arXiv:2305.02237v1 [math.AP] 3 May 2023

高维双物种问题在柯西问题中的有限时间爆破

TAE GAB HA† 和 SEYUN KIM‡

Abstract. 本文研究了在某些初始数据下，具有高维双物种柯西问题的全抛物型系统的爆破解。此外，我们证明，在拓扑 $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ 下， $L^1(\mathbb{R}) \cap BUC(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}) \cap BUC(\mathbb{R}^N) \times W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 中的正径向函数集合包含一个由导致解在有限时间内爆破的正径向初始数据组成的稠密子集，其中 $p \in \left[1, \frac{2N}{N+2}\right)$。

1. Introduction

考虑如下双物种全抛物型系统:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla w), && x \in \Omega, t > 0, \\ v_t &= \Delta v - \xi \nabla \cdot (v \nabla w), && x \in \Omega, t > 0, \\ w_t &= \Delta w - \lambda w + \alpha u + \beta v, && x \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中， $\chi, \xi, \lambda, \alpha, \beta$ 为正常数。在该系统中，(u, v)表示两个物种的种群密度， w 表示两个物种的浓度。系统 (1.1) 是经典 Keller-Segel 系统的推广，因为若 $\chi = \xi$ 且 $z := \alpha u + \beta v$，则有

$$\begin{aligned} z_t &= \Delta z - \chi \nabla \cdot (z \nabla w), && x \in \Omega, t > 0, \\ w_t &= \Delta w - \lambda w + z, && x \in \Omega, t > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

当 (1.2) 中的 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是光滑有界区域时，Nagai 等人 [8] 证明，若 $\int_\Omega z_0 dx < \frac{8\pi}{\chi}$，则存在唯一的径向经典解；若 $\int_\Omega z_0 dx < \frac{4\pi}{\chi}$，则存在唯一的经典解。Horstmann 证明，若 $\int_\Omega z_0 dx > \frac{8\pi}{\chi}$，则在 [2], 中存在有限时间爆破的径向解，并且在 [1] 中存在有限时间爆破的非径向解。在高维情形（$N \geqslant 3$）下，Winkler [15] 表明，当 $\int_\Omega z_0 w_0 dx$ 的量足够大时，存在唯一的经典爆破解。此外，他们还构造了会导致爆破现象的初始数据集合；该集合在 $C^0(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega)$ 中关于拓扑 $L^p(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 对 $p \in \left(1, \frac{2N}{N+2}\right)$ 是稠密的。利用 [15], Li 等人 [6] 的方法，他们将爆破结果推广到了 (1.1)。他们构造了

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35B44, 35Q92, 92C17.

Key words and phrases. 趋化系统；爆破。

新的能量函数，以克服 $\chi \neq \xi$。另一方面，当 $\Omega = \mathbb{R}^N$ 时，Winkler [16] 表明，对于 $N \geqslant 3$，若满足 $\chi = \lambda = 1$，则 (1.2) 在初始数据满足某些假设时会在有限时间内爆破，且 $T_{max} \leqslant 1$ 位于原点。Nagai 等人 [9] 表明，若初始数据足够小，则 (1.2) 存在整体解，并且当 $t \to \infty$ 时，该解对$N \geqslant 2$表现得如同热核。Li 等人 [18] 证明了 (1.1) 具有与 [9] 类似的结果。关于 $N = 1$，请参阅 [10]。关于抛物-椭圆系统中的各种双物种问题，请参阅 [4,17,19]。

受 [6,15,16], 的启发，我们考虑以下柯西问题：

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla w), && x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ v_t &= \Delta v - \xi \nabla \cdot (v \nabla w), && x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ w_t &= \Delta w - \lambda w + \alpha u + \beta v, && x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中 χ、ξ、λ、α、β 均为正常数。本文采用 [15,16], 中的方法展开论述，但这些方法不能直接应用。事实上，[15] 构造了系统 (1.2) 的能量函数，其形式为

$$\mathcal{F}(u,v)(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega w^2 dx - \int_\Omega zw dx + \int_\Omega z\log z dx.$$

在有界区域中，熵项有如下下界：$\int_\Omega z\log z dx \geqslant -\frac{\Omega}{e}$，这是利用 $x\log x \geqslant -\frac{1}{e}$ 对所有 $x > 0$ 得到的（见 [15] 定理 5.1）。但在无界区域中，这一结论不成立。因此，[16] 通过 $\int_\Omega z\log(z+1)dx$ 考虑了修正熵项。然而，对于具有 χ、$\xi \neq 1$ 的 (1.3)，利用 $\int_\Omega z\log(z+1)dx$ 熵来估计能量函数很困难。为克服这一困难，我们构造如下能量函数

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u,v,w)(t) = &\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w(\cdot,t)|^2 dx + \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w(\cdot,t)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u(\cdot,t) + \beta v(\cdot,t)) w(\cdot,t) dx \\ &+ \frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N} (u(\cdot,t)+1)\log(u(\cdot,t)+1) dx + \frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N} (v(\cdot,t)+1)\log(v(\cdot,t)+1) dx, \end{aligned} \tag{1.4}$$

如同 [7,11] 和 [6]。此外，与 [16], 不同，我们不会使用截断函数来估计能量函数，因为借助 [12–14]可获得额外的正则性 $w(\cdot,t) \in C^1((0,T_{max}); H^1(\mathbb{R}^N))$。

除非存在任何歧义，我们采用以下记号 $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ 表示 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，而$BUC(\mathbb{R}^N)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^N$ 上、具有 $\|\cdot\|_\infty$ 范数的有界一致连续巴拿赫空间。现在我们为主要结果引入。

定理 1.1. 设 $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)$ $w_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上是径向对称且非负且非零的，并满足 $N \geqslant 3$。那么，方程 (1.3) 的经典解在有限时间 $T_{max} \leqslant 1$ 爆破，若 $F(u_0,v_0,w_0) < -CK^{\frac{2}{1-\theta}}$，其中 C 是一个正常数，依赖于 $\chi,\xi,\alpha,\beta,\lambda,N,\theta$ 和 K:
$= \|u_0\|_1 + \|v_0\|_1 + \|w_0\|_1 + \|\nabla w_0\|_1$，其中 $\theta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$。

推论 1.1. 设 $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)$ $w_0 \in W^{1,\ 1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\ \infty}(\mathbb{R}^N)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上是径向对称且为正的，并满足 $N \geqslant 3$。那么存在 $(u_{0j})_{j\in\mathbb{N}}, (v_{0j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)$ 和 $(w_{0j})_{j\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,\ 1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\ \infty}(\mathbb{R}^N)$，使得 (u_{0j}, v_{0j}, w_{0j}) 对所有满足以下条件的 $j \in \mathbb{N}$ 都是径向对称且为正的

$$(u_{0j}, v_{0j}) \to (u_0, v_0) \ in\ L^p(\mathbb{R}^N),\ as\ j \to \infty\ for\ p \in \left[1, \frac{2N}{N+2}\right),$$
$$w_{0j} \to w_0\ in\ H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N),\ as\ j \to \infty,$$

且相关的经典解（u_j, v_j, w_j）在有限时间 $T_{max,j} \leqslant 1$ 内爆破，即

$$\limsup_{t\to T^+_{max,j}} \|u_j(\cdot,t)\|_\infty + \|v_j(\cdot,t)\|_\infty = \infty.$$

2. Proof of theorem

在本节中，我们将证明主要定理。首先，我们在引理 2.1–2.3 中讨论局部适定性和爆破判据。其次，我们在引理 2.4–2.9 中估计能量函数，并控制项$\int |\nabla w|^2 dx$ 和 $\int(\alpha u + \beta v)w dx$。然后，我们将通过反证法证明该解会在有限时间内爆破。除非另有说明，常数 C 均表示一个通用的正常数，在不同位置出现时其取值可能不同。

引理 2.1. 设 $u_0, v_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)$ $w_0 \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上是径向对称且非负且非零的，其中 $N \geqslant 3$。则存在唯一的正的经典径向对称解 (u, v, w)，满足方程 (1.3)，使得

$u \in C^0([0, T_{max}); \ L^1(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)) \cap C^2, \ 1(\mathbb{R}^N \times (0, \ T_{max})) \cap C^0((0, \ T_{max}); \ H^2(\mathbb{R}^N)), \ v \in C^0([0, T_{max}); \ L^1(\mathbb{R}^N) \cap BUC(\mathbb{R}^N)) \cap C^2, \ 1(\mathbb{R}^N \times (0, \ T_{max})) \cap C^0((0, \ T_{max}); \ H^2(\mathbb{R}^N)), \ w \in C^0([0, T_{max}); \ W^1, \ 1(\mathbb{R}^N) \cap W^1, \ \infty(\mathbb{R}^N)) \cap C^2, \ 1(\mathbb{R}^N \times (0, \ T_{max}) \cap C^1((0, T_{max}); \ H^1(\mathbb{R}^N))$，其中

$$u(\cdot,t) = e^{t\Delta}u_0 - \chi\int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}[u(\cdot,s)\nabla w(\cdot,s)]ds \quad for\ all \quad t \in (0, T_{max}),$$
$$v(\cdot,t) = e^{t\Delta}v_0 - \xi\int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}[u(\cdot,s)\nabla w(\cdot,s)]ds \quad for\ all \quad t \in (0, T_{max}),$$
$$w(\cdot,t) = e^{t(\Delta-\lambda)}w_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\Delta-\lambda)}[\alpha u(\cdot,s) + \beta v(\cdot,s)]ds \quad for\ all \quad t \in (0, T_{max}),$$

并且如果 $T_{max} < \infty$，那么

上极限 $_{t\to T_{max}}(\|u(\cdot,t)\|_\infty + \|u(\cdot,t)\|_1 + \|v(\cdot,t)\|_\infty + \|v(\cdot,t)\|_1 + \|w(\cdot,t)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} + \|w(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}) = \infty.$

此外,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(\cdot,t)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 dx \ and \ \int_{\mathbb{R}^N} v(\cdot,t)dx = \int_{\mathbb{R}^N} v_0 dx \quad for\ all \quad t \in (0, T_{max}). \tag{2.5}$$

证明。通过 Banach 不动点法，我们得到温和解的存在性；随后，由抛物型 Schauder 估计（ [5] 定理 5.1，第 320 页），可知该温和解也是经典解。更多细节请参见 [3, 16]。此外，借助方法 [13], [14] 和强极大值原理，我们有 $(u, v) \in C^0((0, T_{max}); H^2(\mathbb{R}^N))$ 且 $w(\cdot, t) \in C^1((0, T_{max}); H^1(\mathbb{R}^N))$，并可得解的正性。通过对 (1.3) 的第一个方程和第二个方程分部积分，也可以得到 (2.5)。

□

引理 2.2. 设 (u_0, v_0, w_0) 满足引理 2.1 中的假设，则有

$$\|\nabla w\|_1 \leqslant \|\nabla w_0\|_1 + C(\|u_0\|_1 + \|v_0\|_1) \quad for\ all \quad t \in (0, T_{max}),$$
$$\|w\|_1 \leqslant \|w_0\|_1 + C(\|u_0\|_1 + \|v_0\|_1) \quad for\ all \quad t \in (0, T_{max}),$$

其中 C 是一个依赖于 λ, α, β 的正常数。

证明。利用 [16]中的引理 2.1 和引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
\|\nabla w(\cdot,t)\|_1 &= \left\| e^{t(\Delta-\lambda)}\nabla w_0 + \int_0^t \nabla e^{(t-s)(\Delta-\lambda)}[\alpha u(\cdot,s) + \beta v(\cdot,s)]ds \right\|_1 \\
&\leqslant e^{-\lambda t}\|\nabla w_0\|_1 + c_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(t-s)} \|\alpha u(\cdot,s) + \beta v(\cdot,s)\|_1 ds \\
&\leqslant e^{-\lambda t}\|\nabla w_0\|_1 + c_1(\alpha\|u_0\|_1 + \beta\|v_0\|_1) \int_0^\infty (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(t-s)} ds.
\end{aligned}$$

根据伽马函数的定义，$\int_0^\infty (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(t-s)} ds < \infty$。类似地，我们得到 $\|w\|_1$ 估计。

□

引理 2.3. 在引理 2.1 的假设下，若 $T_{max} < \infty$，则 $\lim sup_{t \to T_{max}^+} (\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) = \infty$。

证明. 我们用反证法。假设存在 $C > 0$ 使得

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty, \|v(\cdot,t)\|_\infty \leqslant C \quad \text{for all} \quad t \in (0, T_{max}). \tag{2.6}$$

根据引理 2.1 中的半群形式解，我们有

$$\|\nabla w(\cdot,t)\|_\infty \leqslant \|e^{t(\Delta-\lambda)}\nabla w_0\|_\infty + \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)(\Delta-\lambda)}(\alpha u(\cdot,s) + \beta v(\cdot,s))\|_\infty ds$$

$$\leqslant \|\nabla w_0\|_\infty + (\alpha+\beta)C\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}(t-s)^{-\frac{1}{2}}ds$$

对所有 $t \in (0, T_{max})$ 均成立。因此我们有

$$\|\nabla w(\cdot,t)\|_\infty \leqslant \|\nabla w_0\|_\infty + (\alpha+\beta)CT_{max}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

同样地，我们得到

$$\|w(\cdot,t)\|_\infty \leqslant \|w_0\|_\infty + (\alpha+\beta)CT_{max}. \tag{2.8}$$

结合 (2.6)、(2.7)、(2.8) 和引理 2.2，若 T_{max} 有限，则 (1.3) 的解不可能在有限时间内爆破。这与引理 2.1 的爆破判据矛盾。□

引理 2.4. 在引理 2.1 的假设下，式 (1.4) 中定义的能量泛函满足以下性质：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u,v,w)(t) + \int_0^t D(s)ds \leqslant{}& (\alpha\chi+\beta\xi)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u(\cdot,t)+\beta v(\cdot,s))w(\cdot,s)dxds \\ &+ (\alpha\chi+\beta\xi)\int_0^t \mathcal{F}(u,v,w)(s)ds + \mathcal{F}(u_0,v_0,w_0),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}D(t) :={}& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} w_t^2(\cdot,t)dxdt + \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla u(\cdot,t)}{\sqrt{\chi(u(\cdot,t)+1)}} - \sqrt{\chi(u(\cdot,t)+1)}\right|^2 dx \\ &+ \frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla v(\cdot,t)}{\sqrt{\xi(v(\cdot,t)+1)}} - \sqrt{\xi(v(\cdot,t)+1)}\right|^2 dx\end{aligned}$$

对所有 $t \in (0, T_{max})$】【。

证明。为方便起见，将 $u(\cdot,t)$ $v(\cdot,t)$ $w(\cdot,t)$ 简记为 u, v, w。由于 (u,v,w) 是 (1.3) 的经典解，且由此可知 $(x+1)\log(x+1) \leqslant x^2+x$ 对于 $x>0$，$\mathcal{F}(u,v,w)(t)$ 有定义，并且在 $(0,T_{max})$ 上连续可微。因此，直接求导可得以下等式。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(u,v,w)(t) ={}& \int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla w_t + \lambda\int_{\mathbb{R}^N} ww_t dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u_t+\beta v_t)wdx - \int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w_t dx \\ &+ \frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N} u_t\log(u+1)dx + \frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N} u_t dx \\ &+ \frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N} v_t\log(v+1)dx + \frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N} v_t dx \\ ={}& \int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla w_t dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^N} ww_t dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w_t dx-\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u_t+\beta v_t)w dx\\
&+\frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N}u_t(\log(u+1)+1)dx+\frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N}v_t(\log(v+1)+1)dx.
\end{aligned}
$$

Put

$$
\begin{aligned}
I_1&:=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla w_t dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}ww_t dx-\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w_t dx,\\
I_2&:=-\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u_t+\beta v_t)w dx,\\
I_3&:=\frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N}u_t(\log(u+1)+1)dx+\frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N}v_t(\log(v+1)+1)dx.
\end{aligned}
$$

通过对 $\mathbb{R}^N$ 进行分部积分，我们有

$$
\begin{aligned}
I_1&=-\int_{\mathbb{R}^N}w_t\Delta w dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}ww_t dx-\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w_t dx\\
&=-\int_{\mathbb{R}^N}w_t\Delta w dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{\Delta w}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}w_t+\frac{\alpha}{\lambda}u+\frac{\beta}{\lambda}v\right)w_t dx-\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w_t dx\\
&=-\int_{\mathbb{R}^N}w_t^2 dx
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

and

$$
\begin{aligned}
I_2&:=-\alpha\int_{\mathbb{R}^N}u_t w dx-\beta\int_{\mathbb{R}^N}v_t w dx\\
&=\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla u dx-\alpha\chi\int_{\mathbb{R}^N}u|\nabla w|^2 dx+\beta\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla v dx-\beta\xi\int_{\mathbb{R}^N}v|\nabla w|^2 dx.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

将 $\frac{\alpha}{\chi}(\log(u+1)+1)$ 乘到 (1.3) 的第一个方程上，我们得到

$$
\frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N}(\log(u+1)+1)u_t dx=-\frac{\alpha}{\chi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{u+1}dx+\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u}{u+1}\nabla u\nabla w dx.
$$

类似地，将 $\frac{\beta}{\xi}(\log(v+1)+1)$ 乘以第二个方程 (1.3)，可得

$$
\frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N}(\log(v+1)+1)v_t dx=-\frac{\beta}{\xi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla v|^2}{v+1}dx+\beta\int_{\mathbb{R}^N}\frac{v}{v+1}\nabla v\nabla w dx.
$$

Thus

$$\begin{aligned} I_1+I_2+I_3=&-\frac{\alpha}{2\chi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{u+1}dx-\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla u}{\sqrt{\chi(u+1)}}-\sqrt{\chi(u+1)}\nabla w\right|^2dx\\ &-\frac{\alpha\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u|\nabla w|^2dx+\frac{\alpha\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx+\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u}{u+1}\nabla u\nabla w dx\\ &-\frac{\beta}{2\xi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla b|^2}{b+1}dx-\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla v}{\sqrt{\xi(v+1)}}-\sqrt{\xi(v+1)}\nabla w\right|^2dx\\ &-\frac{\beta\xi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v|\nabla w|^2dx+\frac{\beta\xi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx+\beta\int_{\mathbb{R}^N}\frac{v}{v+1}\nabla v\nabla w dx\\ &-\int_{\mathbb{R}^N}w_t^2dx. \end{aligned}\tag{2.11}$$

由杨氏不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \alpha\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u}{u+1}\nabla u\nabla w dx&\leqslant\frac{\alpha}{2\chi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{u+1}dx+\frac{\alpha\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u^2}{u+1}|\nabla w|^2dx\\ &\leqslant\frac{\alpha}{2\chi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u|^2}{u+1}dx+\frac{\alpha\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}u|\nabla w|^2dx \end{aligned}\tag{2.12}$$

and

$$\beta\int_{\mathbb{R}^N}\frac{v}{v+1}\nabla v\nabla w dx\leqslant\frac{\beta}{2\xi}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla v|^2}{v+1}dx+\frac{\beta\xi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v|\nabla w|^2dx.\tag{2.13}$$

将 (2.12)-(2.13) 代入 (2.11)，可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(u,v,w)(t)\leqslant&-\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla u}{\sqrt{\chi(u+1)}}-\sqrt{\chi(u+1)}\nabla w\right|^2dx\\ &-\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla v}{\sqrt{\xi(v+1)}}-\sqrt{\xi(v+1)}\nabla w\right|^2dx\\ &+\frac{\alpha\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx\ +\frac{\beta\xi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}w_t^2dx. \end{aligned}\tag{2.14}$$

根据 $\mathcal{F}(u,v,w)(t)$ 的定义，可得

$$\frac{\alpha\chi+\beta\xi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2dx\leqslant(\alpha\chi+\beta\xi)\mathcal{F}(u,v,w)(t)+(\alpha\chi+\beta\xi)\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w dx.\tag{2.15}$$

将 (2.15) 代入 (2.14)，并对时间进行积分，即得。

□

设 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$ 是一个非增截断函数，其中 $\eta=1$ 属于 $(-\infty,0]$，且 $\eta=0$ 属于 $[1,\infty)$。那么我们可以构造径向对称函数 ζ_R，使得

$$\zeta_R(x):=\eta(|x|-R)\quad\text{for}\quad R>0,\tag{2.16}$$

其中 $\text{supp}(\zeta_R)\subseteq\overline{B_{R+1}}$ 且 $\text{supp}(\nabla\zeta_R)\subseteq\overline{B_{R+1}}\backslash B_R$。

引理 2.5. 方程 (1.3) 的经典径向对称解 w 满足以下不等式，其中某个固定的 $r_0(t) \in [1,2]$:

如果 $r \in (0, r_0(t)]$, 则

$$w(r,t) \leqslant K + CKr^{1-N} \tag{2.17}$$

且如果 $r > r_0(t)$，那么

$$w(r,t) \leqslant K + CKr_0^{1-N}(t), \tag{2.18}$$

其中， C 表示一个依赖于 λ、 α、 β 的正常数。

证明。根据引理 2.2 和中值定理，对于 $r \in (0, r_0(t)]$,

$$w(r_0,t) \leqslant r_0^{N-1}(t) w(r_0(t),t) = \int_1^2 r^{N-1} w(r,t)dr \leqslant K.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} w(r,t) &= w(r_0(t),t) - \int_r^{r_0(t)} w_r(\rho,t)d\rho \\ &\leqslant K + \int_r^{r_0(t)} |w_r(\rho,t)|d\rho \\ &\leqslant K + r^{1-N} \int_r^{r_0(t)} \rho^{N-1}|w_r(\rho,t)|d\rho \\ &\leqslant K + CKr^{1-N}. \end{aligned}$$

此外，如果 $r > r_0(t)$，那么

$$\begin{aligned} w(r,t) &= w(r_0(t),t) - \int_r^{r_0(t)} w_r(\rho,t)d\rho \\ &\leqslant K + \int_{r_0(t)}^r |w_r(\rho,t)|d\rho \\ &\leqslant K + r_0^{1-N}(t) \int_{r_0(t)}^r \rho^{N-1}|w_r(\rho,t)|d\rho \\ &\leqslant K + CKr_0^{1-N}(t). \end{aligned}$$

□

引理 2.6. (1.3) 的经典径向对称解满足

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx \leqslant 3 \int_{B_2} |\nabla w|^2 dx + CK^2 + CK^{\frac{4}{N+4}} \|\Delta w - \lambda w + \alpha u + \beta v\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}},$$

其中 C 是某个正常数，取决于 λ、 α、 β、 N，适用于 $t \in (0, T_{max})$。

证明。令 $\zeta := \zeta_1$。根据引理 2.5，我们得到 $w(r,t) \leqslant CK$ 当 $r \geqslant 1$ 时。因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)wdx &= \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2(\alpha u+\beta v)wdx + \int_{\mathbb{R}^N}(1-\zeta^2)(\alpha u+\beta v)wdx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2(\alpha u+\beta v)wdx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}(\alpha u+\beta v)wdx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2(\alpha u+\beta v)wdx + CK\int_{\mathbb{R}^N}\alpha u+\beta v dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2(\alpha u+\beta v)wdx + CK^2.\end{aligned} \tag{2.19}$$

令 $f := -\Delta w + \lambda w - \alpha u - \beta v$。将此恒等式两边乘以 $\zeta^2 w$，然后对 $\mathbb{R}^N$ 积分，并利用 H¨older 不等式和杨氏不等式，我们得到。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2(\alpha u+\beta v)wdx &= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla(\zeta^2 w)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2 w^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2 f w dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2|\nabla w|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^N}\zeta w\nabla w\nabla zetadx + \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2 w^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2 f w dx\\ &\leqslant 2\int_{B_2}|\nabla w|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\zeta|^2 w^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2 w^2 dx + \|f\|_2\|\zeta w\|_2\\ &:= I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

由于 $supp\nabla\zeta \subseteq \overline{B_2}\setminus B_1$，我们得到

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\zeta|^2 w^2 dx \leqslant C_1 K^2,$$

其中 $C_1 = C^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\zeta|^2 dx$。

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式和杨氏不等式，我们得到

$$\begin{aligned}I_3 = \int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2 w^2 dx &\leqslant C\|\nabla(\zeta w)\|_2^{\frac{2N}{N+2}}\|\zeta w\|_1^{\frac{4}{N+2}}\\ &\leqslant \frac{1}{4}\|\nabla(\zeta w)\|_2^2 + C\|\zeta w\|_1^2\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\zeta\nabla w\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w\nabla\zeta\|_2^2 + C\|\zeta w\|_1^2\\ &\leqslant \frac{1}{2}\|\zeta\nabla w\|_2^2 + \frac{c_3}{2}K^2 + CK^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_4 = \|f\|_2\|\zeta w\|_2 &\leqslant C\|f\|_2\|\nabla(\zeta w)\|_2^{\frac{N}{N+2}}\|\zeta w\|_1^{\frac{2}{N+2}}\\ &\leqslant \frac{1}{4}\|\nabla(\zeta w)\|_2^2 + C\|f\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}}\|\zeta w\|_1^{\frac{4}{N+4}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\zeta^2|\nabla w|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\zeta|^2 w^2 dx + CK^{\frac{4}{N+4}}\|f\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}}.\end{aligned}$$

结合对 I_1, I_2, I_3, I_4 的估计与 (2.19)，即可得证。 □

引理 2。 7. 对于任意选择的 $r_0 \in (0,2)$，方程 (1.3) 的经典径向对称解满足

$$\int_{B_2\backslash B_{r_0}} |\nabla w|^2 dx \leqslant \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx + C(\epsilon) K^2 r_0^{1-N} + CK r_0^{\frac{1-N}{2}} \|w_t\|_2, \quad t \in (0, T_{max}),$$

其中， ϵ是一个足够小的正常数，C 是某个依赖于$\lambda, \alpha, \beta, \chi, \xi, N$的正常数。

证明。令 $f := -\Delta w + \lambda w - \alpha u - \beta v$ 且 $\zeta := \zeta_2$。将 $f := -\Delta w + \lambda w - \alpha u - \beta v$ 两边乘以 $\zeta^2 w^{\frac{1}{2}}$，然后对 $\mathbb{R}^N$ 积分，并使用杨氏不等式、(2.18) 和$supp(\nabla\zeta) \subset \overline{B_3}\backslash B_2$，得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 w^{-\frac{1}{2}} |\nabla w|^2 &= -2\int_{\mathbb{R}^N} \zeta w^{-\frac{1}{2}} \nabla w \nabla \zeta + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 (\alpha u + \beta v) w^{\frac{1}{2}} dx \\
&\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 w^{\frac{3}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 f w^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 w^{-\frac{1}{2}} |\nabla w|^2 dx + 4\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\zeta|^2 w^{\frac{3}{2}} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 (\alpha u + \beta v) w^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 |f| w^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leqslant \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 w^{-\frac{1}{2}} |\nabla w|^2 dx + 4CK^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 (\alpha u + \beta v) w^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 |f| w^{\frac{1}{2}} dx.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

另一方面，令 $x \in B_2\backslash B_{r_0}$，其中 $0 < r_0 < 2$。若 $0 < r_0 < 1$，则由 (2.17) 可得

$$\begin{aligned}
v(x,t) &\leqslant K + CK|x|^{1-N} \\
&\leqslant K r_0^{1-N} + CK r_0^{1-N} \\
&\leqslant CK r_0^{1-N}.
\end{aligned}$$

若 $1 \leqslant r_0 < 2$，则由 (2.18) 可得

$$\begin{aligned}
w(x,t) &\leqslant K + CK r_0^{1-N} \\
&\leqslant 2^{N-1} K r_0^{1-N} + CK r_0^{1-N} \\
&\leqslant CK r_0^{1-N}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $x \in B_2\backslash B_{r_0}$，我们有 $w(x,t) \leqslant CK r_0^{1-N}$。利用这一事实以及 $\zeta^2 = 1$ 在 B_2 上这一事实，我们得到

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \zeta^2 w^{-\frac{1}{2}} |\nabla w|^2 dx \geqslant \frac{1}{4} C^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} r_0^{\frac{N-1}{2}} \int_{B_2\backslash B_{r_0}} |\nabla w|^2 dx. \tag{2.21}$$

将（2.21）代入（2.20），我们得到

$$\int_{B_2\setminus B_{r_0}}|\nabla w|^2dx\leqslant CK^2r_0^{\frac{1-N}{2}}+CK^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1-N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w^{\frac{1}{2}}dx+CK^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1-N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|f|w^{\frac{1}{2}}dx. \tag{2.22}$$

由杨氏不等式可得。

$$\begin{aligned}CK^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1-N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w^{\frac{1}{2}}dx&\leqslant\epsilon\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)wdx+C(\epsilon)Kr_0^{1-N}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)dx\\&\leqslant\epsilon\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)wdx+C(\epsilon)K^2r_0^{1-N}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}CK^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1-N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|f|w^{\frac{1}{2}}dx&\leqslant CK^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1-N}{2}}\|f\|_2\|w^{\frac{1}{2}}\|_2\\&=CK^{\frac{1}{2}}r_0^{\frac{1-N}{2}}\|f\|_2\|w\|_1^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant CKr_0^{\frac{1-N}{2}}\|f\|_2.\end{aligned} \tag{2.24}$$

将（2.23）和（2.24）代入（2.22），并利用 $2^{\frac{1-N}{2}}\leqslant r_0^{\frac{1-N}{2}}$ 这一事实，即完成证明。

□

引理 2.8. 对于 $r_0\in(0,2)$ 和 $t\in(0,T_{max})$，方程 (1.3) 的经典径向对称解满足

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}}|\nabla w|^2dx\leqslant{}&C(N,\alpha,\beta,\chi,\xi,N)K+C(N)r_0\|\Delta w-\lambda w+\alpha u+\beta v\|_2^2\\&+C(\alpha,\chi,N)\sqrt{K}\left\|\frac{\nabla u}{\sqrt{\chi(u+1)}}-\sqrt{\chi(u+1)}\nabla w\right\|_2\\&+C(\beta,\xi,N)\sqrt{K}\left\|\frac{\nabla v}{\sqrt{\xi(v+1)}}-\sqrt{\xi(v+1)}\nabla w\right\|_2\\&+2\lambda\int_{B_2}w^2dx.\end{aligned}$$

证明。设

$$\begin{aligned}f\equiv f(r,t)&:=-\Delta w+\lambda w-\alpha u-\beta v,\\g_1\equiv g_1(r,t)&:=\frac{u_r}{\sqrt{\chi(u+1)}}-\sqrt{\chi(u+1)}w_r,\\g_2\equiv g_2(r,t)&:=\frac{v_r}{\sqrt{\xi(v+1)}}-\sqrt{\xi(v+1)}w_r.\end{aligned}$$

将下列方程两边同乘 $2r^{2N-2}w_r$,

$$r^{1-N}(r^{N-1}w_r)_r=-\alpha u-\beta v+\lambda w-f,$$

可得

$$\partial_r(r^{2N-2}w_r^2) = -2\alpha r^{2N-2}uw_r - 2\beta r^{2N-2}vw_r + 2\lambda r^{2N-2}ww_r - 2r^{2N-2}fw_r.$$

通过利用这一事实，即

$$\begin{aligned}\chi uw_r &= u_r - \chi w_r - \sqrt{\chi(u+1)}g_1,\\ \xi vw_r &= v_r - \xi w_r - \sqrt{\xi(v+1)}g_2,\end{aligned}$$

以及杨氏不等式，我们有

$$\begin{aligned}\partial_r(r^{2N-2}w_r^2) &= -\frac{2\alpha}{\chi}r^{2N-2}u_r + 2\alpha r^{2N-2}w_r + \frac{2\alpha}{\chi}r^{2N-2}\sqrt{\chi(u+1)}g_1\\ &\quad - \frac{2\beta}{\xi}r^{2N-2}v_r + 2\beta r^{2N-2}w_r + \frac{2\beta}{\xi}r^{2N-2}\sqrt{\xi(v+1)}g_2\\ &\quad + 2\lambda r^{2N-2}ww_r - 2r^{2N-2}fw_r\\ &\leqslant -\frac{2\alpha}{\chi}r^{2N-2}u_r + 2\alpha r^{2N-2}w_r + \frac{2\alpha}{\chi}r^{2N-2}\sqrt{\chi(u+1)}g_1\\ &\quad - \frac{2\beta}{\xi}r^{2N-2}v_r + 2\beta r^{2N-2}w_r + \frac{2\beta}{\xi}r^{2N-2}\sqrt{\xi(v+1)}g_2\\ &\quad + 2\lambda r^{2N-2}ww_r + (N-1)r^{2N-2}w_r^2 + \frac{1}{N-1}r^{2N-2}f^2.\end{aligned} \tag{2.25}$$

因此，由格朗沃尔不等式可得

$$\begin{aligned}r^{2N-2}w_r^2(r,t) \leqslant \int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\big[&-\frac{2\alpha}{\chi}\rho^{2N-2}u_r(\rho,t) + 2\alpha\rho^{2N-2}w_r(\rho,t)\\ &- \frac{2\beta}{\xi}\rho^{2N-2}v_r(\rho,t) + 2\beta\rho^{2N-2}w_r(\rho,t)\\ &+ \frac{2\alpha}{\chi}\rho^{2N-2}\sqrt{\chi(u(\rho,t)+1)}g_1(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}\rho^{2N-2}\sqrt{\xi(v(\rho,t)+1)}g_2(\rho,t)\\ &+ 2\lambda\rho^{2N-2}w(\rho,t)w_r(\rho,t) + \frac{1}{N-1}\rho^{2N-2}f^2(\rho,t)\big]d\rho.\end{aligned} \tag{2.26}$$

通过分部积分，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\big[-\frac{2\alpha}{\chi}\rho^{2N-2}u_r(\rho,t)+2\alpha\rho^{2N-2}w_r(\rho,t)\\
&\quad-\frac{2\beta}{\xi}\rho^{2N-2}v_r(\rho,t)+2\beta\rho^{2N-2}w_r(\rho,t)+2\lambda\rho^{2N-2}w(\rho,t)w_r(\rho,t)\big]d\rho\\
&=\big[e^{(N-1)(r-\rho)}(-\frac{2\alpha}{\chi}\rho^{2N-2}u(\rho,t)+2\alpha\rho^{2N-2}w(\rho,t)-\frac{2\beta}{\xi}\rho^{2N-2}v(\rho,t)\\
&\quad+2\beta\rho^{2N-2}w(\rho,t)+2\lambda\rho^{2N-2}w^2(\rho,t))\big]_0^r+(N-1)\int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\rho^{2N-3}(2-\rho)\\
&\quad\cdot\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t)-2\alpha w(\rho,t)+\frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)-2\beta w(\rho,t)-2\lambda\rho^{2N-2}w^2(\rho,t)\right]d\rho\\
&\leqslant 2\alpha r^{2N-2}w(r,t)+2\beta r^{2N-2}w(r,t)+2\lambda r^{2N-2}w^2(r,t)\\
&\quad+4(N-1)\int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\rho^{2N-3}\left(\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t)+\frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right)d\rho\\
&\leqslant 2\alpha r^{2N-2}w(r,t)+2\beta r^{2N-2}w(r,t)+2\lambda r^{2N-2}w^2(r,t)\\
&\quad+4(N-1)e^{2(N-1)}\int_0^r\rho^{2N-3}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t)+\frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]d\rho,
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

对 $r\in(0,2)$。此外，利用 H¨older 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\left(\frac{2\alpha}{\chi}\rho^{2N-2}\sqrt{\chi(u(\rho,t)+1)}g_1(\rho,t)\right)d\rho\\
&\quad\leqslant\frac{2\alpha}{\chi}r^{N-1}e^{2(N-1)}\int_0^r\rho^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{\chi(u(\rho,t)+1)}g_1(\rho,t)\rho^{\frac{N-1}{2}}d\rho\\
&\quad\leqslant\frac{2\alpha}{\chi}r^{N-1}e^{2(N-1)}\left[\int_0^r\chi\rho^{N-1}(u(\rho,t)+1)d\rho\right]^{\frac12}\cdot\left[\int_0^r\rho^{N-1}g_1^2(\rho,t)d\rho\right]^{\frac12}\\
&\quad\leqslant\frac{2\alpha}{\chi}r^{N-1}\sqrt{\chi}\left(\|u\|_1+\frac{2^N}{N}\right)^{\frac12}\cdot\left(\int_0^\infty\rho^{N-1}g_1^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac12}\\
&\quad\leqslant\frac{2\alpha}{\chi}r^{N-1}C(N)\sqrt{\chi}K^{\frac12}\left(\int_0^\infty\rho^{N-1}g_1^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac12},
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

对于 $r\in(0,2)$。由与 (2.28) 相同的论证可得

$$
\int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\left(\frac{2\beta}{\xi}\rho^{2N-2}\sqrt{\xi(v(\rho,t)+1)}g_2(\rho,t)\right)d\rho\leqslant\frac{2\beta}{\xi}r^{N-1}\sqrt{\xi}C(N)K^{\frac12}\left(\int_0^\infty\rho^{N-1}g_2^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac12}
\tag{2.29}
$$

and

$$
\frac{1}{N-1}\int_0^r e^{(N-1)(r-\rho)}\rho^{2N-2}f^2(\rho,t)d\rho\leqslant\frac{1}{N-1}e^{2(N-1)}r^{N-1}\int_0^r\rho^{N-1}f^2(\rho,t)d\rho,
\tag{2.30}
$$

对于 $r \in (0,2)$。将 (2.27) - (2.30) 代入 (2.26)，可得

$$\begin{aligned} r^{2N-2}w_r^2(r,t) \leqslant\ & 2\alpha r^{2N-2}w(r,t) + 2\beta r^{2N-2}w(r,t) + 2\lambda r^{2N-2}w^2(r,t) \\ & + 4(N-1)e^{2(N-1)}\int_0^r \rho^{2N-3}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]d\rho \\ & + \frac{2\alpha}{\sqrt{\chi}}r^{N-1}C(N)K^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \rho^{N-1}g_1^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{2\beta}{\sqrt{\xi}}r^{N-1}C(N)K^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \rho^{N-1}g_2^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{N-1}e^{2(N-1)}r^{N-1}\int_0^\infty \rho^{N-1}f^2(\rho,t)d\rho. \end{aligned} \tag{2.31}$$

将 (2.31) 乘以 r^{1-N}，并在 $r_0 \in (0,2)$ 上从 0 积分到 r_0，得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{r_0} \rho^{N-1}w_r^2(\rho,t)d\rho \\ & \leqslant 2\alpha\int_0^{r_0} \rho^{N-1}w(\rho,t)d\rho + 2\beta\int_0^{r_0} \rho^{N-1}w(\rho,t)d\rho + 2\lambda\int_0^{r_0} \rho^{N-1}w^2(\rho,t)d\rho \\ & \quad + 4(N-1)e^{2(N-1)}\int_0^{r_0} r^{1-N}\int_0^r \rho^{2N-3}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]d\rho dr \\ & \quad + \frac{2\alpha}{\sqrt{\chi}}C(N)K^{\frac{1}{2}}r_0\left(\int_0^\infty \rho^{N-1}g_1^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \frac{2\beta}{\sqrt{\xi}}C(N)K^{\frac{1}{2}}r_0\left(\int_0^\infty \rho^{N-1}g_2^2(\rho,t)d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \frac{1}{N-1}e^{2(N-1)}r_0\int_0^\infty \rho^{N-1}f^2(\rho,t)d\rho. \end{aligned} \tag{2.32}$$

根据富比尼定理，我们得到：

$$\begin{aligned} & 4(N-1)e^{2(N-1)}\int_0^{r_0} r^{1-N}\int_0^r \rho^{2N-3}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]d\rho dr \\ & = 4(N-1)e^{2(N-1)}\int_0^{r_0}\int_\rho^{r_0} r^{1-N}\rho^{2N-3}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]dr d\rho \\ & = \frac{4(N-1)e^{2(N-1)}}{N-2}\int_0^{r_0}(\rho^{2-N} - r_0^{2-N})\rho^{2N-3}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]d\rho \\ & \leqslant \frac{4(N-1)e^{2(N-1)}}{N-2}\int_0^{r_0}\rho^{N-1}\left[\frac{2\alpha}{\chi}u(\rho,t) + \frac{2\beta}{\xi}v(\rho,t)\right]d\rho \\ & \leqslant C(\alpha,\beta,\chi,\xi,N)K. \end{aligned} \tag{2.33}$$

因此，证明得证。 □

引理 2.9. 对于 $\theta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，(1.3) 的经典径向对称解满足

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u + \beta v)w dx \leqslant CK^2(\|f\|_2^{2\theta} + \|g_1\|_2 + \|g_2\|_2 + 1),\ for\ t \in (0, T_{max}),$$

其中，\(C\) 是一个依赖于 $\lambda, \alpha, \beta, \chi, \xi, N$ 的常数，且

$$\begin{aligned} f &= -\Delta w + \lambda w - \alpha u - \beta v, \\ g_1 &= \frac{\nabla u}{\sqrt{\chi(u+1)}} - \sqrt{\chi(u+1)}\nabla w, \\ g_2 &= \frac{\nabla v}{\sqrt{\xi(v+1)}} - \sqrt{\xi(v+1)}\nabla w. \end{aligned}$$

证明。令 $\alpha \in \left(0, \frac{2}{N-1}\right)$ 和 $r_0 \equiv r_0(t) := \min\{1, \|f\|_2^{-\alpha}\}$。由引理 2.7 和 2.8，并取$\epsilon = \frac{1}{12}$，可得

$$\begin{aligned} \int_{B_2} |\nabla w|^2 dx \leqslant \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx + CK^2 r_0^{1-N} + CK r_0^{\frac{1-N}{2}} \|f\|_2 \\ + CK + Cr_0\|f\|_2^2 + C\sqrt{K}\|g_1\|_2 + C\sqrt{K}\|g_2\|_2 + \int_{B_2} w^2 dx, \end{aligned} \tag{2.34}$$

其中 C 是某个正常数。利用 $W^{1,2}(B_2)$ 紧嵌入到 $L^2(B_2)$，且 $L^2(B_2)$ 连续嵌入到 $L^1(B_2)$ 这一性质应用 Ehrling 型引理，可得

$$\int_{B_2} w^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{B_2} |\nabla w|^2 dx + C\left(\int_{B_2} w dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{B_2} |\nabla w|^2 dx + CK^2, \tag{2.35}$$

其中 C 是某个正常数。将 (2.35) 代入 (2.34)，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{B_2} |\nabla w|^2 dx \leqslant \frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx + CK^2 r_0^{1-N} + CK r_0^{\frac{1-N}{2}} \|f\|_2 \\ + CK + Cr_0\|f\|_2^2 + C\sqrt{K}\|g_1\|_2 + C\sqrt{K}\|g_2\|_2 + CK^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

由引理 2.6，可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx \leqslant 3\int_{B_2} |\nabla w|^2 dx + CK^2 + CK^{\frac{4}{N+4}} \|f\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}}. \tag{2.37}$$

将 (2.36) 代入 (2.37)，得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx \leqslant 6CK^2 r_0^{1-N} + 6CK + 6CK^2 + CK^2 \\ + 6CK r_0^{\frac{1-N}{2}} \|f\|_2 + 6Cr_0\|f\|_2^2 + CK^{\frac{4}{N+4}} \|f\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}} \\ + 6C\sqrt{K}\|g_1\|_2 + 6C\sqrt{K}\|g_2\|_2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

若 $\|f\|_2 > 1$对于 $t \in (0, T_{max})$ 成立，则 $r_0 = \|f\|_2^{-\alpha}$。因此我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v) w dx \leqslant 6CK^2 \|f\|_2^{\alpha(N-1)} + 6CK + 6CK^2 + CK^2 \\ + 6CK\|f\|_2^{1+\frac{\alpha(N-1)}{2}} + 6C\|f\|_2^{2-\alpha} + CK^{\frac{4}{N+4}} \|f\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}} \\ + 6C\sqrt{K}\|g_1\|_2 + 6C\sqrt{K}\|g_2\|_2. \end{aligned} \tag{2.39}$$

令 $\theta := max\{\frac{\alpha}{(N-1)2}, \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{(N-1)4}, \frac{2-\alpha}{2}, \frac{N+2}{N+4}\}$。由于 $\alpha \in \left(0, \frac{2}{N-1}\right)$, $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 因此对 (2.39) 中的项 $\|f\|_2$ 应用杨氏不等式，并利用事实 $K > 1$，我们有

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w dx \leqslant CK^2(\|f\|_2^{2\theta}+1+\|g_1\|_2+\|g_2\|_2), \tag{2.40}$$

其中 C 是某个正常数。

若 $\|f\|_2 \leqslant 1$，则 $r_0(t) = 1$。因此，由（2.38）可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w dx \leqslant & 6CK^2+6CK+6CK^2+CK^2\\ &+6CK\|f\|_2+6C\|f\|_2^2+CK^{\frac{4}{N+4}}\|f\|_2^{\frac{2N+4}{N+4}}\\ &+6C\sqrt{K}\|g_1\|_2+6C\sqrt{K}\|g_2\|_2.\end{aligned}$$

通过与（2.40）相同的论证，可得

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w dx \leqslant CK^2(\|f\|_2^{2\theta}+1+\|g_1\|_2+\|g_2\|_2).$$

证明至此完成。

□

接下来，我们将介绍 Gronwall 型不等式。

引理 2.10（ [16]）。设 $a > 0$、$b > 0$和 $\kappa > 1$ ，并且对于某个 $T > 0$，非负函数 $y \in C^0([0,T])$满足

$$y(t) \geqslant a + b\int_0^t y^\kappa(s)ds \quad for\ all \quad t \in (0,T).$$

Then

$$T \leqslant \frac{1}{(\kappa-1)a^{\kappa-1}b}.$$

现在我们利用前面的引理证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明

我们将简写能量函数，例如 $\mathcal{F}(u,v,w)(t) := \mathcal{F}(t)$ $\mathcal{F}(u_0,v_0,w_0) := \mathcal{F}(0)$。由 $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$、引理 2.9 和杨氏不等式，对于 $t \in (0, T_{max})$，我们有：

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u+\beta v)w dx \leqslant C_1K^2(D^\theta(t)+1) \leqslant \frac{1}{2(\alpha\chi+\beta\xi)}D(t)+C_2K^{\frac{2}{1-\theta}}, \tag{2.41}$$

其中， C_1, C_2 是某个正常数，该常数依赖于 $\lambda, \alpha, \beta, \chi, \xi, N, \theta$。

假设 $\mathcal{F}(0) \leqslant -C_3K^{\frac{2}{1-\theta}}$，其中 C_3 满足

$$C_3 > \max\left\{2C_1+(\alpha\chi+\beta\xi)C_2, (\alpha\chi+\beta\xi)C_2+\left(\frac{2\theta}{1-\theta}2^{\frac{\theta+1}{\theta}}C_1^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}\right\}. \tag{2.42}$$

为了证明 $T_{max} \leqslant 1$，我们将采用反证法。若结论不成立，即 $T_{max} > 1$，并令

$$t_0 := \sup\{\tilde{t} \in (0,1) | \mathcal{F}(t) < -2C_1K^2 \quad \text{for} \quad \forall t \in (0,\tilde{t})\}.$$

t_0 由于$\frac{2}{1-\theta} > 2$、 $K > 1$ 以及 $\mathcal{F}(t)$的连续性而有定义，因此我们可得

$$\mathcal{F}(0) < -(2C_1 + (\alpha\chi + \beta\xi)C_2)K^{\frac{2}{1-\theta}} < -2C_1K^{\frac{2}{1-\theta}} < -2C_1K^2.$$

根据 t_0的定义， $t_0 = 1$。事实上，若 $t_0 < 1$，则有

$$\mathcal{F}(t) < -2C_1K^2 \quad \text{for all} \quad t \in (0,t_0), \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(t_0) = -2C_1K^2. \tag{2.43}$$

由于 $T_{max} > 1$ 、引理 2.4和(2.41)，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &\leqslant -\int_0^t D(s)ds + \mathcal{F}(0) + (\alpha\chi + \beta\xi)\int_0^t \mathcal{F}(s)ds \\ &\quad + (\alpha\chi + \beta\xi)\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v)w dx ds \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\int_0^t D(s)ds + \mathcal{F}(0) + (\alpha\chi + \beta\xi)C_2K^{\frac{2}{1-\theta}},\end{aligned} \tag{2.44}$$

对于 $t \in (0,t_0]$。因此，由(2.43)和(2.42)，我们得到

$$-2C_1K^2 = \mathcal{F}(t_0) \leqslant \mathcal{F}(0) + (\alpha\chi + \beta\xi)C_2K^{\frac{2}{1-\theta}} < (-C_3 + (\alpha\chi + \beta\xi)C_2)K^{\frac{2}{1-\theta}} < -2C_1K^{\frac{2}{1-\theta}} < -2C_1K^2.$$

这就产生了矛盾。因此， $t_0 = 1$。

另一方面，由(2.41)可得

$$\mathcal{F}(t) \geqslant -\int_{\mathbb{R}^N} (\alpha u + \beta v)w dx \geqslant -C_1K^2(D^\theta(t) + 1)$$

对于 $t \in (0,t_0)$。然后由 (2.43),

$$D(t) \geqslant \left(\frac{-\mathcal{F}(t)}{C_1K^2} - 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \geqslant \left(\frac{-\mathcal{F}(t)}{2C_1K^2}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{2.45}$$

对于 $t \in (0,t_0)$。

根据 (2.44)、(2.45) 和 (2.42)， $\mathcal{F}(t)$ 满足

$$\begin{aligned}-\mathcal{F}(t) &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{-\mathcal{F}(s)}{2C_1K^2}\right)^{\frac{1}{\theta}} ds - \mathcal{F}(0) - (\alpha\chi + \beta\xi)C_2K^{\frac{2}{1-\theta}} \\ &= 2^{-\frac{\theta+1}{\theta}} C_1^{-\frac{1}{\theta}} K^{-\frac{2}{\theta}} \int_0^t (-\mathcal{F}(s))^{\frac{1}{\theta}} ds - \mathcal{F}(0) - (\alpha\chi + \beta\xi)C_2K^{\frac{2}{1-\theta}} \\ &\geqslant 2^{-\frac{\theta+1}{\theta}} C_1^{-\frac{1}{\theta}} K^{-\frac{2}{\theta}} \int_0^t (-\mathcal{F}(s))^{\frac{1}{\theta}} ds + (C_3 - (\alpha\chi + \beta\xi)C_2)K^{\frac{2}{1-\theta}} \\ &\geqslant 2^{-\frac{\theta+1}{\theta}} C_1^{-\frac{1}{\theta}} K^{-\frac{2}{\theta}} \int_0^t (-\mathcal{F}(s))^{\frac{1}{\theta}} ds + \left(\frac{2\theta}{1-\theta} 2^{\frac{\theta+1}{\theta}} C_1^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} K^{\frac{2}{1-\theta}}\end{aligned} \tag{2.46}$$

for $t \in (0, t_0)$。结合 (2.46) 和引理 2.10， t_0 必须满足以下不等式

$$t_0 \leqslant \frac{1}{(\frac{1-\theta}{\theta})\left(\left(\frac{2\theta}{1-\theta}2^{\frac{\theta+1}{\theta}}C_1^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}}K^{\frac{2}{1-\theta}}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}2^{-\frac{\theta+1}{\theta}}C_1^{-\frac{1}{\theta}}K^{-\frac{2}{\theta}}} = \frac{1}{2}.$$

这与 $t_0 = 1$ 矛盾，因此， $T_{max} > 1$ 是错误的。证毕。

□

最后，我们将证明推论 1.1。

推论 1.1 的证明

固定 $(r_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$，使得 $r_j \to 0$ 当 $j \to 0$，并令

$$\varphi(\epsilon) := \int_0^1 \rho^{N-1}(\rho^2+\epsilon)^{-\frac{N}{2}}d\rho \quad \text{for} \quad \epsilon > 0. \tag{2.47}$$

然后，根据单调收敛定理，我们有 $\varphi(\epsilon) \to \infty$ as $\epsilon \to 0$。因此，我们可以固定一个足够小的 $\eta_j \in (0,1)$，使得

$$r_j^N \varphi(\frac{\eta_j}{r_j^2}) \geqslant j \quad \text{for all} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.48}$$

接下来，任取 $\kappa \in \left(N - \frac{N}{p}, \frac{N-2}{2}\right)$，并令

$$u_{0j} = \begin{cases} a_j(r^2+\eta_j)^{-\frac{N-\kappa}{2}}, & \text{if } r \in [0, r_j], \\ u_0(r), & \text{if } r > r_j, \end{cases}$$

$$v_{0j} = \begin{cases} b_j(r^2+\eta_j)^{-\frac{N-\kappa}{2}}, & \text{if } r \in [0, r_j], \\ v_0(r), & \text{if } r > r_j, \end{cases}$$

$$w_{0j} = \begin{cases} c_j(r^2+\eta_j)^{-\frac{\kappa}{2}}, & \text{if } r \in [0, r_j], \\ w_0(r), & \text{if } r > r_j, \end{cases}$$

其中 $a_j := (r_j^2+\eta_j)^{\frac{N-\kappa}{2}}u_0(r_j)$ $b_j := (r_j^2+\eta_j)^{\frac{N-\kappa}{2}}v_0(r_j)$，且 $c_j := (r_j^2+\eta_j)^{\frac{\kappa}{2}}w_0(r_j)$。于是，对于 $p \in \left[1, \frac{2N}{N+2}\right]$，利用事实 $|r_j^2+\eta_j| \leqslant 2$，可得

$$\begin{aligned} \|u_{0j}\|_{L^p(B_{r_j})}^p &= |\partial B_1| \int_0^{r_j} r^{N-1}a_j^p(r^2+\eta_j)^{-\frac{p(N-\kappa)}{2}}dr \\ &= |\partial B_1|u_{0j}^p(r_j)\int_0^{r_j} r^{N-1}\left(\frac{r_j^2+\eta_j}{r^2+\eta_j}\right)^{\frac{p(N-\kappa)}{2}}dr \\ &\leqslant |\partial B_1|u_{0j}^p(r_j)2^{\frac{p(N-\kappa)}{2}}\int_0^{r_j} r^{N-1-p(N-\kappa)}dr \\ &= \frac{\leqslant |\partial B_1|u_{0j}^p(r_j)2^{\frac{p(N-\kappa)}{2}}}{N-p(N-\kappa)}r_j^{N-p(N-\kappa)}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

由于 $\kappa > N - \frac{N}{p}$，我们有 $\|u_{0j}\|_{L^p(B_{r_j})} \to 0$，当 $j \to \infty$ 时。因此

$$\|u_{0,j} - u_0\|_p = \|u_{0,j} - u_0\|_{L^p(B_{r_j})} \leqslant \|u_{0j}\|_{L^p(B_{r_j})} + \|u_0\|_\infty |B_{r_j}|^{\frac{1}{p}}$$

因此，当 $j \to \infty$ 时，$u_{0j} \to u_0$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^N)$。类似地，当 $j \to \infty$ 时，$v_{0j} \to v_0$ 属于 $L^p(\mathbb{R}^N)$。

对于 $r \in [0, r_j]$，我们可以得到 $w'_{0j}(r) = -\kappa c_j r(r^2 + \eta_j)^{-\frac{\kappa+2}{2}}$。因此

$$\begin{aligned}
\|\nabla w_{0j}\|^2_{L^2(B_{r_j})} &= |\partial B_1| \kappa^2 c_j^2 \int_0^{r_j} r^{N+1}(r^2 + \eta_j)^{-(\kappa+2)} dr \\
&\leqslant |\partial B_1| \kappa^2 2^\kappa \|w_0\|^2_\infty \int_0^{r_j} r^{N+1-2(\kappa+2)} dr \\
&= \frac{|\partial B_1| \kappa^2 2^\kappa \|w_0\|^2_\infty}{N + 2 - 2(\kappa+2)} r_j^{N+2-2(\kappa+2)}.
\end{aligned}$$

由于 $\kappa < \frac{N-2}{2}$，我们得到 $N + 2 - 2(\kappa + 2) > 0$。因此，当 $j \to \infty$ 时，$\|\nabla w_{0j}\|_{L^2(B_{r_j})} \to 0$。类似地，当 $j \to \infty$ 时，$\|w_{0j}\|_{L^2(B_{r_j})} \to 0$。因此，

$$\|w_{0j} - w_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|w_{0j} - w_0\|_{H^1(B_{r_j})} \leqslant \|w_{0j}\|_{H^1(B_{r_j})} + C\|w_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} |B_{r_j}|^{\frac{1}{2}},$$

其中 C 是一个常数，其取值取决于 N。因此可得

$$w_{0j} \to w_0 \quad \text{in} \quad H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{as} \quad j \to \infty. \tag{2.50}$$

由于 $L^2(B_{r_j})$ 连续嵌入到 $L^1(B_{r_j})$ 中，当 $j \to \infty$ 时，$\|w_{0j}\|_{W^{1,1}(B_{r_j})} \to 0$ a nd

$$\begin{aligned}
\|w_{0j} - w_0\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^N)} &= \|w_{0j} - w_0\|_{W^{1,1}(B_{r_j})} \\
&\leqslant \|w_{0j}\|_{W^{1,1}(B_{r_j})} + C\|w_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} |B_{r_j}|,
\end{aligned}$$

其中 C 是一个取决于 N 的某个常数。因此我们得到

$$w_{0j} \to w_0 \quad \text{in} \quad W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \quad \text{as} \quad j \to \infty.$$

我们注意到，根据洛必达法则，$\sup_{\epsilon>0} \frac{\epsilon}{\log(\epsilon+1)\epsilon^p} < \infty$ 适用于 $p \in \left(1, \frac{2N}{N+2}\right)$，且 $\sup_{\epsilon>0} \frac{\log(\epsilon+1)\epsilon}{\epsilon} < \infty$。由于 (u_{0j}, v_{0j}) 在 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 中收敛，适用于 $p \in \left[1, \frac{2N}{N+2}\right)$，

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_{0j} + 1)\log(u_{0j} + 1)dx \text{ and } \int_{\mathbb{R}^N} (v_{0j} + 1)\log(v_{0j} + 1)dx < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

此外，由（2.50）可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{0j}|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} w_{0j}^2 dx < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sup_{j\in\mathbb{N}} \Big\{ &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{0j}|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w_{0j}^2 dx \\
&+ \frac{\alpha}{\chi} \int_{\mathbb{R}^N} (u_{0j} + 1)\log(u_{0j} + 1)dx + \frac{\beta}{\xi} \int_{\mathbb{R}^N} (v_{0j} + 1)\log(v_{0j} + 1)dx \Big\} < \infty.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

另一方面，由（2.48）可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u_{0j}+\beta v_{0j})w_{0j}dx &\geqslant \int_{B_{r_j}}(\alpha u_{0j}+\beta v_{0j})w_{0j}dx\\ &=|\partial B_1|(\alpha a_j c_j+\beta b_j c_j)\int_0^{r_j} r^{N-1}(r^2+\eta_j)^{-\frac{N}{2}}dr\\ &=|\partial B_1|(\alpha a_j c_j+\beta b_j c_j)\int_0^{1} r_j^N\rho^{N-1}(r_j^2\rho^2+\eta_j)^{-\frac{N}{2}}d\rho\\ &=|\partial B_1|(\alpha a_j c_j+\beta b_j c_j)\int_0^{1} \rho^{N-1}\left(\rho^2+\frac{\eta_j}{r_j^2}\right)^{-\frac{N}{2}}d\rho\\ &=|\partial B_1|(\alpha a_j c_j+\beta b_j c_j)\varphi(\frac{\eta_j}{r_j^2})\\ &=|\partial B_1|(\alpha u_0(r_j)+\beta v_0(r_j))(r_j^2+\eta_j)^{\frac{N}{2}}w_{0j}(r_j)\varphi(\frac{\eta_j}{r_j^2})\\ &\geqslant j|\partial B_1|(\alpha u_0(r_j)+\beta v_0(r_j))w_{0j}(r_j),\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\alpha u_{0j}+\beta v_{0j})w_{0j}dx\to\infty \quad \text{as} \quad j\to\infty. \tag{2.52}$$

结合（2.52）和（2.51），可得

$$\mathcal{F}(u_{0j},v_{0j},w_{0j})\to-\infty \quad \text{as} \quad j\to\infty.$$

Put

$$K_j:=\|u_{0j}\|_1+\|v_{0j}\|_1+\|w_{0j}\|_1+\|\nabla w_{0j}\|_1+1.$$

由于当 $p\in\left[1,\frac{2N}{N+2}\right)$趋于 $j\to\infty$时，$(u_{0j},v_{0j})\to(u_0,v_0)$于 $L^p(\mathbb{R}^N)$中，且 $w_{0j}\to w_0$在 $H^1(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$中当 $j\to\infty$时，我们有

$$K_j\to K:=\|u_0\|_1+\|v_0\|_1+\|w_0\|_1+\|\nabla w_0\|_1+1, \quad \text{as} \quad j\to\infty.$$

因此， K_j 有界，从而存在正整数 M 使得

$$\mathcal{F}(u_{0j},v_{0j},w_{0j})\leqslant -CK_j^{\frac{2}{1-\theta}} \quad \forall j>M,$$

其中， C是一个依赖于 λ、 α、 β、 χ、 ξ、 N、 $\theta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$的正常数。若将 j替换为$j-M$，则与（u_{0j}、 v_{0j}、 w_{0j}）对应的经典径向对称解（u_j、 v_j、 w_j）会在有限时间内爆破，且满足$T_{max,j}\leqslant 1$，其中 $\forall j\in\mathbb{N}$。

□

References

[1] D. Horstmann, *Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions*, 《欧洲数学杂志》12（2001）159–177。[2] D. Horstmann, *On the existence of radially symmetric blow-up solutions for the Keller–Segel model*, 《数学生物学杂志》44（2002）463–478。[3] T. Hillen、K. Painter、M. Winkler, *Global solvability and explicit bounds for non-local adhesion models*, 《欧洲数学杂志》29（2018）645–684。[4] L. Hong、J. Wang、H. Yu、Y. Zhang, *Critical mass for a two-species chemotaxis model with two chemicals in* $\mathbb{R}^2$, 《非线性》32（2019）4762–4778。[5] O. A. Ladyzenskaja、V. A. Solonnikov、N. N. Ural's ceva, *Linear and Quasi-linear Equation of Parabolic Type*, 美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1968。[6] Y. Li、Y. Li, *Finite-time blow-up in higher dimensional fully-parabolic chemotaixs system for two species*, 《非线性分析》109（2014）72–84。[7] N. Mizoguchi, *Global existence for the Cauchy problem of the parabolic-parabolic Keller-Segel system on the plane* **48** 2013 491 505 , 《变分法与偏微分方程》（）-。[8] T. Nagai、T. Senba、K. Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis* **40** 1997 411 433 , 《泛函方程》，（），-。[9] T. Nagai、R. Syukuinn、M. Umesako, *Decay Properties and Asymptotic Profiles of Bounded Solutions to a Parabolic System of Chemotaxis in* $\mathbb{R}^N$ **46** 2003 383 407 , 《泛函方程》，（），-。[10] T. Nagai、T. Yamada, *Large time behavior of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in the whole space* **336** 2007 704 726 , 《数学分析与应用杂志》（）-。[11] T. Nagai、T. Ogawa, *BREZIS-MERLE INEQUALITIES AND APPLICATION TO THE GLOBAL EXISTENCE OF THE CAUCHY PROBELM OF THE KELLER-SEGEL SYSTEM*, 《当代数学通讯》13（2011）795–812。[12] T. Nagai、Y. Seki、T. Yamada, *Global existence of solutions to a parabolic attraction-repulsion chemotaxis system in* $\mathbb{R}^2$ *: the attractive dominant case* **62** 2021 103357 , 《非线性分析：现实世界应用》，（），。[13] R. Shi、W. Wang, *Well-posedness for a model derived from an attraction-repulsion chemotaxis system*, 《数学分析与应用杂志》423（2015）497–520。[14] R. Shi、G. You, *Global existence of solutions to the Cauchy problem of a two dimensional attraction-repulsion chemotaxis system* **57** 2021 103185 , 《非线性分析：现实世界应用》（）。[15] M. Winkler, *Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system*, 《纯粹与应用数学杂志》100（2013）748–467。[16] M. Winkler, *Single-point blow-up in the Cauchy problem for the higher-dimensional Keller-Segel system*, 《非线性》33（2020）5007–5048。[17] H. Yu、W. Wang、S. Zheng, *Criteria on global boundedness versus finitie time blow-up to a two species chemotaixs system with two chemicals* **31** 2018 502 514 , 《非线性》（）-。[18] Q. Zhang、Y. Li, *Global existence and asymptotic properties of the solution to a two-species chemotaxis system*, 《数学分析与应用杂志》418（2014）47–63。[19] J. Zhao、C. Mu、L. Wang、D. Zhou, *Blow up and Bounded Solutions in a Two-Species Chemotaxis System in Two Dimensional Domains* **153** 2018 197 220 , 《应用数学学报》，（）–。

Department of Mathematics, and Institute of Pure and Applied Mathematics, Jeonbuk National University, Jeonju 54896, Republic of Korea*Email address*: †tgha@jbnu.ac.kr, ‡dccddc8097@naver.com