同性直线族。这些直线的集合称为线性复形。

定义 8.23. 设 ω 是如上所定义的反对称形式，且 $l\colon F(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathbf{P}^3$ 是一个直线复形。那么，如果 l 的所有直线相对于 ω 都是各向同性的，则 l 是一个线性直线复形 。 ■

引理 8.24. 设 $l\colon E(\Omega) \to \mathbb{C}\mathbf{P}^3$ 是关于反对称形式 ω的 1-一般线性直线复形。设 $P \in \mathbb{C}\mathbf{P}^3$ 是一个点，且设 $P^\perp$ 是 P的极平面，并假设 $P^\perp$处于一般位置。那么 $\sigma_{P^\perp}(l)$ 是关于 P的 S-图。■

证明。令 $q = \sigma_{P^\perp}(l)$ 为通过取截面得到的 Q-网，并考虑 q 的一个四边形。固定 P 及直线复形中每个交点的齐次提升。在下文的线性方程中，我们稍微滥用一下记号，假设所有点都是各自的提升。另外，简记 $\omega^i = \omega(l^i,\ P)$ 等。于是我们可以计算得:

$$q = \omega^2 l^1 - \omega^1 l^2, \tag{8.28}$$

$$q_1 = \omega^{21} l^1 - \omega^1 l^{21}, \tag{8.29}$$

$$q_2 = \omega^{12} l^2 - \omega^2 l^{12}, \tag{8.30}$$

$$q_{12} = \omega^{21} l^{12} - \omega^{12} l^{21}. \tag{8.31}$$

根据定义，这些点位于 l 的相应直线上。它们也位于平面 $P^\perp$ 中，因为

$$\omega(q,P) = \omega(q_1,P) = \omega(q_2,P) = \omega(q_{12},P) = 0. \tag{8.32}$$

此外，我们可以构造以下由 q 的顶点组成的线性组合，以表示焦点

$$F^{12} = \frac{1}{\omega^1}\left(\frac{1}{\omega^2}q - \frac{1}{\omega^{21}}q_1\right) = \frac{1}{\omega^{12}}\left(\frac{1}{\omega^2}q_2 + \frac{1}{\omega^{21}}q_{12}\right) = \frac{1}{\omega^{21}}l^{21} - \frac{1}{\omega^2}l^2, \tag{8.33}$$

$$F^{21} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{\omega^1}q + \frac{1}{\omega^{12}}q_2\right) = \frac{1}{\omega^{21}}\left(\frac{1}{\omega^1}q_1 - \frac{1}{\omega^{12}}q_{12}\right) = \frac{1}{\omega^1}l^1 - \frac{1}{\omega^{12}}l^{12}. \tag{8.34}$$

但由于 l 是线性直线复形的直线，因此其直线都是各向同性的，所以两点 $l^2,\ l^{21}$ 都与两点 $l^1,\ l^{12}$互为极点。因此，^{12} 与^{21}互为极点。在平面$P^\perp$ 中，所有各向同性直线都经过 P。因此$_{12}$，$_{21}$ 和 P 共线。□

$F \quad F$

定理8.25。设 ω 在 $\mathbb{C}P^3$ 中定义了一个零极性，且 I 是 ω的一条各向同性直线。设$l:\ E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}P^3$ 是关于 ω的一个2-一般线性直线复形。假设 I 处于一般位置。那么截面 $\sigma_I(l)$是一个 Carnot映射 d，也就是说，它是一个射影 CKP 的达布映射。■

证明。设 E 是包含 I的平面。引理 8.24指出， $\sigma_E(l)$相对于 $E^\perp$是一个S-图。此外，定理8.22指出， $\sigma_{E^\perp} \circ \sigma_E(l) = \sigma_{E^\perp}(l)$是一个Carnot映射。□

定理8.26。设 ω 在 $\mathbb{C}P^3$ 中定义一个零极性，且 I 是 ω的一条各向同性直线。设 $d:\ E(\mathbb{Z}^3) \to I$ 是一个Carnot映射。则存在一个提升，即一个线性直线复形$l:\ F(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}P^3$，使得 $\sigma_I(l) = d$。■

证明。注意，为了得到 $\sigma_I(l)$而与 I 相交的平面，与 $\mathfrak{Q}$ 的边相对应，并且是直线复形中相应交点的极平面。由于 ω的反对称性， l 的每个交点都必须位于 I上相应达布映射点 d 的极平面内。首先，将 l^1 放在$d^{1\perp}$上。然后，将 l^2 和 l_1^2 都放在指定的极平面上，并放在l^1的极平面内。此外， l_2^1 此时位于三个平面的交点处，因此已确定。点l^3 和 l_1^3 也必须位于 l 和 l_1 上，同时位于指定的极平面内，因此同样已确定；而 l_3^1 位于三个平面的交点处。点 l_2^3 也位于一条直线和一个平面上，因而已确定。最后， l_3^2 位于直线 l_3 上且位于 $l_2^{3\perp}$上，但还应位于 $d_3^{2\perp}$上，因此受到过度约束。由此， d_3^2 并非任意选取，而是唯一确定的；根据定理8.25，它是满足CKP多重比条件的唯一点。□

此前，Bobenko 和 Schief[BS16] 发现了线性直线复形的一种 CKP 结构。特别是，他们证明，某些作为 M系统子式的 τ 变量满足 CKP方程；他们利用这些变量，通过普吕克坐标描述直线复形的传播。若能理解这些关系，并检验这两种 CKP 结构在某种意义上是否一致，将会很有意思。

8.5. 与二次曲面相切的达布映射

本截面不作详细介绍，但为完整起见，提及下面的定理。l

定理 8.27. 设 B 是 $\mathbb{C}P^3$ 中的一个非退化二次曲面，且 I 是 B中的一条各向同性直线。设 $d:\ E(\mathbb{Z}^3) \to B$ 是一个达布映射，其所有平面（与$\mathbb{Z}^3$的立方体相关联）均与 B相切。则截面 $\sigma_I(d)$是一个 Kœnigs 网，即一个射影 BKP Q-网。■

证明。考虑 d 的对偶 d^*，它是一个 Q-网（见图 6.6）。 d^* 中的点是 d 中出现的切平面的对偶，因此都包含在 B^* 中。I 的对偶 I^* 是 B^* 的一个生成元。回顾定理 6.17，该定理确定了原始与对偶 TCD 映射的某些簇结构（再次参见图 6.6）。因此，射影簇结构 $\sigma_{I^*}(d^*)$ 与 $\sigma_I(d)$ 的射影簇结构一致。然而，定理 8.16 告诉我们，$\sigma_{I^*}(d^*)$ 是射影 BKP，因此 $\sigma_I(d)$ 也是如此。因此， $\sigma_I(d)$ 是一个 Kœnigs 网。□

我们在定理8.17中观察到， $\mathbb{C}P^1$ 中的任意 Doliwa 复形（BKP 直线复形）都可以提升为一个点位于 $\mathbb{C}P^3$中的二次曲面上的 Q-网。在定理8.26中，我们观察到， $\mathbb{C}P^1$ 中的任意 Carnot映射（CKP 达布映射）都可以提升为 $\mathbb{C}P^3$中的一个线性直线复形。然而，对于 $\mathbb{C}P^1$ 中的 Kœnigs 网，我们无法证明类似的定理，因此将其留作一个问题。l

问题 8.28. 设 B 是 $\mathbb{C}P^3$ 中的一个非退化二次曲面，且 I 是B中的一条各向同性直线。设 $q:\ V(\mathbb{Z}^3) \to I$ 是一个 Kœnigs 网。是否存在一个提升，即一个达布映射 $d:\ E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}P^3$，使得它的所有平面都与 B 相切，且 $\sigma_I(d) = q$? ■

8.6. 四有理杨–巴克斯特达布映射

本节研究作为达布映射约化形式的映射。达布映射由 Adler、Bobenko 和 Suris [**ABS03b**] 引入。我们证明，这些映射自然符合 TCD 映射的框架，并证明这些映射的某些截面是 Doliwa 复合体。

定义 8.29。固定四个不同的点 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{CP}^2$, ，使得其中任意三个点都不共线。考虑经过全部四个点 P_1, P_2, P_3, P_4的圆锥曲线铅笔 $\mathcal{P}$ 。设 $\mathfrak{Q}$ 为一个具有 n 条带的四边形图。固定 n 条不同的圆锥曲线 $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{P}$。若达布映射 $d\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{CP}^2$ 满足：对于每一条与条带 i 交叉的边 $e \in E(\mathfrak{Q})$，其像 $d(e)$ 均位于圆锥曲线 C_i上，则称其为四有理 *Yang–Baxter-Darboux* 映射 。■

请注意， [**ABS03b**] 也考虑了某些点 P_1、 P_2、 P_3、 P_4 重合的情形。在这些情形下，铅笔通过与另外选取的一些切线固定高阶接触来定义。本节仅讨论一般位置的铅笔，以保持简洁。

事实上，很明显，四有理 Yang–Baxter-Darboux 映射中同一四边形内两条相邻边的像点 $d(e^i)$ $d(e^j)$ 决定了该四边形中另外两条边的像点 $d(e^i_j)$ $d(e^j_i)$ ，因为它们是直线 $d(e^i)d(e^j)$ 与圆锥曲线 C_i， C_j 的其他交点。因此，从离散相容性的角度来看，四有理杨–巴克斯特达布映射是杨-巴克斯特型的二维系统，正如第 4.4 节末尾简要讨论的那样。

值得注意的是，达布映射 [**Sch03**] 和四有理杨–巴克斯特达布映射 [**ABS03b**]几乎同时出现在文献中，而发现 Adler、Bobenko 和 Suris 引入的映射实际上是达布映射，这本身就是一项新发现，尽管这一发现几乎是显而易见的。Adler、Bobenko 和 Suris 还证明了四有理杨–巴克斯特达布映射是三维相容的，这意味着它们是达布映射的相容约化。

定理 8.30. 设 $d : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{CP}^2$ 是一个相对于点 P_1， P_2， P_3， $P_4 \in \mathbb{CP}^2$ 的四有理 Yang–Baxter-Darboux 映射。固定两个不同的指标 i， $j \in \{1, 2, 3, 4\}$，并令 H 为直线 P_iP_j。假设 d 是 1-一般，且 H 相对于 d 处于一般位置。那么，$l = \sigma_H(d)$ 是一个 Doliwa 复形。■

证明. 我们需要证明，在 l 的任意一个三维立方体中， l 的六个交点都满足引理 7.49 中的多重比方程。取一个立方体，并将该立方体的六个交点记为 l^{12}， l^{23}， l^{13}， l^{12}_3， l^{23}_1， l^{13}_2。注意，这些点是 d 中出现的直线与 H 的交点。此外，四个点 d^1， d^1_2， d^1_{23}， d^1_3 构成内接于圆锥曲线 C_i 的四边形。因此，笛沙格对合定理（见定理 8.7）适用，该定理指出，在这种情况下

$$\mathrm{mr}(l^{12}, l^{13}, P_i, l^{12}_3, l^{13}_2, P_j) = -1. \tag{8.35}$$

通过相同的推理，我们得到的是

$$\mathrm{mr}(l^{12}, l^{23}, P_i, l^{12}_3, l^{23}_1, P_j) = -1 \tag{8.36}$$

同样成立。通过结合前两个多重比方程，我们确实得到#+#+#+#+

$$\mathrm{mr}(l^{12}, l^{23}, l^{13}, l^{12}_3, l^{23}_1, l^{13}_2) = -1, \tag{8.37}$$

这正是引理 7.49 的要求，因此证明得证。 □

因此，四有理杨–巴克斯特达布映射伴随着 BKP 方程。

注 8.31。请注意，我们也可以考虑四有理杨–巴克斯特达布映射的其他情形，其中铅笔的某些基点（上文的 P_1，P_2，P_3，P_4）重合。这需要针对每种情形作更多论证，但切截面也有笛沙格对合定理。我们在研究第8.1节的接触圆锥网时，已经利用了笛沙格对合定理的这些切线版本。■

我们将四有理 Yang–Baxter 映射描述为四有理 Yang–Baxter 达布映射，并找到了作为特殊直线复形的截面。一个自然的后续问题是，我们是否也能将达布映射理解为某些 Q网的截面。假设存在一个 Q网，使得与 Q网的边相关联的直线是圆锥曲线铅笔中的二次曲面的母线，并且在四边形图中，与同一条带相关联的母线属于同一个二次曲面。那么，我们可以取任意一个（一般位置的）平面作为截面，从而得到所需的、点位于圆锥曲线铅笔中的达布映射。幸运的是，这确实可行。为了证明这些 Q网存在，我们将运用一些关于二次曲面交线的理论知识。下面作简要介绍，更多详情请参阅[**BST20, BLPT21**]。

考虑以下参数化曲线

$$\gamma_k : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^3, \quad z \mapsto [\mathrm{cn}_k(z), \mathrm{sn}_k(z), \mathrm{dn}_k(z), 1]. \tag{8.38}$$

这里我们用 cn_k、sn_k、dn_k 表示模为 k 的雅可比椭圆函数 。定义两个二次曲面

$$B_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{CP}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_4^2\}, \tag{8.39}$$

$$B_2 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{CP}^3 : x_3^2 + k^2 x_2^2 = x_4^2\}. \tag{8.40}$$

因此，根据雅可比椭圆函数之间的基本关系，γ_k的像与 $B_1 \cap B_2$重合。因此，将 γ_k 称为二次曲面交线是合理的。此外，由 B_1 和 B_2 张成的铅笔 $\mathcal{B}$ 中的每个二次曲面都包含 $B_1 \cap B_2$。事实上，在一般位置的情形下，除射影变换外，对每个椭圆模 k 都有一个二次曲面铅笔，并且每个铅笔都由相应的二次曲面交线完全确定。

现在来看二次曲面交线椭圆参数化的两个非常实用的性质 [**BLPT21**，命题 8.4]。首先，二次曲面交线与一般平面的交点由四个不同的点组成。二次曲面交线上的四个点 $\gamma_k(z_1)$ $\gamma_k(z_2)$ $\gamma_k(z_3)$ $\gamma_k(z_4)$ 共面，当且仅当 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ （模去雅可比椭圆函数的周期）。其次，二次曲面 $\mathcal{B}$ 的每条母线都与γ_k 相交两次。对于每个二次曲面 $B(t) \in \mathcal{B}$，都存在一个 $s_t \in \mathbb{C}$，使得对于任意 $z \in \mathbb{C}$，经过 $\gamma_k(z)$的 $B(t)$的两条母线的另外两个交点分别为 $\gamma_k(s_t - z)$和 $\gamma_k(-s_t - z)$。

这两个性质结合起来，使我们能够构造某些共面四边形。将四个点 $\gamma_k(z_0)$ $\gamma_k(t_1 - z_0)$ $\gamma_k(t_2 - t_1 + z_0)$ $\gamma_k(-t_2 - z_0)$分别关联到四边形的四个顶点 q，q_1，q_{12}，q_2。显然，这四个点是共面的。此外，四边形的相对边线对应于同一个二次曲面的生成元。因此，如果我们将四边形的边线与平面 $H \subset \mathbb{CP}^3$, 相交，就会得到同一直线上的四个点，其中两个位于圆锥曲线 $B_{t_1} \cap H$ 上，另外两个位于圆锥曲线 $B_{t_2} \cap H$上。

定义 8.32. 固定一个一般二次曲面铅笔 $\mathcal{B}$，它位于 $\mathbb{CP}^3$ 中，并固定其相应的交线曲线 γ_k。设 $\mathfrak{Q}$ 为一个四边形图。若每个四边形中与对边相关联的直线都是 $\mathcal{B}$ 中同一二次曲面的母线，则称 Q-网 $q : V(\mathfrak{Q}) \to \gamma(\mathbb{C})$ 为交替母线 Q-网。■

注意，在每个四边形中，对边的生成元自动属于不同类型，除非该四边形退化为一个点。

引理 8.33. 设 q 是关于一般铅笔 $\mathcal{B}$ 的 1-一般交替生成元 Q-网，且 H 是相对于 $\mathcal{B}$ 和 q 处于一般位置的平面。那么 $\sigma_H(q)$ 是一个四边有理 Yang-Baxter-Darboux 映射。■

证明。二次曲面的铅笔 $\mathcal{B}$ 与平面 H 的交集是圆锥曲线的铅笔 $\mathcal{P}$。由于每个四边形中 q 的对边都是同一二次曲面 $B(t)$ 的母线，因此它们的交点位于同一圆锥曲线 $C(t)$ 上 $\in \mathcal{P}$。因此，沿着 $\mathfrak{Q}$ 中的一条条带，$\sigma_H(q)$ 的所有点都属于同一圆锥曲线，而该圆锥曲线属于铅笔 $\mathcal{P}$。一般位置铅笔 $\mathcal{B}$ 与一般超平面 H 的交集总是由四个不同的点组成，因此满足定义 8.29 的条件。□

注 8.34。注意，可以去掉关于 H 和 $\mathcal{P}$的一般位置条件。在这种情况下，截面 $\sigma_H(q)$ 可能属于文献 [**ABS03b**]中讨论的四有理杨–巴克斯特达布映射的某种非一般情形。还要注意，在所谓的棋盘式内切圆网 [**BST20**], 的研究中，也使用二次曲面交线和铅笔的母线来生成这些网。然而，将母线组合起来生成棋盘式内切圆网的方式与这里不同。理解棋盘式内切圆网与四有理杨–巴克斯特达布映射之间的关系将很有意思。■

8.7. $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 中的 A-网、各向同性直线复形

A-网由Sauer [**Sau37**] 引入，书籍 [**BS08**]从离散微分几何的角度作了介绍。本节需要具备一些普吕克（直线）几何的基础知识 [**PW01**]。在普吕克几何中，$\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ 的每条直线都由 $\mathscr{P}$ 中的一个点表示；$\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{P}^5$, 中惯性指数为 (3,3) 的二次曲面，称为普吕克二次曲面。这一概念很容易推广到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$。$\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中的点和平面都对应于普吕克二次曲面的各向同性平面。这些各向同性平面中的点对应于经过某一点的所有直线，或等价地，对应于某个平面内的所有直线。

定义 8.35. n维仿射空间 *A*-网 是一个映射 $a\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^3$，使得对每个顶点 $v \in V(\mathbb{Z}^3)$，该顶点 v 及其所有邻点都映射到同一个平面。我们将这些平面组成的集合记为 $a^*\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathrm{Gr}(2, \mathbb{C}\mathrm{P}^3)$。■

尽管从定义中并不能立即看出这一点，但 A-网自然地存在于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中。共面限制只有在维数高于二维时才有意义，并且可以验证，A-网的点至多张成一个三维空间。

由于 $\mathfrak{Q}$ 的每个顶点都关联着一个平面 $a^*(v)$ 和一个点 $a(v)$，我们可以将这一对 $(a(v)\ a^*(v))$ 视为所谓的 接触元。从 Plücker 几何的角度来看，一个接触元由 $a^*(v)$ 中经过 $a(v)$ 的所有直线组成。在普吕克二次曲面中，一个接触元对应于一条各向同性直线。此外，A-网的一条边对应于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, 中的一条直线，该直线由两个关联点张成，或者等价地，是两个关联平面的交点。

定义 8.36。A-网 a 的 普吕克提升 是映射 $\hat{a}\colon E(\mathfrak{Q}) \to \mathscr{P}$，使得 $\hat{a}(v, v')$ 是经过 $a(v)$ 和 $a(v')$ 的直线的提升。■

定义 8.37. 设 $B \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是一个二次曲面。若与 $\mathfrak{Q}$ 的顶点关联的所有直线都关于B各向同性，则称直线复形 $l\colon E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 为各向同性 直线复形。■

各向同性直线复形已在 DDG 书 [**BS08**第 3.3] 节中讨论。以下观察归功于 Doliwa [**Dol01**]。

引理8.38. A-网 a 的普吕克提升 $\hat{a}$ 是相对于普吕克二次曲面 $\mathscr{P}$ 的各向同性直线复形。■

证明。 a 中的每条直线都被提升为普吕克二次曲面上的一个点。在Ω 的A-网的每条边（v, v'）上，A-网定义了一条经过 a（v）和 a（v'）的直线。与固定顶点 v 相邻的边所对应的所有此类直线，都属于接触元（a， a^*）。因此，这些直线的提升都包含在一条各向同性直线中。□

因此，A-网是离散微分几何中的又一个可表述为TCD映射的对象。由于立方体翻转存在于普吕克提升$\hat{a}$中，它对于A-网 a也成立。普吕克提升是一个直线复形，因此A-网具有四维一致性。虽然后面这两条结论并非新结果，但从将普吕克提升解释为直线复形这一点出发，几乎可以轻而易举地得出它们。

还要注意，通过普吕克提升表示 A-网时，会涉及一个满足某些额外二次约束的直线复形。正如我们在前几节中所见，带有额外二次约束的 TCD 映射通常与 BKP 方程或 CKP 方程有关。因此，人们可能会怀疑 A-网中也出现了 BKP 方程或 CKP 方程，而事实确实如此。

定理 8.39. 设 B 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 中的一个非退化二次曲面，且 I 是 B的一个各向同性平面。设 $l: E(\Omega) \to B$ 是一个 2-泛型各向同性直线复形。假设 I 处于一般位置。那么 $\sigma_I(l)$是一个 Doliwa 复合体。■

证明. 取一个包含 I 的四维空间 H ，并考察截面 $q = \sigma_H(l)$。这是一个点位于二次曲面 $H \cap B$上的 Q-网，因为 q 中的每个点都是 l 的一条各向同性直线与 H的交点。二次曲面 $H \cap B$ 包含 I ，因而包含一个各向同性平面。因此 $H \cap B$ 是退化的，因为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ 中的非退化二次曲面只包含维数严格小于二的各向同性空间。要证明 $\sigma_I(q) = \sigma_I(l)$是一个直线复形，只需考察 q的一个立方体。该立方体中位于 q 的点张成一个三维空间 $F \subset H$。因此，在这个立方体中， $\sigma_I(q)$与$\sigma_{I\cap F}(q)$重合；后者是二次曲面 $F \cap B$的一个生成元与该立方体相交所得的截面。因此，根据定理 8.16， $\sigma_I(q)$的每个立方体都满足 BKP 条件，故处处成立。□

通过指定 B 为普吕克二次曲面，我们立即得到一个关于 A-网的推论。

推论 8.40. 设 a 是一个 A-网，其普吕克提升 $\hat{a}$ 是 2-一般位置的，并设 E 是普吕克二次曲面的一个各向同性平面，且相对于 $\hat{a}$ 处于一般位置。则 $\sigma_E(\hat{a})$ 是一个 Doliwa复合体，也就是说，是一个射影 BKP 直线复合体。 ■

有趣的是，DDG 书 [BS08 的练习 2.29] 包含一个结果，其中 BKP 结构出现在 A-网的背景下。根据 DDG 书，这是 Kœnigs 本人 [Kø92] 的一个结果的离散版本。请注意，在本节接下来的部分中，关于 A-网的投影，我们没有提及完整的一般位置假设，因为我们认为它们并无特别意义，而且还需要解释我们的标准一般性判据如何从普吕克提升转换到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$。

引理 8.41. 从点$P \notin E$ 向平面 E 投影 A-网 a 得到的投影 $\pi_{P\to E}: \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \to E$ 是一个 Kœnigs 网。■

目前尚不清楚这如何纳入我们的框架，或如何推广到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 中二次曲面上的任意各向同性直线复形。不过，我们证明这两种 BKP 结构实际上是相同的（互为倒数）。

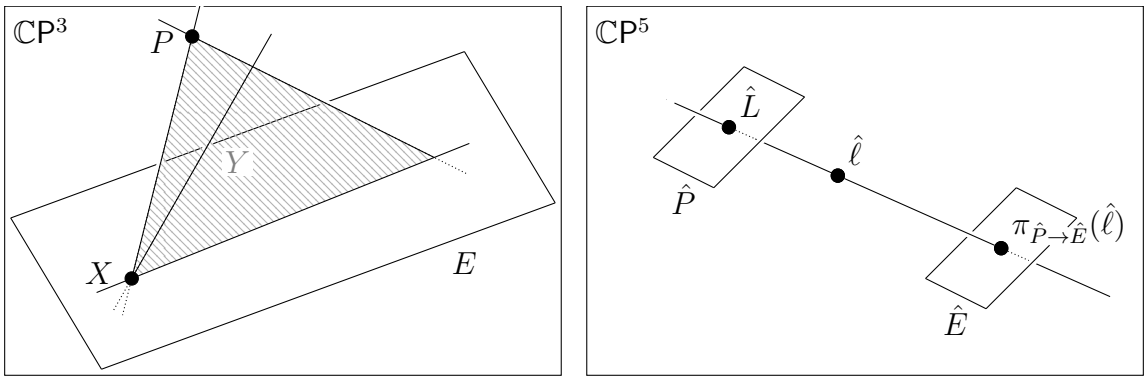


图8.4。左图为直线 ℓ 从 P 到 E 的投影 $\pi_{P\to E}$，右图为其在普吕克二次曲面上的提升，以及提升中的对应投影 $\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}$。

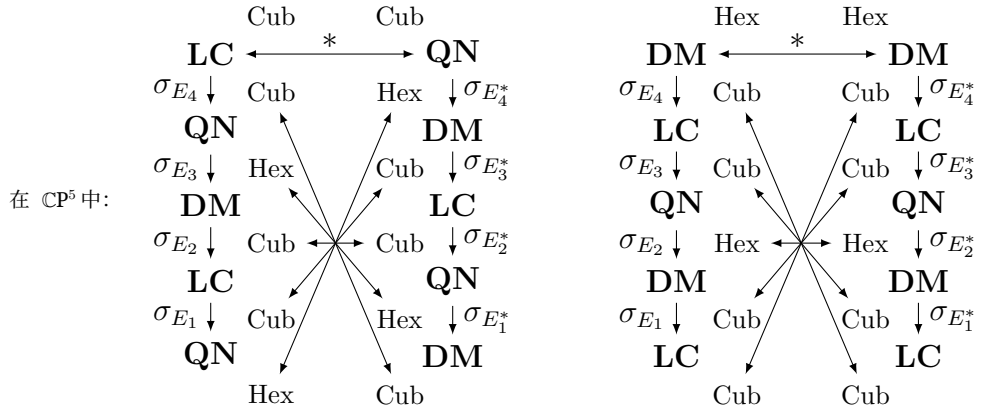


图8.5。 $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 中的两种簇结构对偶图。左图将直线复形与 Q-网联系起来。

定理 8.42. 设 P 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中的一个点， E 是一个不包含 P的平面。设 a 是一个 ^ A-网。将相应的普吕克提升记为 P， E， $\hat{a}$。那么，Q-网 $\pi_{P\to E}(a)$ 的射影簇结构与 $\sigma_{\hat{E}}(\hat{a})$ 的射影簇结构互为倒数。

■

证明。我们声称，投影 $\pi_{P\to E}$ 实际上对应于投影 $\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}:\mathbb{C}\mathrm{P}^5\to\hat{E}$，其中 $\hat{P}$、$\hat{E}$ 是 P 和 E 的普吕克提升，见图8.4。对应关系是，对于任意直线 $\ell\subset\mathbb{C}\mathrm{P}^3$， $\pi_{P\to E}(\ell)$ 的提升等于 $\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}(\hat{\ell})$。注意，$\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}$ 是从二维空间 $\hat{P}$ 到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$ 中与之不相交的二维空间 $\hat{E}$ 的中心投影。此外，$\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}(\hat{a})$ 中的每个点都是 $\pi_{P\to E}(a)$ 中相应直线的提升，而 $\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}(\hat{a})$ 中的每条直线都是接触元（$\pi(a)$ E）的提升。因此，$\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}(\hat{a})$ 实际上是 Kœnigs 网 $\pi_{P\to E}(a)$ 的射影对偶。另一方面，根据我们在第 6.4 节中的讨论，$\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}(\hat{a})$ 的射影对偶是 $\sigma_{\hat{E}^\perp}(\hat{a}^\star)$（见图8.5），其中 $\hat{E}^\perp=\hat{E}$，因为它是 $\mathscr{P}$ 的一个各向同性平面。因此， $\pi_{P\to E}(a)$ 和 $\sigma_{\hat{E}^\perp}(\hat{a}^\star)$ 射影等价，并具有相同的射影簇结构。此外，根据定理 6.17，$\pi_{\hat{P}\to\hat{E}}(\hat{a})$ 的簇结构与 $\sigma_{\hat{E}}(\hat{a}^\star)$ 的簇结构互为倒数。□

在继续下一节之前，我们先指出，在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$，中也有一个与定理 8.39 类似的结果，尽管我们并不知道它与常见例子有何关联。

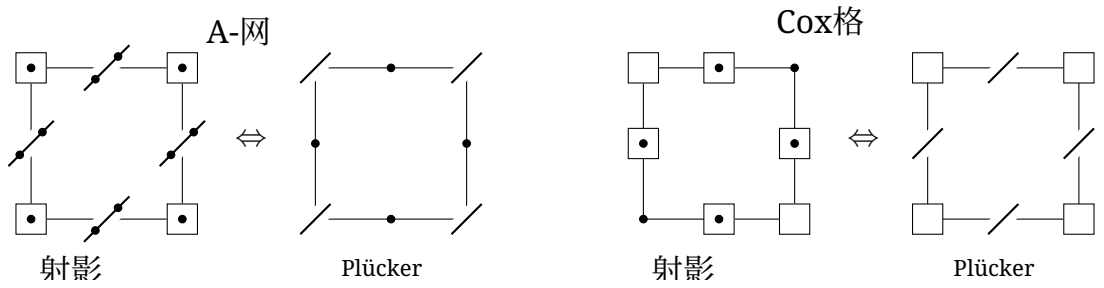


图8.6。A-网和Cox格中的一个四边形，以及相应的普吕克提升。圆点表示点，方形表示平面，带圆点的方形表示接触元。

定理 8.43. 设 B 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ 中的一个非退化二次曲面，且 I 是 B 的一条各向同性直线。设 $l\colon V(\Omega) \to B$ 是一个 2-泛型各向同性直线复形，并假设 I 处于一般位置。则 $\sigma_I(l)$ 是一个 Doliwa 复形。■

证明。选取一个包含 I的平面 E 。那么 $\sigma_E(l)$是一个点位于二次曲面$E \cap B$上的Q-网。定理8.16证明了这一结论。□

8.8. CP5中的Cox格、各向同性达布映射

Cox格由King和Schief引入并加以研究 [KS14]。他们的一项发现是，Cox格伴有BKP结构。沿用我们的方法，我们将Cox格表述为TCD映射并加以研究，进而证明Cox格中存在BKP方程的两种典范形式。本节仅讨论定义在 $\mathbb{Z}^3$或 $\mathbb{Z}^{3*}$上的映射。通过引入一种定义在以直线复形为截面的四边形图上的新型映射，这一方法可以推广到带有 $n > 3$ 的 $\mathbb{Z}^n$ 。

定义 8.44. *Cox*格 c 是一个从 $V(\mathbb{Z}^{3*})$ 出发的映射，使得每个偶（分别为奇）顶点的像都是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中的一个点（平面），且每个奇顶点的像都包含在相邻偶顶点所对应的平面中。■

我们在对偶晶格上定义 Cox格，因为这样可以简化与达布映射的对应。与第 8.7 节中的 A-网情形一样，我们使用普吕克提升。我们将 Cox格 c 中的每个点和平面都对应到普吕克二次曲面中的一个各向同性平面。Cox格中的每条边都定义一个接触元，因而对应普吕克二次曲面中的一条各向同性直线。Cox格中的每个面都对应由该四边形两个偶顶点处的点张成的直线。在提升中，每条这样的直线都是普吕克二次曲面上的一个点（见图8.6）。

定义8.45. 设 $c\colon V(\mathbb{Z}^{3*}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 是一个 Cox格。相应的普吕克提升是一个映射 $\hat{}c\colon E(\mathbb{Z}^3) \to \mathscr{P}$，其中 $\hat{}c((v, v'))$ 是与 c 中的四边形 $(v, v')^*$ 相关联的直线的普吕克提升。■

定义8.46. 设 B 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 中的一个二次曲面。映射 $d\colon E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ 是相对于 B 的各向同性 *Darboux* 映射，如果分配给 $\mathbb{Z}^3$ 的立方体的所有平面都是各向同性的。■

我们已在引理8.1中陈述了二次曲面中的 Q-网的相容性，并在第8.7节提到了各向同性直线复形的相容性。各向同性达布映射也具有相同性质：如果平面 E 的三个相邻平面 $E_{\bar{1}}$、$E_{\bar{2}}$、$E_{\bar{3}}$ 是各向同性的，那么 E 本身也是各向同性的，因为它与其中每个 $E_{\bar{k}}$ 相交于一条各向同性直线。因此，平面的各向同性性质会从柯西数据经由 $\mathbb{Z}^3$ 在各向同性达布映射中传播。

引理8.47。Cox格 c 的普吕克提升$\hat{}c$ 是一个各向同性达布映射。 ■

证明。普吕克提升 $\hat{}c$ 将 $\mathbb{CP}^5$ 中的点赋给 $\mathbb{Z}^3$的边。我们证明，$\hat{}c$ 赋给 u 中四边形 $\mathbb{Z}^3$ 的边 e^1、e^2、e^1_2、e^2_1 的点，位于 $\mathbb{CP}^5$中的一条直线上。再次注意，$\mathbb{Z}^3$ 中一个四边形的对偶在 $\mathbb{Z}^{3*}$ 中是一条边，反之亦然。因此，$\mathbb{Z}^3$ 中四边形 u 的四条边 e^1、e^2、e^1_2、e^2_1 对应于 $\mathbb{Z}^{3*}$中围绕边 u^* 的四个四边形 e^{1*}、e^{2*}、e^{1*}_2、e^{2*}_1。于是，e^1、e^2、e^1_2、e^2_1 经 $\hat{}c$ 映射为 $\mathbb{CP}^3$ 中直线的提升；这些直线由 c 与 $\mathbb{Z}^{3*}$中邻接公共边 u^* 的四边形 e^{1*}、e^{2*}、e^{1*}_2、e^{2*}_1相关联。若对于 v有 $u^* = (v, v')$，且 $v' \in V(\mathbb{Z}^3)$，则 $\mathbb{CP}^3$ 中的四条直线属于由 $c(v)$和 $c(v')$定义的接触元。因此，$\hat{}c$ 是一个达布映射。此外，属于 $\mathbb{Z}^3$ 的一个立方体的 $\mathbb{CP}^5$ 中的点位于一个各向同性平面上，因为 Cox 格 c 中对应的八条直线（位于 $\mathbb{CP}^3$ 中）要么全都包含在同一个平面内，要么全都通过同一个点。□

定理8.48. 设 B 是 $\mathbb{CP}^5$, 中的非退化二次曲面，I 是 B的一条各向同性直线，并且 $d: E(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{CP}^5$ 是相对于 B的一个2-一般各向同性Darboux映射。假设 I处于一般位置。则 $\sigma_I(d)$是一个Doliwa复合体。■

证明. 任取一个与 B 处于一般位置且包含 I的三维空间 H 。则截面$\sigma_H(d)$是一个Q-网，其点都包含在二次曲面 $B \cap H$中。由于 $\sigma_I(\sigma_H(d)) = \sigma_I(d)$，结论由定理 8.16 得出。□

由于Cox格是各向同性Darboux映射的特殊情形，我们已通过将其提升$\hat{}c$ 截取到普吕克二次曲面上的一个截面，成功地为Cox格关联了一个BKP结构。不过，我们可以选取一个更具体的中间截面，为Cox格添加第二个BKP结构。

定理8.49. 设 c 是一个带有普吕克提升$\hat{}c$的Cox格。设 P 是 $\mathbb{CP}^3$, 中的一个点，E 是其中一个平面，满足 $P \in E$ ，并且 P 不包含在 c 的任何一个平面中，且 E不包含 c中的任何点。设 H是 $\{\hat{}E, \hat{}P\}$在 $\mathbb{CP}^5$中的张成空间。那么 $\sigma_H(\hat{}c)$是一个Kœnigs网。■

$\hat{}\,\hat{}$ 证明. 注意，E 和 P 是两个相交于一条直线的平面，因此 H 是一个3维空间。此外，交点 $H \cap B$ 是 $E \cup P$。根据构造，截面$\hat{}\,\hat{}\sigma_H(d)$是一个Q-网 q。 q中的点包含在两个平面 E 和 P中，但我们需要验证奇点位于$\hat{}E$ 中，而偶点位于$\hat{}P$ 中，反之亦然。设 $v \in \mathbb{Z}^{3*}$ ，并假设 $c(v)$是一个点。那么 $\sigma_H(\hat{}c)(v)$是经过 $c(v)$的一条直线的提升，该直线或者包含在$\hat{}$ E中，或者包含 P。然而，根据假设，$c(v) \notin E$，因此 $\sigma_H(\hat{}c)(v)$位于 P中。$\hat{}$ 类似的论证表明，如果 $c(v)$是一个平面，那么 $\sigma_H(\hat{}c)(v)$位于 E中。由此满足定义7.31的假设。□

定理8.49也可以针对 $\mathbb{CP}^5$, 中的一般各向同性达布映射来表述，但在这种情况下，一般性假设会变得有些晦涩。

理解定理8.49的另一种方式是借助TCD映射的射影对偶。 $\mathbb{CP}^5$ 中的达布映射的对偶仍是达布映射（见图8.5）。事实上，关于 B 的各向同性达布映射的对偶仍是关于 B^*的各向同性达布映射，因为各向同性平面仍是各向同性平面。此外，普吕克二次曲面的一个生成元 I 对应于 $\mathbb{CP}^3$中的一个接触元（P，E）。 I的对偶 I^* 是 $\{\hat{}P、\hat{}E\}$的张成空间。 $\sigma_H(d)$是Kœnigs网这一事实，也可以从我们关于射影对偶的结果中推出；这些结果表明，$\sigma_{I^*}(d)$的射影簇结构与 $\sigma_I(d^*)$的射影簇结构一致。

King 和 Schief 引入的 BKP 结构 [**KS03**] 使用了$\mathbb{CP}^3$ 和 $\mathbb{CP}^{3*}$ 的齐次坐标，并采用霍奇星算子，或者等价地采用将 $\mathbb{CP}^3$与

$\mathbb{C}P^{3*}$对应起来的双线性形式。目前尚不清楚他们的 BKP 结构是否对应于我们在此介绍的两种 BKP 结构之一。

注8.50. A-网与Cox格之间存在一种有趣的关系；DDG 书 [BS08 第2节在未提及Cox格的情况下就提到了这一点4]：Cox格的两层可生成A-网的一层。在上方（按 $\mathbb{Z}^3$ 意义而言），Cox格中的每个点（分别地，平面）都是一个平面（点）；它们共同定义一个接触元，因而构成一个A-网。既然我们现在也为Cox格引入了普吕克提升，就可以将这一观察转译到提升中。在普吕克提升中，我们实际上是在“压合”$\hat{c}$的两层。也就是说，假设我们有一个点 $c(i,\ j,\ 2k)$，其上方有一个平面 $c(i,\ j,\ 2k+1)$。它们定义了接触元（$c(i,\ j,\ 2k)$ $c(i,\ j,\ 2k+1)$）。在提升中，该接触元表示为

$$\hat{c}(i,j,2k) \cap \hat{c}(i,j,2k+1). \tag{8.41}$$

因此，我们对达布映射 $\hat{c}$ 的平面取交，以获得直线复形 $\hat{a}$ 中的直线。事实上，二者的关系是

$$\hat{a} = f_3(\hat{c}), \tag{8.42}$$

也就是说，$\hat{a}$ 是达布映射 $\hat{c}$ 的焦直线复形（见第 6.6 节和图 6.7）。因此，Cox格与 A-网实际上通过焦变换相关联。■

8.9. 反基本线圆复形

本节我们对反基本线圆复形作一些观察。这类复形由 [**BS16**] 引入，作为线性直线复形的一种约化。我们将使用 拉盖尔几何[**Lag85**] ，但不作介绍。Blaschke [**Bla10**] 给出了经典处理。作为现代的（英文）处理，我们推荐 Bobenko、Lutz、Pottmann 和 Techter [**BLPT21**] 合著的书。

定义 8.51。反基本线圆复形 x 是从 $V(\mathbb{Z}^3)$ 到某个空间的映射，使得每个偶顶点或奇顶点的像分别是一个定向直线或一个定向圆，且相邻顶点的像彼此定向接触。■

*Blaschke*提升是将 $\mathbb{R}^2$ 中的定向直线提升到 $\mathbb{R}P^3$, 中的圆锥面 B 上的映射，参见 [**BLPT21**]。 B 中除顶点外的每个点都唯一对应于 $\mathbb{R}^2$中的一条定向直线。任何与 B 相交于多于一点但不包含一条直线的平面，都对应于所有与一个定向圆定向接触的定向直线。这种对应关系定义了将定向圆提升到 $\mathbb{R}P^3$中的平面的 Blaschke提升。

定义 8.52. 设 $x: V(\mathbb{Z}^3) \to \mathbb{R}^2$ 是一个反基本线圆复形。对应的*Blaschke*提升是一个映射 $\hat{x}: V(\mathbb{Z}^3) \to B$，其中，当 v 为偶数时，$\hat{x}(v)$ 是定向直线 $x(v)$ 的 Blaschke提升；当 v 为奇数时，则是定向圆 $x(v)$ 的 Blaschke提升。■

定理 8.53. 反基本线圆复形 x 的 Blaschke提升 $\hat{x}$ 是一个 Cox-格。■

证明。通过比较 Blaschke提升的定义 8.52 与 Cox格的定义 8.44，结论显而易见。□

作为将反基本线圆复形与 Cox 格识别的直接推论，我们立即得到，反基本线圆复形伴有两个 BKP 方程的实例，参见关于 Cox 格的第 8.8 节中的定理 8.48 和定理 8.49。

8.10. 各向同性映射序列

在定义于 $\mathbb{Z}^3$ 上的 Q-网、达布映射和直线复形这三个例子中，出现的射影子空间具有偏序关系。这些子空间依次是 TCD 映射的点、直线、平面、三维空间、四维空间等等。它们对应于余维逐渐增大的截面中的点。我们称 Q-网、达布映射或直线复形为 k各向同性的，如果它的所有 k空间都是各向同性的（相对于某个给定的二次曲面 B）。

定理 8.54。存在三种各向同性映射序列，其截面为射影 BKP。

(1) 设 B 是 $\mathbb{CP}^{2n+3}$ 中的一个非退化二次曲面， I 是一个各向同性（$n+1$）空间。设 ϕ 是一个映射到 $\mathbb{CP}^{2n+3}$ 的 n-各向同性映射，它是一个

$$\begin{cases} \text{Q-net} & \text{if } n = 3k \\ \text{Darboux map} & \text{if } n = 3k+2 \\ \text{line complex} & \text{if } n = 3k+1 \end{cases} \tag{8.43}$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$。那么 $\sigma_I(\phi)$ 是射影 BKP。

(2) 设 B 是 $\mathbb{CP}^{2n+3}$ 中的非退化二次曲面，且 I 是一个各向同性 n 空间。设 ϕ 是一个到 $\mathbb{CP}^{2n+3}$ 的 $(n+1)$-各向同性映射，它是一个

$$\begin{cases} \text{Q-net} & \text{if } n = 3k+2 \\ \text{Darboux map} & \text{if } n = 3k+1 \\ \text{line complex} & \text{if } n = 3k \end{cases} \tag{8.44}$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$。那么 $\sigma_I(\phi)$ 是射影 BKP。

(3) 设 B 为 $\mathbb{CP}^{2n+2}$ 中的一个非退化二次曲面，并设 I 为一个各向同性 n-空间。设 ϕ 为一个映射到 $\mathbb{CP}^{2n+2}$ 的 n-各向同性映射，它是一个

$$\begin{cases} \text{Q-net} & \text{if } n = 3k \\ \text{Darboux map} & \text{if } n = 3k+2 \\ \text{line complex} & \text{if } n = 3k+1 \end{cases} \tag{8.45}$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$。那么 $\sigma_I(\phi)$ 是射影 BKP。 ■

证明。对于情形 (1)，考虑一个包含 I 的 $(n+3)$-空间 E。那么截面 $\sigma_E(\phi)$ 的余维为 n。因此，它是一个点位于二次曲面 $B \cap E$ 上的 Q-网。二次曲面 $B \cap E$ 仍然包含各向同性的 $(n+1)$-空间 I，因此对于 $n > 0$ 是退化的。$\sigma_E(\phi)$ 中任意立方体的点所张成的空间，在一个环境 $(n+3)$-空间中是三维的，因此与 $(n+1)$-空间 I 相交于一条直线 J，该直线也是各向同性的。因此，根据定理 8.16，即可得出所要证明的结论。

对于情形（2），考虑包含 I 的一个 $n+2$ 维空间 E。那么截面 σ_E（ϕ）的余维为 $n+1$。因此，它是一个 Q-网，其点位于二次曲面 $B \cap E$ 上。二次曲面$B \cap E$ 仍然包含各向同性的 n 维空间 I，因此对于 $n > 1$ 它是退化的。σ_E（ϕ）中任意一个立方体的点所张成的空间，在一个环境 $n+2$ 维空间中是 3 维的，因而与 n 维空间 I 相交于一条直线 J，该直线也是各向同性的。因此，根据定理 8.16，结论得证。

对于情形（3），考虑一个包含 I 的 $(n+2)$-空间 E。那么截面 $\sigma_E(\phi)$ 的余维为 n。因此，它是一个点位于二次曲面 $B \cap E$ 上的 Q-网。二次曲面 $B \cap E$ 仍然包含各向同性的 n-空间 I，因此对于 $n > 1$ 而言是退化的。$\sigma_E(\phi)$ 中任意一个立方体的顶点所张成的空间，在一个环境 $(n+2)$-空间中是三维的，因此与 n-空间I 相交于一条直线 J，该直线也是各向同性的。因此，结论由定理 8 得证。16 □

问题 8.55. 设 B 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n, n>3$ 中的一个二次曲面。设 $q\colon \mathbb{Z}^3 \to B$ 是一个点位于 B 中的 Q-网，且 q 的点确实张成整个 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$。q 的簇变量是否属于某个 BKP 或 CKP 子簇，或者属于 q 的某个截面？还是说它们属于其他某种子簇？对于直线复形、达布映射，以及用零极性代替二次曲面的情形，是否也存在类似的问题？ ■

第9章

圆形Q网、泊松结构与量子化

本章旨在将 Bazhanov、Mangazeev 和 Sergeev（BMS）关于圆形 Q网的结果 [BMS08] 与 TCD 映射框架联系起来。特别地，我们证明，定义 5.38 中定义的仿射簇变量可以表示为 BMS 变量的一个（简单的）代数函数。借助这一表达式，我们证明，BMS 引入的泊松结构和量子结构都同构于簇代数上的典范泊松结构和量子结构。

BMS 的文章 [BMS08] 并未定义其引入的泊松结构和量子结构，而是着重讨论泊松括号、李括号及其在立方体翻转下的不变性。因此，很难对结果进行严格比较。于是，我们不对典范泊松结构和量子结构作全面介绍，而是请读者参阅 Gekhtman、Shapiro 和 Vainshtein 关于簇泊松结构的文章和专著 [GSV03, GSV10]，以及 Berenstein 和 Zelevinsky 关于量子簇代数的文章 [BZ05] 。相反，我们也将只比较泊松括号和李括号。

9.1. 泊松代数、量子化

定义 9.1. 设 A, A' 是结合交换代数。若双线性映射$\{\cdot,\cdot\}\colon A\times A\to A$ 满足以下条件，则称其为泊松括号：

(1) $\{f,g\}=-\{g,f\}$（反对称性），(2)
$\{f,gh\}=g\{f,h\}+\{f,g\}h$（莱布尼茨法则），(3)
$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$（雅可比恒等式），

对所有的 $f,g,h\in A$ 均成立。此外，若映射 $\phi\colon A\to A'$ 满足

$$\phi(\{f,g\}_A)=\{\phi(f),\phi(g)\}_{A'} \tag{9.1}$$

对所有的 $f,g\in A$ 均成立。我们也称 ϕ 为泊松映射。 ■

回想一下，可以用双线性反对称形式 ν 来表示箭图的箭头，参见公式（5.1）。

定义 9.2。设 $\mathcal{Q}$ 是一个具有簇变量 X_1、X_2..... X_m 的箭图。考虑代数 A_X，即 $\mathbb{C}[X_1,X_2,\dots,X_m]$ 的分式域。典范泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{Q}}$ 由以下关系生成：

$$\{X_v,X_{v'}\}_Q=\nu_{vv'}X_vX_{v'}, \tag{9.2}$$

对于 $\mathcal{Q}$ 的所有顶点 v、v'。 ■

典范簇泊松括号具有以下性质，参见 [GSV10]。

引理 9.3. 典范簇泊松括号在突变下保持不变。 ■

让我们概述引理 9.3 的含义及其证明。考虑顶点 $v, v' \in V(\mathcal{Q})$，并假设存在一条从 v 指向 v'的箭头。设 $\tilde{\mathcal{Q}}$ 是在 v处进行一次突变后得到的 $\mathcal{Q}$ 。那么 $\tilde{X}_v = X_v^{-1}$和$\tilde{X}_{v'} = X_{v'}(1 + X_v)$。一方面，我们可以计算

$$\{\tilde{X}_v, \tilde{X}_{v'}\}_{\tilde{\mathcal{Q}}} = \tilde{\nu}_{vv'}\tilde{X}_v\tilde{X}_{v'} = -\tilde{X}_v\tilde{X}_{v'}. \tag{9.3}$$

另一方面，我们可以计算

$$\{\tilde{X}_v, \tilde{X}_{v'}\}_{\mathcal{Q}} = \{X_v^{-1}, X_{v'}(1 + X_v)\}_{\mathcal{Q}} = -\frac{1}{X_v^2}\{X_v, X_{v'}\}_{\mathcal{Q}}(1 + X_v) \tag{9.4}$$

$$= -\nu_{vv'}\frac{X_{v'}}{X_v}(1 + X_v) = -\tilde{X}_v\tilde{X}_{v'}. \tag{9.5}$$

对于箭图中局部构型的其他可能情形，也可以进行类似的计算，并证明泊松括号确实在突变下保持不变。

除了泊松代数之外，还有一个与每个簇代数相关联的规范量子结构的定义[**BZ05**] 。严格的阐述超出了本论文的研究范围。其中一个障碍在于，在非交换情形下，定义有理函数空间并非易事。我们给出一个代数的形式化定义，以便展示其对易关系，进而使我们能够将这些关系与此前在圆形 Q-网情形下获得的对易关系进行比较 [**BMS08**] 。

定义 9.4. 设 $\mathcal{Q}$ 是一个带有簇变量 X_1、X_2、.....、X_m 的箭图。那么我们将代数 $\mathcal{A}_X$ 定义为由这些元素生成的、关于 $\mathbb{C}$ 的结合非交换代数的分式斜域

$$\{q\} \cup \{X_v : v \in Q\}, \tag{9.6}$$

满足以下条件：交换关系

$$q^{-\nu_{vv'}}X_vX_{v'} = q^{-\nu_{v'v}}X_{v'}X_v, \tag{9.7}$$

对于所有箭图顶点 v， v'，且 q 位于中心。

■

在下文中，无需考虑整个分式域；此外，斜域的存在性还涉及一些技术细节。关于这两点，请读者参阅 [**BZ05**]。

在量子情形下，突变对簇变量的影响并非显而易见，因为此时变量不再满足交换律。在量子簇代数 [**BZ05**] 的框架中，尽管可以通过方程 (5.3) 定义突变，但必须按照方程 (5.3) 中所示的顺序排列变量。下面给出一个计算示例，以说明交换关系在突变下的不变性。我们采用与泊松示例相同的假设，即考虑顶点 $v, v' \in V(\mathcal{Q})$，并假设存在一条从 v 指向 v'的箭头。这一次，我们在考虑变量顺序的同时进行计算，一方面，

$$\tilde{X}_v\tilde{X}_{v'} = q^{2\tilde{\nu}_{vv'}}\tilde{X}_{v'}\tilde{X}_v = q^{-2}\tilde{X}_{v'}\tilde{X}_v. \tag{9.8}$$

另一方面

$$\tilde{X}_v\tilde{X}_{v'} = X_v^{-1}X_{v'}(1 + X_v) = q^{-2\nu_{vv'}}X_{v'}(1 + X_v)X_v^{-1} = q^{-2}\tilde{X}_{v'}\tilde{X}_v. \tag{9.9}$$

备注 9.5。以上只是对簇泊松结构和量子结构的简要介绍。我们只会在下一节讨论圆形Q网时遇到它们。不过，在文献中，这两种结构在二聚体簇可积系统 [**GK13**]和高阶Teichmüller理论 [**FG06**]中都占有重要地位。泊松结构还用于将交比动力学的 Liouville 可积性结果 [**AFIT20**] 与 [**AGR21**]中的二聚体可积系统联系起来。此外，人们还猜测

它与五边形映射的泊松结构存在（直接）联系 [**OST10**] （另见 [**GR17**]）。■

9.2. 圆形Q网

定义 9.6. 圆形 *Q*-网 $q:\ V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{R}^3$ 是一个 Q-网，其中每个四边形都内接于一个圆。■

圆形Q网由Bobenko提出，Cieśliński、Doliwa和Santini也独立提出了这一概念 [**CDS97**] ，并将其与三重正交坐标系联系起来 [**Bob99**]。更多参考文献请见 [**BS08**第 3] 章。

还可以考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ 中 Q网的射影约束，并可按如下方式将其特化为圆形 Q网：固定一个平面 E 和一条非退化圆锥曲线 $C \subset E$。考虑这样的 Q网：对每个立方体，整个立方体都内接于一个包含该圆锥曲线 C 的二次曲面。圆形 Q网只是 E 为无穷远平面且 C 为该圆锥曲线的情形。

$$C = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 0\}. \tag{9.10}$$

如果允许复射影变换，我们总能将任意平面规范化为无穷远平面，并将该平面上的任意非退化圆锥曲线规范化为上式中的圆锥曲线。因此，射影视角并未带来多少额外自由度，我们将只考虑圆形Q网。不过，射影视角促使我们研究圆形Q网与无穷远平面的截面。本节旨在将相对于无穷远平面的仿射簇变量与 Bazhanov、Mangazeev 和 Sergeev [**BMS08**]引入的变量联系起来（我们将这三位作者简称为 BMS）。BMS 研究了这些变量在圆形Q网中的传播，并引入了泊松结构和变分原理。此外，他们还找到了可与多种已知量子结构联系起来的一种量子化。我们将说明，BMS 变量是仿射簇结构的势，并阐明 BMS 的泊松结构和量子结构如何在 Q 网的仿射簇结构上诱导出规范簇泊松代数和簇量子结构（见第 9.1 节）。

关于圆形 Q-网，一个有用的观察是，每个四边形中相对的角之和为 π，这是圆周角定理的一个直接推论。因此，我们可以在每个四边形 f中使用两个变量 α_f、β_f，将四个角参数化为 α_f、β_f、$\pi-\alpha_f$和 $\pi-\beta_f$。我们沿用 BMS 的方法，将 Q-网视为定义在四边形图上的映射，并使用四边形图的定向条带，另见第 2.3 节。在每个四边形中，我们按照图 9.1 将角 α_f、β_f、$\pi-\alpha_f$和 $\pi-\beta_f$ 赋予相应位置。请注意，我们的约定与 BMS 的约定略有不同；BMS 将条带按特定方式定向（如伪直线排列中所示，见 [**Fel04**]）。我们假设每个条带都选定了一个固定但任意的定向。请注意，沿逆时针方向，角总是按 β_f、α_f、$\pi-\beta_f$、$\pi-\alpha_f$的顺序出现； α_f角总是位于 $\mathfrak{Q}$ 的黑色顶点处，而 β_f 角总是位于 $\mathfrak{Q}$的白色顶点处。

定义 9.7. 四边形 f的*BMS* 变量 $a_f, \bar{a}_f, k_f$为

$$k_f = \frac{\sin\beta_f}{\sin\alpha_f}, \quad a_f = \frac{\sin(\alpha_f+\beta_f)}{\sin(\alpha_f)}, \quad \bar{a}_f = \frac{\sin(\alpha_f-\beta_f)}{\sin(\alpha_f)}, \tag{9.11}$$

满足约束条件 $a\bar{a} = 1-k^2$。*BMS*泊松结构 由以下关系生成

$$\{k_f, a_{f'}\}_{\mathrm{BMS}} = \delta_{ff'}k_f a_{f'}, \quad \{k_f, \bar{a}_{f'}\}_{\mathrm{BMS}} = -\delta_{ff'}k_f\bar{a}_{f'}, \quad \{a_f, \bar{a}_{f'}\}_{\mathrm{BMS}} = 2\delta_{ff'}k_f^2, \tag{9.12}$$

对于一个 y two quads f, f' of $\mathfrak{Q}$. ■

BMS 泊松结构被称为超局部，因为非平凡关系仅存在于分配给同一个四边形的变量之间。考虑反转一条条带的定向对

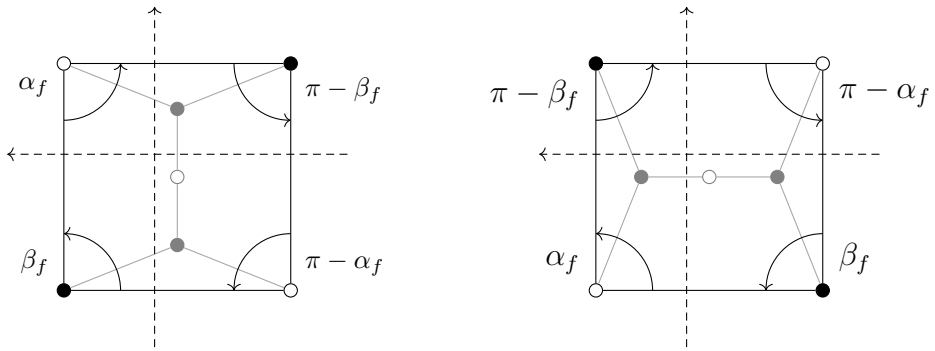


图 9.1. 圆形Q网中四边形 f 的角度约定。

被该条带穿过的四边形中的角度 f 会产生什么影响。存在两种情况：角度保持不变，或者所有角度都替换为对应角度的 π 负值。因此， f的 BMS 变量变换为 $k_f \mapsto k_f$， $a_f \mapsto \pm a_f$ 和 $\bar{a}_f \mapsto \pm \bar{a}_f$。因此，条带定向改变后，泊松关系仍保持不变。

现在，我们可以将 BMS 变量和 BMS泊松结构与 Q网的仿射簇变量 Y 联系起来。回顾一下，Q网的仿射簇变量分为三组：位于 $\mathfrak{Q}$ 白色顶点处的变量 Y_w 、位于 $\mathfrak{Q}$ 黑色顶点处的变量 Y_b ，以及与 $\mathfrak{Q}$ 的四边形相关联的变量 Y_f 。

引理 9.8. 关于无穷远平面的仿射簇变量 Y 与 BMS 变量之间由以下公式联系：

$$Y_f = -k_f^2, \qquad Y_w = (-1)^{d_w} \prod_{f \sim w} \bar{a}_f k_f^{-1}, \qquad Y_b = (-1)^{d_b} \prod_{f \sim b} \bar{a}_f^{-1}, \tag{9.13}$$

其中 w， b 是四边形图 $\mathfrak{Q}$ 的白色顶点和黑色顶点，而 d_w， d_b 分别是顶点 w， b 的度。■

证明。根据引理 5.42，四边形 f 处的变量 Y_f 为

$$Y_f = -\frac{\sin(\beta_f)^2}{\sin(\alpha_f)^2} = -k_f^2, \tag{9.14}$$

与条带如何穿过四边形无关。此外，白色顶点处一个四边形的乘法贡献为

$$\pm \frac{\sin(\alpha_f - \beta_f)}{\sin(\beta_f)} = \pm \bar{a}_f k_f^{-1}, \tag{9.15}$$

其中符号取决于条带如何穿过四边形。不过，我们注意到，重新定向一条条带会改变与给定白色顶点关联的两个四边形处的符号。因此，反转定向不会改变总符号，我们可以假设条带围绕黑色顶点循环地定向。在这种情况下，结论便得证。最后，在黑色顶点处，每个四边形的贡献为

$$\pm \frac{\sin(\alpha_f)}{\sin(\alpha_f - \beta_f)} = \pm \bar{a}_f^{-1}, \tag{9.16}$$

其中符号的论证与之前相同。 □

引理 9.9. 将 Y 变量用 BMS 变量表示的映射，除以因子 2 进行缩放后，是一个泊松映射。■

证明. 直接计算即可。例如，若用 BMS 变量表示两个簇变量 Y_f, Y_w，然后计算 BMS 泊松括号，我们得到

$$\{Y_f, Y_b\}_{\mathrm{BMS}} = \{k_f^2, \prod_{f'\sim b} \bar{a}_{f'}^{-1}\}_{\mathrm{BMS}} = -2k_f\bar{a}_f^{-2}\{k_f, a_f\}_{\mathrm{BMS}} \prod_{\substack{f'\sim b\\ f'\neq f}} \bar{a}_{f'}^{-1} = 2Y_fY_b. \tag{9.17}$$

我们可以对所有相关组合进行这些计算，从而得到这些关系

$$\{Y_f, Y_w\}_{\mathrm{BMS}} = 2\delta_{fw}Y_fY_w, \quad \{Y_f, Y_b\}_{\mathrm{BMS}} = -2\delta_{fb}Y_fY_b, \quad \{Y_w, Y_b\}_{\mathrm{BMS}} = 2\delta_{wb}Y_wY_b. \tag{9.18}$$

除时间重标度因子 2 外，这些关系与正则泊松关系一致

$$\{Y_f, Y_b\} = \delta_{fb}Y_fY_b, \quad \{Y_f, Y_w\} = -\delta_{fb}Y_fY_w, \quad \{Y_b, Y_w\} = \delta_{bw}Y_bY_w, \tag{9.19}$$

在仿射簇结构的情形下，这些关系在第 9.1 节中被引入。 □

在 BMS 变量上定义超局域泊松括号或许已经令人惊讶。但更令人惊叹的是，BMS 泊松代数可以归约为角度上的以下泊松括号：

$$\{\alpha_f, \beta_{f'}\} = \delta_{f,f'}, \quad \{\alpha_f, \alpha_{f'}\} = 0, \quad \{\beta_f, \beta_{f'}\} = 0. \tag{9.20}$$

BMS 利用这些关系引入正则量子化

$$[\alpha_f, \beta_{f'}] = \hbar\delta_{f,f'}, \quad [\alpha_f, \alpha_{f'}] = 0, \quad [\beta_f, \beta_{f'}] = 0. \tag{9.21}$$

由这个李括号可以推导出变量转化为算子后的 $\bar{a}$ 和 k 所满足的以下对易规则：

$$k_f\bar{a}_f = q\bar{a}_fk_f, \tag{9.22}$$

其中， q 是一个量子化常数。角变量的李括号还意味着不同四边形对应的算子彼此对易。假设因式分解公式 (9.13) 对按给定顺序排列的、由 Y变量转化而来的算子成立。由于对易规则具有超局域性，四边形上的乘积顺序并不重要，唯一需要满足的是 $\bar{a}_f$ 位于 k_f^{-1} 之前。下面我们通过一个示例计算来求出 $f \sim w$ 对应的 Y 算子的对易规则：

$$Y_fY_w = k_f^2 \prod_{f'\sim w} \bar{a}_{f'}k_{f'}^{-1} = q^2 \prod_{f'\sim w} \bar{a}_{f'}k_{f'}^{-1}k_f^2 = q^2Y_fY_w. \tag{9.23}$$

事实上，很容易验证，属于箭图中不相邻变量的簇算子彼此交换，而如果它们相邻，那么关系是

$$Y_fY_w = q^2Y_fY_w, \quad Y_fY_b = q^{-2}Y_fY_b, \quad Y_wY_b = q^2Y_wY_b. \tag{9.24}$$

这些恰好与簇代数的正则对易规则一致，见定义 9.4。

BMS 还获得了一些关于一般 Q-网 [BMS08] 的结果。在一般情形下，BMS 变量变为 A_f, B_f, C_f, D_f，并且可以简洁地表示在矩阵中。

$$\begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\gamma_f)}{\sin(\delta_f)} & \frac{\sin(\delta_f+\sin\beta_f)}{\sin(\delta_f)} \\ \frac{\sin(\delta_f+\gamma_f)}{\sin(\delta_f)} & \frac{\sin(\beta_f)}{\sin(\delta_f)} \end{pmatrix}, \tag{9.25}$$

其中 α_f、β_f、γ_f、δ_f是四边形 f的角度。这些变量满足约束 $(AD - BC)(DB - AC) = (AB - CD)$。不难看出，对于一般 Q-网，可以像圆形 Q-网的情形那样，将仿射簇变量表示为一般 BMS 变量的某些乘积，例如 $Y_f = -A_fD_f$。然而，由于 BMS 在一般情形下没有给出任何泊松代数结构，因此这里没有太多需要证明的内容，我们略去详细说明。若能理解变量 A_f、B_f、C_f、D_f是否存在一个与典范仿射簇泊松代数泊松等价的泊松代数，将会很有趣。这或许能够为一般 TCD映射找到类似的结果。

人们还可能想知道，圆形 Q网的仿射簇变量是否位于某个子簇中，该子簇可能由引理 9.8中的因式分解诱导。然而，可以证明，对于任意具有仿射变量 Y_f、Y_w、Y_b的 Q-网，都存在 BMS 变量 k_f、a_f、$\bar{a}_f$，使得引理 9.8中的因式分解成立。为此，对每个变量 Y_f 选取一个平方根，从而确定变量 k_f，使得 $-k_f^2 = Y_f$。确定 $\bar{a}_f$ 变量随后变成一个二维系统。暂且还考虑边界顶点处的冻结 Y_w、Y_b 变量，参见定义 5.38下方的注释。我们可以沿着四边形的 li-定向进行（见第 4.4 节）。每一步添加一个四边形时，我们也会封闭一个顶点，因此唯一确定了 $\bar{a}$。所以，对于一般 Q-网，总可以通过这种半局部变量变换将泊松变量超局部化。在一般文献中是否存在类似的变换，这一点值得研究。此外，上文解释的二维系统是否确实是三维可积的，也尚不清楚。这很可能需要仔细选择 k_f的平方根，并且必须注意，在立方体翻转中，Y变量也会发生变化。

引理 9.8 中的因式分解与伊辛子簇的定义（参见定义7.21）有一种奇妙的相似性。事实上，可以将这两个公式结合起来，推导出圆形 Q-网具有位于伊辛子簇中的仿射簇变量，当且仅当

$$\prod_{f\sim v} a_f \bar{a}_f^{-1} = \pm 1, \tag{9.26}$$

对于 $\mathfrak{Q}$ 的每个内部顶点。我们不指定乘积的符号，因为这里的符号确实取决于 a_f 变量的符号，而这些符号会在条带重新定向时改变。理解条件 (9.26) 的几何意义将会很有意思。请注意，一个 Q-网在伊辛子簇中具有仿射簇变量，当且仅当它是一个 CQ 网，见第 7.9 节。因此，方程 (9.26) 提供了一种通过角度条件来识别哪些圆形 Q 网是 CQ 网（反之亦然）的方法。

第10章

来自统计物理的嵌入作为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的 TCD映射

10.1. 圆图案与 T-嵌入

定义 10.1. 设 G 是一个二分平面图。圆模式是一个映射 $c\colon V(G) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$，使得 G 的每个面的像都共圆。■

圆模式的前身是旨在离散化保角映射的圆堆积。这种方法最初归功于 Koebe [**Koe36**] 和 Thurston [**Thu85**]。Stephenson [**Ste05**]撰写了一篇关于圆堆积的优秀引言。将其推广到具有任意交角的圆模式，则始于 Thurston [**Thu79**，第 13 节。7] 以及 Rivin[**Riv94**]。

请注意，圆模式与圆网（第 9.2 节）以及二圆锥网的特殊情形（第 8.1 节）之间存在相似之处。然而，位于 $\mathbb{R}^n$ with$n > 2$ 中的圆网通常无法等同于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中的圆模式。若无点位于无穷远直线上，则可以将 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中以“虚圆点”为特殊点的特殊二圆锥网等同于圆模式。然而，$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中二圆锥网的典范簇变量与我们将为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中圆模式引入的变量不同。此外，我们研究的局部变换也有所不同。

回想一下，我们在定义 5.1 中定义了 PDB 箭图（平面、对偶二分箭图），即二分图的定向对偶图。

定义 10.2. 设 $\mathcal{Q}$ 是一个 PDB 箭图。映射 $t\colon V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 若满足对于 $\mathcal{Q}$ 的每个顶点 v，其邻点按循环顺序排列为 $v_1, v_2, \ldots, v_{2m}$ 时，相邻角度满足以下条件，则称为 *t*-嵌入

$$\sum_{k=1}^{m} \arg\left(\frac{t(v_{2k-1}) - t(v)}{t(v_{2k}) - t(v)}\right) \in \pi\mathbb{Z}. \tag{10.1}$$

■

请注意，在圆模式和 t-嵌入的定义中，我们都不要求满足任何嵌入性。t-嵌入这一术语由 [**CLR20**], 创造；然而，t-嵌入此前也曾独立地以库仑规范之名出现 [**KLRR21**]。此外，在 DDG 社群中，t-嵌入是圆锥网的共面情形，这类圆锥网也曾被单独研究 [**Mü15**]。我们使用 t-嵌入这一名称，而不称其为库仑规范，是因为我们关注的是中心；也不称其为圆锥网，则是为了避免与高维圆锥网的若干相互竞争的定义混淆。

引理10.3. 设 G 是一个二分平面图，$\mathcal{Q}$ 是与 G 对偶的 PDB 箭图。将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的一个仿射图，并设 $c\colon V(G) \to \mathbb{C}$ 是该图中的一个圆模式。那么，由 c 的圆心构成的映射 $t\colon V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个 t-嵌入。■

证明。考虑 $\mathcal{Q}$ 的一个顶点 v，其邻点为 $v_1, v_2, \ldots, v_m$。由于 $\mathcal{Q}$ 是 PDB 箭图，我们有 $m \in 2\mathbb{Z}$。令 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ 表示与 v 相邻的 $\mathcal{Q}$ 的面，使得对于所有 i，f_i 都与 v, v_i 和 v_{i+1} 相邻，见图10.1。交点 $c(f_{i+1})$ 是 $c(f_i)$ 关于直线 $t(v)t(v_{i+1})$ 的反射，因为这条直线是 $c(f_{i+1})$ 的垂直平分线，并且

$c(f_i)$. 连续对直线 $t(v)t(v_{i+1})$ 和 $t(v)t(v_{i+2})$ 进行两次反射，会将 $c(f_i)$ 映射到 $c(f_{i+2})$。连续两次反射等于绕 $t(v)$ 旋转，旋转角为相对于 $t(v)$ 而言，$t(v_{i+1})$ 与 $t(v_{i+2})$ 之间夹角的两倍。依次复合所有 m 次反射，得到一个将 $c(f_1)$ 映射到 $c(f_1)$ 的旋转，因此旋转角必须是 2π 的倍数。由于总旋转角等于中心之间每隔一个夹角之和，定义 10.2 的角度条件得以满足。□

请注意，若选择不同的仿射图，就会得到一个不同的映射，而该映射在该图中是一个t-嵌入。然而，在一个图中构造的t-嵌入，在无穷远点不同的另一个图中就不是t-嵌入。尽管如此，这两个映射都属于一个更大的映射类。我们可以将圆心视为无穷远点关于该圆的反射像。我们可以固定另一个点来代替无穷远点，然后考虑该点关于所有圆的反射。所得的点称为共形中心。这样便可以引入t-嵌入的射影推广，并且每个圆模式都对应一个由此类广义t-嵌入构成的（复数）单参数族。我们不再进一步探讨这种方法。

我们也可以反过来做。我们可以从一个t-嵌入构造一个圆模式。为了准确说明这一点，我们使用离散联络的概念。回想一下，我们用$\vec{E} = \{(v,\ v') : \{v, v'\} \in E\}$ 表示 G的定向边集合。

定义 10.4. 设 S 是一个集合，G 是一个图。离散联络 $\gamma : E \to \mathrm{End}(S)$ 是一个映射，满足

$$\gamma(v, v') \circ \gamma(v', v) = \mathrm{id} \tag{10.2}$$

对于所有定向边 $(v,\ v') \in \vec{E}$。若对于 G 的任意圈 $(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m,\ v_1)$，离散联络 γ 都满足 ……，则称其为平坦。

$$\gamma(v_1, v_2) \circ \gamma(v_2, v_3) \circ \cdots \circ \gamma(v_m, v_1) = \mathrm{id}. \tag{10.3}$$

■

由于我们不使用非离散联络，因此将离散联络简称为联络。我们用 $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的仿射变换，它是 $\mathrm{End}(\mathbb{C})$ 的一个子群。

定义 10.5. 设 $t : V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个 t-嵌入，且 G 是一个满足 $G^* = \mathcal{Q}$ 的图。我们称 $\varrho : \vec{E}(G) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ 为 t-嵌入联络，若 $\varrho(v,\ v')$ 是关于直线 $t(v^*)t(v'^*)$ 的反射。■

引理 10.6. 对于任意 t-嵌入 $t : V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$，t-嵌入联络 $\varrho : \vec{E}(G) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ 是平坦的。■

证明。离散联络的条件成立，因为对于任意相邻的 $v, v' \in V(G)$，映射 $\varrho(v, v') = \varrho(v', v)$ 都是同一个反射，因此 $\varrho(v, v') \circ \varrho(v', v)$ 是恒等映射。只需检验 ϱ 在 G 的每个面周围的平坦性，也就是在 $\mathcal{Q} = G^*$ 的每个顶点周围的平坦性。但在 G 的一个面 f 周围，ϱ 的偶数次复合对应于绕 $t(f^*)$ 的旋转。定义 10.2 中关于 f^* 的 t-嵌入角度条件，恰好就是 ϱ 绕 f 的复合为恒等映射这一条件。□

引理 10.7. 考虑一个 t-嵌入 $t : V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 及其 t-嵌入联络 ϱ，并将该 t-嵌入的目标空间 $\mathbb{C}$ 的副本与 $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ 中 $\mathbb{C}$ 的副本等同起来，其中后者是联络 ϱ的目标空间。记与 $\mathcal{Q}$对偶的图为 G。选取 G的一个初始点 $c_0 \in \mathbb{C}$和一个顶点 v_0。对于 G的每个顶点 v，固定一条路径 $v_0,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_m,\ v$。定义一个映射 $c : V(G) \to \mathbb{C}$，其定义为

$$c(v) = \varrho(v_m, v) \circ \varrho(v_{m-1}, v_m) \circ \cdots \circ \varrho(v_0, v_1)(c_0). \tag{10.4}$$

那么 c 是一个圆模式。■

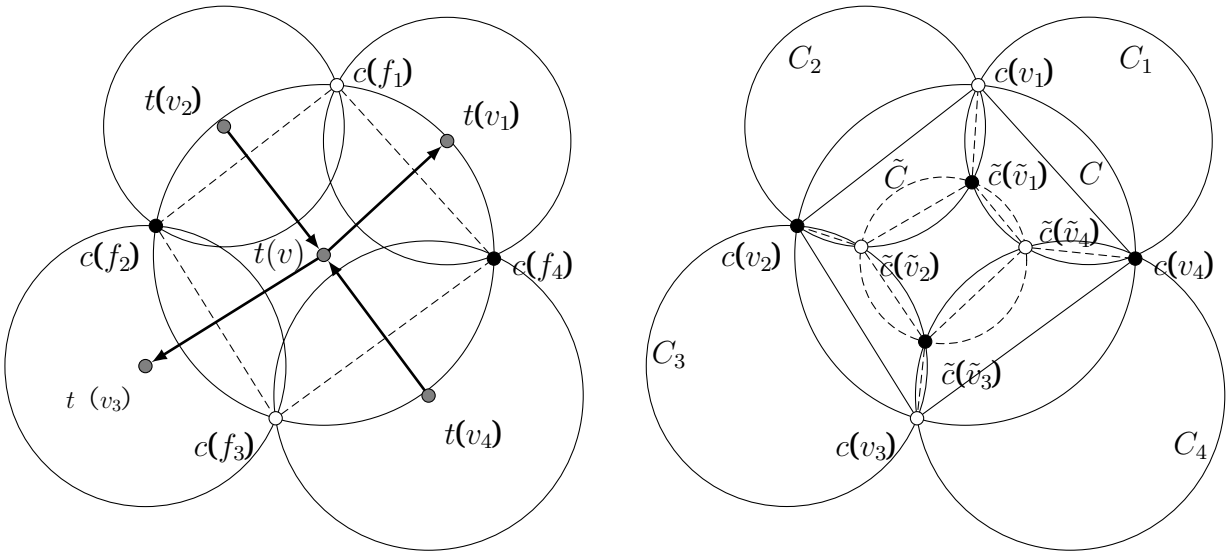


图10.1. 左：定义在 $\mathcal{Q}$ （箭头）上的t-嵌入的标记，以及如引理10.3所示定义在 G （虚线）上的圆模式（圆）。右：米克尔变换，˜如定义10.9所示的 L （实线）和 L （虚线）的一个例子。

证明。首先，由于 ϱ 是平坦联络，根据引理 10.6，这个定义是良定义的。此外，对于 G 的一个面 f，其边界上的顶点为 v_1'， v_2'、.....、 v_{2m}'，我们看到，可以通过一系列关于经过$t(f^*)$的直线的反射，将任意 $c(v_k')$映射到 $c(v_1')$。因此， $c(v_k')$到 $t(f^*)$的距离与 k无关，而点 $c(v_1')$到 $c(v_{2m}')$都位于以 $t(f^*)$为中心的圆上。□

因此，对于任意给定的 t-嵌入，都存在一个与之关联的复一参数族圆模式。注意，折纸映射 [**CLR20**] 是一个在研究 t-嵌入时很重要的映射，也由 t-嵌入联络构造而来，但其构造方式与引理 10.7 中的构造不同。

接下来，我们将考察如何局部改变圆模式和 t-嵌入的组合结构。同样，结果表明，关键在于关联几何中的一个经典定理 [**米克38**]（见图10.1）。

定理10.8（米克尔定理）。设 C_1， C_2， C_3， C_4 是 ℂP¹ 中的四个圆，且每个圆都与 C_{k+1} 相交于一点或两点。设 $I = \bigcup_{k=1}^{4}(C_k \cap C_{k+1})$ 为相邻圆的交点集合。假设存在一个圆 C ，它与每个圆 C_k相交，且˜与它们的交点仅为 I。那么还存在另一个具有相同性质的圆 C ，使得 I˜被 $C \cup C$覆盖。■

定理中的集合 I 可能只由四个点组成，此时 C 、˜和 C 重合。为适应我们的目的，我们改变了米克尔定理的通常表述，˜重点强调 C 和 C 同时存在，而不是强调立方体中的第八个交点存在。我们利用米克尔定理来定义圆模式中的组合结构的局部变化。

定义10.9. 设 $c\colon V(G) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是一个圆模式，且 f 是 G 中的一个四度面（四边形）。考虑以 f 为中心的组合结构局部变化，如二聚体˜模型中所定义。图 7.1 展示了变换前后的四对可能局部构型 L、L。设变换˜ ˜之前， $L \subset G$ 中与 f 相邻的四个顶点为 v_1、v_2、v_3 和 v_4；变换之后， $L \subset G$ 中与 f 相邻的四个顶点为 $\tilde{v}_1$、$\tilde{v}_2$、$\tilde{v}_3$ 和 $\tilde{v}_4$。将 G 中与 f 相邻的四个面标记为 f_1、f_2、f_3 和 f_4，使得每个 f_i 都与 v_i和 v_{i-1}相邻。圆模式 c 为面 f、f_1、f_2、f_3、f_4 配置五个外接圆，这些圆

˜我们将其对应为米克尔定理中的圆 C, C_1, C_2, C_3, C_4 。设 C 为米克尔定理中的第六个圆。定义圆模式 $\tilde{c}\colon V(\tilde{G}) \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1,$ ，使得 $\tilde{c}(\tilde{v}_i)$ 是交点$C_i \cap C_{i+1} \cap \tilde{C}$，且 $\tilde{c}$ 在其他所有位置都与 c 一致。圆模式 $\tilde{c}\colon V(\tilde{G}) \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 是对 c 应用米克尔变换于 f 后得到的结果。■

令人惊讶的是，米克尔变换对圆心的作用并不取决于实际的圆，而只取决于圆心本身。

定理 10.10. 设 $t(v_1)$ $t(v_2)$ $t(v_3)$ $t(v_4)$ 是米克尔定理中圆 C_1, C_2, C_3, C_4 的圆心，并设 $t(v)$ $\tilde{t}(v)$ 是同一定理中 C 和 $\tilde{C}$ 的圆心。那么这些圆心满足 dSKP 方程

$$\mathrm{mr}(t(v), t(v_1), t(v_2), \tilde{t}(v), t(v_3), t(v_4)) = -1. \tag{10.5}$$

■

证明. 参见 [**Aff21**，引理 6.3] 和 [**KLRR21**，第 5 节.1]。 □

作为该定理的推论，我们也可以为 t-嵌入定义组合结构的局部变化。

定义 10.11. 设 $t\colon V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个 t-嵌入，且 v 是 $\mathcal{Q}$ 中度为 4 的一个顶点。˜考虑在 v 处突变后出现的箭图 $\mathcal{Q}$，见图 7.1。将在 v 处突变后的 t- 嵌入定义为 t- 嵌入 $\tilde{t}\colon V(\tilde{\mathcal{Q}}) \to \mathbb{C}$, 它除 v 上以外处处与 t 一致；在 v 上，将其像 $\tilde{t}(v)$ 定义为定理 10.10 中所述。■

下一个推论说明了 t-嵌入中的突变与相应圆模式中的米克尔变换之间的关系。

推论 10.12. 将 $\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 的一个仿射图，并令 $\mathcal{Q}$ 为与 G对偶的 PDB 箭图。令 v 为 $\mathcal{Q}$ 中的一个四度顶点， v^* 为 G中相应的四边形。

(1) 令 $c\colon G \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 为一个圆模式，并令 t 为由 c的中心构成的 t-嵌入。令 $\tilde{t}$ （分别地， $\tilde{c}$）为在顶点 v （面 v^*）处突变后的 t-嵌入（圆模式）。则 $\tilde{t}$ 由 $\tilde{c}$的中心构成。

(2) 令 $t\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ 为一个 t-嵌入，并令 c 为按照引理 10.7 中的方法，通过离散 t-嵌入联络构造的圆模式，其初始点为 c_0。令 $\tilde{t}$ （分别地， $\tilde{c}$）为在顶点 v （v^*）处突变后的 t-嵌入（圆模式）。则以 c_0 为初始点、由 t 构造的圆模式˜与 $\tilde{c}$重合。■

我们已为圆模式和 t-嵌入关联了一个箭图，以及组合结构的局部变化。接下来的目标是证明，t-嵌入实际上是 TCD 映射的特殊情形。回顾一下，PDB 箭图的面分为两类：顺时针定向的面和逆时针定向的面。

引理10.13. 设 $\mathcal{Q}$ 是一个 PDB 箭图。存在一个 TCD $\mathcal{T}$，其仿射箭图为 $\mathcal{Q}$。■

证明。我们通过构造相应的图 $\mathcal{G}$来构造 $\mathcal{T}$。对于 $\mathcal{Q}$的每个顶点 v ，向 $\mathcal{G}$ 中添加一个白色顶点w_v 。对于每个度为 d_f 的顺时针面 f ，粘接一个与具有端点匹配 $\mathcal{S}_1^{d_f}$ 的TCD相对应的图块G_f （参见定义2.3），使得 G_f 的白色边界顶点与对应于 f的边界顶点 v 的白色顶点 w_v 粘接。图块 G_f 不包含内部白色顶点，因此 $\mathcal{G}$ 的白色顶点与 $\mathcal{Q}$的顶点一一对应，这正是我们所需要的。 G_f图的仿射箭图由一个顺时针定向的 d_f边形组成，由此完成证明。□

请注意，对于 $\mathcal{G}$，还有另一种构造方法：通过对 $\mathcal{Q}$ 的每个顺时针面进行三角剖分，然后将每个这样的三角形替换为一个黑色顶点及其三个白色邻点（即 TCD 的构件）。我们在构造过程中观察到，产生相同仿射箭图的两个 TCD 仅相差一个蜘蛛变换序列。

引理10.14. 设 $\mathcal{T}$是一个具有仿射箭图 $\mathcal{Q}$的TCD。设 $t: V(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个t-嵌入，并设 $T: \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}$ 是一个TCD映射，它将 $\mathcal{G}$ 中的每个白色顶点x w_v 映射到像 $t(v)$。那么，在 w_v 处对 T 进行的任何重新分裂，都对应于在 v处对 t 进行的一次突变。■

证明。该陈述成立，因为定理 10.10 与公式（2.14）一致，并且唯一确定了该变换。□

作为该引理的推论，从现在起，我们也将 t-嵌入视为 TCD 映射，并记作 $t: \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}$，因为 $\mathcal{T}_{\circlearrowleft}$ 与 $V(\mathcal{Q})$ 一一对应。

注记10.15。我们再补充以下观察。给定定义在 $\mathcal{Q}$上的 t-嵌入的几何，我们也可以将其定义在 $\rho(\mathcal{Q})$上，即所有箭头反向的箭图，而不影响本节先前的任何论述。然而，与 $\mathcal{Q}$ 和 $\rho(\mathcal{Q})$相对应的 TCD映射的两个 TCD 的组合结构却大不相同。当然，这种情况之所以可行，只是因为 t-嵌入的所有点一开始就在 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$中射影共线，并且 $\mathcal{G}$ 的黑色顶点并未体现任何关联几何。■

引理10.16。与 t-嵌入 $t: \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}$ in [**Aff21, KLRR21**] 相关联的簇结构是 t的仿射簇。■

证明。 [**Aff21, KLRR21**] 中 t-嵌入的簇结构定义，与引理 5.41 中通过有向差表示仿射簇结构的表达式相同。□

请注意，将 t-嵌入视为 TCD 映射时，它实际上具有两种簇结构：一种是仿射簇结构，另一种是射影簇结构。不过，出于概率论方面的考虑，仿射簇结构更值得关注，原因如下列引理所示。

引理 10.17. t-嵌入的仿射簇变量均为实数。反过来，具有实仿射簇变量的 dSKP 格就是 t-嵌入。此外，若 t-嵌入是适当的 [**CLR20**], ，也就是说，面由直边围成，且这些面是凸的、互不相交的，那么仿射簇变量均为正实数。■

证明。TCD 映射 T 的仿射簇变量： $\mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}$ 为实数，当且仅当满足定义 10.2 中的角度条件。此外，若 t-嵌入是适当的，则角度和必须为 π，这意味着仿射簇变量为正。□

如果圆模式定义在具有 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构的图 G 上，那么相应的对偶箭图 Q 也具有 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构。此外，由于 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构，圆可以划分为偶圆和奇圆。与四边形（$(i,\ j)$，$(i+1,\ j)$，$(i+1,\ j+1)$，$(i,\ j+1)$）对应的圆，在 $(i+j) \in 2\mathbb{Z}$ 时为偶圆，否则为奇圆。对于 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构，可以在圆模式以及 t-嵌入上定义全局动力学。

定义 10.18。考虑一个圆模式 $c^{(0)}: V(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$。对每个奇数编号的圆执行米克尔变换，从圆模式 $c^{(2k)}$ 得到圆模式$c^{(2k+1)}$；对每个偶数编号的圆执行米克尔变换，从圆模式 $c^{(2k-1)}$ 得到圆模式 $c^{(2k)}$。这一迭代定义了米克尔动力学。■

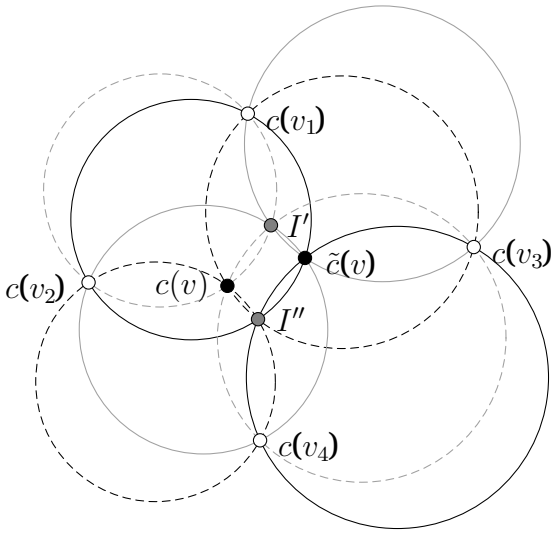


图 10.2. 克利福德四圆定理。使用灰色圆进行的构造与使用黑色圆进行的构造得到相同的第二个黑色点。

注意，在米克尔动力学的迭代过程中构造出的所有圆模式 $C^{(k)}$ 仍然是 $\mathbb{Z}^2$ 圆模式。米克尔动力学源自 Kenyon 的一个想法，最早由 Ramassamy 研究 [**Ram18**]。Ramassamy 和 Glutsyuk 得出了米克尔动力学的第一个可积性结果 [**GR18**]。由定理 10.10 可知，在 t-嵌入层面上，米克尔动力学是 dSKP 格的一种特殊情形。然而，直到现在，人们仍不清楚是否存在一种可与圆模式本身相关联的簇结构，也就是说，一种无需借助仿射图来确定圆心、仅根据交点就能读出的簇结构。为说明这种簇结构确实存在，我们从关联几何中的另一个经典定理入手，即克利福德四圆定理 [**CTS07**] 及其与 dSKP 方程的关系。我们用记号 $\bigcirc(a,\ b,\ c)$ 表示经过三个互不相同的点 $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$的唯一圆。

定理 10.19（克利福德四圆定理）。考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中五个不同的点 $c(v)$、$c(v_1)$、$c(v_2)$、$c(v_3)$、$c(v_4)$，它们不共圆（见图 10.2）。令 I', I'' 满足

$$\{c(v), I'\} = \bigcirc(c(v), c(v_1), c(v_2)) \cap \bigcirc(c(v), c(v_3), c(v_4)), \tag{10.6}$$

$$\{c(v), I''\} = \bigcirc(c(v), c(v_2), c(v_3)) \cap \bigcirc(c(v), c(v_4), c(v_1)). \tag{10.7}$$

那么，存在唯一的第六个点 $\tilde{c}(v)$，使得

$$\begin{aligned} \{\tilde{c}(v), I'\} &= \bigcirc(I', c(v_2), c(v_3)) \cap \bigcirc(I', c(v_4), c(v_1)), \\ \{\tilde{c}(v), I''\} &= \bigcirc(I'', c(v_1), c(v_2)) \cap \bigcirc(I'', c(v_3), c(v_4)). \end{aligned} \tag{10.8}$$

■

dSKP 方程与下文所述的 Clifford 四圆定理之间的关系归功于 Konopelchenko 和 Schief [**KS02**]。

引理 10.20. 设 $c(v)$ $\tilde{c}(v)$ 和 $c(v_1)$ $c(v_2)$ $c(v_3)$ $c(v_4)$ 为克利福德四圆定理中的六个点。那么

$$\mathrm{mr}(c(v), c(v_1), c(v_2), \tilde{c}(v), c(v_3), c(v_4)) = -1. \tag{10.9}$$

■

接下来，我们将引入一种与圆模式密切相关的 t-嵌入类似物。

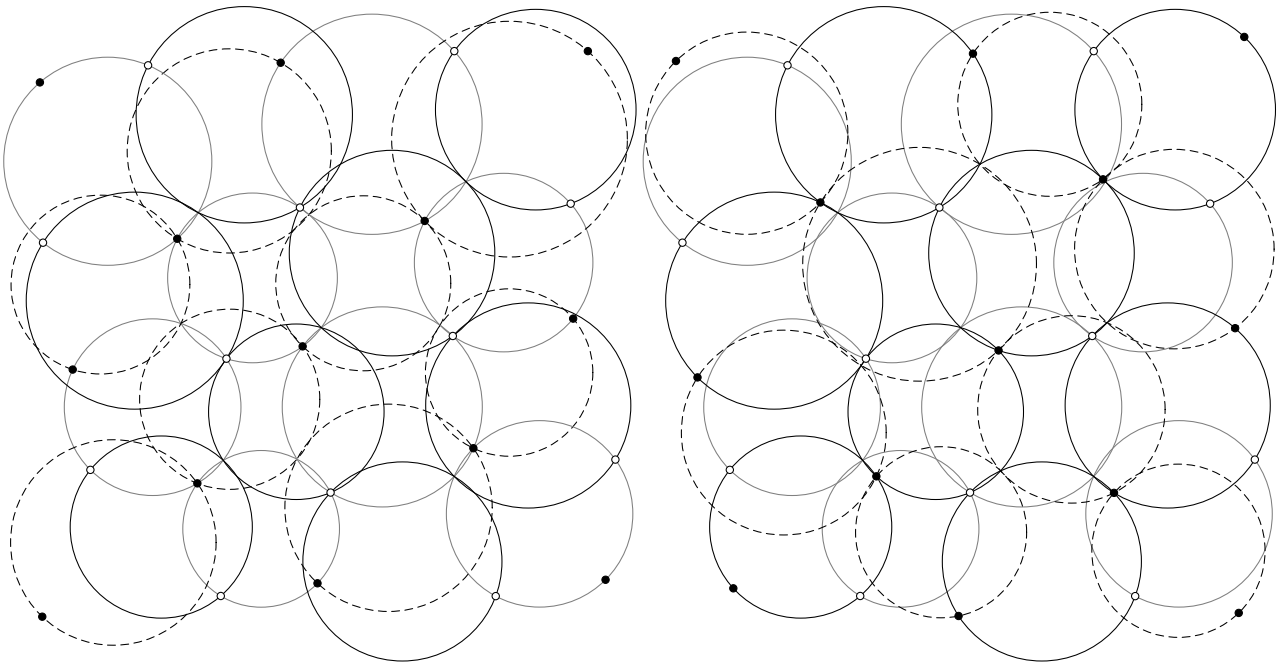


图10.3. 米克尔动力学相关的圆，具体为圆 $C^{(k)}$（虚线，仅左侧）、 $C^{(k+1)}$（灰色）、 $C^{(k+2)}$（黑色）、 $C^{(k+3)}$（虚线，仅右侧）。左：u-嵌入 $u^{(k)}$ 的偶点（$i+j+k \in 2\mathbb{Z}$，白色）以及奇点（$u^{(k)}$，黑色）。右： $u^{(k+1)}$ 的偶点（黑色）以及 $u^{(k+1)}$ 的奇点（白色）。从左到右，只有黑点发生变化。

定义 10.21. 设 $u\colon\ \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是一个 TCD映射。若其所有射影簇变量均为实数，则称 u 为 u-嵌入。■

定义 10.22. 设 $c^{(0)}$ 是一个 $\mathbb{Z}^2$ 圆模式，并设 $c^{(k)}$ 是通过米克尔动力学构造的 $k \in \mathbb{Z}$ 圆模式。将 $c^{(2k)}$ 的奇圆记为映射

$$C^{(2k)} : V_-(\mathbb{Z}^2) \to \{\text{Circles of } \mathbb{C}\mathrm{P}^1\}, \tag{10.10}$$

以及通过映射 $c^{(2k)}$ 得到的偶圆

$$C^{(2k+1)} : V_+(\mathbb{Z}^2) \to \{\text{Circles of } \mathbb{C}\mathrm{P}^1\}. \tag{10.11}$$

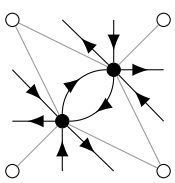
设 $u^{(k)}$ 是从 $V(\mathbb{Z}^2)$ 到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的映射，使得

$$u^{(k)}(i,j) = C^{(k)}(i,j) \cap C^{(k)}(i-1,j-1) \cap C^{(k+1)}(i-1,j) \cap C^{(k+1)}(i,j-1), \tag{10.12}$$

如果 $i+j+k \in 2\mathbb{Z}$，否则

$$u^{(k)}(i,j) = C^{(k+1)}(i,j) \cap C^{(k+1)}(i-1,j-1) \cap C^{(k+2)}(i-1,j) \cap C^{(k+2)}(i,j-1). \tag{10.13}$$

定义一个 TCD $\mathcal{T}^{(k)}$，使关联图 $\mathcal{G}^{(k)}$ 的白色顶点集合与 $V(\mathbb{Z}^2)$ 相对应，并且对于所有带有 $i+j+k \in 2\mathbb{Z}$ 的 i,j，将 TCD 粘合起来。



进入左下角为（i，j）的四边形。然后，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，映射 $u^{(k)}\colon\ \mathcal{T}_{\circlearrowleft}{}^{(k)} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是与 $c^{(k)}$ 相关联的*u*-嵌入。■

图10.3 展示了一个由米克尔动力学关联的 $u^{(k)}$ 和 $u^{(k+1)}$ 的示例。

我们将在引理 10.24 中证明，与圆模式相关联的 u-嵌入确实是定义 10.21 中定义的 u-嵌入。此外，实际上还可以通过在定义 10.22 中交换偶顶点和奇顶点的角色，得到另一个与 c 相关联的 u-嵌入。就我们的目的而言，只考虑定义 10.22 所定义的 u-嵌入便已足够。我们还注意到，在拉普拉斯-达布动力学（见图 3.8）中，我们已经遇到过对应于 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构的 TCD。

定理 10.23. 相关联的 u-嵌入 $u^{(k)}$ 和 $u^{(k+1)}$ 通过一系列 2-2 移动相互关联。■

证明. 不失一般性，假设 $k = 0$。那么对于 $i + j \in 2\mathbb{Z} + 1$，点 $u^{(k)}(i,\ j)$ 与 $u^{(k+1)}(i,\ j)$ 重合。此外，这些点

$$u^{(k)}(i,j), u^{(k)}(i-1,j), u^{(k)}(i,j+1) \text{ are on } C^{(k+1)}_{i-1,j}, \tag{10.14}$$

$$u^{(k)}(i,j), u^{(k)}(i,j-1), u^{(k)}(i+1,j) \text{ are on } C^{(k+1)}_{i,j-1}, \tag{10.15}$$

$$u^{(k+1)}(i,j), u^{(k)}(i+1,j), u^{(k)}(i,j+1) \text{ are on } C^{(k+2)}_{i,j}, \tag{10.16}$$

$$u^{(k+1)}(i,j), u^{(k)}(i-1,j), u^{(k)}(i,j-1) \text{ are on } C^{(k+2)}_{i-1,j-1}. \tag{10.17}$$

根据相关 u-嵌入的定义，上述列表中的四个圆在圆模式 $c^{(k+1)}$ 的同一个点相交。我们将这一构型视为克利福德四圆定理中的构型。四个圆的公共点是 I'；$u^{(k)}(i,j)$ 和 $u^{(k+1)}(i,j)$ 分别是 $c(v)$ 和 $\tilde{c}(v)$；点 $u^{(k)}(i-1,j)$ $u^{(k)}(i,j+1)$ $u^{(k)}(i+1,j)$ 和 $u^{(k)}(i,j-1)$ 分别是 $c(v_1)$、$c(v_2)$、$c(v_3)$ 和 $c(v_4)$。由引理 10.20 可知，$u^{(k)}$ 和 $u^{(k+1)}$ 中涉及的六个点满足 dSKP 方程。因此，这些点通过重新分裂相联系，见引理 2.39。因此，将 $u^{(k)}$ 和 $u^{(k+1)}$ 作为 TCD映射联系起来的第一步，是在 $\mathcal{G}^{(k)}$ 中对 $\mathbb{Z}^2$ 的每个偶顶点进行重新分裂。在 $\mathcal{G}^{(k)}$ 中重新分裂并在 $\mathcal{T}^{(k)}$ 中进行相应的 2-2 移动后，得到的 TCD 尚未 $\mathcal{T}^{(k+1)}$。但是，如果在重新分裂之后，再对 $\mathbb{Z}^2$ 的每个偶面进行蜘蛛变换，结果便是 $\mathcal{T}^{(k+1)}$。这一序列将 $u^{(k)}$ 和 $u^{(k+1)}$ 作为 TCD映射联系起来。□

引理 10.24. 设 $u^{(k)}$ 为定义 10.22 中的映射。每个 $u^{(k)}$ 都是一个 u-嵌入。■

证明. 不失一般性，假设 $k = 0$。我们要证明射影簇变量都是实数。在 $\mathbb{Z}^2$ 的奇数面中，二分图 $\mathcal{G}$ 看起来像蜘蛛变换中出现的二分图，因此奇数面的中心处的射影簇变量是四个点的交比。由于这四个点位于同一个圆上，交比是实数。在 $\mathbb{Z}^2$ 的偶数四边形中，$\mathcal{G}^{(0)}$ 的对应面由八个顶点组成。然而，两次重新分裂（不会改变射影簇变量）将八点多重比化为一个交比。这正是定理 10.23 的证明中讨论的重新分裂。因此，我们知道交比中出现的四个点实际上是$u^{(1)}$中同一个圆上的四个点，所以交比也是实数。□

我们现在发现，与米克尔动力学相关的并非一种，而是两种实簇结构。t-嵌入结构在仿射变换下保持不变，而 u-嵌入结构在射影变换下保持不变。请注意，为了赋予 u-嵌入概率解释，我们必须考虑簇变量也为正的 u-嵌入。正性对应于 u-嵌入中的点在圆 $C^{(k)}(i,\ j)$ 上按不相交的顺序排列。然而，原始圆模式需要满足什么相应条件，目前尚不清楚。

我们继续展示 t-嵌入与 u-嵌入之间的更多关系。

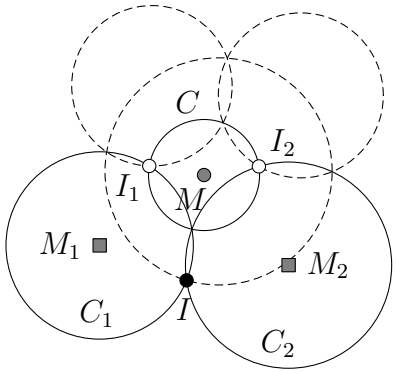


图10.4. 引理 10.25 的构形。

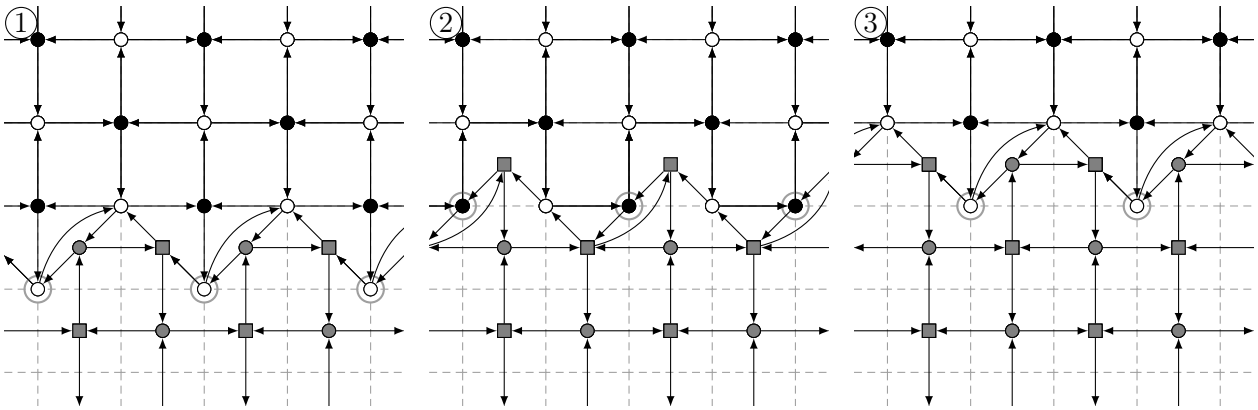


图10.5. 将一个 u-嵌入变为 t-嵌入的突变序列中的三个步骤。白点和黑点对应于该 u-嵌入的交点，而灰色节点对应于圆心。

引理 10.25. 考虑 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的仿射图 $\mathbb{C}$ 中三个不同的圆 C、C_1 和 C_2，它们交于一个公共点 I，见图 10.4。设圆之间的交点集为

$$C_1 \cap C = \{I, I_1\}, \qquad C_2 \cap C = \{I, I_2\}, \qquad C_1 \cap C_2 = \{I, I'\}. \tag{10.18}$$

此外，令 M、M_1、M_2 为 C、C_1、C_2的中心。那么 dSKP 方程

$$\mathrm{mr}(I_1, M_1, I', M_2, I_2, M) = -1 \tag{10.19}$$

成立。 ■

证明。显然，多重比的绝对值为 1，因为我们有

$$|\,\mathrm{mr}(I_1, M_1, I', M_2, I_2, M)| = \frac{r_1 r_2 r}{r_1 r_2 r}, \tag{10.20}$$

其中 r_1、r_2、r 是圆 C_1、C_2、C的半径。此外，圆 C、C_1、C_2 在 I处的二面角之和为 2π。但二面角之和也等于 π 减去多重比自变量中出现的角度，因此证明了多重比的自变量为 π。□

定理 10.26. 设 $c: V(\mathbb{Z}^2) \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的一个仿射图中的圆模式，并考虑与之关联的 t-嵌入和 u-嵌入。那么，t-嵌入是 u-嵌入的一个扩张（见定义 4.44），反之亦然。■

证明。我们展示图10.5中的 t-嵌入数据如何通过 u-嵌入数据传播；图中画出了仿射箭图的三次迭代。经过两步突变，t-嵌入数据在 $\mathbb{Z}^2$ 中向前传播一步。突变将 u-嵌入中的点映射到 t-嵌入中的相应点，这直接源于引理 10.25。

比较图10.4和图10.5，我们选用了相同的节点符号来表示对应的中心和点。这一突变序列使一条弦穿过 $\mathbb{Z}^2$ ，因此在组合意义上对应于一次扫掠，在几何意义上对应于一次扩张。由于空间是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, ，几何上无法区分究竟是 u-嵌入扩张了 t-嵌入，还是反过来。这一点也体现在：我们完全可以反转图10.5中的所有箭头，而它仍然是一个 TCD映射的仿射箭图，其中白色顶点的集合相同，且映射到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 中相同的点，但对应不同的 TCD。因此，我们可以将 t-嵌入视为 u-嵌入的扩张，反之亦然。□

令人惊讶的是，定理 10.26 表明，相关的 u-嵌入与 t-嵌入通过一系列突变彼此关联。t-嵌入所有迭代的组合结构存在于一个 A_3格上，u-嵌入也是如此。定理 10.26 意味着，可以将 t-嵌入、相关的 u-嵌入及其所有演化一起看作存在于 A_4的两个 A_3-切片上。从这个意义上说，可以将 t-嵌入视为 u-嵌入的离散巴克隆变换，反之亦然。其中甚至还涉及一个可以视为谱参数的参数。如果从 t-嵌入转到 u-嵌入，就必须从 t-嵌入转到圆模式；在这种情况下，我们可以任意选择一个初始点。另一方面，如果从 u-嵌入转到 t-嵌入，那么在从圆模式转到 t- 嵌入的步骤中，就需要选择仿射图。这一选择对应于无穷远点的选择，而在这个方向上，它可以被视为谱参数。由于存在这些不同的选择，我们可以考察 t-嵌入与 u-嵌入交替出现的序列，它们共同构成一个满足 dSKP 方程的从 A_4 映射。

还有一种联系 t-嵌入与 u-嵌入的方法。回顾一下，TCD映射旗在定义4.62中已有定义。

引理10.27. 设 $(T_2,\ T_1)$，$(E_2,\ E_1,\ E_0)$ 是 $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 中的 TCD映射旗，并设 $(T_2^\star,\ T_1^\star)$、$(E_2^\star,\ E_1^\star,\ E_0^\star)$ 是 $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2)^*$ 中的对偶 TCD 映射旗。选择 E_1 的一个仿射图，使 E_0 位于无穷远处；再选择 $E_1^\star$ 的一个仿射图，使 $E_0^\star$ 位于无穷远处。那么

(1) 若 T_1 是 u-嵌入，则 $T_1^\star$ 是 $E_1^\star$ 中的 t-嵌入，

(2) 若 T_1 是 t-嵌入，则 $T_1^\star$ 是 $E_1^\star$ 中的 u-嵌入。 ■

证明。我们已将 u-嵌入刻画为具有实射影簇变量的映射（定义 10.21），并将 t-嵌入刻画为具有实仿射簇变量的映射（引理 10.17）。此外，我们已在定理 6.17 中证明，

$$\mathbf{Aff}_{E_0}(T_1) = \mathbf{Pro}(T_1^\star), \qquad \mathbf{Pro}(T_1) = \mathbf{Aff}_{E_0^\star}(T_1^\star). \tag{10.21}$$

因此，引理得证。 □

因此，从 t-嵌入或 u-嵌入出发，我们可以进行提升、对偶化，然后取截面，从而得到另一类型的嵌入。当然，在选择提升时，还涉及选择一维边界数据的自由。另一方面，定理 10.26 表明，如果 T_1 是一个 t-嵌入，而 T_1' 是与之关联的 u-嵌入，那么存在一个映射 T_2 ，使得 $T_1 = \sigma(T_2)$ 是截面，而 $T_1' = \pi(T_2)$ 是投影（回顾第 4.5 节的结果）。因此， T_1 和 T_2 的仿射簇变量都是实数，因为 T_2 的射影变量与 u-嵌入 T_1'的射影变量重合。于是，在进行对偶化时， $T_2^\star$和 $T_1^\star$也具有实仿射簇变量。随后，将 $T_2^\star$ 适当地投影到 $E_1^\star$ ，即可得到一个扩展 t-嵌入 $T_1^\star$的 u-嵌入。若能更详细地理解映射 T_2 和 $T_2^\star$，包括如何找到通过这一构造彼此对偶的圆模式，将会非常有意义。

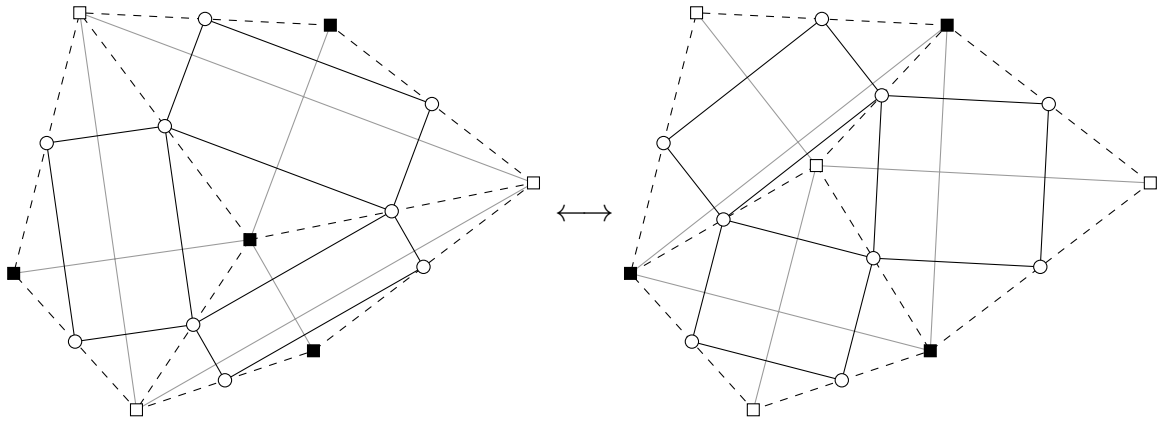


图 10.6. h-嵌入的立方体翻转（圆形节点、黑色直线）以及对应的正交对角映射（方形节点和虚线）。

10.2. 调和嵌入、h-嵌入和正交对角映射

调和嵌入最早由 Tutte [**Tut63**] 研究，也称为 *Tutte*嵌入。Kenyon、Lam、Ramassamy 和 Russkikh [**KLRR21** 在第 6] 节研究了调和嵌入与 t-嵌入之间的关系。在继续介绍新的结果之前，我们先给出他们的一些结果，但不提供证明。

定义 10.28. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。若映射 $h : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 满足：对于每个边按循环顺序为 (e^1, e^2, e_2^1, e_1^2) 的四边形，点 $h(e^1)\ h(e^2)\ h(e_2^1)\ h(e_1^2)$ 构成一个矩形，则称其为 ***h*-嵌入** 。■

“h-嵌入”一词并未见于文献。我们在此引入这一术语，因为 h-嵌入是由调和嵌入导出的 t- 嵌入，正如我们将在评注 10.35 中所解释的那样。

请注意，h-嵌入的定义在 $\mathbb{C}$ 中是仿射的，因为乘以一个复数并加上一个复数会将矩形映射为矩形。现在我们来考察 h-嵌入中的立方体翻转。

~ ~引理10.29. 设 $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}$ 是两个四边形图，且 $\mathfrak{Q}$ 经过一次立方体翻转后得到 $\mathfrak{Q}$ 。设 $h : \sim \sim E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个 h-嵌入。那么存在唯一的 h-嵌入 $h: E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ ，它与 h 的差异仅体现在 $\mathfrak{Q}$ 中存在而 $\mathfrak{Q}$ 中不存在的三条边上。■

证明。参见 [**KLRR21**，第 6 节3]。 □

以下观察也归功于 [**KLRR21**，定理 23]。

引理10.30. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图， $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 是 $\mathfrak{Q}$的立方八面体箭图（见定义 5.10）。那么 h-嵌入 $h : E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 也是一个 t-嵌入 $t_h : V(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}) \to \mathbb{C}$。■

证明。根据立方八面体箭图的定义， $E(\mathfrak{Q}) = V(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}})$。此外，在 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 的任意顶点处，属于 h 中矩形的两个对角角度之和为 π，因此满足定义 10.2 的要求。□

如果我们将 h 视为 t-嵌入，那么对于 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 的每次突变，都对应于定义 10.11 中定义的 t-嵌入的一次突变。

引理 10.31. 设 $t_h : V(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}) \to \mathbb{C}$ 是一个被视为 t-嵌入的 h-嵌入 h 。对 $\mathfrak{Q}$ 应用截半立方体翻转（见定义 5.11），并对 t-嵌入 t_h进行相应的突变。所得结果是该 h-嵌入的立方体翻转（另见图 10.6）。■

证明。见 [**KLRR21**，第 6 节。3]。

这些引理加上我们在前面各节得到的结果，使我们能够直接列出以下推论。

推论10.32. 设 h: $E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个h-嵌入。则有以下结论：

(1) h 是达布映射。(2) h 是TCD映射。(3) h 的立方体翻转对应于达布映射的立方体翻转。(4) h 是Schief映射。(5) h 的仿射簇变量均为实数。(6) h 是仿射BKP。

■

证明。(1) 从四边形图的边到 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的任意映射都是达布映射。(2) 达布映射也是TCD映射。(3) 达布映射的立方体翻转定义为属于截半立方体翻转的突变序列，因此由引理 10.31 可得结论。(4) 矩形是平行四边形的特殊情形，而平行四边形刻画了Schief映射（定义7.56）。(5) 由于 h 也是一个t-嵌入，仿射变量均为实数。(6) 我们此前已证明Schief映射是仿射BKP（定理7.57）。□

观察（1）至（4）是新的。观察（5）和（6）已经在[**KLRR21**中出现过，在第 6], 节中，我们只是根据TCD映射的簇变量和簇子簇的一般定义对它们进行了重新表述。

让我们在其中。引入另一种广为人知的映射类型，即正交对角映射（参见 [**Jos12**]).

定义 10.33. 设 $\mathfrak{Q}$ 是一个四边形图。一个正交对角映射 是一个映射 o：$V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$，使得每个四边形的对角线都互相垂直。■

定义10.34. 设 o： $V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个正交对角映射，且 h： $E(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个h-嵌入。若映射 o 和 h 满足对应关系，则称它们相对应。

$$h(v, v') = \frac{o(v) + o(v')}{2}, \tag{10.22}$$

对于 $\mathfrak{Q}$ 的任意边（v, v'）。 ■

显然，对于任意给定的正交对角映射，相应的 h-嵌入由定义确定。反过来，给定 h-嵌入后，我们可以任意选取相应正交对角映射中的一个点，其余各点便随之确定。事实上，正交对角映射也存在一种立方体翻转（如图 10.6 所示），它与 h-嵌入的立方体翻转兼容（见 [**KLRR21**]）。

注 10.35. 对于每个四边形图 $\mathfrak{Q}$，都存在两个对偶图 G, G^*，使得 $\mathfrak{Q}$ 是其关联的四边形图 $\mathfrak{Q}_G$，见定义 2.23。本质上， G （分别是 G^*）的顶点由 $\mathfrak{Q}$的白（黑）顶点构成。 G（以及 G^*）的每条边都对应于$\mathfrak{Q}$的一个面。正交对角映射 o： V（$\mathfrak{Q}$） $\to \mathbb{C}$ 在 G 上的限制是一个调和嵌入U： V（G） $\to \mathbb{C}$。在 G^* 上的限制是对偶图的一个调和嵌入 I： V（G^*） $\to \mathbb{C}$ 。嵌入 U, I 之所以称为调和嵌入，是因为它们求解离散拉普拉斯问题，见

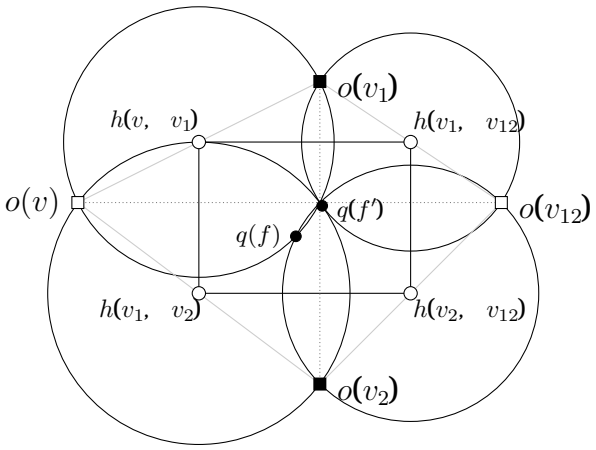


图 10.7. 一个h-嵌入的矩形（白色圆点节点）及其对应的正交对角线四边形（方形节点），其中包括两个焦点（黑色圆点节点）。这些圆是对应t-嵌入的圆。

生成树一节中的注 7.14。对应于 U 的电导 c_e 可以从正交对角映射中读出，即对角线的比值

$$c_e = i\frac{o(v_1) - o(v_2)}{o(v) - o(v_{12})}, \tag{10.23}$$

其中，e 对应于 G 中的边（$v,\ v_{12}$），以及 $\mathfrak{Q}$中的四边形（$v,\ v_1,\ v_{12},\ v_2$）。I 的电导为 c_e^{-1}。

■

在第8.1节关于内接于圆锥曲线的Q网中，我们已经看到，Schief映射是 ℂP²中内接于圆锥曲线的Q网的切截面。因此，h-嵌入的情形是一个特例。此外，定义10.34表明，正交对角映射对应于第8.1节的辅助映射 m 。我们在那里证明，辅助映射与对应Q网的立体投影密切相关，而该Q网以Schief映射为截面。考虑到这一点，下面的定理也就不足为奇了。

定理 10.36. 设 $o\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$ 是一个正交对角映射。将 o 扩张为映射$q\colon V(\mathfrak{Q}) \cup F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$，要求 q 在 $o(\mathfrak{Q})$ 上与之相符，并且对每个白色顶点为 $v,\ v_{12}$、黑色顶点为 $v_1,\ v_2$的四边形 f，要求

$$q(f) = \frac{q(v)q(v_2) - q(v_{12})q(v_1)}{q(v) + q(v_2) - q(v_{12}) - q(v_1)} \tag{10.24}$$

成立，另见图 10.7。于是 q 是一个 Q-网，我们称之为对应的正交对角 Q-网，而赋给各四边形的点就是相应的焦点。每个四边形 f 中的另一个焦点（如上所述）为

$$q'(f) := \frac{q(v)q(v_1) - q(v_{12})q(v_2)}{q(v) + q(v_1) - q(v_{12}) - q(v_2)}. \tag{10.25}$$

此外，若 h 是与 o对应的 h-嵌入，则 q 是 h 的扩张，符合定义 4.44 的含义。

■

证明。从 $V(\mathfrak{Q}) \cup F(\mathfrak{Q})$ 到 $\mathbb{CP}^1$ 的任意映射都是一个 Q-网，因为关联关系显然得到满足。然而，Q-网的两个焦点通过重新分裂相关联，因此即使在 $\mathbb{CP}^1$ 中，它们也满足一个多重比方程。事实上，直接计算表明

$$\operatorname{mr}(q(v), q(v_1), q(f), q(v_{12}), q(v_2), q(f')) = -1 \tag{10.26}$$

根据引理 2.39，所要求的条件成立。另一项计算表明，

$$\mathrm{mr}(q(f), h(v, v_1), q(v_1), h(v_1, v_2), q(v_{12}), h(v, v_2)) = -1 \tag{10.27}$$

成立。回想一下，$\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 中的扩张是高维空间中某个扩张的投影。在高维情形下，最后一个多重比方程表明，点$h(v,\ v_1)$ $h(v_1,\ v_2)$和 $h(v,\ v_2)$是三角形 $q(f)$ $q(v_1)$ $q(v_{12})$与一条直线的截面；事实上，这就是梅涅劳斯定理（见定理 2.40）。由于多重比方程在投影下保持不变，命题得证。□

最后一个定理还有一种可选的、几何味更浓的证明。对于正交对角映射 o 中的每个四边形 f，我们都可以指定其两条对角线的交点，记为 $D(f)$。给定一个与 o对应的h-嵌入 h，可以选取圆模式 $c\colon V(\mathfrak{Q}) \cup F(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$，使其交点包括 $\mathfrak{Q}$顶点上的点 o 以及各面上的对角线交点 d。这些圆是泰勒斯圆，也就是说，它们的中心是正交对角映射中各线段的中心。因此，由于对角线正交相交，这些圆都经过对角线交点。回想一下，在定义 10.22 中，我们将具有 $\mathbb{Z}^2$ 组合结构的圆模式与一个u-嵌入关联起来。现在我们说明，q 本质上是立方八面体组合结构下u-嵌入的对应物。事实上，相应的正交对角 Q-网 q 由$V(\mathfrak{Q})$上的 c 交点以及 $F(\mathfrak{Q})$上圆的交点中交替选取的点组成（见图 10.7）。为说明后者，设 $E(\mathfrak{Q}) \to \{$是圆模式 c中 $\mathbb{C}\mathbf{P}^1\}$ 的圆，那么可以通过计算验证

$$\{D(f), q(f)\} = C(v, v_2) \cap C(v_1, v_{12}), \tag{10.28}$$

$$\{D(f), q'(f)\} = C(v, v_1) \cap C(v_2, v_{12}). \tag{10.29}$$

根据这一刻画，定理 10.36 证明中的第一个多重比方程是克利福德四圆定理（定理 10.19）的推论，而第二个多重比方程是引理 10.25 的推论。

事实证明，对于正交对角映射 o，相应的正交对角 Q-网 q 实际上是一个 u-嵌入，这可由下面这个更强的定理推出。

定理 10.37. 设 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{P^\infty\}$ 的一个仿射图。设 $o\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个正交对角映射，h，q 分别是相应的 h-嵌入和正交对角 Q-网。将 h 和 q 视为 TCD映射，则

$$\mathbf{Aff}_{P^\infty}(h) = \rho(\mathbf{Pro}(q)) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{Aff}_{P^\infty}(q) = \mathbf{Pro}(h), \tag{10.30}$$

其中 ρ 是互反簇结构，见定义 5.5。 ∎

证明。分别考察 $\mathfrak{Q}$ 的每个四边形，我们验证仿射箭图 h 确实是 q 的射影箭图反转箭头后的结果，而仿射箭图 q 是 h 的射影箭图。此外，通过将 h 的各点和 q 的焦点表示为 o 的各点，我们经计算验证

$$\frac{h(v, v_2) - h(v, v_1)}{h(v_1, v_{12}) - h(v, v_1)} = \frac{o(v_1) - o(v_2)}{o(v) - o(v_{12})} = -\frac{q(v_1) - q(f)}{q(f) - q(v_2)} \tag{10.31}$$

在 $\mathfrak{Q}$的每个四边形中都成立。中心项中的比值实际上就是正交对角线四边形的对角线比值。h 的仿射簇变量由与最左项中相同的比值构成（见引理 5.41），而 q 的射影簇变量则由与最右项中相同的比值构成（见引理 5.16）。这证明了$\mathbf{Aff}_{P^\infty}(h) = \rho(\mathbf{Pro}(q))$成立。另一方面，定理 10.36 指出，$q$ 是 h 的一个扩张，因此根据定理 6.4，我们得到$\mathbf{Aff}_{P^\infty}(q) = \mathbf{Pro}(h)$也成立。□

推论 10.38. 设 o 是一个正交对角映射， q 是相应的正交对角 Q-网。那么 q 是一个 u-嵌入。■

证明。由于**Pro(**q**)** $=$ **Aff(**h**)**在取倒数意义下相同，其中 h 是相应的h-嵌入，且**Aff(**h**)**的变量均为实数。□

注意完美对偶的概念（见第 6.5 节）与定理 10.37 十分相似。不过，在组合结构层面，两者的差异在于，其中一个方程里的箭图并未反向。在几何层面，定理 10.37 也并非完全是定理 6.22 的一个实例；后者讨论两个映射 T， T'的完美对偶，其中 T属于某个原射影空间，而 T' 属于相应的对偶空间。相反， h 和 o 都属于原空间。

注 10.39。我们来简述h-嵌入的另一个奇特性质。暂且假设 h 是适当的，也就是说，所有四边形的像在ℂ中均按逆时针方向定向。此时可以证明， h 的射影簇变量满足以下方程

$$|X_v|^2 \prod_{f\sim v}(1+X^f)=1, \qquad \text{for every black non-boundary vertex } v \text{ of } \mathfrak{Q}, \tag{10.32}$$

$$|X_v|^2 \prod_{f\sim v}(1+(X^f)^{-1})^{-1}=1, \qquad \text{for every white non-boundary vertex } v \text{ of } \mathfrak{Q}, \tag{10.33}$$

其中， X^f 是四边形 f中心处的簇变量。这些方程几乎就是伊辛子簇的方程（见定义7.21），唯一的区别在于，我们在方程中取 X_v 的平方绝对值，而不是仅取其平方。证明同样只是一个简单的计算，它赋予了这些方程几何解释。为 h 的每个矩形引入表示其长度 l_f 和宽度 b_f 的变量，以及与之相关的电导$c_f=\frac{b_f}{l_f}$。 h 在每个四边形中的射影簇变量是

$$X^f=\frac{b_f^2}{l_f^2}=c_f^2. \tag{10.34}$$

此外，对于 $\mathfrak{Q}$ 的黑色顶点 v ，我们有

$$|X_v|^2=|\operatorname{mr}(h(v,v_1),h(v_2,v_{12}),h(v,v_2),\dots,h(v_1,v_{d_v1}))|^2 \tag{10.35}$$

$$=\prod_{q\sim v}^{m}\frac{b_f^2+l_f^2}{l_f^2}=\prod_{f\sim v}^{m}\left(1+X^f\right)^{-1} \tag{10.36}$$

成立。对于白色顶点的情形，也可以类似地证明。到目前为止，我们尚未证明 X_v 完全由电导确定。然而，根据三角学可知， X_v 的辐角为

$$\arg(X_v)=\sum_{q\sim v}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan c_f\right)=\sum_{f\sim v}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{X^f}\right). \tag{10.37}$$

因此， X_v 确实完全由电导确定。由于 h的射影箭图是六面体的，而且所有正实电导都可以实现为 h-嵌入，所以立方体翻转下电导的递推不仅可以用立方八面体簇结构来描述，也可以用六面体簇结构来描述。目前还不清楚六面体方法是否有任何概率论上的应用，因为变量 X_v 通常并非正实数。另一方面，可以考虑对电导进行约化，使得相应的 h-嵌入处处具有 X_v 正实值。事实上，经过广泛研究的等辐射嵌入情形就是这种约化的一个特例。值得注意的是，在等辐射嵌入中，电导为 $\tan\frac{\theta}{2}$ [**Ken02**], ，而伊辛权重为 $\tan^2\frac{\theta}{2}$ [**BdT11**]。事实上，电导是与等辐射嵌入相关联的 h-嵌入的仿射簇变量 Y_q ，而伊辛权重则是射影簇变量 X_q。另一方面，我们可以将等辐射嵌入本身视为正交对角 Q-网 q ，于是根据定理 10.37，

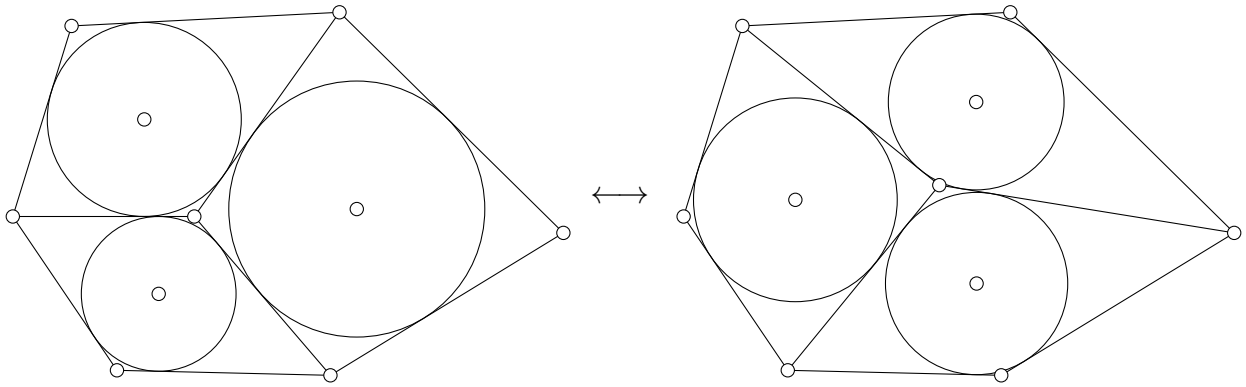


图 10.8. s-嵌入中的立方体翻转。

q 的仿射簇变量是伊辛权重，而射影簇变量是电导。■

10.3. S-嵌入

定义 10.40. *s*-嵌入 是一个映射 $s: V(\Omega) \to \mathbb{C}$，使得每个四边形都有一个内切圆。■

s-嵌入的概念由 Chelkak 提出 [Che18]，，是对 Smirnov[Smi06] 所引入概念的推广，旨在获得某些伊辛可观测量的共形不变性结果[CS11, CS12]。与 h-嵌入的情形一样，s-嵌入是仿射几何中的对象（在 $\mathbb{C}$中）。如果与 Ω 的边相对应的线段除顶点外互不相交，我们就称该 s-嵌入为本原的 。

~ ~引理 10.41（[MRT20]）。设 Ω, Ω 是两个四边形图，且 Ω 是在一次立方体翻转后得到的 Ω 。设 $s: E(\Omega) \to \mathbb{C}$ 是一个本原的 s-嵌入。那么存在唯一的本原 s-嵌入 ~ ~$\tilde{s}: E(\Omega) \to \mathbb{C}$，它与 s 的区别仅在于三条边：这些边属于 Ω，但不属于 Ω。■

如果 s 不是正规的，那么可能不存在正规的 $\tilde{s}$，也可能存在多个；即使 s 是正规的，也可能存在多个（不一定正规的） $\tilde{s}$。不过，通过将 s-嵌入与 t-嵌入联系起来，即使在非正规的情形下，也存在一种规范的立方体翻转。

定义 10.42. 设 $s: V(\Omega) \to \mathbb{C}$ 是一个 s-嵌入。定义映射 $t_s: V(\Omega) \cup F(\Omega) \to \mathbb{C}$，使其在 $V(\Omega)$ 上与 s 一致，并将 $F(\Omega)$ 映射到相应的内切圆圆心。我们称t_s 为与 s对应的 t-嵌入，下一条引理将对此作出说明。■

引理 10.43 ([KLRR21]). 设 Ω 是一个四边形图， $\mathcal{Q}_\Omega$ 是 Ω的六面体箭图（见定义 5.12）。那么，与一个 s-嵌入对应的 t-嵌入确实是一个 t-嵌入。■

证明。考虑内切圆圆心处的星比。每个角度都是两个角度之和，而这两个角度分别等于 $\frac{\pi}{2}$ 减去四边形某个角的一半。因此，偶数角度之和与奇数角度之和相等，故二者都等于 π。在 Ω的一个顶点处，来自同一个四边形的两个角度相等，因此 Ω 顶点处的星比也都是实数。□

引理 10.44. 设 $t_s: V(\mathcal{Q}_\Omega) \to \mathbb{C}$ 是与某个 s-嵌入对应的 t-嵌入。对 Ω 应用六面体翻转（见定义 5.13），并对 t-嵌入 t_s进行相应的突变。所得结果就是对应 s-嵌入的立方体翻转（另见图 10.8）。■

证明. 见 [**MRT20**，备注 3.12]。 □

这些引理与我们在前几节中得到的结果相结合，使我们能够列出一系列直接推论。

推论 论 10.45. 设 s 为一个 s-嵌入， t_s 为相应的 t-嵌入 .

(1) t_s 是一个 Q-网。(2) t_s 是一个 TCD 映射。(3) s 的立方体翻转对应于 Q网的立方体翻转。(4) s-嵌入的簇结构 [**KLRR21**] 对应于 t_s 作为 TCD 映射时的仿射簇结构。(5) t_s 的仿射簇变量为实数。

■

证明. 从四边形图的顶点和面到 $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的任意映射都是一个 Q-网 (1)。Q-网也是一个 TCD 映射 (2)。Q-网的立方体翻转定义为属于六面体翻转的一系列突变 (3)。s-嵌入的簇结构就是 t_s的簇结构，而后者是相应 TCD 映射的仿射簇结构 (4)。由于 t_s 是一个 t-嵌入，仿射变量为实数 (5)。□

本推论的新结果是，s-嵌入因此可以看作高维 Q-网的一个投影。对于 h-嵌入，相应的推论还指出 h-嵌入是仿射 BKP。证明直接源于 h-嵌入是 Schief 映射这一特殊情形。我们断言 s-嵌入是仿射 CKP，并且可以通过在 $\mathbb{C}$ 中直接计算来证明这一点 [**KLRR21**，第 7] 节。我们将在推论 10.50 中给出另一种基于关联几何的证明。

定义 10.46。设 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 是一个 Q-网。若每个四边形都有相同的两个焦点，我们称 q 为固定焦点映射。■

这个定义纯粹是射影的。在下面的计算中，我们使用移位记号，以使方程更易读。经过计算可知，固定焦点映射中一个四边形的焦点必须是

$$F^{kl} = \frac{qq_{kl} - q_k q_l \pm \sqrt{(q-q_k)(q_k-q_{kl})(q_{kl}-q_l)(q_l-q)}}{q - q_k + q_{kl} - q_l}, \tag{10.38}$$

因为它们是将 $q \leftrightarrow q_{12}$ 映射到 $q_1 \leftrightarrow q_2$ 的对合的不动点。现在让我们来探讨定焦映射与 s-嵌入之间的关系。

定理 10.47. 每个 s-嵌入 $s\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 都是定焦映射。如果一个定焦映射的星比均为实数，那么它就是 s-嵌入。■

证明。我们逐个四边形进行讨论。如果一个四边形有内切圆，那么我们知道，可以选择以各顶点为中心的圆，使它们循环地恰好在内切圆与四边形各边的切点处彼此相切。因此，米克尔动力学会将该内切圆映回自身。由此，内切圆的中心是一个不动点。反过来，考虑一个固定焦点映射中的四边形，其固定焦点处的星比为实数。我们将点 q、q_k、q_{kl}、q_l 依次记为p_1、p_2、p_3、p_4，以便将它们与米克尔构形对应起来。于是，我们可以将四边形的四个顶点 q_1、q_2、q_3、q_4 视为米克尔构形的中心。这里， 也是米克尔构形中第六个圆的中心。为了选取这些圆，我们需要选取其中一个交点。选取直线 上（在 $\mathbb{C}$ 中）经过 q_1、q_2 且距 最近的点 P，作为分别以 为中心的圆 C_1、C_2 和以 为中心的圆 C 的交点

q、q_1。于是，圆 C_1 和 C_2 相切。不过， P 现在也是第六个圆 C 的交点，因此 C 和 C 重合。由此，每个圆 C_i 都与圆 C_{i+1} 相切，因此该四边形有一个内切圆。□

固定焦点映射是将 s-嵌入与 S-图联系起来的纽带，我们在第 8.3 节中介绍了 S-图。

引理 10.48. S-图 q 从 P 到不包含 P 的直线 L 的投影 $\pi_{P\to L}\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to L$ 是固定焦映射。反过来，给定直线 $L \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 和点 $P \notin L$，每个满足 $\pi_{P\to L}(q)$ 是固定焦映射的 Q-网 $q\colon \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ 都是一个 S-图。■

证明。由于四边形任意两个焦点的共线性， P这些焦点通过 $\pi_{P\to L}$ 映射到 L 中的同一点。□

推论 10.49. 每个固定焦映射 $q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 都是相对于任意点 $R \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ 的仿射 CKP。 ■

证明。令 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = L \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$，并选取一个点 $P \notin L$，再令 H 为经过 P和 R的直线。根据引理 10.48，存在一个关于 P 的 S-图 $\hat{}q\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$，使得 q 是从 P投影 $\hat{}q$ 所得的投影。根据定理8.22，$\hat{}q$ 关于 H是仿射 CKP。因此，根据我们关于簇变量和投影的研究（定理 6.2）， q 关于 $H \cap L = R$是仿射 CKP。□

推论 10.50。每个 s-嵌入 $s\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ （相应地，对应的 t-嵌入 t_s ）关于 $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, 中的任意点都是仿射 CKP，尤其也关于无穷远点。■

证明。由 s-嵌入是一个固定焦映射这一事实（定理 10.47）以及推论 10.49 可直接得出。□

对于定义在 $\mathbb{Z}^2$ 上的 t-嵌入和 h-嵌入，我们观察到它们自然会产生 u-嵌入。s-嵌入也有相同的情况。

定义 10.51. 设 $s\colon V(\mathfrak{Q}) \to \mathbb{C}$ 是一个 s-嵌入， $t_s\colon V(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}) \to \mathbb{C}$ 是相应的 t-嵌入，其中 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}$ 是六面体箭图。固定 $V(\mathfrak{Q})$ 的两个相邻顶点v_0, v_0'。通过选取位于直线 $s(v_0)s(v_0')$（在 $\mathbb{C}$ 中）上的、以 $t_s(v_0)$ 和 $t_s(v_0')$ 为中心的圆的初始交点，定义一个圆模式 $c\colon V(\mathcal{Q}_{\mathfrak{Q}}^*) \to \mathbb{C}$，其中心为 t_s。对于任意两个相邻顶点 $v, v' \in V(\mathfrak{Q})$，对应的两个圆仅在直线 $s(v)s(v')$ 上相交于一点。因此，这些点定义了一个映射 $l_s\colon E(\mathfrak{Q}) \to C$。■

相邻顶点 v, v' 对应的圆在 c 中的交点重合，这是因为 s 中的每个四边形都有一个内切圆。这一性质保证了

$$|s(v) - s(v_1)| - |s(v_1) - s(v_{12})| + |s(v_{12}) - s(v_2)| - |s(v_2) - s(v)| = 0, \tag{10.39}$$

对于每个四边形（v， v_1， v_{12}， v_2）。这可以看作一个相容性方程 f or

$$|s(v) - s(v_i)| = r(v) + r(v_i), \tag{10.40}$$

其中， r 是定义在 $\mathfrak{Q}$顶点上的实函数。函数 r 编码了 l_s点的位置。更具体地说，给定一个解 r，我们可以选择

$$|l_s(v, v_i) - s(v)| = r(v) \tag{10.41}$$

处处。

我们相信，下一个命题可以通过直接计算证明，但尚未找到几何证明。因此，我们将其留作猜想。

猜想 10.52. 给定一个 s-嵌入 $s\colon V(\Omega) \to \mathbb{C}$，映射 $l_s\colon E(\Omega) \to C$ 是一个 u-嵌入和一个延拓 t_s 的直线复形，其中我们将 t_s 视为一个 Q-网。■

第11章

簇 τ-变量

11.1. 强一般 TCD 映射的簇 τ-变量

我们在介绍簇变量时简要提到了 τ-变量，参见定义 5.4。不过，我们尚未探讨 τ-变量与 TCD 映射的关系。对于 X-变量，我们旨在全面论述 X-变量与各种几何运算及实例之间的关系。相比之下，对于 τ-变量，我们只打算作一番介绍，以期推动未来的研究。我们为 TCD 映射定义 τ-变量，旨在实现以下三个目标：这些变量

(1) 满足蜘蛛移动的 τ-突变规则（定义 5.4），并且在重新分裂下保持不变；(2) 与 TCD 映射相关联的 X-变量兼容（通过方程（5.5））；(3) 在射影旗构型的情形下，重现 Fock-Goncharov τ-变量 [**FG06, FG07, Gon17**] 。

回顾第 2.8 节，我们为带标号的 TCD $\mathcal{T}$ 的每个面指定了一个标记 $\mathcal{A}'(f)$，使得当 s 在 $\mathcal{T}$ 中位于 f 的左侧时， $\mathcal{A}'(f)$ 包含一条弦 s，另见公式 (2.17)。在本节中，考虑互补标记更为方便。也就是说，我们用 $\mathcal{A}(f)$ 表示满足以下条件的弦的最大集合： f 位于 $\mathcal{A}(f)$ 中每条弦的右侧。由于图 $\mathcal{G}$ 的面和白色顶点分别对应于 $\mathcal{T}$ 的面，我们也分别用 $\mathcal{A}(w)$ 和 $\mathcal{A}(f)$ 表示 $\mathcal{G}$ 的白色顶点和面。

我们仅在相当强的一般性假设下引入 τ-变量，并不是因为我们知道这些假设是必要的，而是因为它们是充分的，同时我们也希望避免在引言中涉及超出必要范围的技术细节。

定义 11.1. 设 $\mathcal{T}$ 是一个具有 n 条弦且维数为最大维数 k 的平衡TCD，即 $\mathcal{T}$ 的端点匹配为 $\mathcal{S}_k^n$。每条弦的右侧都有 k 个白色边界顶点，并且每个白色顶点 w 都位于 k 条弦的右侧。若 TCD映射 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$ $stronglygeneric$ ，则称其为

(1) 对于每条弦 i，弦右侧连续的 k 个白色边界顶点的像张成一个超平面 H_i，(2) 任意一组 k 个不同超平面 H_{i_1}，H_{i_2}，$\ldots$，H_{i_k} 的交点都是一个点，且 (3) 对于每个白色顶点 w，像 $T(w)$ 是 k 个超平面 H_j （ $j \in \mathcal{A}(w)$）的唯一交点。■

定义中包含了我们下面要用到的三个性质。然而，实际上，第二个性质已经蕴含了第三个性质。这是因为，根据引理 5.37，弦 i 右侧的所有内容都包含在 H_i 中。

定义 11.2. 设 $T\colon \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$ 是一个具有 n 条弦的强一般位置 TCD映射。对于$1 \le i \le n$ ，我们将每个超平面 H_i 视为对偶空间 $(\mathbb{C}\mathrm{P}^k)^*$ 中的一个点 $H_i^{\perp}$，并固定

$\hat{}\ H_i^\perp$在 $\mathbb{C}^{k+1}$中的一个齐次提升。于是， T的 τ-变量是函数 $\tau\colon F(\mathcal{G}) \to \mathbb{C}$，使得对于每个面 $f \in F(\mathcal{G})$

$$\tau_f = \det\left[\hat{H}_{j_1}^\perp, \hat{H}_{j_2}^\perp, \dots, \hat{H}_{j_{k+1}}^\perp\right], \tag{11.1}$$

¯其中 j_1、 j_2、……、 j_{k+1}是按递增顺序排列的 $\mathcal{A}(f)$ 中的弦。 ■

对超平面 H_i 选择不同的齐次提升，会得到规范等价的 τ 变量。我们对 τ 变量使用“规范等价”一词的方式，与边权的情形相同：若两种 τ 变量的选择得到相同的 X 变量，则它们规范等价。此外，对于固定的 i ，若将超平面 H_i 的齐次提升 $\hat{}\ H_i^\perp$ 按因子 μ 缩放，则 i 右侧的所有 τ 变量也会按 μ 缩放。若对 $\mathbb{C}\mathbf{P}^k$ 中 T 的点施加射影变换，则对偶空间上也会产生射影变换。由于 τ 变量定义为对偶空间中各点的行列式，射影变换的作用只是将所有 τ 变量缩放，这是一种规范变换。

引理 11.3。定义 11.2 中的 τ-变量在重新分裂下保持不变，并满足定义 5.4 的变异规则。■

¯证明。重新分裂下每个变量 τ_f 都保持不变，这一点显然，因为对于每个 $f \in F(\mathcal{G})$， $\mathcal{A}(f)$ 都保持不变。此外，如果我们在面 f 处进行蜘蛛变换，那么对于¯$f' \neq f$，每个变量 $\tau_{f'}$ 也都保持不变，因为 $\mathcal{A}(f')$ 保持不变。剩下要验证的是， τ_f按照突变规则变化。记住引理 4.19，我们不妨假设参与蜘蛛变换的四条弦标记为 a、 b、 c、 d，其中 $a < b < c < d$；并假设重新分裂前， $\mathcal{T}$ 中的面 f 由 a 和 c 围成。还有¯i_1、 i_2、 $\dots i_{k-1}$这 $k-1$ 条弦，使得 $\mathcal{A}(f)$ 是 $\{a, c, i_1, \dots, i_{k-1}\}$。令 M 表示列向量为 $\hat{}\ H_{i_1}^\perp$、$\hat{}H_{i_2}^\perp$、…、$\hat{}H_{i_{k-1}}^\perp$ 的 $(k-1) \times (k+1)$ 矩阵。我们要证明

$$\begin{aligned}\det\left[\hat{H}_a^\perp, \hat{H}_c^\perp, M\right] \det\left[\hat{H}_b^\perp, \hat{H}_d^\perp, M\right] = {} & \det\left[\hat{H}_a^\perp, \hat{H}_b^\perp, M\right] \det\left[\hat{H}_c^\perp, \hat{H}_d^\perp, M\right] \\ & + \det\left[\hat{H}_a^\perp, \hat{H}_d^\perp, M\right] \det\left[\hat{H}_b^\perp, \hat{H}_c^\perp, M\right]\end{aligned} \tag{11.2}$$

成立。这就是 τ_f 的突变规则，只不过我们将列向量 $\hat{}\ H_a^\perp$、$\hat{}H_b^\perp$、$\hat{}H_c^\perp$、$\hat{}H_d^\perp$ 在每个行列式中移到了左侧，这只会改变等式的整体符号。另一方面，这是普吕克行列式恒等式最简单的情形，证明至此完成。□

引理 11.4. 设 $T : \mathcal{T}_{\circlearrowleft} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^k$ 是一个带有 n 条弦的最大一般位置 TCD映射。定义 11.2 中的 τ-变量与射影 X-簇变量通过方程（5.5）相一致。换言之，对于每个面 $f \in F(\mathcal{G})$

$$X_f = \frac{\prod_{(f',f)\in\vec{E}(\mathcal{Q})} \tau_{f'}}{\prod_{(f,f')\in\vec{E}(\mathcal{Q})} \tau_{f'}}, \tag{11.3}$$

其中，乘积取遍射影箭图 $\mathcal{Q}$ 中的入边和出边。 ■

证明。假设 f 是度为 m 的面，并令包围 f 的弦按升序记为 q_1， q_2、……、 q_m。对于 $1 \le i \le m$，令 r_i 表示在 f 的边界上的一个黑色顶点处与 q_i 和 q_{i+1} 共享一次三重交叉的弦。令 s_1， s_2、……、 s_{k+1-m} 为位于其右侧且不属于上述弦的弦。令 $I = \{q_1, q_2, \dots, q_m, s_1, s_2, \dots, s_{k+1-m}\}$。我们使用引理 5.16 通过多重比表示 X_f。因此，我们希望证明恒等映射

$$\operatorname{mr}\left(T_{I\setminus\{q_1\}}, T_{I\cup\{r_1\}\setminus\{q_1,q_2\}}, T_{I\setminus\{q_2\}}, T_{I\cup\{r_2\}\setminus\{q_2,q_3\}}, \dots, T_{I\cup\{r_m\}\setminus\{q_m,q_1\}}\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\det(M_i)}{\det(M_i')}, \tag{11.4}$$

其中， M_i（分别为 M_i'）是列向量矩阵。

$$\left(\hat{H}^{\perp}_{r_i}, \hat{H}^{\perp}_{q_1}, \hat{H}^{\perp}_{q_2}, \dots, \hat{H}^{\perp}_{q_m}, \hat{H}^{\perp}_{s_1}, \hat{H}^{\perp}_{s_2}, \dots, \hat{H}^{\perp}_{s_{k+1-m}}\right), \tag{11.5}$$

删除列 $\hat{} H^{\perp}_{q_{i+1}}$ （分别为 $\hat{} H^{\perp}_{q_i}$）。注意，我们已经对行列式中的某些项进行了重新排序，但这种重新排序不会改变右侧出现的每个商的符号。左侧和右侧均不受提升和射影变换选择的影响。因此，我们可以假设 m 向量 $\hat{} H^{\perp}_{q_i}$ 与 $k+1-m$ 向量 $\hat{} H^{\perp}_{s_j}$ 共同构成齐次坐标空间 $\mathbb{C}^{k+1}$的一组基。每个商中的行列式都涉及与弦 s_i相关联的列向量。因此，我们可以将自身限制在由向量 $\hat{} H^{\perp}_{q_1}$ 至 $\hat{} H^{\perp}_{q_m}$张成的空间中，并将向量 $\hat{} H^{\perp}_{r_i}$替换为 $1 \le i \le m$ 在该空间中的相应正交投影。接下来，我们忽略弦 s_i，并将 M_i（分别为 M_i'）替换为矩阵

$$\left(\hat{H}^{\perp}_{r_i}, \hat{H}^{\perp}_{q_1}, \hat{H}^{\perp}_{q_2}, \dots, \hat{H}^{\perp}_{q_m}\right), \tag{11.6}$$

删除列 $\hat{} H^{\perp}_{q_{i+1}}$ （分别为 $\hat{} H^{\perp}_{q_i}$）。为方便记号，我们将 T_{q_i} 记作 $T_{I\setminus\{q_i\}}$，将 T_{r_i} 记作 $T_{I\setminus\{q_i,q_{i+1}\}\cup\{r_i\}}$，其中 $1 \le i \le m$。我们选择 $\hat{} H^{\perp}_{q_1}$、$\hat{} H^{\perp}_{q_2}$、.....$\hat{} H^{\perp}_{q_m}$ 的提升，使其构成 $(\mathbb{C}^{m+1})^*$ 的一组基，并满足 $\det[\hat{} H^{\perp}_{q_1}$、$\hat{} H^{\perp}_{q_2}$、.....$\hat{} H^{\perp}_{q_m}] = 1$。我们还选择 $\hat{} T_{q_1}$、$\hat{} T_{q_2}$、.....$\hat{} T_{q_m}$ 的提升，使其构成 $\mathbb{C}^m$ 的一组基，并满足 $\det[T_{q_1}, T_{q_2}, \dots, T_{q_m}] = 1$。对于 $1 \le i \le m$，我们引入以下泛函

$$\dot{H}^{\perp}_{q_i} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}, \quad \dot{H}^{\perp}_{q_i}(\cdot) = \det[\hat{T}_{q_1}, \hat{T}_{q_2}, \dots, \cancel{\hat{T}_{q_i}}, \dots \hat{T}_{q_m}, \cdot], \tag{11.7}$$

$$\dot{T}_{q_i} : (\mathbb{C}^m)^{\perp} \to \mathbb{C}, \quad \dot{T}_{q_i}(\cdot) = \det[\hat{H}^{\perp}_{q_1}, \hat{H}^{\perp}_{q_2}, \dots, \cancel{\hat{H}^{\perp}_{q_i}}, \dots \hat{H}^{\perp}_{q_m}, \cdot], \tag{11.8}$$

其中叉号表示跳过该列。 P 中或（$\mathbb{C}^m$）$^{\perp}$ 中的任何其他向量，也可以通过线性叠加定义泛函 $\dot{P}$。由向量 $\hat{} H^{\perp}_{q_i}$ 和向量 $\hat{} T_{q_i}$ 构成的两组基互为对偶，即对于任意向量 $\hat{} P \in \mathbb{C}^m$ （分别对于 $\hat{} Q \in$（$\mathbb{C}^m$）$^{\perp}$），都有

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \dot{H}^{\perp}_{q_i}(\hat{P}) \hat{T}_{q_i} \quad \text{and} \quad \hat{Q} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \dot{T}_{q_i}(\hat{Q}) \hat{H}^{\perp}_{q_i}, \tag{11.9}$$

$\hat{}$ 其中 σ_i 属于 $\{\pm 1\}$。我们很容易验证，因此任意 $Q \in$（$\mathbb{C}^m$）* 都满足

$$\dot{Q}(\hat{T}_i) = \dot{T}_i(\hat{Q}) \tag{11.10}$$

对于所有 $1 \le i \le m$。现在我们用这些泛函来重新表述方程（11.4）的左边和右边。回顾一下，多重比可以用线性关系中出现的系数来表示（如第 5.3 节所述）。我们当前考察的面的边界上出现的关系为

$$\hat{T}_{r_i} = \sigma_i \dot{H}^{\perp}_{r_i}(\hat{T}_{q_{i+1}}) \hat{T}_{q_i} - \sigma_{i+1} \dot{H}^{\perp}_{r_i}(\hat{T}_{q_i}) \hat{T}_{q_{i+1}}, \tag{11.11}$$

对于 $1 \le i \le m$。将符号因子合并后，方程（11.4）的左边变为

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{\dot{H}^{\perp}_{r_i}(\hat{T}_{q_{i+1}})}{\dot{H}^{\perp}_{r_i}(\hat{T}_{q_i})}. \tag{11.12}$$

另一方面，公式 (11.4) 的右侧不过是

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{\dot{T}_{q_{i+1}}(\hat{H}^{\perp}_{r_i})}{\dot{T}_{q_i}(\hat{H}^{\perp}_{r_i})}, \tag{11.13}$$

由此完成证明。 □

备注 11.5. 不难看出，对于 TCD 映射 T，与弦 H_s 相关联的超平面，视为射影对偶空间中的点时，实际上是射影对偶 TCD 映射 $T^\star$ 的边界点（如第 4.7 节所述）。事实上，$H_s = U_1(w_s)$，其中 U 是子空间映射（定义 4.63），而 w_s 是 $\mathcal{G}_1$ 中唯一的白色顶点，使得 $\mathcal{A}(w_s) = s$。根据引理 4.66 $T_k^\star(w_s^\star) = H_s^\perp$。因此，我们通过行列式来定义 τ-变量时所用的点，实际上是射影对偶 TCD 的边界点。进一步探究这些联系，以及它们与取截面之间的相互作用，将会非常有趣。研究这是否与 Muller 和 Speyer 的工作 [MS16], 有关，也会很有意思，因为他们工作中出现的一些操作让人联想到射影对偶。因此，我们在第 7.5 节引入的 Z-变量，假设与对偶 TCD 映射的 τ-变量相同，而 Z-变量的交错比与对偶 TCD 映射的 X-变量相同。■

注 11.6. 让我们使用 τ-变量，为强一般 TCD 映射 T 的边权引入一种特定规范。尽管我们尚未发现它的任何用途，但我们认为值得一提。每条边 $e \in E(\mathcal{G})$ 都与两个面 f、f' 关联。边权的这种特定规范为 $\lambda_e = \tau_f \tau'_f$。为什么这种规范总是存在？我们可以使用注 5.36 中提到的替代构造算法，得到一个具有给定边权的 TCD 映射 T'，使得 T' 也达到其最大维数。根据构造，$X(T') = X(T)$，因此根据定理 5.30，T 和 T' 通过射影变换相关联。于是，点 $H_i^\perp(T)$ 和 $H_i^\perp(T')$ 也通过射影变换相关联。因此，$\tau(T')$ 的任意选择都与 $\tau(T)$ 规范等价，确实可以假设每条边都有 $\lambda_e = \tau_f \tau'_f$。■

我们已经实现了前两个目标：证明我们对 τ-变量的定义与我们的 X-变量以及突变相容。在继续讨论射影旗构型之前，我们先简要探讨如何将 τ-变量的定义扩展到更一般的情形。首先考虑定义在平衡TCD上的 TCD映射 T，但它并未实现其最大维数。如果 T 是一个实现了最大维数的强一般位置 TCD映射的投影 $\pi(T)$，那么我们可以将 T 的 τ-变量设为 T 的 τ-变量。由于 X-变量在投影下保持不变，因此 $X(T) = X(T)$，复制到 T 上的 τ-变量也与 T 上的 X-变量相容。

另一个有趣的问题是，如何将 τ-变量的定义扩展到不平衡的 TCD。假设该 TCD 达到了最大维数。那么我们可以回顾引理 4.36，在其证明中，我们说明了每个 TCD $\mathcal{T}$ 都可以逐步扩展ˆ，直至成为一个平衡TCD $\mathcal{T}$。在 TCD映射的层面上，这相当于在边界上逐步添加标记点，以得到映射 $\hat{T} : \hat{\mathcal{T}}_\circlearrowleft \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$。这一过程不会改变定义在 $\mathcal{T}_\circlearrowleft$ 上的 T 的 X-变量。在 T 中，任意一条弦右侧的点至多张成一个超平面；在一般位置的情形下，它们张成一个超平面。我们可以利用这些超平面 ˆ 来定义 T 的 τ-变量，并通过限制也为 T 定义相应变量。我们将在第 11.2 节看到这一过程的一个例子。

这两个步骤——反向投影和在边界处添加点——结合起来，应该能够为大多数TCD映射引入 τ-变量，尽管对此进行更精确的分析将很有意义。尽管采用了这些步骤，我们目前考察的仍然仅是在圆盘中的极小TCD上定义的TCD映射。在第11.2节中，我们还将考察一个例子，其中这一过程在非极小情形下也是可行的，但非极小情形下的一般框架仍不明确。另一个非常有趣的问题是，极小TCD是否可以定义在圆盘以外的空间上，例如环面。一个自然的尝试是考察定义在环面万有覆盖空间上的相应TCD映射。该TCD的最大维数将是无穷大，因此可能应该尝试考察环面穷竭序列上的行列式极限。

11.2. 射影旗标构型

在本节中，我们希望将 Fock和Goncharov[FG06] 研究的射影旗情形表述为 TCD映射。由于我们仅考虑射影旗的情形，因此我们在自己的定义中引入这些对象，尽管我们的做法仍与 Fock和Goncharov [FG07]的后续研究密切相关。此外，值得注意的是，我们引入的 TCD 以及相应的二分图，早已出现在 Goncharov [Gon17]的研究中。

定义 11.7. 设 $\mathfrak{T}$ 是一个三角剖分，且 $k \in \mathbb{N}$。令 $\mathbf{F}_k$ 表示 $\mathbb{CP}^k$ 中射影k-旗 $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{k-1}$ 的集合，其中 $\dim F_i = i$ 对于 $0 \le i < k$。一个 射影 k-旗构型 是一个映射 $F\colon V(\mathfrak{T}) \to \mathbf{F}_k$，满足对于 $0 \le i < k$ 以及任意两个不同的顶点v, $v' \in V(\mathfrak{T})$，维数满足 $\dim(F_i(v) \cap F_i(v')) = i-1$。■

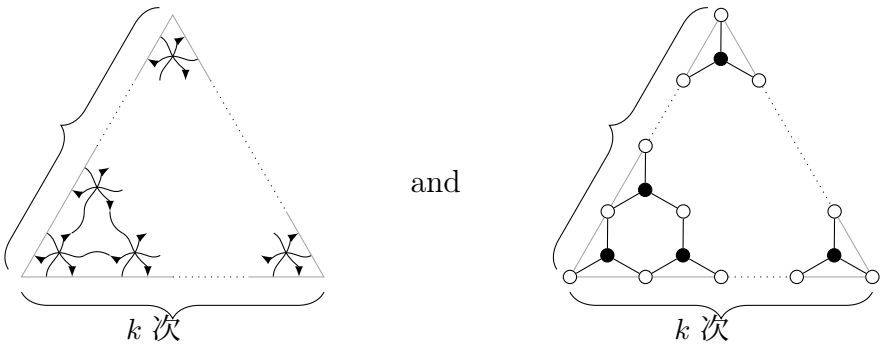
X-变量和 τ-变量的赋值只要求：当两个对应的顶点在 $\mathfrak{T}$ 中关联时，相应的两个旗适当地相交。不过，当我们考虑三角剖分的边翻转时，上述定义将避免退化问题。

定义 11.8. 装饰的射影 k-旗构型 是一个射影 k-旗构型 $F\colon V(\mathfrak{T}) \to \mathbf{F}_k$，其装饰为

(1) 一个映射 $H^\perp\colon V(\mathfrak{T}) \to ((\mathbb{CP}^k)^*)^k$，使得对每个 $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$ 和每个顶点 $v \in V(\mathfrak{T})$，相应的超平面 $H_j(v)$ 满足 $F_i(v) = \cap_{j=i}^{k-1} H_j(v)$,

(2) 以及一个齐次提升 $\hat{} \; H_j^\perp(v) \in (\mathbb{C}^{k+1})^*$，对应每个 $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$ 和每个顶点 $v \in V(\mathfrak{T})$。■

定义 11.9. 设 $\mathfrak{T}$ 为一个三角剖分。将相应的 *TCD* $\mathcal{T}^k(\mathfrak{T})$，阶数为 k，以及相应的图 $\mathcal{G}^k(\mathfrak{T})$ 通过粘合得到



分别映射到 $\mathfrak{T}$ 的每个三角形中。 ■

根据定义，第 2.2 节中与三角剖分相关联的 TCD映射 $\mathcal{T}_{\mathfrak{T}}$ we 与相应的 1 阶 TCD 重合，即与 $\mathcal{T}^1(\mathfrak{T})$ 重合。与三角剖分的情形一样，$\mathcal{T}^k(\mathfrak{T})$ 是极小元，当且仅当 $\mathfrak{T}$ 没有内部顶点。注意，每条弦都会绕着 $\mathfrak{T}$ 的一个顶点 v 顺时针转动。反过来，对于 $\mathfrak{T}$ 的每个顶点 v，恰有 k 条属于 $\mathcal{T}^k(\mathfrak{T})$ 的弦会绕着 v 顺时针转动。每个顶点周围的 k 条弦按嵌套顺序排列。我们将嵌套最深的弦的标签记为 $s_0(v)$，并将其余弦按嵌套顺序记为 $s_i(v)$，其中 $0 \le i < k$。此外，按照第 2.8 节中的方式，我们用弦的标签标记相应图 $\mathcal{G}$ 的白色顶点。我们观察到，每个白色顶点 $w \in V(\mathcal{G})$ 携带的弦标签至多来自三个顶点 v、v'、v''。如果 w 携带的标签来自三个不同的顶点 v、v' 和 v''，那么 (v,v',v'') 是 $\mathfrak{T}$ 的一个三角形。如果 w 携带的标签来自两个顶点 v 和 v'，那么 (v,v') 是 $\mathfrak{T}$ 的一条边。最后，如果 w 携带的标签只来自一个顶点 v，那么 w 与 v 重合。

定义 11.10. 令 F 为三角剖分 $\mathfrak{T}$ 上的一个射影 k-旗构型。相关联的 *TCD* 映射 $T_F\colon \mathcal{T}^k(\mathfrak{T}) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^k$ 是唯一的 TCD映射，满足：若弦 $s_i(v)$ 绕着 w 顺时针转动，则对于所有 $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$ 和$v \in V(\mathfrak{T})$， $T_F(w)$ 都包含于 $F_i(v)$ 中。■

不难验证，上述关联的 TCD 映射确实是一个 TCD 映射。我们需要验证 $\mathcal{G}$ 的白色顶点的像被唯一确定，TCD 映射是 0-一般位置的，并且 $\mathcal{G}$ 的黑色顶点周围的三个点共线。例如，若有来自三个不同顶点 v， v'， v'' 、绕着 w 转动的弦，那么

$$T_F(w) = F_{s_i(v)}(v) \cap F_{s_{i'}(v')}(v') \cap F_{s_{i''}(v'')}(v''), \tag{11.14}$$

其中 i、i'、i'' 是按嵌套顺序绕着 w 顺时针转动的最小弦的指标。由于 $\mathcal{T}^k_{\mathfrak{T}}$ 的组合结构，总和 $s_i(v) + s_{i'}(v') + s_{i''}(v'')$ 等于 $2k$，因此三个对应空间 $F_{s_i}(v)(v)F_{s_{i'}}(v')(v')F_{s_{i''}}(v'')(v'')$ 的交点确实是一个点。对于来自两个或一个不同顶点、绕着 w 转动的弦，论证方式类似。此外，对于 $\mathcal{G}$ 的每个黑色顶点 b ，恰有三条弦 $s_i(v)$ $s_{i'}(v')$ $s_{i''}(v'')$ 经过 b。设与 b 相邻的三个白色顶点为 w_1、w_2、w_3。那么确有

$$T_F(w_1), T_F(w_2), T_F(w_3) \in F_{s_{i+1}(v)}(v) \cap F_{s_{i'+1}(v')}(v') \cap F_{s_{i''+1}(v'')}(v''), \tag{11.15}$$

其中我们采用约定 $F_k = \mathbb{C}\mathrm{P}^k$。右侧是一条直线，因为总和$s_i(v) + s_{i'}(v') + s_{i''}(v'')$等于 $2k-2$。最后， T_F 的0-一般性由定义11.7的一般位置假设推出。

如果从一个带装饰的射影 k-旗开始，我们可以在定义11.10中用$H_i(v)$替换 $F_i(v)$，从而得到一个等价的定义。因此，方程

$$T_F(w) = \bigcap_{v \in V(\mathfrak{T})} \left(\bigcap_{i \in I_v(w)} H_i(v) \right), \tag{11.16}$$

同样成立，其中 $I_v(w)$是绕 v和 w顺时针转向的弦的嵌套指标集合。该方程表明， T_F 中的点可以像定义11.1所要求的那样，作为与弦相关联的超平面的唯一交点得到，尽管这些超平面并非由 T_F 的边界点唯一确定，而是取决于 T_F的装饰。

三角剖分 $\mathfrak{T}$ 中的边翻转不会影响我们如何为射影 k-旗配置赋予旗或装饰，但会改变变量的取值，以及将变量赋予给定构型的方式。事实上，关于射影箭图突变的边翻转对应序列可见于 [**FG06**], ，而关于 2-2 移动的序列可见于 [**Gon17**]。例如，我们在图 11.1 中展示了射影 3-旗配置中的边翻转。

为了比较 Fock-Goncharov 引入的变量与我们的变量，我们还需要一个定义。

定义 11.11. 设 F 是在$\mathfrak{T}$上的三角剖分 $\mathbb{C}\mathrm{P}^k$ 中的射影 k-旗配置。通过对每个 $v \in V(\mathfrak{T})$ 对应的 k-旗 $F(v)$进行射影对偶化，可得到其在$(\mathbb{C}\mathrm{P}^k)^*$ 中的对偶射影 k-旗配置 $F^\star$ 。■

定理 11.12. 设 F 是三角剖分 $\mathfrak{T}$ 上的一个射影 k-旗配置。那么，Fock-Goncharov [**FG 06**], 所定义的 F 的 $\mathcal{X}$-簇变量就是 $T_{F^\star}$ 的 X-变量，而 $F^\star$ 的 $\mathcal{X}$-簇变量就是 T_F 的 X-变量。■

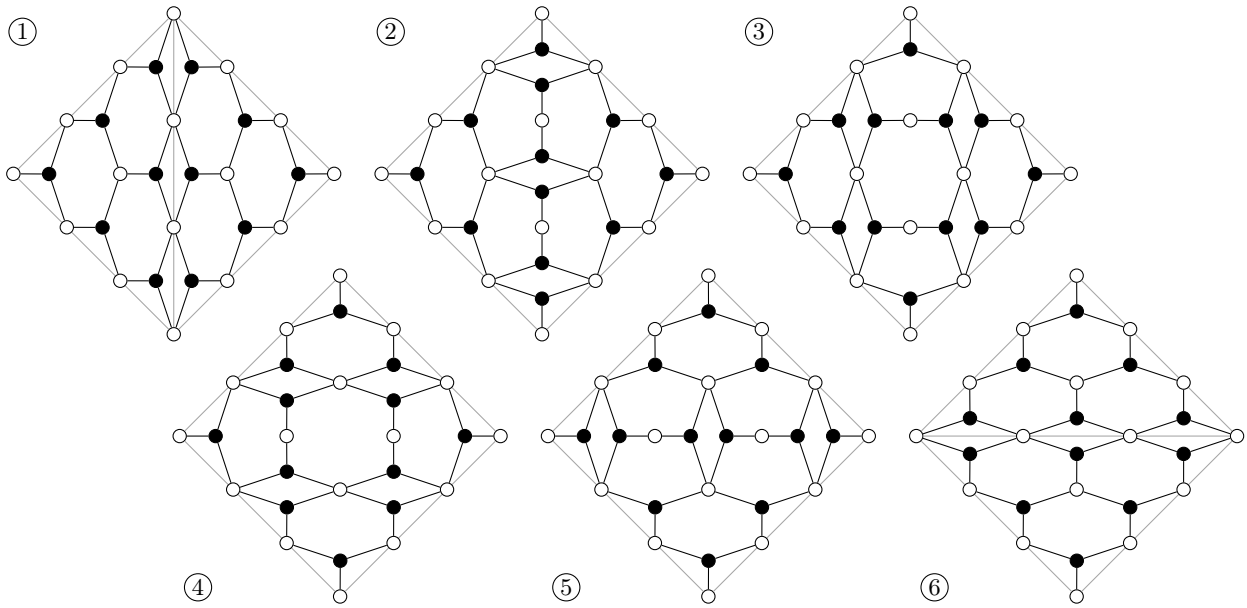


图 11.1. 射影 3-旗配置中的边翻转，可表示为由十四次 2-2 移动组成的序列。

证明。Fock 和 Goncharov 将 X-变量明确地定义为交比和三重比 [**FG06**，第 9 节，即四个或六个点的多重比。根据引理 5.16，这两者都与相应的多重比一致，而 X-变量正是通过这些多重比表示的。□

猜想 11.13. 考虑三角剖分 $\mathfrak{T}$ 上的一个带装饰的射影 k 旗配置 F。令 T_F 为与 F 相关联的 TCD 映射， H 为该装饰的超平面。将齐次提升 $H_i^{\perp}(v)$ 赋给绕 v 顺时针转动的第 i 条弦。于是， T_F 的 τ 变量与 Fock-Goncharov [**FG06**] 所定义的 $F^{\star}$ 的 $\mathcal{A}$ 簇变量在规范变换下等价。■

我们非常确信猜想 11.13 成立。然而，我们未能在文献中找到投射 k-旗的 $\mathcal{A}$-变量的直接且一般性的定义。因此，我们不提供该猜想的证明。

自然会问， X变量是否能在射影变换下唯一确定一个射影 k旗配置 F。 [**FG06**]已经给出了这个问题的答案。不过，我们还是用 TCD 映射简要给出一个关于不含内部顶点的三角剖分的标准答案。

选取一条边界边 e_0。然后， e_0 包含 $k+1$ 个白色顶点 w_1、w_2、.....、w_{k+1}，属于 $\mathcal{G}_F$。在每条直线 $T(w_i)T(w_{i+1})$ 上，都有另一个标记点 $T(w_i')$，使得白色顶点w_i、w_{i+1}、w_i' 与 $\mathcal{G}_F$的某个公共黑色顶点相邻。 k 标记点 w_1'、w_2'、.....、w_k'张成一个超平面，我们将其记为 J。选择 $k+1$ 点和超平面J 消除了射影变换所带来的全部自由度，因为唯一固定 J 及 $k+1$ 点的射影变换是恒等映射。因此，我们可以将点 w_i 和超平面 J 选作初始数据。现在我们断言， X-变量决定了 T_F的所有点，因而也决定了所有旗。使用 li-定向（见定义4.20）可以特别容易地看出这一点。在图11.2中，我们给出了 $k=3$的一个例子。

对于三角剖分 $\mathfrak{T}$ 具有内部顶点的情况，我们可以考察其万有覆盖的一个基本域，并在该基本域上传播几何数据。因此，某些 X变量（$2k$ 每个内部顶点对应一个）不会用于传播。这会对 X变量产生约束。我们声称，这些约束可以通过由关于 X变量的相对简单的方程所定义的某些子簇来表达，但我们将详细讨论推迟到

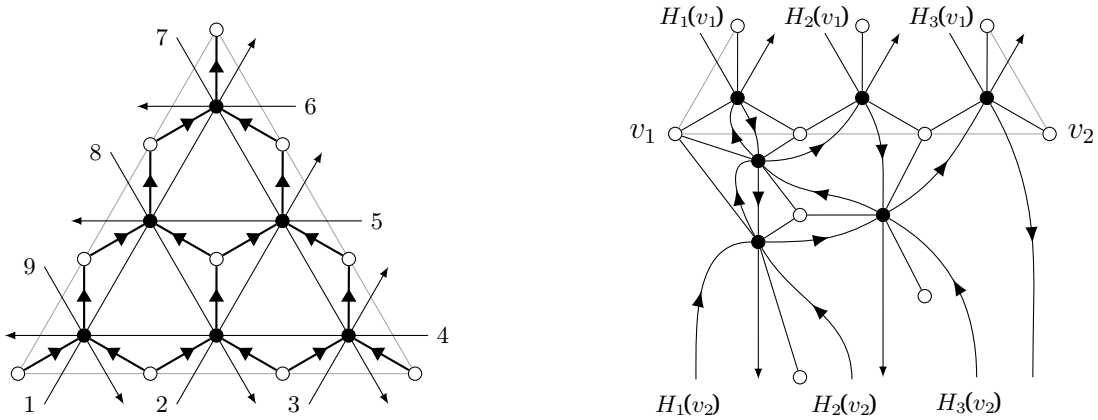


图 11.2。左：射影 3-旗构型中三角形的 li-定向，通过 X-变量传播几何数据。右：根据桥分解中的向上序列在边界上添加点。这些点确定装饰中出现的超平面。

后续研究。当然，我们也可以考虑具有内部顶点的三角剖分 $\mathfrak{T}$，以及仅在内部顶点周围的单值化意义下定义良好的 TCD映射，这正如带 puncture 曲面的 Teichmüller理论中那样（这对应于 $k = 1$）。在这种情况下，关于 X变量的约束有些会被省略，但并非全部省略；我们将关注把这些约束推广到 $k > 1$的问题。

再次考虑 $\mathfrak{T}$ 没有内部顶点的情形。回顾第 11.1 节末尾的讨论，我们概述了如何为非平衡TCD$\mathcal{T}$中的弦分配超平面。其思想是将 $\mathcal{T}$视为平衡TCD $\mathcal{T}'$的子图，从而使 $\mathcal{T}$继承来自 $\mathcal{T}'$的弦超平面。这一过程同样适用于射影旗标构型的 TCD映射。特别地，在 $\mathfrak{T}$的每条边界边处，我们可以迭代地添加白色顶点，以反转入射弦的顺序。图 11.2 展示了这一过程的一个示例。边界处添加的数据对应于装饰中超平面的一种选择。

参考文献

[ABS03a] Vsevolod E. Adler、Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。四边形图上的可积方程分类。一致性方法。《数学物理通讯》，233(3):513–543，2003年。[ABS03b] Vsevolod E. Adler、Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。Yang–Baxter 映射的几何：圆锥曲线铅笔与四有理映射。《Communications in Analysis and Geometry》，12，2003年8月。[ABS09] Vsevolod E. Adler、Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。Grassmann流形中的可积离散网。《Letters in Mathematical Physics》，89:131–139，2009年。[ABS12] Vsevolod E. Adler、Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。八面体型可积离散方程分类。《International Mathematics Research Notices》，页码 1822–1889，2012。[Adl93] Vsevolod E. Adler。多边形重切。《Functional Analysis and Its Applications》，27(2):141–143，1993年4月。[Aff21] Niklas C. Affolter。米克尔动力学、Clifford 格与二聚体模型。《Letters in Mathematical Physics》，111(3):61，2021年5月。[AFIT20] Maxim Arnold、Dmitry Fuchs、Ivan Izmestiev 和 Serge Tabachnikov。理想多边形上的交比动力学。《International Mathematics Research Notices》，2020年12月。[AGPR19] Niklas C. Affolter、Max Glick、Pavlo Pylyavskyy 和 Sanjay Ramassamy。向量关系构型与平面双部图，2019。预印本，arXiv:1908.06959。[AGR21] Niklas C. Affolter、Terrence George 和 Sanjay Ramassamy。交比动力学与二聚体簇可积系统，2021。预印本，arXiv:2108.12692。[AHBC+14] Nima Arkani-Hamed、Jacob L. Bourjaily、Freddy Cachazo、Alexander B. Goncharov、Alexander Postnikov 和 Jaroslav Trnka。散射振幅与正 Grassmann 流形，2014。预印本，arXiv:1212.5605。[AMdT22a] Niklas C. Affolter、Paul Melotti 和 Béatrice de Tilière。Schwarzian 八面体递推（dSKP 方程）I：显式解，2022。预印本，arXiv:2208.00239。[AMdT22b] Niklas C. Affolter、Paul Melotti 和 Béatrice de Tilière。Schwarzian 八面体递推（dSKP 方程）II：几何系统，2022。预印本，arXiv:2208.00244。[Bax78] Rodney J. Baxter。任意平面格上的可解八顶点模型。《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学与物理科学》，289(1359):315–346，1978年。[BCdT20] Cédric Boutillier、David Cimasoni 和 Béatrice de Tilière。极小图上的椭圆二聚体与亏格 1 Harnack 曲线，2020。预印本，arXiv:2007.14699。[BdT11] Cédric Boutillier 和 Béatrice de Tilière。通过二聚体研究临界 Z 不变 Ising 模型：局部性。《数学物理通讯》，301(2):473–516，2011年1月。[BdT12] Cédric Boutillier 和 Béatrice de Tilière。等辐图上的统计力学。载于《复杂物理系统中的概率》，第 491–512 页，柏林、海德堡，2012。Springer Berlin Heidelberg。[BdTR19] Cédric Boutillier、Béatrice de Tilière 和 Kilian Raschel。通过二聚体研究 Z 不变 Ising 模型。《概率论及相关领域》，174(1):235–305，2019年6月。[BK95] Leonid V. Bogdanov 和 Boris G. Konopelchenko。通过 delta- dressing 方法研究格与 q-差分 Darboux–Zakharov–Manakov 系统。《Journal of Physics A: Mathematical and General》，28(5):L173–L178，1995年3月。[BK98a] Leonid V. Bogdanov 和 Boris G. Konopelchenko。可积层级的解析-双线性方法。I. 广义 KP 层级。《Journal of Mathematical Physics》，39(9):4683–4700，1998。[BK98b] Leonid V. Bogdanov 和 Boris G. Konopelchenko。可积层级的解析-双线性方法。II. 多分量 KP 与二维 Toda 格层级。《Journal of Mathematical Physics》，39(9):4701–4728，1998。[Bla40] Pascal Blaise。《圆锥曲线论》，1640。[Bla10] Wilhelm Blaschke。欧氏平面中矛几何的研究。《Monatshefte für Mathematik und Physik》，21(1):3–60，1910年12月。[BLPT21] Alexander I. Bobenko、Carl O.R. Lutz、H. Pottmann 和 Jan Techter。非欧 Laguerre 几何与内切圆网。《数学 SpringerBriefs》。Springer International Publishing，2021。[BMS05] Alexander I. Bobenko、Christian Mercat 和 Yuri B. Suris。离散解析函数的线性与非线性理论。可积结构与等单值 Green 函数。《Journal für die reine und angewandte Mathematik》，2005:117–161，2005年。

[BMS08] Vladimir V. Bazhanov、Vladimir V. Mangazeev 和 Sergey M. Sergeev。三维晶格的量子几何。《统计力学杂志：理论与实验》，2008(07)：P07004，2008年07月。[Bob99] Alexander I. Bobenko。离散共形映射与曲面，第97–108页。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，1999年。[Boc16] Raf Bocklandt。一个二聚体 ABC。《伦敦数学会会刊》，48(3)：387–451，2016年02月。[BP96] Alexander I. Bobenko 和 Ulrich Pinkall。离散等温曲面。1996(475)：187–208，1996。[Bro12] Nathan Broomhead。二聚体模型与卡拉比–丘代数。《美国数学会回忆录》。美国数学会，2012。[BS07a] Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。离散柯尼斯网与离散等温曲面。《International Mathematics Research Notices》，2007年09月。[BS07b] Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。论离散微分几何的组织原则。球面几何。《俄罗斯数学调查》，62(1)：1–43，2007年02月。[BS08] Alexander I. Bobenko 和 Yuri B. Suris。离散微分几何：可积结构，数学研究生教程第98卷。美国数学会，2008年。[BS15] Alexander I. Bobenko 和 Wolfgang K. Schief。离散直线复形与子式的可积演化。《英国皇家学会会刊 A 辑》，471(2175)，2015年03月。[BS16] Alexander I. Bobenko 和 Wolfgang K. Schief。圆复形与离散 CKP 方程。《International Mathematics Research Notices》，2017(5)：1504–1561，2016年05月。[BSST16] Alexander I. Bobenko、Wolfgang K. Schief、Yuri B. Suris 和 Jan Techter。关于共焦二次曲面的离散化。I. 一种可积系统方法。《可积系统杂志》，1(1)，2016年08月。[BSST18] Alexander I. Bobenko、Wolfgang K. Schief、Yuri B. Suris 和 Jan Techter。关于共焦二次曲面的离散化。一种关于一般参数化的几何方法。《International Mathematics Research Notices》，2020(24)：10180–10230，2018年12月。[BST20] Alexander I. Bobenko、Wolfgang K. Schief 和 Jan Techter。棋盘式内切圆网：拉盖尔几何与参数化。《Geometriae Dedicata》，204(1)：97–129，2020年02月。[BW20] Alexey Balitskiy 和 Julian Wellman。平面双部图中的翻转循环。《数学精选》，26(1)：15，2020。[BZ05]Arkady Berenstein 和 Andrei Zelevinsky。量子簇代数。《数学进展》，195(2)：405–455，2005年。[Car06] Lazare N. M. Carnot。论空间中任意五点的相应距离之间存在的关系；附：关于横截线理论的试论。巴黎，1806年。[CDS97] Jan Cieśliński、Adam Doliwa 和 Paolo M. Santini。正交坐标系的可积离散类比是多维圆格。《物理快报 A 辑》，235(5)：480–488，1997年。[Che18] Dmitry Chelkak。临界状态下的平面伊辛模型：最新进展与展望。载于《2018年里约热内卢国际数学家大会论文集》第IV卷：特邀报告，第2801–2828页。World Sci. Publ.，Hackensack，新泽西州，2018年。[Che20] Dmitry Chelkak。伊辛模型与平面图的 s-嵌入，2020年。预印本，arXiv:2006.14559。[CKP01] Henry Cohn、Richard Kenyon 和 James Propp。多米诺铺砌的变分原理。《美国数学会杂志》，14(2)：297–346，2001年。[CLR20] Dmitry Chelkak、Benoît Laslier 和 Marianna Russkikh。平面图 t-嵌入上的二聚体模型与全纯函数，2020年。预印本，arXiv:2001.11871。[Cox03] Harold S. M. Coxeter。射影几何。施普林格纽约，第二版，2003年。[CR07] David Cimasoni 和 Nicolai Reshetikhin。曲面图上的二聚体与自旋结构。I。《数学物理通讯》，275：187–208，2007年10月。[CS04] Gabriel D. Carroll 和 David E Speyer。立方体递推。《电子组合学杂志》，11(1)：研究论文73，31页，2004年。[CS11] Dmitry Chelkak 和 Stanislav Smirnov。等辐图上的离散复分析。《数学进展》，228(3)：1590–1630，2011年。[CS12] Dmitry Chelkak 和 Stanislav Smirnov。二维伊辛模型中的普适性与费米子可观测量的共形不变性。《Inventiones mathematicae》，189(3)：515–580，2012。[CTS07] William K. Clifford、Robert Tucker 和 Henry J. S. Smith。数学论文集。AMS Chelsea 出版系列。AMS Chelsea Publishing，2007年。[DCL19] Hugo Duminil-Copin 和 Marcin Lis。论双重随机电流嵌套场。《概率论及相关领域》，175(3)：937–955，2019年12月。[DN91] Irene Ya. Dorfman 和 Frank W. Nijhoff。论克里切弗–诺维科夫方程的（2+1）维版本。《物理快报 A 辑》，157(2)：107–112，1991年。[Dol97] Adam Doliwa。Toda 系统的几何离散化。《物理快报 A 辑》，234(3)：187–192，1997年。[Dol99]Adam Doliwa。四边形格的二次约化。《Journal of Geometry and Physics》，30(2)：169–186，1999年。[Dol01] Adam Doliwa。普吕克直线几何中的离散渐近网与 W-合同。《Journal of Geometry and Physics》，39(1)：9–29，2001年。

[Dol02] Adam Doliwa。Koenigs网的几何离散化。Journal of Mathematical Physics，44，04 2002年。[Dol07] Adam Doliwa。B-四边形格、其变换及代数几何构造。J. Geom. Phys.，57:1171–1192，2007年。[Dol09] Adam Doliwa。Desargues映射与Hirota–Miwa方程。英国皇家学会会刊 A 辑：数学、物理与工程科学，466:1177 – 1200，2009。[Dol10a] Adam Doliwa。Desargues映射及非交换Hirota-Miwa系统的仿射Weyl群对称性。物理快报 A 辑，375，06 2010。[Dol10b] Adam Doliwa。C-（对称）四边形格、其变换及代数几何构造。Journal of Geometry and Physics，60(5):690 – 707，2010。[Dri92] Vladimir G. Drinfeld。量子群理论中的一些未解决问题。载于《Quantum Groups》，第1–8页，柏林、海德堡，1992。Springer Berlin Heidelberg。[DS97] Adam Doliwa和Paolo M. Santini。多维四边形格是可积的。物理快报 A 辑，233(4):365 – 372，1997 年。[DSM00] Adam Doliwa 、 Paolo M. Santini 和 Manuel Mañas。四边形格的变换。Journal of Mathematical Physics，41(2):944–990，2000。[dT21] Béatrice de Tilière。Z不变Ising模型中的Z-Dirac算子与有质量拉普拉斯算子。Electronic Journal of Probability，26（无）:1 – 86，2021。[Dub11] Julien Dubédat。Ising模型的精确玻色化，2011。预印本，arXiv:1112.4399。[Fai22] Alexander Y. Fairley。进行中，2022。博士论文。[Fel04] Stefan Felsner。几何图与排列。Vieweg Verlag，2004。[FG06] Vladimir V. Fock和Alexander B. Goncharov。局部系统的模空间与高阶Teichmüller理论。Publications Mathématiques de l’IHÉS，103:1–211，2006。[FG07] Vladimir V. Fock和Alexander B. Goncharov。曲面上凸射影结构的模空间。数学进展，208(1):249–273，2007年。[FM16] Vladimir V. Fock和Andrey Marshakov。环群、簇、二聚体与可积系统，第1–65页。Springer International Publishing，Cham，2016。[Foc15] Vladimir V. Fock。GK可积系统的逆谱问题，2015。预印本，arXiv:1503.00289。[FW01] Stefan Felsner和Helmut Weil。扫掠、排列与符号拓扑。Discrete Applied Mathematics，109(1):67–94，2001年。第14届欧洲计算几何研讨会。[FZ01] Sergey Fomin和Andrei Zelevinsky。簇代数 I：基础。Journal of the American Mathematical Society，15，05 2001年。[FZ07]Sergey Fomin和Andrei Zelevinsky。簇代数 IV：系数。Compositio Mathematica，143(1):112–164，2007年。[Gal21] Pavel Galashin。Grassmann流形中的临界簇，2021。预印本，arXiv:2102.13339。[GI19] Terrence George和Giovanni Inchiostro。二聚体模型与网络的簇模群，2019。预印本，arXiv:1909.12896。[GK13] Alexander B. Goncharov和Richard Kenyon。二聚体与簇可积系统。Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure，46(5):747–813，2013。[Gli11] Max Glick。五边形映射与Y-模式。数学进展，227(2):1019 – 1045，2011。[Gli15] Max Glick。Devron性质。Journal of Geometry and Physics，87:161–189，2015。[Gon17] Alexander B. Goncharov。理想网、局部系统的模空间与三维Calabi–Yau范畴，第31–97页。Springer International Publishing，Cham，2017。[GP16] Max Glick和Pavlo Pylyavskyy。Y网格与广义五边形映射。伦敦数学会会刊，112(4):753–797，03 2016。[GP20] Pavel Galashin和Pavlo Pylyavskyy。Ising模型与正交正Grassmann流形。Duke Math. J.，169(10):1877–1942，2020年。[GR17] Max Glick和Dylan Rupel。簇代数导论，07 2017。ASIDE会议2016年讲座笔记。[GR18] Alexey Glutsyuk和Sanjay Ramassamy。米克尔动力学的首个可积性结果。Journal of Geometry and Physics，130:121 – 129，2018年。[GSTV16] Michael Gekhtman、Michael Shapiro、Serge Tabachnikov和Alek Vainshtein。有向网络与五边形映射的簇可积动力学。数学进展，300:390–450，2016。纪念Andrei Zelevinsky的特别卷。[GSV03] Michael Gekhtman、Michael Shapiro和Alek Vainshtein。簇代数与Poisson几何。Moscow Mathematical Journal，3，12 2003。[GSV10] Michael Gekhtman、Michael Shapiro和Alek Vainshtein。簇代数与Poisson几何。Mathematical surveys and monographs。MPI，2010。[Hir81] Ryogo Hirota。广义Toda方程的离散类比。Journal of the Physical Society of Japan，50(11):3785–3791，1981。

[HS10] André Henriques 和 David E Speyer。多维立方体递推。Adv. Math.，223(3):1107–1136，2010。[Izo21a] Anton Izosimov。二聚体、网络与簇可积系统，2021。预印本，arXiv:2108.04975。[Izo21b] Anton Izosimov。多边形边的交点。Proc. Amer. Math. Soc.，2021。即将发表于。[Izo21c]Anton Izosimov。泊松-李群中的五角星映射与重因子分解，2021。预印本，arXiv:1803.00726。[Izo22] Anton Izosimov。作为簇可积系统的多边形重新切割，2022。预印本，arXiv:2201.12503。[Jos12] Martin Josefsson。正交对角线四边形的刻画。Forum Geometricorum /仅电子版/, 12, 01 2012。[Kas61] Pieter W. Kasteleyn。晶格上的二聚体统计：I. 二次格上的二聚体排列数。Physica，27(12):1209–1225，1961。[Kas96] Rinat M. Kashaev。关于与局部杨-巴克斯特关系相关的离散三维方程。Letters in Mathematical Physics，38(4):389–397，1996年12月。[Kel21]Andrew P. Kels。面周围相互作用与面心立方体周围的一致性。Journal of Mathematical Physics，62(3):033509，2021。[Ken99] Arthur E. Kennelly。导电网络中三角形与三尖星形的等价性。Electrical world and engineer，34(12):413–414，1899。[Ken02] Richard Kenyon。临界平面图上的拉普拉斯算子与狄拉克算子。Inventiones mathematicae，150(2):409–439，2002。[Ken03] Richard Kenyon。二聚体模型导论。载于2002年5月在ICTP举办的短期课程讲义，2003。[Kir45] Gustav R. Kirchhoff。关于电流通过平面的情形，尤其是通过圆形平面的情形。Annalen der Physik，140(4):497–514，1845。[Kir47] Gustav R. Kirchhoff。关于求解研究线性分布的电流时所得到的方程。Annalen der Physik，148(12):497–508，1847。[KLRR21] Richard Kenyon、Wai Yeung Lam、Sanjay Ramassamy 和 Marianna Russkikh。二聚体与圆模式。即将发表于 Annales Scientifiques de l'ENS，2021年10月。[Kø92] Gabriel Kœnigs。论具有相等不变量的平面网络与渐近线。C. R. Acad. Sci., Paris，114:55–57，1892。[Koe36] Paul Koebe。共形映射的接触问题。Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. 88，第141–164页，1936。[KP98] Boris G. Konopelchenko 和 Ulrich Pinkall。Lelieuvre 公式的射影推广。Geometriae Dedicata，79:81–99，1998。[KP16] Richard Kenyon 和 Robin Pemantle。双二聚体、伊辛模型与六面体递推。Journal of Combinatorial Theory, Series A，137:27–63，2016。[KS01] Boris Konopelchenko 和 Wolfgang Schief。Schwarzian BKP层级的互易图形、图解静力学与反演几何。Studies in Applied Mathematics，109，2001年8月。[KS02] Boris G. Konopelchenko 和 Wolfgang K. Schief。梅涅劳斯定理、克利福德构型与 Schwarzian KP 层级的反演几何。Journal of Physics A: Mathematical and General，35(29):6125–6144，2002年7月。[KS03] Alastair D. King 和 Wolfgang K. Schief。四面体、八面体与立方八面体：多重比的可积几何。Journal of Physics A: Mathematical and General，36(3):785–802，2003年1月。[KS04] Richard Kenyon 和 Scott Sheffield。二聚体、铺砌与树。Journal of Combinatorial Theory, Series B，92(2):295–317，2004。W.T. Tutte教授专题纪念专刊。[KS12] Alastair D. King 和 Wolfgang K. Schief。Clifford 格与笛沙格定理的共形推广。Journal of Geometry and Physics，62(5):1088–1096，2012。[KS14] Alastair D. King 和 Wolfgang K. Schief。比安基超立方体与 Hirota 方程和三轮方程的几何统一。International Mathematics Research Notices，2015(16):6842–6878，2014年9月。[Kup98] Greg Kuperberg。积和式-行列式方法探究。The electronic journal of combinatorics，5(1)，1998。[Lag85] Edmond N. Laguerre。方向几何研究。Gauthiers-Villars，1885。[Lea19] Alexander Leaf。Kashaev方程及相关递推。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.，15:论文编号012，64页，2019。[Len20] Wilhelm Lenz。关于理解固体中的磁现象。Z. Phys.，21:613–615，1920。[LPW+06] Yang Liu、Helmut Pottmann、Johannes Wallner、Yongliang Yang 和 Wenping Wang。利用圆锥网格与可展曲面进行几何建模。ACM Transactions on Graphics，25(3):681–689，2006年7月。[Mel18] Paul Melotti。自由费米子环模型、双二聚体与 Kashaev递推。Journal of Combinatorial Theory, Series A，158:407–448，2018。

[Miq38] Auguste Miquel。关于圆与球交点的定理。J. Math. Pures Appl.，第517–522页，1838。[Miw82] Tetsuji Miwa。关于 Hirota 差分方程。Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.，58(1):9–12，1982。[MRT20] Paul Melotti、Sanjay Ramassamy 和 Paul Thévenin。 s-嵌入与 α-实现的立方体变换。即将发表于 Annales de l'Institut Henri Poincaré D, Combinatorics, Physics and their Interactions，2020。[MS16] Greg Muller 和 David E Speyer。正拟阵簇的扭转。Proceedings of the London Mathematical Society，115，2016年6月。[Mü15] Christian Müller。圆锥型平面离散等温网。Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry，57，2015年6月。[NCWQ84] Frank W. Nijhoff、Hans W. Capel、Gerlof L. Wiersma 和 G. Reinout W. Quispel。巴克伦变换与三维格方程。Physics Letters A，105(6):267–272，1984。[Ohm27] Georg S. Ohm。伏打电堆。T. H. Riemann，1827。[OST10] Valentin Ovsienko、Richard Schwartz 和 Serge Tabachnikov。五角星映射：一个离散可积系统。Communications in Mathematical Physics，299(2):409–446，2010年10月。[Pen12] Robert C. Penner。装饰 Teichmüller理论。QGM 硕士课程系列。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2012。附有 Yuri I. Manin 撰写的序言。[Pos06] Alexander Postnikov。全正性、格拉斯曼流形与网络，2006。预印本，arXiv:0609764。[Pro03] James Propp。广义多米诺洗牌。Theoretical Computer Science，303(2):267–301，2003。[PSBW21] Matteo Parisi、Melissa Sherman-Bennett 和 Lauren Williams。m振幅子与超单纯形：符号、簇、三角剖分、欧拉数，2021。预印本，arXiv:0609764。=2PW[Helmut Pottmann 和 Johannes Wallner。计算直线几何。Springer-Verlag，柏林、海德堡，2001。01] Ram[Sanjay Ramassamy。圆模式的米克尔动力学。International Mathematics Research Notices，2018年在线发表。18] RG[Jürgen Richter-Gebert。射影几何展望：实几何与复几何导览。Springer Publishing Company, Incorporated，第一版，2011。11] RGST[Jürgen Richter-Gebert、Bernd Sturmfels 和 Thorsten Theobald。热带几何入门，页289–317。幂等数学与数理物理，维也纳2003年会议论文集。美国数学会，2005。05] Riv[Igor Rivin。单纯曲面上的欧几里得结构与双曲体积。Annals of Mathematics，139(3):553–580，1994。94] Sau[Robert Sauer。无穷小曲面弯曲下的摆动曲线网。Mathematische Annalen，108(1):673–693，1933。33] Sau[Robert Sauer。射影直线几何。Göschens Lehrbücherei。Walter de Gruyter，1937。37] Sch[Richard Schwartz。五角星映射。Experiment. Math.，1(1):71–81，1992。92] Sch[Oded Schramm。具有方格组合结构的圆模式。Duke Mathematical Journal，86(2):347–389，1997。97] Sch[Wolfgang K. Schief。离散 Darboux、KP、BKP 和 CKP 方程的格几何。梅涅劳斯定理与 Carnot 定理。Journal of Nonlinear Mathematical Physics，10(sup2):194–208，2003。03]Sch[Wolfgang K. Schief。离散 Laplace-Darboux 序列、梅涅劳斯定理与五角星映射。研讨会报告：离散与超离散可积系统的几何方面，2009。09] Sco[Jeanne Scott。格拉斯曼流形与簇代数。Proceedings of the London Mathematical Society，92(2):345–380，2006。06] SK[John G. Semple 和 Geoffrey T. Kneebone。代数射影几何。牛津，Clarendon 出版社，1952。52] Smi[Stanislav Smirnov。迈向二维晶格模型的共形不变性。载于《国际数学家大会论文集》第二卷，第1421–1451页。欧洲数学会，苏黎世，2006。06] Spe[David E Speyer。完美匹配与八面体递推。Journal of Algebraic Combinatorics，25(3):309–348，2007。07] Ste[Kenneth Stephenson。圆堆积导论。剑桥大学出版社，剑桥，2005。离散解析函数理论。05] Ste[Jannik Steinmeier。Koenigs网的两种离散化及其联系，2018。学士论文。18] Tec[Jan Techter。离散共焦二次曲面与棋盘式内切圆网，2021。博士论文。21] Tem[Harold N. V. Temperley。大型周期晶格上的图计数，页155–160。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，1974。74] TF[Harold N. V. Temperley 和 Michael E. Fisher。统计力学中的二聚体问题——一个精确结果。The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics，6(68):1061–1063，1961。61] Thu[William P. Thurston。三维流形的几何与拓扑，1979。讲义。

[Thu85] William P. Thurston. 有限黎曼映射定理，1985年。在普渡大学举行的、为庆祝比伯巴赫猜想得到证明而举办的国际研讨会上的特邀报告。[Thu17] Dylan P. Thurston. 从多米诺骨牌到六边形。载于纪念 *Vaughan F.R. Jones 60* 岁生日的 *2014* 年毛伊岛和 *2015* 年秦皇岛会议论文集，第 399–414 页，澳大利亚堪培拉，2017年。数学及其应用中心，澳大利亚国立大学。[Tut63] W. T. Tutte. 如何绘制图。伦敦数学会论文集，s3-13(1):743–767，1963。[Ves07] Alexander P. Veselov. Yang–Baxter 映射：动力学视角。载于可积系统的组合方面，第 145–167 页。日本数学会，2007年。[Wil12] Lauren K. Williams. 簇代数：导论。美国数学会通报，51，2012年 12 月。[Wil16] Lauren K. Williams. 正 Grassmann 流形的置换多面体类比。*Proc. Amer. Math. Soc.*，144(6):2419–2436，2016。[Zei97] Doron Zeilberger. 由双重计时的男女证明道奇森行列式求值法则。电子组合学杂志，4，1997年。

